חשבון אינפי 2-20152

דף תרגילים נוספים מס' 11.

אינטגרל משטחי מסוג ראשון ומסוג שני.

פתרונות ותשובות

1. חשב את האינטגרל $\iint\limits_{\sigma}(x+y+z)\,dS$, כאשר $\sigma: x^2+y^2+z^2=a^2,\ z\ge 0$.

נרשום את משוואת מעטפת הכדור (חלק עליון) בצורה פרמטרית בעזרת קואורדינטות כדוריות:

$$\begin{cases} x=a\sin\varphi\cos\theta \\ y=a\sin\varphi\sin\theta \\ z=a\cos\varphi \end{cases}$$ אז $\frac{\partial\overline{r}}{\partial\varphi}=\left(a\cos\varphi\cos\theta, a\cos\varphi\sin\theta, -a\sin\varphi\right)$ ו-

$\frac{\partial\overline{r}}{\partial\theta}=\left(-a\sin\varphi\sin\theta, a\sin\varphi\cos\theta, 0\right)$. נמצא את המכפלה הווקטורית של שני הווקטורים:

$$\frac{\partial\overline{r}}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\overline{r}}{\partial\theta}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a\cos\varphi\cos\theta & a\cos\varphi\sin\theta & -a\sin\varphi \\ -a\sin\varphi\sin\theta & a\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=a^2\sin^2\varphi\cos\theta\overline{i}+a^2\sin^2\varphi\sin\theta\overline{j}+a^2\sin\varphi\cos\varphi\overline{k}$$

$$,\left\|\frac{\partial\overline{r}}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\overline{r}}{\partial\theta}\right\|=a^2\sqrt{\sin^4\varphi\cos^2\theta+\sin^4\varphi\sin^2\theta+\sin^2\varphi\cos^2\varphi}=a^2\sin\varphi$$

$$\iint\limits_{\sigma}(x+y+z)\,dS=\iint\limits_{D}\left(x(\varphi,\theta)+y(\varphi,\theta)+z(\varphi,\theta)\right)\left\|\frac{\partial\overline{r}}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\overline{r}}{\partial\theta}\right\|d\varphi d\theta=$$

$$=\iint\limits_{D}\left(a\sin\varphi\cos\theta+a\sin\varphi\sin\theta+a\cos\varphi\right)a^2\sin\varphi d\varphi d\theta=$$

$$=\iint\limits_{D}\left(a^3\sin^2\varphi\cos\theta+a^3\sin^2\varphi\sin\theta+a^3\cos\varphi\sin\varphi\right)d\varphi d\theta=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}a^3\sin^2\varphi\cos\theta d\theta\right)d\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}a^3\sin^2\varphi\sin\theta d\theta\right)d\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}a^3\sin\varphi\cos\varphi d\theta\right)d\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}a^3\sin\varphi\cos\varphi d\theta\right)d\varphi=2\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi=\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d\varphi=$$

$$=\pi a^3\left(-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi a^3$$

2. חשב את האינטגרל $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+y^2\right)dS$, כאשר σ הוא שפת הגוף $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$.

שפת הגוף מרכבת משני המשטחים: σ_1 - מעטפת החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ו- σ_2 - $z=1$, לכן

$$\iint_{\sigma}\left(x^2+y^2\right)dS=\iint_{\sigma_1}\left(x^2+y^2\right)dS+\iint_{\sigma_2}\left(x^2+y^2\right)dS.$$

לפי ההצגה $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ו- $z_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ואז

$$\sqrt{\left(z_x\right)^2+\left(z_y\right)^2+1}=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1}=\sqrt{2}.$$

$$\iint_{\sigma_1}\left(x^2+y^2\right)dS=\iint_{D}\left(x^2+y^2\right)\sqrt{2}dxdy=\iint_{D'}\rho^2\sqrt{2}\rho d\rho d\theta=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\rho^3 d\rho\right)d\theta=$$

$$=2\sqrt{2}\pi\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^1=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

כאן D הוא ההיטל של המשטח σ_1 על המישור xOy, זאת אומרת העיגול $x^2+y^2\le 1$. D' הוא המלבן במישור $\rho O\theta$ (בקואורדינטות קוטביות).

