הרצאה 18
אינטגרל לא מסוים. שיטות האינטגרציה.

1. פונקציות שעבורן לא קיימות פונקציות קדומות בתוך פונקציות אלמנטאריות: e^{-x^2}, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$.

החלפת המשתנה (הצבה).

2. נניח ש- $t=\varphi(x)$ מוגדרת ודיפרצניאבילית על קבוצה $\{x\}$ (קטע, ציר, חצי ציר, איחוד קטעים) ו- $\{t\}$ היא התמונה. נניח גם של- $g(t)$ קיימת פונקציה קדומה $G(t)$ על $\{t\}$, $\int g(t)dt=G(t)+C$, אז על $\{x\}$ קיימת פונקציה קדומה ל- $g(\varphi(x))\varphi'(x)$ והיא $G(\varphi(x))$. במילים אחרות, $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx=G(\varphi(x))+C$.

3. דוגמה. $\int e^{\cos x}\sin x dx=\left|\begin{array}{c} t=\cos x \\ dt=-\sin dx\end{array}\right|=-\int e^t dt=-e^t+C=-e^{\cos x}+C$.

4. דוגמה. $\int \frac{(\arctan x)^{100}}{1+x^2}dx=\left|\begin{array}{c} t=\arctan x \\ dt=\frac{dx}{1+t^2}\end{array}\right|=\int t^{100}dt=\frac{t^{101}}{101}+C=\frac{(\arctan x)^{101}}{101}+C$.

5. דוגמה.

$$\int \frac{x^5dx}{(3x)^{12}+1}=\left|\begin{array}{c} t=(3x)^6 \\ dt=6(3x)^5 3dx\end{array}\right|=\frac{1}{6\cdot 3^6}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{6\cdot 3^6}\arctan t+C=\frac{1}{6\cdot 3^6}\arctan(3x)^6+C$$

.

6. דוגמה. $\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos xdx}{\cos^2 x}=\int\frac{\cos xdx}{1-\sin^2 x}=\left|\begin{array}{c} t=\sin x \\ dt=\cos xdx\end{array}\right|=\int\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$
$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$

אינטגרציה בחלקים.

7. נניח שפונקציות $u(x),v(x)$ דיפרנציאביליות על $\{x\}$ ולפונקציה $u'(x)v(x)$ קיימת פונקציה קדומה אז ל- $u(x)v'(x)$ גם קיימת פונקציה קדומה ומתקיימת הנוסחה $\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$.
8. ניתן לרשום את נוסחת אינטגרציה בחלקים בצורה $\int u\,dv=uv-\int v\,du$.
9. ישנם שלושה מקרים עיקריים לשימוש באינטגרציה בחלקים.
10. מקרה 1. ביטוים מן הצורה: פולינום $P_n(x)$ כפול $\sin x,\cos x,\frac{1}{\cos^2 x},a^x$ וכו'. כאן ב- $u=P_n(x)$ ו- dv את השאר.
11. דוגמה. $\int x\cos xdx$.

$$\int x\cos x\,dx=\left|\begin{array}{cc} u=x & du=dx \\ dv=\cos xdx & v=\sin x\end{array}\right|=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C$$

12. דוגמה. $\int x^2e^{-x}dx$.

$$\int x^2e^{-x}dx=\begin{vmatrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=e^{-x}dx & v=-e^{-x}\end{vmatrix}=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=e^{-x}dx & v=-e^{-x}\end{vmatrix}=$$

$$=-x^2e^{-x}+2\left(-xe^{-x}+\int e^{-x}dx\right)=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C$$

13. מקרה 2. ביטוים מן הצורה: פולינום $P_n(x)$ (או פונקציית חזקה באופן כללי) כפול $\arcsin x, \arctan x, \ln^k x$ וכו'. כאן ב- $dv=P_n(x)dx$ ו- u את הפונקציה.

14. דוגמה. $\int x^2\ln xdx$.

$$\int x^2\ln xdx=\begin{vmatrix} u=\ln x & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=x^2dx & v=\dfrac{x^3}{3}\end{vmatrix}=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C$$

15. מקרה 3. לאחר האינטגרציה בחלקים (לפעמים פעמיים) לא מתקבלת התשובה אלא המשוואה שממנה ניתן למצוא את התוצאה.

16. דוגמה. $\int \cos(\ln x)dx$.

$$\int \cos(\ln x)dx=\begin{vmatrix} u=\cos(\ln x) & du=-\sin(\ln x)\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx & v=x\end{vmatrix}=x\cos(\ln x)+\int \sin(\ln x)dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=\sin x(\ln x) & du=\cos(\ln x)\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx & v=x\end{vmatrix}=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-\int \cos(\ln x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}x\left(\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right)+C$$