חשבון אינפי 2-20152

דף תרגילים נוספים מס' 8.

אינטגרל כפול

פתרונות ותשובות

1. חשב את האינטגרלים החוזרים הבאים:

(א) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^2 dydx$

<u>פתרון:</u>

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^2 dydx = \int_0^1 \left(\frac{xy^3}{3}\right)\Big|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (\frac{x^4}{3} - \frac{x^7}{3})dx = \frac{1}{3}(\frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{8})\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}) = \frac{1}{40}$$

(ב) $\int_0^{\pi} \int_0^{x} x\sin y dydx$

<u>פתרון:</u>

$$\int_0^{\pi} \int_0^{x} x\sin y dydx = \int_0^{\pi} x(-\cos y)\Big|_0^x dx = \int_0^{\pi} (-x\cos x + x)dx =$$

$$= -\int_0^{\pi} x\cos x dx + \int_0^{\pi} x dx \begin{vmatrix} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{vmatrix} = -(\cos x + x\sin x)\Big|_0^{\pi} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = 2 + \frac{\pi^2}{2}$$

(ג) $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y} dxdy$

<u>פתרון:</u>

$$\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y} dxdy = \int_1^{\ln 8} e^y (\int_0^{\ln y} e^x dx)dy = \int_1^{\ln 8} e^y (e^x\Big|_0^{\ln y})dy =$$

$$= \int_1^{\ln 8} e^y (y-1)dy = \begin{vmatrix} u = y-1 & v' = e^y \\ u' = 1 & v = e^y \end{vmatrix} = e^y (y-2)\Big|_1^{\ln 8} = 8\ln 8 - 16 + e$$

(ד) $\int_a^A \int_b^B F''_{xy}(x,y)dydx$

<u>פתרון:</u>

$$\int_a^A \int_b^B F''_{xy}(x,y)dydx = \int_a^A F'_x(x,y)\Big|_b^B dx = \int_a^A (F'_x(x,B) - F'_x(x,b))dx =$$

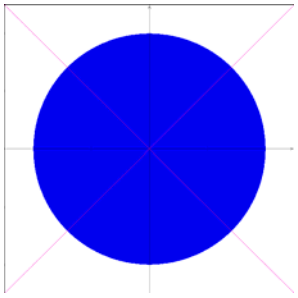
$$= (F(x,B) - F(x,b))\Big|_a^A = F(A,B) - F(A,B) - F(a,B) + F(a,b)$$

2. כתוב את הגבולות האינטגרציה של $\iint_D f(x,y)ds$ כאשר :

(א) $D = \{(x,y) \mid |x| \le y \ , \ x^2 + y^2 \le 4\}$

פתרון:

תחום D הוא הגזרה של $x^2+y^2\le 4$, המוגבלת ע"י הישרים $y=-x$, $y=x$, בעצם, $y\ge x, y\ge -x$
(ראה שרטוט).



את נקודות החיתוך מקבלים מהמערכת:

$$\begin{cases} y=\pm x \ \ (y>0) \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \Rightarrow 2x^2=4 \Leftrightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

נקודות החיתוך הן: $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, לכן

$$\iint_D f(x,y)ds=\int_{-\sqrt{2}}^{0}\int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx+\int_{0}^{\sqrt{2}}\int_{x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx$$

(ב) $D=\{(x,y)\ \ x^2-2x+y^2-6y+9\le 0\}$

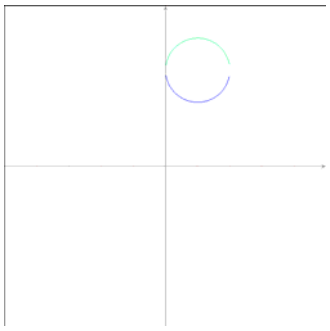
פתרון:

השפה של התחום D היא המעגל שמשוואתו :

$$x^2-2x+y^2-6y+9=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1-1+y^2-6y+9=0 \Leftrightarrow$$

מקבלים משוואת המעגל $(x-1)^2+(y-3)^2=1$ (ראה שרטוט).

