חשבון אינפי 2-20152

דף תרגילים נוספים מס' 4.

נגזרות חלקיות, דיפרנציאל שלם, דיפרנציאביליות

פתרונות ותשובות

1. מצא את הנגזרות החלקיות מסדר הראשון:

(א) $f(x,y,z)=\left(\frac{x}{y}\right)^z$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\frac{1}{y} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left(-\frac{x}{y^2}\right) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

(ב) $f(x,y)=\int_{\pi}^{x^2+y^2}\sin(t^2)dt$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\sin\left(x^2+y^2\right)^2\cdot 2x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\sin\left(x^2+y^2\right)^2\cdot 2y$$

(ג) $f(x,y,z))=xy\ln(yz)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\ln(yz) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x\left(\ln(yz)+1\right) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{xy}{z}$$

2. מצא את הקירוב הליניארי של הפונקציה הבאה:

(ב) $f(1.002,2.003,3.004)=1.002\cdot 2.003^2\cdot 3.004^3$

$$\Delta z=0.004\,,\ \Delta y=0.003\,,\ \Delta x=0.002\ \ z_0=3\ ,\ y_0=2\ ,\ x_0=1\ \ f(x,y,z)=xy^2z^3$$

$$df(1,2,3)=0.972 \qquad df=y^2z^3dx+x\cdot 2yz^3dy+xy^2\cdot 3z^2dz\ \ f(1,2,3)=108$$

$$f(1.002\ ,\ 2.003\ ,\ 3.004)\approx f(1,2,3)+df(1,2,3)=108.972$$

3. בדוק האם הפונקציה $z=\sqrt[3]{xy}$ דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$.

הפונקציה רציפה ב-$(0,0)$. נראה כי z'_x, z'_y קיימות ב-$(0,0)$ ושוות ל-0.

$$z(0,0)=0$$

$$z'_x(0,0)=\lim_{h->0}\frac{\sqrt[3]{h\cdot 0}-0}{h}=\lim_{h->0}\frac{0}{h}=0$$

$$z'_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{0\cdot h}-0}{h}\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

נראה האם הנגזרות החלקיות רציפות. הגבולות

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}z'_x=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{3}\cdot\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}z'_y=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}}$ אינם קיימים (ניקח מסלול $y=x$ וכל אחד מהגבולות שווה ל-∞), לכן הנגזרות החלקיות אינן רציפות.

נראה האם הפונקציה דיפרנציאבילית לפי ההגדרה:

$$\Rightarrow \quad z(x,y) = z(0,0) + z'_x(0,0)(x-0) + z'_y(0,0)(y-0) + R$$

$$R = \sqrt[3]{xy} \qquad \lim_{(x,y)->(0,0)} \frac{R}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

הגבול הנ"ל לא שווה ל-0 (לפי המסלול $x>0\,,\,y=x$ נקבל שהגבול הוא $\infty \Leftarrow$ הגבול לא קיים), לכן הפונקציה אינה דיפרנציאבילית בנקודה.

4. חשב את נגזרות חלקיות מסדר ראשון של פונקציה מורכבת w , כלומר $\frac{\partial w}{\partial u}\,,\frac{\partial w}{\partial v}$

(א) $w(x,y) = \ln(x^2 - y^2)$ כאשר $x = u - v \;,\; y = u^2 + v^2$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2x}{x^2-y^2}\cdot 1 + \frac{-2y}{x^2-y^2}\cdot 2u$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2x}{x^2-y^2}\cdot(-1) + \frac{(-2y)}{x^2-y^2}\cdot 2v$$

(ב) $w(x,y) = \sin x \cos y$ כאשר $x = u^2 - v^2 \;,\; y = (u-v)^2$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \cos x\cos y\cdot 2u + \sin x(-\sin y)\cdot 2(u-v)$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \cos x\cos y\cdot(-2v) + \sin x(-\sin y)\cdot 2(u-v)\cdot(-1)$$