$d^2 f(M) = 2dx^2 - 2dy^2 + 2dz^2$ נקבל $d^2 f(M) = -6dx^2 + 2dz^2$ אשר אינו בעל סימן קבוע. למשל עבור $dx \neq 0, dz = 0$ הסימן של $d^2 f(M)$ שלילי ועבור $dx = 0, dz \neq 0$ $d^2 f(M) > 0$ לכן $M(2,1,0)$ היא נקודת אוכף של בעיית קיצון באילוץ.

210. בעיית קיצון באילוץ עם שתי משוואות קשר: מצא את הקיצון של הפונקציה $f(x,y,z) = xy + yz$ באילוץ $x^2 + y^2 = 2$ ו- $y + z = 2$.

נרשום את פונקציית לגרנז' עבור הבעיה:

$L(x,y,z,\lambda,\mu) = xy + yz + \lambda(x^2 + y^2 - 2) + \mu(y + z - 2)$. אז לפי התנאי הכרחי נקבל:

$$\begin{cases} L_x = y + 2\lambda x = 0 \\ L_y = x + z + 2\lambda y + \mu = 0 \\ L_z = y + \mu = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ L_\mu = y + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -y \\ y + 2\lambda x = 0 \\ x + z + 2\lambda y - y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -y \\ z = 2 - y \\ y + 2\lambda x = 0 \\ x + 2 + 2\lambda y - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu = -y \\ z = 2 - y \\ y = -2\lambda x \\ x + 2 - 2\lambda x(2\lambda - 2) = 0 \\ x^2 + 4\lambda^2 x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -y \\ z = 2 - y \\ y = -2\lambda x \\ x(-4\lambda^2 + 4\lambda + 1) = -2 \\ x^2(1 + 4\lambda^2) = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(-4\lambda^2 + 4\lambda + 1)^2 = 2(1 + 4\lambda^2) \Rightarrow 16\lambda^4 - 32\lambda^3 + 8\lambda - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$16\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = -\frac{1}{2},\ \lambda_3 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\lambda_4 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow M_1(-1,1,1) \Rightarrow f(-1,1,1) = 0\ ,$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow M_2(1,1,1) \Rightarrow f(1,1,1) = 2$$

$$\lambda_3 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow M_3\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}+5}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}+5}{2}\right) = -\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_4 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow M_3\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow f\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-5+3\sqrt{3}}{2}$$

מפני שאילוץ מהווה קבוצה קומפקטית - אליפסה כחיתוך של הגליל $x^2 + y^2 = 2$ ומישור $y + z = 2$ לכן לפי משפט ויירשטרס על פונקציה רציפה (פולינום) על קבוצה קומפקטית לבעיה יש מינימום ומקסימום. לפי הנתונים $f_{\max} = f(1,1,1) = 2$ ו-

$f_{\min} = f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}+5}{2}\right) = -\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$.

מערכת קואורדינטות במרחב תלת ממדי. משוואות ליניאריות.

211. מערכת קואורדינטות קרטזיות במישור.

212. קו ישר במישור $Ax+By+C=0$. משוואת קו ישר בקטעים: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. נקודות a,b הן נקודות החיתוך עם הצירים.

213. דוגמה למעבר ממשוואה כללית למשוואה בקטעים.

214. מערכת קואורדינטות קרטזיות במרחב. שיעורים של נקודה, הצגה גיאומטרית.

215. משוואת המישור $Ax+By+Cz+D=0$.

216. מקרים פרטיים של משוואות המישור

(א) $D=0$ המישור עובר דרך ראשית הצירים

(ב) $C=0$ המישור מקביל לציר ה- z

$A=0$ המישור מקביל לציר ה- x

$B=0$ המישור מקביל לציר ה- y

(ג) $C=D=0$ המישור עובר דרך ציר ה- z

$A=D=0$ המישור עובר דרך ציר ה- x

$B=D=0$ המישור עובר דרך ציר ה- y

(ד) $A=B=0$ המישור מקביל למישור xOy

$A=C=0$ המישור מקביל למישור xOz

$B=C=0$ המישור מקביל למישור yOz

(ה) $A=B=D=0$ המישור xOy

$A=C=D=0$ המישור xOz

$B=C=D=0$ המישור yOz

(ו) $A=B=C=0$, אם $D=0$ כל המרחב, אם $D\neq 0$ קבוצה ריקה.

217. רביע במישור ואוקטנט במרחב. אוקטנט ראשון: $x,y,z\geq 0$.

218. משוואת מישור בקטעים $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ כאשר a,b,c הן נקודות החיתוך עם הצירים. דוגמאות.