שתי משוואות $y=3+\sqrt{2x-x^2}$, $y=3-\sqrt{2x-x^2}$ מתארות שני חלקים של המעגל



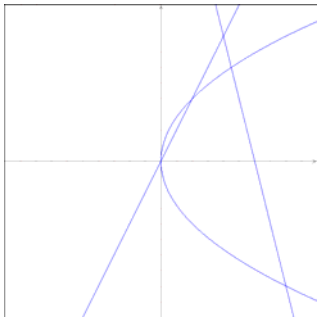
לכן ,

$$\iint_D f(x,y)ds=\int_{0}^{2}\int_{3-\sqrt{2x-x^2}}^{3+\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx$$

(ג) $D=\{(x,y)|\ \ y^2\ge 8x\ \ ,\ \ y\le 2x\ \ ,\ \ y+4x\le 24\}$

פתרון:

השפה של D הוא קו סגור המורכב מפרבולה $y^2=8x$ והישרים $y=24-4x$, $y=2x$
(ראה שרטוט)



את נקודות החיתוך מקבלים מהמערכות הבאות:

$$\begin{cases} y^2 = 8x \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow y^2 - 4y = 0 \qquad y = 0 \quad \text{או} \quad y = 4$$

נקודות החיתוך הן : $(0,0)$, $(2,4)$

$$\begin{cases} y^2 = 8x \\ y + 4x = 24 \end{cases} \Rightarrow y + \frac{y^2}{2} = 24 \qquad y = -8 \quad \text{או} \quad y = 6$$

נקודות החיתוך היא : $(4.5,6)$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y + 4x = 24 \end{cases} \Rightarrow y + 2y = 24 \qquad y = 8$$

נקודות החיתוך היא : $(4,8)$

לכן ,

$$\iint_D f(x,y)ds = \int_2^4 \int_{\sqrt{8x}}^{2x} f(x,y)dydx + \int_4^{4.524-4x} \int_{\sqrt{8x}} f(x,y)dydx$$

3. שרטט את התחום הבא ורשום אותו בסדר הפוך (כאשר D חסום מצידיו ע"י הקווים $x = b$ ו- $x = a$, רשום אותו החסום ע"י הקווים $y = d$ ו- $y = c$ המתאימים):

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le x\} \cup \{(x,y) \mid 1 \le x \le 2 \ , \ 0 \le y \le 2 - x\}$$

<u>פתרון:</u> תחום D הוא משולש המוגבל ע"י הישרים $y = 2 - x$, $y = x$, $y = 0$ $(0 \le x \le 2)$

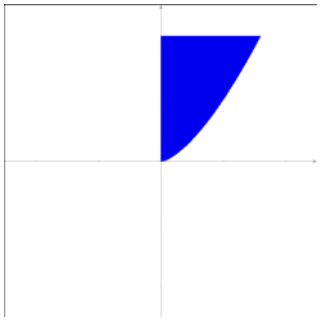
נרשום את התחום בסדר הפוך: $D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1, y \le x \le 2 - y\}$

4. חשב את האינטגרל הבא ע"י החלפת סדר האינטגרציה:

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4 + 1} dydx$$

<u>פתרון:</u>

נצייר את תחום האינטגרציה: $0 \le x \le 8$, $\sqrt[3]{x} \le y \le 2$ (ראה שרטוט)



נחליף את סדר האינטגרציה:

לפי השרטוט ברור ש- $0 \le x \le y^3$, $0 \le y \le 2$. לכן

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\,dydx = \int_0^2 \int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\,dxdy = \int_0^2 \frac{1}{y^4+1}\left(\int_0^{y^3} dx\right)dy = \int_0^2 \frac{1}{y^4+1}\left(x\Big|_0^{y^3}\right)dy =$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{y^4+1}\cdot y^3 dy = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{d(y^4+1)}{y^4+1} = \frac{1}{4}\ln(y^4+1)\Big|_0^2 = \frac{1}{4}\ln 17$$

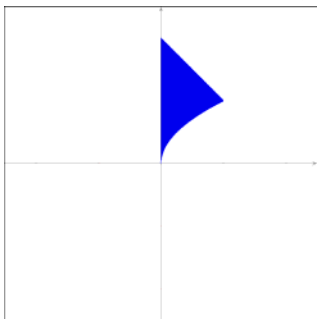
.5

חשב את האינטגרל הכפול הבא:

$$\iint_R (x^2-2xy)ds \quad , \quad R=\left\{(x,y)\,\middle|\, 0\le x\le 1\ ,\ \sqrt{x}\le y\le 2-x\right\}$$ כאשר

