70. אם ניתן למצוא את הנגזרות החלקיות של פונקציות z_x ו- z_y אז הביטויים הבאים מהווים את 4 הנגזרות מסדר שני: $z_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, z_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, z_{yx}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}, z_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

71. דוגמה. חשב את הנגזרות המעורבות מסדר שני של הפונקציה $z=x^2\sin y-e^x y^3$.

$$z_x=2x\sin y-e^x y^3 \Rightarrow z_{xy}=2x\cos y-3e^x y^2,$$

$$z_y=x^2\cos y-3e^x y^2 \Rightarrow z_{yx}=2x\cos y-3e^x y^2,$$

קיבלנו כאן כי $z_{xy}=z_{yx}$.

72. האם תמיד $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$?

73. **משפט**. אם פונקציה $f(x,y)$ מוגדרת בתחום D והיא בעלת נגזרות חלקיות $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ רציפות בסביבה של $(x_0,y_0)\in D$ אז הנגזרות המעורבות שלה שוות באותה נקודה.

74. <u>הוכחה</u>. נבחר את $\Delta x,\Delta y$ כך ש- $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ תהיה בסביבה של (x_0,y_0) נתבונן ב- $A=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)$.
נקבע את Δy וסמן את $\varphi(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)$ אז
$A=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)$. φ מקיימת את משפט לגרנז' בקטע בין x_0 לבין $x_0+\Delta x$ אז קיימת נקודה $\tilde{x}$ ביניהן כך ש- $A=\varphi'(\tilde{x})\Delta x$ ובמושגים של פונקציה $f(x,y)$ מתקיים $A=\left(f'_x(\tilde{x},y_0+\Delta y)-f'_x(\tilde{x},y_0)\right)\Delta x$. עכשיו שוב נשתמש במשפט לגרנז' בין y_0 לבין $y_0+\Delta y$ ונקבל $A=f''_{xy}(\tilde{x},\tilde{y})\Delta x\Delta y$ ו- $\tilde{y}$ נמצא בין y_0 לבין $y_0+\Delta y$.
נשנה את סדר הסכימה ב- $A=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)+f(x_0,y_0)$ ונבצע אותן פעולות עבור $\psi(y)=f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)$. אז נקבל $A=f''_{yx}(\hat{x},\hat{y})\Delta y\Delta x$.
עכשיו נשווה את $A=f''_{yx}(\hat{x},\hat{y})\Delta y\Delta x$ ו- $A=f''_{xy}(\tilde{x},\tilde{y})\Delta x\Delta y$ ונעבור לגבור כאשר $\Delta x,\Delta y\to 0$ ונקבל את הטענה של המשפט.

75. דוגמה 1. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & x=y=0,\end{cases}$ אשר $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$.

אמנם, $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$,

$f_x(x,y)=\left(\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{\left(3x^2y-y^3\right)\left(x^2+y^2\right)-\left(x^3y-xy^3\right)2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ כאשר $(x,y)\neq(0,0)$, עכשיו

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\frac{(\Delta y)^5}{(\Delta y)^4}-0}{\Delta y}=-1.$$

באופן דומה $f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0$,

עבור $f_y(x,y)=\left(\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{\left(x^3-3xy^2\right)\left(x^2+y^2\right)-\left(x^3y-xy^3\right)2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

$(x,y)\neq(0,0)$.

$f_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(\Delta x)^5}{(\Delta x)^4}-0}{\Delta x}=1$.

76. נגדיר דיפרנציאל מסדר שני ב- (x_0,y_0) באופן רקורסיבי $d^2f=d(df)$. נניח שהנגזרות החלקיות מסדר שני קיימות. ואז עבור $z=f(x,y)$ הדיפרנציאל מסר שני

$$d^2f=d(df)=d\left(f_xdx+f_ydy\right)=\left(f_xdx+f_ydy\right)'_x dx+\left(f_xdx+f_ydy\right)'_y dy=$$
$$=\left(f_{xx}dx+f_{yx}dy\right)dx+\left(f_{xy}dx+f_{yy}dy\right)dy=f_{xx}dx^2+\left(f_{xy}+f_{yx}\right)dxdy+f_{yy}dy^2$$

77. בתנאי שהנגזרות המעורבות רציפות בנקודה ניתן לרשום את הדיפרנציאל בצורה $d^2f=f_{xx}dx^2+2f_{xy}dxdy+f_{yy}dy^2$ או $d^2f=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2(f)$.

78. דיפרנציאלים של פונקציות בעלות שלושה משתנים.