219. מרחק בין הנקודות $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ ו- $M\left(x,y,z\right)$ הינו $\left|MM_0\right|=\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2}$.

220. משוואת ספרה (מעטפת כדור) שמרכזה ב- $\left(0,0,0\right)$ ובעלת רדיוס R היא $x^2+y^2+z^2=R^2$.

221. משוואה $F\left(x,y\right)=0$ במישור ובמרחב. משטח גלילי הנוצר כתנועה של קו ישר המאונך למישור xOy אשר נע על העקומה המוגדרת על ישי המשוואה.

222. דוגמאות. גליל מעגלי, גליל ישר כללי.

223. משוואות $F\left(x,z\right)=0$ ו- $F\left(y,z\right)=0$ במרחב.

224. תיאור גיאומטרי של המשוואה $\max\left\{\left|x\right|,\left|y\right|,\left|z\right|\right\}=1$.

משוואות מסדר שני בשני נעלמים ועקומות במישור.

225. משוואה כללית מסדר שני בשני נעלמים:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

כאשר a_{ij} הם מקדמים (מספרים ממשיים).

226. נסמן ב- $\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ ו- $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$.

227. צורת העקומה מוגדרת לפי הסימן של δ בלבד: $\delta>0$ אליפטית, $\delta<0$ היפרבולית, $\delta=0$ פרבולית.

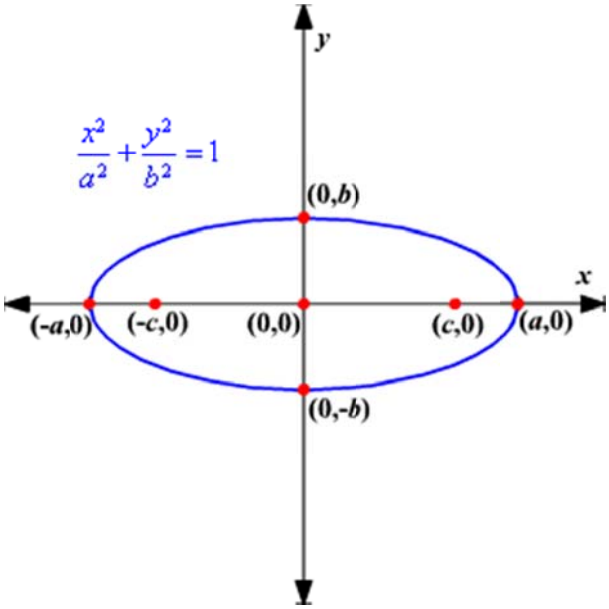
228. צורה אליפטית מכילה שלושה מקרים: (א) $\Delta<0$ אליפסה, (ב) $\Delta=0$ נקודה אחת בלבד, (ג) $\Delta>0$ קבוצה ריקה.

229. צורה היפרבולית מכילה שני מקרים: (א) $\Delta\neq 0$ היפרבולה, (ב) $\Delta=0$ זוג ישרים נחתכים.

230. צורה פרבולית מכילה שני מקרים: (א) $\Delta\neq 0$ פרבולה, (ב) $\Delta=0$ או זוג ישרים מקבילים או ישר אחד או קבוצה ריקה.

231. אם $a_{12}\neq 0$ אז נדרשת פעולה גיאומטרית הנקראת סיבוב המאפשרת להגיע לצורה קנונית של העקומה.

232. אליפסה. מקום גיאומטרי של נקודות שעבורן סכום מרחקים לשתי נקודות נתונות F_1,F_2 (מוקדים) הוא מספר קבוע נתון מראש.



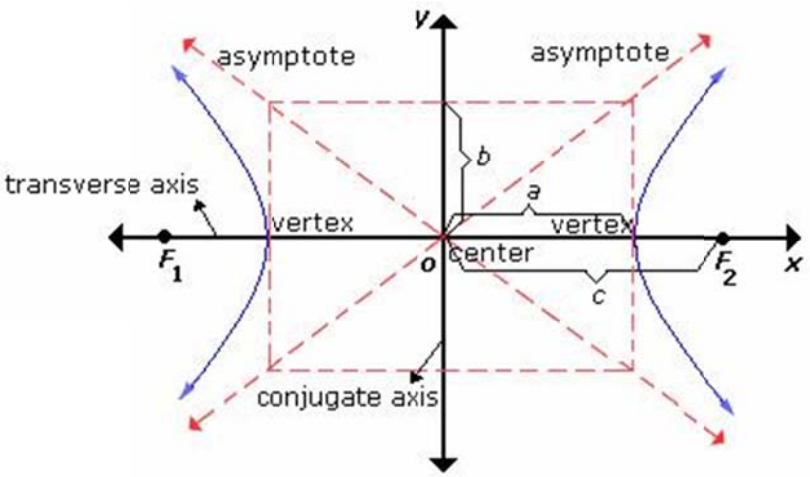
233. ניתן לרשום את המשוואה בצורה $|MF_1|+|MF_2|=2a$ או $\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$.