<u>פתרון:</u>

נצייר את תחום האינטגרציה R : $0 \le x \le 1$, $\sqrt{x} \le y \le 2-x$ (ראה שרטוט)



$$\iint_R (x^2-2xy)ds = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{2-x} (x^2-2xy)dydx = \int_0^1 \left(x^2y - 2x\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{\sqrt{x}}^{2-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2(2-x) - x(2-x)^2 - x^2\sqrt{x} + x^2\right)dx = \int_0^1 \left(7x^2 - 2x^3 - 4x - x^{\frac{5}{2}}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{7x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} - \frac{4x^2}{2} - \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{19}{42}$$

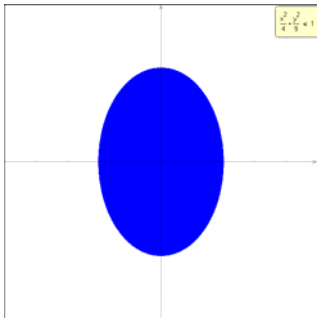
.6 חשב את האינטגרל הבא ע"י מעבר לקואורדינאטות קוטביות (פולריות).

$$\iint_R \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,ds \quad , \quad R=\left\{(x,y)\,\middle|\, \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1\right\}$$ כאשר

<u>פתרון:</u>

משוואת השפה $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ היא אליפסה .

נשרטט את תחום האינטגרציה :



נשתמש בקואורדינאטות קוטביות כלליות : $\begin{cases} x = 2r\cos\varphi \\ y = 3r\sin\varphi \end{cases}$

היעקוביאן של המערכת :

$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} 2\cos\varphi & -2r\sin\varphi \\ 3\sin\varphi & 3r\cos\varphi \end{vmatrix} = 6r\cos^2\varphi + 6r\sin^2\varphi = 6r$$

משוואת השפה של R בקואורדינאטות קוטביות כלליות :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{4r^2\cos^2\varphi}{4} + \frac{9r^2\sin^2\varphi}{9} = 1 \Rightarrow r = 1$$

התחום R יעבור לתחום Δ $\quad \Delta = \{(r,\varphi) \mid 0 \le \varphi \le 2\pi \ , \ 0 \le r \le 1\}$

$$\iint_R \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}\, ds = 6\iint_\Delta \sqrt{1-r^2} \cdot r dr d\varphi = 6\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r dr d\varphi =$$

$$= 6\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r dr = 6 \cdot 2\pi \left(-\frac{2(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{2\cdot 3}\right)\Big|_0^1 = 4\pi$$

7. חשב אינטגרל ע"י החלפת משתנים מתאימה:

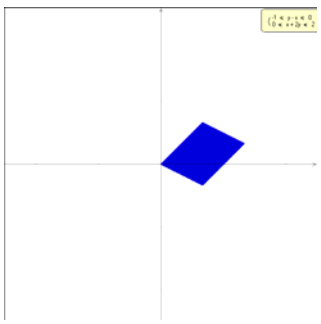
(א) $\iint_R \frac{x+2y}{\cos(x-y)} ds$, כאשר R הוא תחום הכלוא בין הקווים:

$$y = x \ , \ x + 2y = 0 \ , \ y - x = -1 \ , \ x + 2y = 2$$

<u>פתרון:</u>

נשרטט את תחום האינטגרציה :

$$R = \{(x,y) \mid -1 \le y - x \le 0 \ , \ 0 \le x + 2y \le 2\}$$



נסמן: $T : \begin{cases} u = y - x \\ v = 2y + x \end{cases}$

$$J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=-\frac{1}{3} \quad \text{לכן} \quad \frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-3$$

$$\begin{cases}u=y-x\\ v=2y+x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\frac{2}{3}u+\frac{1}{3}v\\ y=\frac{1}{3}u+\frac{1}{3}v\end{cases}$$

התחום R עובר לתחום Δ : $\Delta=\{(u,v)\ |-1\le u\le 0\ ,\ 0\le v\le 2\}$

$$\iint_R \frac{x+2y}{\cos(x-y)}ds=\frac{1}{3}\int_{-1}^{0}\int_{0}^{2}\frac{v}{\cos u}\cdot dvdu$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-1}^{0}\frac{du}{\cos u}\cdot\int_{0}^{2}vdv=\frac{1}{3}\ln\left|\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2})\right|\ \Big|_{-1}^{0}\cdot\frac{v^2}{2}\ \Big|_{0}^{2}=-\frac{2}{3}\ln\left|\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})\right|\approx 0.8175$$

