# חשבון אינפי 2-20152

## דף תרגילים נוספים מס' 2.

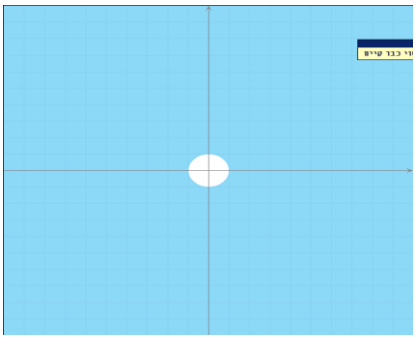
## פונקציות רבות משתנים

## פתרונות ותשובות.

1. מצא ושרטט את תחומי ההגדרה של פונקציות הבאות:

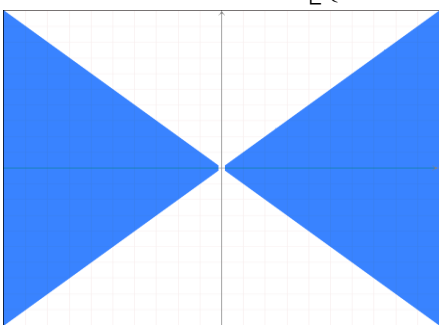
(א) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$ ,

$D_f=\{(x,y): x^2+y^2-1>0\}$



(ב) $f(x,y)=\ln(x^2-y^2)$ ,

$$x^2-y^2>0 \Leftrightarrow (x+y)(x-y)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y>-x, \\ y<x, \end{cases} \\ \begin{cases} y<-x, \\ y>x. \end{cases} \end{array}\right.$$



(ג) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{16-x^2-y^2}}{x+2y}$ .

$$\begin{cases} 16-x^2-y^2\ge 0 \\ x+2y\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2\le 4^2 \\ y\ne -\dfrac{x}{2} \end{cases}$$

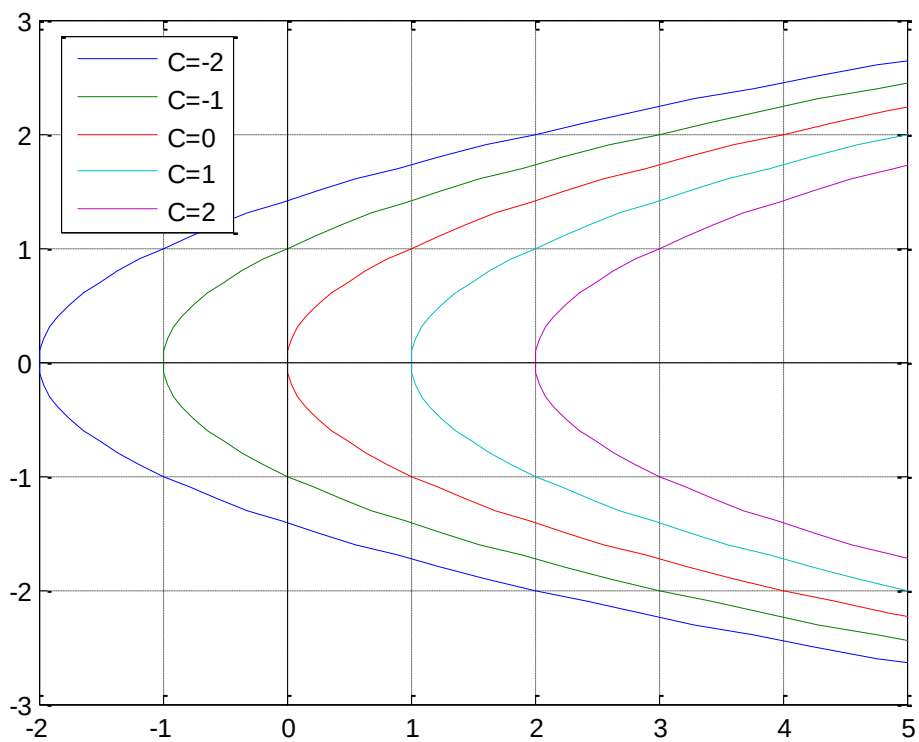
(ד) $f(x,y)=\arcsin\dfrac{y-1}{x}$

$$-1\le \frac{y-1}{x}\le 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{y-1}{x} \ge -1 \\ \dfrac{y-1}{x} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y-1+x}{x} \ge 0 \\ \dfrac{y-1-x}{x} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ y-1+x \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ y-1-x \ge 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ y \ge -x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ y \ge x+1 \end{cases} \end{array} \right.$$

