חשבון אינפי 2-20152

דף תרגילים מס' 5

נגזרת מכוונת, נגזרות ודיפרנציאל מסדר גבוה

פתרונות ותשובות

1. חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) בכיוון של הווקטור $\bar{u}$

$$f(x,y)=xe^{xy}\ ,\ (x_0,y_0)=(-3,0)\ ,\ \bar{u}=2\bar{i}+3\bar{j}$$

הפונקציה $f(x,y)$ גזירה בסביבת הנקודה $(-3,0)$. וקטור היחידה בכיוון של $\bar{u}$ הוא

$$\bar{e}_{\bar{u}}=(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}})$$

נחשב את הנגזרת המכוונת לפי הנוסחה :

$$\frac{\partial f(-3,0)}{\partial \bar{u}}=\frac{\partial f(-3,0)}{\partial x}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}+\frac{\partial f(-3,0)}{\partial y}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}=$$

$$(e^{xy}+xe^{xy}\cdot y)\Big|_{(-3,0)}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}+xe^{xy}\cdot x\Big|_{(-3,0)}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{29}{\sqrt{13}}$$

2. חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y,z)$ בנקודה (x_0,y_0,z_0) בכיוון של הווקטור $\bar{u}$

(א) $f(x,y,z)=xy+yz^2-xz^3\ ,\ (x_0,y_0,z_0)=(2,0,3)\ ,\ \bar{u}=(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

הפונקציה $f(x,y,z)$ גזירה בסביבת הנקודה $(2,0,3)$.

$$\|\bar{u}\|=\sqrt{(-\frac{2}{3})^2+(-\frac{1}{3})^2+(\frac{2}{3})^2}=1$$

לפי הנוסחה , נקבל :

$$\frac{\partial f(2,0,3)}{\partial \bar{u}}=\frac{\partial f(2,0,3)}{\partial x}\cdot(-\frac{2}{3})+\frac{\partial f(2,0,3)}{\partial y}\cdot(-\frac{1}{3})+\frac{\partial f(2,0,3)}{\partial z}\cdot\frac{2}{3}=$$

$$(y-z^3)\Big|_{(2,0,3)}\cdot(-\frac{2}{3})+(x+z^2)\Big|_{(2,0,3)}\cdot(-\frac{1}{3})+(2yz-3xz^2)\Big|_{(2,0,3)}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{65}{3}$$

(ב) $f(x,y,z)=\sqrt{xyz}\ ,\ (x_0,y_0,z_0)=(2,4,2)\ ,\ \bar{u}=4\bar{i}+2\bar{j}-4\bar{k}$

הפונקציה $f(x,y,z)$ גזירה בסביבת הנקודה $(2,4,2)$.

וקטור היחידה בכיוון של $\bar{u}$ הוא $\bar{e}_{\bar{u}}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$

נחשב את הנגזרת המכוונת לפי הנוסחה :

$$\frac{\partial f(2,4,2)}{\partial \bar{u}}=\frac{yz}{2\sqrt{xyz}}\Big|_{(2,4,2)}\cdot\frac{2}{3}+\frac{xz}{2\sqrt{xyz}}\Big|_{(2,4,2)}\cdot\frac{1}{3}+\frac{xy}{2\sqrt{xyz}}\Big|_{(2,4,2)}\cdot(-\frac{2}{3})=\frac{1}{6}$$

3. באיזה כיוון (אם קיים, למצוא את הווקטור) קצב ההשתנות של הפונקציה $f(x,y)=x^2y+y^3$ בנקודה $(1,-1)$ שווה (א) ל-0 (ב) ל-20.

(א) דרך 1:

$$\frac{\partial f(1,-1)}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial f(1,-1)}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial f(1,-1)}{\partial y}\cdot\sin\alpha = -2\cos\alpha + 4\sin\alpha = 0 \Rightarrow \cot an\alpha = 2$$

$$\alpha = arc\cot an(2) + k\pi,\ k\in Z \Rightarrow \bar{u} = \left(\cos\left(arc\cot an(2)+k\pi\right), \sin\left(arc\cot an(2)+k\pi\right)\right)$$

דרך 2:

נסמן $\bar{u} = (a,b)$, אז

$$\frac{\partial f(1,-1)}{\partial \bar{u}} = -2\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + 4\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-2a+4b}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \Rightarrow a = 2b$$

$$\Rightarrow \bar{u} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}, \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}\right) = \left(\frac{a}{\sqrt{\frac{5}{4}a^2}}, \frac{a}{2\sqrt{\frac{5}{4}a^2}}\right),\ a\in R\setminus\{0\}$$

(ב) ערך מקסימלי של נגזרת מכוונת שווה לאורך וקטור גרדיאנט בנקודה הנתונה והוא שווה ל- $\sqrt{20}$, לכן אין כיוון כזה שהנגזרת המכוונת בנקודה שווה ל- 20.

4. מצא את גרדיאנט של שדה סקלרי u בנקודה M_0, כלומר $\nabla u(M_0)$

(א) $u = x + y + 2\sqrt{xy}$, $M_0(1,1)$

$$\nabla u(M_0) = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\bar{j} = (1+\frac{y}{\sqrt{xy}})\Big|_{(1,1)}\bar{i} + (1+\frac{x}{\sqrt{xy}})\Big|_{(1,1)}\bar{j} = 2\bar{i} + 2\bar{j}$$

(ב) $u = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $M_0(1,1,1)$

$$u = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$\nabla u(M_0) = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\bar{k} =$$

$$(\frac{x}{x^2+y^2+z^2})\Big|_{(1,1,1)}\bar{i} + (\frac{y}{x^2+y^2+z^2})\Big|_{(1,1,1)}\bar{j} + (\frac{z}{x^2+y^2+z^2})\Big|_{(1,1,1)}\bar{k} = \frac{1}{3}\bar{i} + \frac{1}{3}\bar{j} + \frac{1}{3}\bar{k}$$

5. הפונקציות $u(x,y)$, $v(x,y)$ הן גזירות בכל מישור, a,b מספרים קבועים. הוכח כי $\nabla(au+bv) = a\nabla u + b\nabla v$.

נסמן: $w(x,y) = au(x,y) + bv(x,y)$

$$\nabla(au(x,y)+bv(x,y)) = \nabla w(x,y) = \frac{\partial w(x,y)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\bar{j}$$

לפי כללי הגזירה נקבל:

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(au(x,y)+bv(x,y))}{\partial x} = a\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + b\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = a\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + b\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

$$\nabla(au(x,y)+bv(x,y)) =$$
$$= (a\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+b\frac{\partial v(x,y)}{\partial x})\bar{i} + (a\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+b\frac{\partial v(x,y)}{\partial y})\bar{j} =$$
$$a(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\bar{j}) + b(\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\bar{j})$$
$$= a\nabla u(x,y) + b\nabla v(x,y)$$

6. מצא דיפרנציאל מסדר שני של הפונקציות הבאות:

(א) $u = x^2y^3$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2y^3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6xy^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x^2y$$
$$d^2u = 2y^3dx^2 + 2\cdot 6xy^2dxdy + 6x^2ydy^2$$

(ג) $u = x^y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y(\ln x)^2$$
$$d^2u = y(y-1)x^{y-2}dx^2 + 2\cdot\left(x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x\right)dxdy + x^y(\ln x)^2dy^2$$