(ב) $\iint_R \frac{x+2y}{xy}ds$, כאשר R הוא תחום הכלוא בין הקווים:

$$x+y=4\ ,\ x+y=12\ ,\ y=x^2\ ,\ y=2x^2$$

<u>פתרון:</u>

נסמן: $T:\begin{cases}u=x+y\\ v=\frac{y}{x^2}\end{cases}$

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{x^2}+\frac{2y}{x^3}=\frac{x+2y}{x^3}\ ,\ (x\ne 0\ ,\ y\ne -\frac{x}{2})$$

לכן, $J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{x^3}{x+2y}\ne 0$

התחום D עובר לתחום Δ : $\Delta=\{(u,v)\ |4\le u\le 12\ ,\ 1\le v\le 2\}$

$$\iint_R \frac{x+2y}{xy}ds=\iint_\Delta(\frac{x+2y}{xy}\cdot\frac{x^3}{x+2y})dudv=\iint_\Delta(\frac{x^2}{y})dudv=\iint_\Delta\frac{dudv}{v}=$$

$$=\int_4^{12}\int_1^2\frac{1}{v}dvdu=\int_4^{12}du\cdot\int_1^2\frac{dv}{v}=8(\ln v\ \Big|_1^2)=8\ln 2$$

8. חשב את השטח של התחום המישורי המוגבל ע"י הקווים:

$$y^2+2y-3x+1=0\ ,\ 3x-3y-7=0$$

<u>פתרון:</u>

המשוואה $y^2+2y-3x+1=0$ היא משוואת הפרבולה :

$$y^2+2y+1-1-3x+1=0 \Leftrightarrow (y+1)^2=3x$$

נחשב את נקודת החיתוך מהמערכת :

$$\begin{cases}(y+1)^2=3x\\3x-3y-7=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(y+1)^2=3x\\3y+7=3x\end{cases} \Rightarrow y^2-y-6=0 \Rightarrow y=-2 \text{ או } y=3$$

נרשום את התחום :

$$R=\left\{(x,y)\ \middle|\ -2\le y\le 3\ ,\ \frac{1}{3}(y+1)^2\le x\le \frac{1}{3}(3y+7)\right\}$$

לפי הנוסחה $S=\iint\limits_R ds$ מקבלים :

$$S=\int_{-2}^{3}\int_{\frac{1}{3}(y+1)^2}^{\frac{1}{3}(3y+7)} dxdy=\int_{-2}^{3}\frac{1}{3}(3y+7-(y+1)^2)dy=$$

$$\frac{1}{3}\int_{-2}^{3}(-y^2+y+6)dx=\frac{1}{3}(-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2+6y)\ \Big|_{-2}^{3}=\frac{125}{18}$$

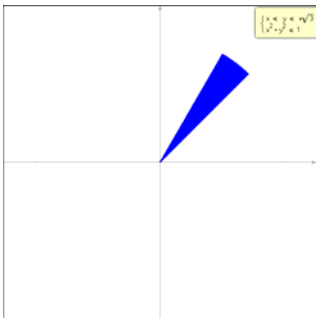
9. חשב את נפח הגוף המוגבל ע"י המשטחים:

$$z=0\ ,\ z=1-x^2-y^2\ ,\ y=x\ ,\ y=x\sqrt{3}\ ,\ (x\ge 0\ ,\ y\ge 0\ ,\ z\ge 0)$$

<u>פתרון:</u>

נשרטט את התחום המישורי הנוצר במישור $z=0$:

$$R=\left\{(x,y)\ \middle|\ x\le y\le x\sqrt{3}\ ,\ x^2+y^2\le 1\right\}$$



לפי הנוסחה $V=\iint\limits_R (1-x^2-y^2)ds$

נשתמש בקואורדינאטות קוטביות : $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\y=r\sin\varphi\end{cases}$

היעקוביאן של המערכת $J=r$

השפה של R היא קו הסגור המורכב מהקווים: $x^2+y^2=1\ ,\ y=x\sqrt{3}\ ,\ y=x$

בקואורדינאטות קוטביות מקבלים בהתאמה: $r=1\ ,\ \varphi=\frac{\pi}{3}\ ,\ \varphi=\frac{\pi}{4}$

התחום R עובר לתחום Δ : $\Delta=\left\{(r,\varphi)\ \middle|\ 0\le r\le 1\ ,\ \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}\right\}$

מהנוסחה $V=\iint\limits_R (1-x^2-y^2)ds$ ע"י החלפת המשתנים נקבל :

$$V=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_{0}^{1}(1-r^2)rdrd\varphi=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_{0}^{1}(r-r^3)dr=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4)\Big|_0^1 d\varphi=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi=\frac{\pi}{48}$$

בהצלחה!