המשטח $z=1$ מקביל למישור xOy לכן

$$\iint_{\sigma_2}\left(x^2+y^2\right)dS=\iint_{D}\left(x^2+y^2\right)dxdy=\iint_{D'}\rho^2\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\rho^3 d\rho\right)d\theta=\frac{\pi}{2},$$

התשובה הסופית היא $\iint_{\sigma}\left(x^2+y^2\right)dS=\dfrac{\pi}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)$.

3. חשב את האינטגרל $\iint_S z^2\,dS$ כאשר S חלק החרוט $x=\rho\cos\varphi\sin\alpha, y=\rho\sin\varphi\sin\alpha, z=\rho\cos\alpha$, $0\le\rho\le a, 0\le\varphi\le 2\pi$ ו- α קבוע $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

נרשום את משטח בצורה פרמטרית: $\overline{r}=\left(\rho\cos\varphi\sin\alpha,\rho\sin\varphi\sin\alpha,\rho\cos\alpha\right)$ ונחשב את הנגזרות החלקיות לפי הפרמטרים ρ ו- φ. $\dfrac{\partial\overline{r}}{\partial\rho}=\left(\cos\varphi\sin\alpha,\sin\varphi\sin\alpha,\cos\alpha\right)$ ו- $\dfrac{\partial\overline{r}}{\partial\varphi}=\left(-\rho\sin\varphi\sin\alpha,\rho\cos\varphi\sin\alpha,0\right)$ אז

$$\frac{\partial\overline{r}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\overline{r}}{\partial\varphi}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \cos\varphi\sin\alpha & \sin\varphi\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\rho\sin\varphi\sin\alpha & \rho\cos\varphi\sin\alpha & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\left(-\rho\cos\varphi\cos\alpha\sin\alpha,-\rho\sin\varphi\cos\alpha\sin\alpha,\rho\sin^2\alpha\right)$$

$$\left\|\frac{\partial\overline{r}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\overline{r}}{\partial\varphi}\right\|=\rho\sqrt{\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}=\rho\sin\alpha,$$

$$\iint_S z^2\,dS=\iint_D\rho^2\cos^2\alpha\cdot\rho\sin\alpha\,d\varphi d\rho=\cos^2\alpha\sin\alpha\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a\rho^3 d\rho\right)d\varphi=$$

$$=2\pi\cos^2\alpha\sin\alpha\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^a=\frac{\pi a^4\cos^2\alpha\sin\alpha}{2}$$

4. חשב את האינטגרל $\iint\limits_S z\,dS$ כאשר $x=u\cos v, y=u\sin v, z=v$, $0<u<a, 0<v<2\pi$.

המשטח מוגדר בצורה פרמטרית $\bar{r}=(u\cos v, u\sin v, v)$ כאשר $0<u<a, 0<v<2\pi$. נמצא את הנגזרות החלקיות של $\bar{r}$ לפי u ו- v ואת המכפלה הווקטורית שלהן. $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}=(\cos v, \sin v, 0)$ ו-

$\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}=(-u\sin v, u\cos v, 1)$, אז $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{vmatrix}=\sin v\bar{i}-\cos v\bar{j}+u\bar{k}$.

$\left\|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right\|=\sqrt{\sin^2 v+\cos^2 v+u^2}=\sqrt{1+u^2}$.

$$\iint\limits_S z\,dS=\iint\limits_D v\sqrt{1+u^2}\,du\,dv=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a v\sqrt{1+u^2}\,du\right)dv=\int_0^{2\pi} v\,dv\int_0^a\sqrt{1+u^2}\,du=2\pi^2\int_0^a\sqrt{1+u^2}\,du.$$

נחשב את $\int_0^a\sqrt{1+u^2}\,du$ על ידי אינטגרציה בחלקים, אז

$$\int_0^a\sqrt{1+u^2}\,du=\begin{vmatrix} u_1=\sqrt{1+u^2} & du_1=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \\ dv_1=du & v_1=u \end{vmatrix}=u\sqrt{1+u^2}\Big|_0^a-\int_0^a\frac{u^2du}{\sqrt{1+u^2}}=$$

$$=a\sqrt{1+a^2}-\int_0^a\frac{(u^2+1-1)du}{\sqrt{1+u^2}}=a\sqrt{1+a^2}-\int_0^a\sqrt{1+u^2}\,du+\int_0^a\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=$$

$$=a\sqrt{1+a^2}+\ln\left|u+\sqrt{u^2+1}\right|\Big|_0^a-\int_0^a\sqrt{1+u^2}\,du=a\sqrt{1+a^2}+\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)-\int_0^a\sqrt{1+u^2}\,du$$

