חשבון אינפי 2-20152

דף תרגילים נוספים מס' 7.

אקסטרמום באילוץ ומוחלט

פתרונות ותשובות

1. מצא את מקסימום ומינימום מוחלטים (הערך המקסימאלי והערך המינימאלי) של $f(x,y)$ בתחום הסגור D.

$f(x,y)=(4x-x^2)\cos y$, D הוא מלבן $1\le x\le 3$, $-\frac{\pi}{4}\le y\le\frac{\pi}{4}$.

פתרון:

נחשב נקודות קיצון בתחום:

$$\begin{cases} f'_x=(4-2x)\cos y=0 \\ f'_y=(4x-x^2)(-\sin y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{\pi}{2} \end{cases}, \begin{cases} x=4 \\ y=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

שתי הנקודות האחרונות לא בתחום. נציב את הנקודה הראשונה בפונקציה: $f(2,0)=4$.

נחשב לפי שפות:

$$L_1: y=-\frac{\pi}{4}, 1\le x\le 3 \quad f(x,y)=(4x-x^2)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'=(4-2x)\frac{\sqrt{2}}{2}=0\Rightarrow x=2$$

$$f\left(2,-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2},\quad f\left(1,-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2},\ f\left(3,-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$L_2: x=3, -\frac{\pi}{4}\le y\le\frac{\pi}{4} \quad f(x,y)=3\cos y$$

$$f'=-3\sin y=0\Rightarrow y=\pi k \overset{\text{בתחום}}{\Rightarrow} y=0$$

$$f(3,0)=3,\quad f\left(3,-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2},\ f\left(3,\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$L_3: y=\frac{\pi}{4}, 1\le x\le 3 \quad f(x,y)=(4x-x^2)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'=(4-2x)\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=2$$

$$f\left(2,\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2},\quad f\left(1,\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2},\ f\left(3,\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$L_4 : x = 1, -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4} \quad f(x,y) = 3\cos y$

$f' = -3\sin y = 0 \Rightarrow y = 0$

$f(1,0) = 3, \quad f\left(1,-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}, f\left(1,\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

לכן המסקנה: $f_{\max} = f(2,0) = 4 \quad f_{\min} = f(3,-\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

2. (אקסטרמום בתנאי) מצא את האקסטרמום של הפונקציה $u = f(x,y,z)$ לפי תנאי האילוץ:

$f(x,y,z) = x^2yz + 1$, כאשר $\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$

פתרון:

<u>דרך 1:</u> (שיטת ההצבה)

לפי תנאי האילוץ : $\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0 \end{cases}$

מקבלים :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{1-y^2}$

$f(x,y,1) = x^2y + 1$

$f(\pm\sqrt{1-y^2}, y) = (1-y^2)y + 1 = y - y^3 + 1 \quad , -1 \le y \le 1$

נחשב את נקודות הקריטיות:

$f'_y = 1 - 3y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$x = \pm\sqrt{1-y^2} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

נקודות קריטיות הן: $(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},1)$, $(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},1)$, $(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},1)$, $(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},1)$

נקודות הקצה: $(0,1,1)$, $(0,-1,1)$

ערכי הפונקציה $f(x,y,z)$ באותן הנקודות :

$f(0,1,1) = f(0,-1,1) = 1$

$f(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},1) = 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} = f_{\max}$

$f(0,1,1) = f(0,-1,1) = 1$

$f(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},1) = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}} = f_{\min}$

<u>דרך 2:</u> (שיטת כופלי לגרנז') : $L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2yz + 1 + \lambda_1(z-1) + \lambda_2(x^2+y^2+z^2-2)$

נמצא את הנקודה הקריטית של המערכת :

$$\begin{cases} L'_x = 2xyz + 2\lambda_2 x = 0 \\ L'_y = x^2 z + 2\lambda_2 y = 0 \\ L'_z = x^2 y + \lambda_1 + 2\lambda_2 z = 0 \\ L_{\lambda_1} = z - 1 = 0 \\ L'_{\lambda_2} = x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xyz + \lambda_2 x = 0 \\ x^2 z + 2\lambda_2 y = 0 \\ x^2 y + \lambda_1 + 2\lambda_2 z = 0 \\ z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ או } \lambda_1 = -\frac{4}{3\sqrt{3}} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ או } \lambda_1 = \frac{4}{3\sqrt{3}} \quad , \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

הנקודות הקריטיות של $f(x,y,z)$ לפי תנאי האילוץ הן:

$(0,1,1)$, $(0,-1,1)$ כאשר $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},1)$, $(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},1)$ כאשר $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\lambda_1 = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$

$(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},1)$, $(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},1)$ כאשר $\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\lambda_1 = \frac{4}{3\sqrt{3}}$

$$f(0,1,1) = f(0,-1,1) = 1$$

$$f(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},1) = 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} = f_{\max}$$

$$f(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},1) = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}} = f_{\min}$$

3. מצא את הנקודה על המישור $x + 2y + 3z = 4$ הקרובה ביותר לראשית.

פתרון:

פונקצית מרחק מהראשית $S(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

האילוץ: $x + 2y + 3z = 4$

הנקודה הקרובה ביותר לראשית היא נקודה קריטית של פונקצית לגרנז.

במקום $S(x,y,z)$ נשתמש ב- $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

נבנה את פונקצית לגרנז': $L(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + 2y + 3z - 4)$

נחשב את הנקודות הקריטיות מהמערכת :

$$\begin{cases} L'_x = 2x + \lambda = 0 \\ L'_y = 2y + 2\lambda = 0 \\ L'_z = 2z + 3\lambda = 0 \\ L'_\lambda = x + 2y + 3z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{2} \\ y = -\lambda \\ z = -\frac{3}{2}\lambda \\ x + 2y + 3z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \lambda = -\frac{4}{7} \right.$$

הנקודה הקריטית $(\frac{2}{7},\frac{4}{7},\frac{6}{7})$ נמצאת על המישור $x + 2y + 3z = 4$, הקרובה ביותר מהראשית.

4. מצא את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של הפונקציה $f(x,y,z) = x - 2y + 5z$ על הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 30$.

פתרון:

$$\begin{cases} f = x - 2y + 5z \\ g = x^2 + y^2 + z^2 = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y,z) = k \end{cases}$$

אם אנו נפתור את המערכת:

$$\begin{cases} f'_x = 1 = \lambda \cdot 2x \\ f'_y = -2 = \lambda \cdot 2y \\ f'_z = 5 = \lambda \cdot 2z \\ g = x^2 + y^2 + z^2 = 30 \end{cases}$$

מכאן נובע

$$\lambda = \frac{1}{2x} = -\frac{1}{y} = \frac{5}{2z} \quad \text{ולכן} \quad y = -2x, \quad z = 5x \quad \text{אזי}$$

$$x^2 + 4x^2 + 25x^2 = 30$$

$$x = 1, \quad x = -1$$

אזי נקבל שתי נקודות:

$$A(1,-2,5), \quad B(-1,2,-5) \Rightarrow f(A) = 30, \quad f(B) = -30$$

לכן המסקנה: $f_{\max} = f(1,-2,5) = 30, \quad f_{\min} = f(-1,2,-5) = -30$.