234. מכאן מתקבלת המשוואה הקנונית: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ כאשר $b^2=a^2-c^2$.

235. הערה. שרטוט של האליפסה נמצא בתוך המלבן $-a\le x\le a,-b\le y\le b$.

236. דוגמה.

237. היפרבולה. מקום גיאומטרי של נקודות שעבורן הפרש מרחקים לשתי נקודות נתונות F_1,F_2 (מוקדים) הוא מספר קבוע נתון מראש.



238. ניתן לרשום את המשוואה בצורה $|MF_1|-|MF_2|=\pm 2a$ או

$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=\pm 2a$.

239. מכאן מתקבלת המשוואה הקנונית: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ כאשר $b^2=c^2-a^2$.

240. הערה. שרטוט של ההיפרבולה נמצא מחוץ לתחום $-a<x<a$, קווים $y=\pm\frac{b}{a}x$

הם אסימפטוטות של היפרבולה. להיפרבולה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ציר ה- x היא ציר ממשי וציר ה-

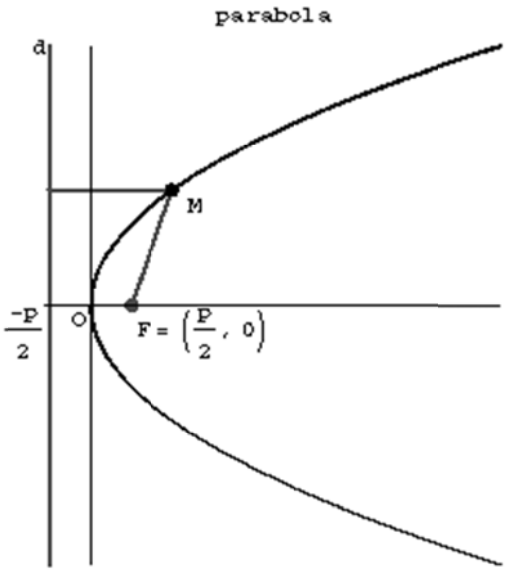
y הוא ציר מדומה.

241. עבור המשוואה $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ ציר ממשי הוא ציר ה- y וציר מדומה הוא ציר ה- x.

242. $y=\frac{1}{x}$ או $xy-1=0$ כדוגמה לסיבוב הצירים.

243. דוגמה.

244. פרבולה. מקום גיאומטרי של נקודות הנמצאות במרחקים שווים מנקודה קבועה F (מוקד) ומקו ישר נתון (מדריך).



245. ניתן לרשום את המשוואה בצורה $|MF|=|MN|$ או

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

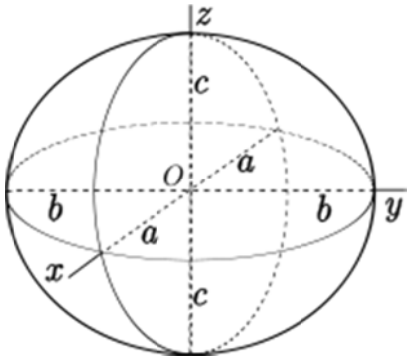
246. מכאן מתקבלת המשוואה הקנונית: $y^2=2px$.

247. הערה. שרטוט של האליפסה נמצא חצי מישור הימני כאשר $p>0$ ובחצי המישור השמאלי עבור $p<0$.

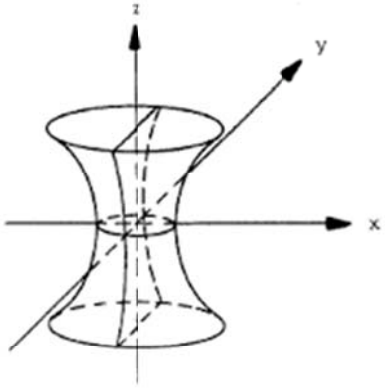
248. דוגמה.

משוואות מסדר שני בשלושה נעלמים ומשטחים בתלת ממד

249. אליפסויד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. כל החתכים על ידי מישורים xOy, xOz ו- yOz הם אליפסות.



250. היפרבולויד חד-יריעתי: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. החתך המקביל ל- xOy הוא אליפסה, שני חתכים אחרים הם היפרבולות.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

251. היפרבולויד דו-יריעתי: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$. החתך המקביל ל- xOy הוא אליפסה כאשר $z^2>c^2$, שני חתכים אחרים הם היפרבולות.