חשבון אינפי 2-20152

דף תרגילים מס' 6.

נגזרת של פונקציה סתומה, נקודות קיצון מקומי

פתרונות ותשובות

1. מצא את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של $z = f(x,y)$, כלומר $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ כאשר z מקיימת את המשוואה הנתונה $y^2 z e^{x+y} - \sin(xyz) = 12$.

נסמן: $F(x,y,z) = y^2 z e^{x+y} - \sin(xyz) - 12$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{y^2 z e^{x+y} - \cos(xyz)\cdot yz}{y^2 e^{x+y} - \cos(xyz)\cdot xy} = \frac{-zye^{x+y} + z\cos(xyz)}{ye^{x+y} - x\cos(xyz)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{2yze^{x+y} + y^2 z e^{x+y} - \cos(xyz)\cdot xz}{y^2 e^{x+y} - xy\cos(xyz)}$$

2. חשב את $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ בנקודה $(x_0, y_0, z_0) = (1, \ln 2, \ln 3)$, כאשר $z(x,y)$ מקיימת את המשוואה $xe^y + ye^z + 2\ln x - 8 = 0$.

נסמן: $F(x,y,z) = xe^y + ye^z + 2\ln x - 8$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(1, \ln 7, \ln\left(\log_7 e\right)\right) = -\left.\frac{e^y + \frac{2}{x}}{ye^z}\right|_{\left(1, \ln 7, \ln\left(\log_7 e\right)\right)} = -9$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\left(1, \ln 7, \ln\left(\log_7 e\right)\right) = -\left.\frac{xe^y + e^z}{ye^z}\right|_{\left(1, \ln 7, \ln\left(\log_7 e\right)\right)} = -7 - \log_7 e$$

3. מצא את z''_{xx} , z''_{yy} , z''_{xy} כאשר $z(x,y)$ מקיימת את המשוואה $z^3 + 3yz + x = 0$

פתרון:

$$3z^2 z'_x + 3yz'_x + 1 = 0 \Rightarrow z'_x = -\frac{1}{3z^2 + 3y}$$

$$3z^2 z'_y + 3z + 3yz'_y = 0 \Rightarrow z'_y = -\frac{3z}{3z^2 + 3y}$$

$$z''_{xx} = \frac{6z \cdot z'_x}{(3z^2 + 3y)^2}$$

$$z''_{xy} = \frac{6z \cdot z'_y + 3}{(3z^2 + 3y)^2}$$

$$z''_{yy} = -\frac{3\cdot z'_y\left(3z^2+3y\right)-3z\left(6z\cdot z'_y+3\right)}{(3z^2+3y)^2}$$

נשאר רק להציב את $z'_x,\quad z'_y$ בנגזרות z''_{xx} , z''_{yy} , z''_{xy}.

4. מצא את נקודות מקסימום, נקודות מינימום ונקודות אוכף של פונקציות הבאות:

(א) $f(x,y)=e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$

נמצא את הנקודות הקריטיות מהמערכת:

$$\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)+e^{\frac{x}{2}}=0 \\ 2e^{\frac{x}{2}}y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y^2+1=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$$

נחשב $\Delta = f''_{xx}\cdot f''_{yy}-(f''_{xy})^2$ בנקודה $M_0(-2,0)$:

$$f''_{xx}(M_0)=(e^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y^2+1)+e^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2})\Big|_{(-2,0)}=\frac{1}{2e}>0$$

$$f''_{yy}(M_0)=2e^{\frac{x}{2}}\Big|_{(-2,0)}=\frac{2}{e}$$

$$f''_{xy}(M_0)=e^{\frac{x}{2}}y\Big|_{(-2,0)}=0$$

$$\Delta(M_0)=\frac{1}{2e}\cdot\frac{2}{e}-0=\frac{1}{e^2}>0$$

לכן $M_0(-2,0)$ נקודת מינימום מקומי של הפונקציה $f(x,y)=e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$

(ב) $f(x,y)=3x^2y+y^3-3x^2-3y^2+2$

נמצא את הנקודות הקריטיות מהמערכת:

$$\begin{cases} f'_x=6xy-6x=0 \\ f'_y=3x^2+3y^2-6y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy-x=0 \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y-1)=0 \\ x^2+y(y-2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \end{cases}$$

