הרצאה 1

אינטגרל לא אמיתי. מרחב אוקלידי

חזרה לנושא אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון ושני

1. דוגמה 1. בדוק האם האינטגרל מתכנס או מתבדר: $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{10}+1}$.

$0<\frac{1}{x^{10}+1}<\frac{1}{x^{10}}$ ו- $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{10}}$ מתכנס (כי $p>1$) לכן $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{10}+1}$ גם מתכנס.

2. דוגמה 2. בדוק האם האינטגרל מתכנס או מתבדר: $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}+\cos x}{x^2+2\ln x}dx$.

$0<\frac{\sqrt{x}+\cos x}{x^2+2\ln x}\le\frac{\sqrt{x}+1}{x^2}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{x^2}$. שני האינטגרלים $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ ו- $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ מתכנסים לכן האינטגרל $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}+\cos x}{x^2+2\ln x}dx$ גם מתכנס.

3. דוגמה 3. בדוק האם האינטגרל מתכנס או מתבדר: $\int_1^{+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)dx$.

$\int_1^{+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)dx=\int_1^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}dx$. נשווה את האינטגרל ל- $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ אשר מתבדר.

מפני ש-

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=1$$

אז האינטגרל המקורי גם מתבדר.

4. דוגמה 4. בדוק האם האינטגרל מתכנס או מתבדר: $\int_0^1\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{e^{\sin x}-1}dx$.

ידוע כי $\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}\to1$, $\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}\to1$ ו- $\frac{\sin\alpha}{\alpha}\to1$ כאשר $\alpha\to0$. לכן $\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{e^{\sin x}-1}$ מתנהג כ- $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sin x}$ או $\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. האינטגרל $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ מתכנס לכן האינטגרל המקורי גם מתכנס.

מרחב ליניארי, מרחב נורמי, נורמה

5. נקודה או וקטור במרחב $\mathbf{R}^n$ הוא אוסף סדור של n מספרים ממשיים, $\overline{x}=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$.

6. מרחב $\mathbf{R}^m$ הינו מרחב ליניארי (וקטורי) כי הוא מקיים:

i. לכל $\overline{x},\overline{y}\in\mathbf{R}^n$ $\overline{x}+\overline{y}\in\mathbf{R}^n$ ובנוסף,

א. $\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x}$,

ב. $\left(\overline{x}+\overline{y}\right)+\overline{z}=\overline{x}+\left(\overline{y}+\overline{z}\right)$

ג. קיים 0 כך ש- $\overline{x}+0=\overline{x}$,

ד. קיים וקטור $-\overline{x}$ כך ש- $\overline{x}+\left(-\overline{x}\right)=0$.

ii. לכל $\overline{x}\in\mathbf{R}^n$ ולכל מספר ממשי α $\alpha\overline{x}\in\mathbf{R}^n$ ובנוסף

א. $\alpha\left(\beta\overline{x}\right)=\left(\alpha\beta\right)\overline{x}$,

ב. $1\cdot\overline{x}=\overline{x}$,

ג. $\left(\alpha+\beta\right)\overline{x}=\alpha\overline{x}+\beta\overline{x}$,

ד. $\alpha\left(\overline{x}+\overline{y}\right)=\alpha\overline{x}+\alpha\overline{y}$.

7. במרחב ליניארי ניתן להגדיר מושג נורמה.

8. פונקציה $\left\|\overline{x}\right\|:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^+$ נקראת נורמה אם מתקיימים:

א. $\left\|\overline{x}\right\|=0$ אם ורק אם $\overline{x}=0$,

ב. $\left\|\alpha\overline{x}\right\|=\left|\alpha\right|\cdot\left\|\overline{x}\right\|$,

ג. אי שוויון המשולש $\left\|\overline{x}+\overline{y}\right\|\le\left\|\overline{x}\right\|+\left\|\overline{y}\right\|$.

9. דוגמאות של נורמה ב- $\mathbf{R}^2$, $\overline{x}=\left(x_1,x_2\right)$: (א) $\left\|\overline{x}\right\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, (ב) $\left\|\overline{x}\right\|_1=\left|x_1\right|+\left|x_2\right|$, (ג) $\left\|\overline{x}\right\|_\infty=\max\left\{\left|x_1\right|,\left|x_2\right|\right\}$.

10. פירושים של הנורמות אלו.

מרחב מכפלה פנימית. מרחב מטרי.

11. מרחב $\mathbf{R}^n$ הינו מרחב מכפלה פנימית (מכפלה סקלרית) כי בו ניתן להגדיר מכפלה פנימית שהיא מספר ממשי $\left\langle\overline{x},\overline{y}\right\rangle$ המקיים:

א. $\left\langle\overline{x},\overline{x}\right\rangle\ge 0$,

ב. $\left\langle\overline{x},\overline{x}\right\rangle=0$ אם ורק אם $\overline{x}=0$,

ג. $\left\langle\overline{x},\overline{y}\right\rangle=\left\langle\overline{y},\overline{x}\right\rangle$,

ד. $\left\langle\alpha\overline{x}+\beta\overline{y},\overline{z}\right\rangle=\alpha\left\langle\overline{x},\overline{z}\right\rangle+\beta\left\langle\overline{y},\overline{z}\right\rangle$.

12. קשר בין הנורמה לבין המכפלה הפנימית: $\left\|x\right\|=\sqrt{\left\langle\overline{x},\overline{x}\right\rangle}$.

13. דוגמאות של מכפלה פנימית: (1) $\left\langle\overline{x},\overline{y}\right\rangle=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$ כאשר $\overline{x}=\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in\mathbf{R}^n$, (2) $\left\langle f,g\right\rangle=\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx$ כאשר $f\in C\left[a,b\right]$.

14. מושג מרחק והקשר בין המרחק לנורמה $d\left(\overline{x},\overline{y}\right)=\left\|\overline{x}-\overline{y}\right\|$.

15. מרחק במישור ומרחב.

$d(A,B)\ge 0$

$d(A,B)=0\Leftrightarrow A=B$,

$d(A,B)=d(B,A)$,

$$. d(A,B) \le d(A,C) + d(C,B)$$

$$. d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad , A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$$

$$. d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad , A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$$

16. ההוכחה שהנורמה מקיימת את אי-שוויון המשולש:
כדי להוכיח את אי-שוויון המשלש נוכיח קודם את אי-שוויון קושי-שוורץ:

$$. \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

<u>הוכחת</u> האי-שוויון.

נקבע את x ו- y באופן שרירותי ונגדיר פולינום ממעלה שנייה של משתנה ממשי t לפי הנוסחה:

$$. P(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(t|x_i| - |y_i| \right)^2$$

ברור שלפי הבנייה $P(t) \ge 0$ אז הפרבולה הזאת לא חותכת את ציר ה- t או במילים אחרות למשוואה $P(t) = 0$ יש לכל היותר שורש אחד. נרשום את $P(t)$ בצורה:

$$. P(t) = t^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i^2| - 2t \sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i^2|$$

דיסקרימיננטה של ביטוי ריבועי תהיה לא גדולה מ-0 אז

$$. \frac{\Delta}{4} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \le 0$$

נחזור לאי-שוויון המשולש:

$$d(x,z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i + y_i - z_i)^2} = \left| \begin{matrix} a_i = x_i - y_i \\ b_i = y_i - z_i \end{matrix} \right| =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2} =$$

$$= d(x,y) + d(y,z)$$

17. דוגמה. $d(\overline{x},\overline{y}) = \left\|\overline{x}-\overline{y}\right\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - y_i\right)^2}$.