2. מצא ושרטט את קווי הרמה (קווי הגובה), לפחות חמישה, של הפונקציה $f(x,y) = x - y^2$ .

$$x - y^2 = C, \qquad C = -1,1,0,1,2$$




3. מצא את הגבולות או הראה שהם אינם קיימים:

(א) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2 \cdot \sin\left(x^2\right)}{x^2+y^2}$ ,

מתקיים $0 \le \dfrac{y^2 \cdot \sin\left(x^2\right)}{x^2+y^2} \le \dfrac{y^2 \cdot x^2}{x^2+y^2} = r^2 \cos^2\theta \cdot \sin^2\theta \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ , לכן

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2 \cdot \sin\left(x^2\right)}{x^2+y^2} = 0$ .

(ב) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$ ,

שימוש בכלל הסנדביץ' :

$0 \le \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot|x| \le |x|$, מפני ש- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|x| = 0$ , מקבלים $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| = 0$

ידוע כי $-\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \le \frac{x^3}{x^2+y^2} \le \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|$, לכן $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$ .

(ג) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\frac{x+y}{4} = 0$ לפי משפט סנדוויץ', כי $-x \le x\sin\frac{x+y}{4} \le x$ -ו

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(-x) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$

(ד) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ,

נסמן $x^2+y^2 = t$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{t\to 0} t\sin\frac{1}{\sqrt{t}} = 0$$

(ה) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2+3y^2-xy^2}{x^2+y^2}$ ,

נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2+3y^2-xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0}\left(3-\frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2}\right) = \lim_{r\to 0}\left(3-r\cos\theta\sin^2\theta\right) = 3 .$$

(ו) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

מפני ש: $x^2y^2 \le x^4+2x^2y^2+y^4$ , נקבל

$$1 \le \left(1+x^2y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}} \le \left(1+\left(x^2+y^2\right)^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \left(1+\left(x^2+y^2\right)^2\right)^{\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{\left(x^2+y^2\right)}{1}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} e^0 = 1$$

כלומר, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(1+x^2y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = 1$ .

(ז) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}$

מתקיים: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2} = \left[t=\sqrt{x^2+y^2}\right] = \lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$

(ח) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$ .

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{r^2}}}{r^4\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)}$ . הביטוי $\dfrac{1}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}$ חסום כי

$$\cos^4\theta+\sin^4\theta = \left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)^2 - 2\cos^2\theta\sin^2\theta = 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta$$

$\frac{1}{2} \le \cos^4\theta+\sin^4\theta \le 1$ ו- $1 \le \dfrac{1}{\cos^4\theta+\sin^4\theta} \le 2$ . נתבונן בגבול

$$\lim_{r\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{r^2}}}{r^4} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{r\to 0}\frac{\frac{1}{r^4}}{e^{\frac{1}{r^2}}} = \lim_{r\to 0}\frac{-\frac{4}{r^5}}{e^{\frac{1}{r^2}}\left(-\frac{2}{r^3}\right)} = 2\lim_{r\to 0}\frac{\frac{1}{r^2}}{e^{\frac{1}{r^2}}} = 2\lim_{r\to 0}\frac{-\frac{2}{r^3}}{e^{\frac{1}{r^2}}\left(-\frac{2}{r^3}\right)} = 2\lim_{r\to 0}\frac{1}{e^{\frac{1}{r^2}}} = 0,$$

לכן הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4} = 0$ .