נחשב $\Delta = f''_{xx}\cdot f''_{yy}-(f''_{xy})^2$ בנקודות $M_1(0,0)$, $M_2(0,2)$, $M_3(-1,1)$, $M_4(1,1)$:

$$f''_{xy}=6x \quad , \quad f''_{yy}=6y-6 \quad , \quad f''_{xx}=6y-6$$

$$\Delta(x,y)=(6y-6)^2-36x^2$$

$M_1(0,0)$ נקודת מקסימום מקומי $\Leftarrow$ $f''_{xx}(M_1)=-6<0$, $\Delta(M_1)=36>0$

$M_2(0,2)$ נקודת מינימום מקומי $\Leftarrow$ $f''_{xx}(M_2)=6>0$, $\Delta(M_2)=36>0$

$\Delta(M_3) = -36 < 0 \quad \Leftarrow \quad M_3(-1,1)$ נקודת אוכף

$\Delta(M_4) = -36 < 0 \quad \Leftarrow \quad M_4(1,1)$ נקודת אוכף

(ג) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2 y^2}$

נמצא את הנקודות הקריטיות מהמערכת:

$$\begin{cases} f'_x = 2x - \dfrac{2}{x^3 y^2} = 0 \\ f'_y = 2y - \dfrac{2}{x^2 y^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 y^2 - 1 = 0 \\ x^2 y^4 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}$$

נחשב $\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2$ בנקודות $M_1(1,1)$, $M_2(-1,-1)$, $M_3(-1,1)$, $M_4(1,-1)$:

$$f''_{xy} = \frac{4}{x^3 y^3} \quad , \quad f''_{yy} = 2 + \frac{6}{x^2 y^4} \quad , \quad f''_{xx} = 2 + \frac{6}{x^4 y^2}$$

$\Delta(M_1) = 8 \cdot 8 - 4^2 = 48 > 0$, $f''_{xx}(M_1) = 8 > 0 \quad \Leftarrow \quad M_1(1,1)$ נקודת מינימום מקומי

$\Delta(M_2) = 8 \cdot 8 - 4^2 = 48 > 0$, $f''_{xx}(M_2) = 8 > 0 \quad \Leftarrow \quad M_2(-1,-1)$ נקודת מינימום מקומי

$\Delta(M_3) = 8 \cdot 8 - (-4)^2 = 48 > 0$, $f''_{xx}(M_3) = 8 > 0 \quad \Leftarrow \quad M_3(-1,1)$ נקודת מינימום מקומי

$\Delta(M_4) = 8 \cdot 8 - (-4)^2 = 48 > 0$, $f''_{xx}(M_4) = 8 > 0 \quad \Leftarrow \quad M_4(1,-1)$ נקודת מינימום מקומי

(ד) $f(x,y) = 5xy - 7x^2 + 3x - 6y + 2$

נמצא את הנקודות הקריטיות:

$$\begin{cases} f'_x = 5y - 14x + 3 = 0 \\ f'_y = 5x - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1.2 \\ y = 2.76 \end{cases}$$

נחשב $\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2$:

$f''_{xx} = -14$, $f''_{yy} = 0$, $f''_{xy} = 5$ לכן המסקנה $\Delta = -25$ לכן $M(1.2,2.76)$ היא נקודת אוכף.

(ה) נתונה הפונקציה $f(x,y) = x \sin y$

נמצא את נקודות הקריטיות

$$\begin{cases} f'_x = \sin y = 0 \\ f'_y = x \cos y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pi k,\ k \in Z \end{cases}$$

נחשב $\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2$ בנקודות $M(0,\pi k)$

$$f''_{xy} = \cos y \quad , \quad f''_{yy} = -x \sin y \quad , \quad f''_{xx} = 0$$

$\Delta(M) = 0 \cdot 0 - 1^2 = -1 < 0$ לכן הנקודות $M(0,\pi k)$ הן נקודות אוכף.

(ו) $f(x,y)=e^x\cos y$

נמצא נקודות קריטיות:

$$\begin{cases} f'_x = e^x\cos y = 0 \\ f'_y = e^x(-\sin y) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ אין נקודות קריטיות.