לכן $\int_0^a\sqrt{1+u^2}\,du=\frac{1}{2}\left(a\sqrt{1+a^2}+\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right)$ והתשובה הסופית היא

$$\iint\limits_S z\,dS=\pi^2\left(a\sqrt{1+a^2}+\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right)$$

5. חשב את האינטגרל $\iint\limits_\sigma xdydz+ydxdz+zdxdy$ כאשר σ הוא מעטפת הכדור $x^2+y^2+z^2=a^2$ בעל נורמל חיצוני.

נתונה ספירה $x^2+y^2+z^2=a^2$. נציג אותה בצורה פרמטרית:

$x=a\cos\theta\sin\varphi, y=a\sin\theta\sin\varphi, z=a\cos\varphi$. אז

$\vec{r}_\varphi=(a\cos\theta\cos\varphi, a\sin\theta\cos\varphi, -a\sin\varphi)$ ו- $\vec{r}_\theta=(-a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, 0)$.

$$\iint\limits_\sigma xdydz+ydxdz+zdxdy=\iint\limits_\sigma\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint\limits_\sigma\vec{F}\cdot\frac{\vec{r}_\varphi\times\vec{r}_\theta}{\left\|\vec{r}_\varphi\times\vec{r}_\theta\right\|}dS=\iint\limits_D\vec{F}\cdot\left(\vec{r}_\varphi\times\vec{r}_\theta\right)d\varphi d\theta,$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi}\times\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a\cos\theta\cos\varphi & a\sin\theta\cos\varphi & -a\sin\varphi \\ -a\sin\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=a^2\cos\theta\sin^2\varphi\bar{i}+a^2\sin\theta\sin^2\varphi\bar{j}+a^2\cos\varphi\sin\varphi\bar{k}$$

$$\iint\limits_D\vec{F}\cdot\left(\vec{r}_\varphi\times\vec{r}_\theta\right)d\varphi d\theta=a^3\iint\limits_D\left(\cos^2\theta\sin^3\varphi+\sin^2\theta\sin^3\varphi+\cos^2\varphi\sin\varphi\right)d\varphi d\theta=$$

$$= a^3 \iint_D \sin\varphi d\varphi d\theta = a^3 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \right) d\theta = a^3 \left(-\cos\varphi \right)\Big|_0^{\pi} \cdot 2\pi = 4\pi a^3$$

6. חשב את $\iint_\sigma (y-z)\,dydz + (z-x)\,dxdz + (x-y)\,dxdy$ כאשר σ הוא חרוט $0 \le z \le h$ עם כיוון הנורמל למטה.

נרשום את משוואת החרוט בצורה פרמטרית $\vec{r} = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho)$. אז $\vec{r}_\rho = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$ ו- $\vec{r}_\theta = (-\rho\sin\theta, \rho\cos\theta, 0)$.

$$\iint_\sigma (y-z)\,dydz + (z-x)\,dxdz + (x-y)\,dxdy = \iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS =$$

$$= \iint_\sigma \vec{F} \cdot \frac{\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\theta}{\left\| \vec{r}_\rho \times \vec{r}_\theta \right\|} dS = \iint_D \vec{F} \cdot \left(\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\theta \right) d\rho d\theta =$$

$$= \iint_D \left(-(\rho\sin\theta - \rho)\rho\cos\theta - (\rho - \rho\cos\theta)\rho\sin\theta + (\rho\cos\theta - \rho\sin\theta)\rho \right) d\rho d\theta$$

$$= 2\iint_D (\sin\theta + \cos\theta)\rho^2 d\rho d\theta = 2\int_0^h \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} (\sin\theta + \cos\theta)\, d\theta \right) d\rho = 0$$