הרצאה 24
נפח של גוף

1. נניח שגוף במרחב תלת ממדי נמצא מעל ציר ה- x כך שהיטלו על ציר ה- x הוא קטע $[a,b]$.
בנוסף נניח שעבור כל $x\in[a,b]$ ידוע לנו שטח החתך על ידי המישור אשר מאונך לציר ה- x
והשטח הוא פונקציה רציפה $S(x)$. אז נפח הגוף הוא $V=\int_a^b S(x)\,dx$.
2. הסבר לפי שיטת הפרוסות.
3. דוגמה. חשב את נפח האליפסויד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
4. נניח את האליפסויד על ציר ה- x כל ש- $x\in[-a,a]$ אז שטח החתך יהיה
$S(x)=\pi\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\sqrt{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$ כי החתך הוא התחום הנמצא בתוך
האליפסה $\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1$. זה נובע מהמשוואה $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$ לכן נפח
הגוף הוא $V=\int_{-a}^{a}S(x)\,dx=2\pi bc\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_0^a=\frac{4\pi bc}{3}$.
5. נפח הכדור (כמקרה פרטי של האליפסויד) שווה ל- $\frac{4\pi R^3}{3}$.

נפח של גוף סיבוב (שיטת פרוסות)

6. נפחים של גוף סיבוב בשיטת פרוסות.
7. תהיה פונקציה $f(x)\ge 0$ שרציפה ב- $[a,b]$. נסמן ב- R את תחום המישורי המוגבל על ידי
$y=f(x), y=0, x=a, x=b$

ונסובב את R סביב ציר ה- x, אז נפח הגוף

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

8. דוגמה. מצא את נפח גוף הסיבוב הנוצר כסיבוב של התחום המישור הכלוא בין
$y=\sqrt{x}, y=0, x=4$ סביב ציר ה- x.
$V=\pi\int_0^4 x\,dx=\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^4=8\pi$.
9. דוגמה. מצא את נפח גוף הסיבוב הנוצר כסיבוב של התחום המישור הכלוא בין
$y=x, y=1+x^2, x=0, x=1$ סביב ציר ה- x.

$$V=V_1-V_2=\pi\int_0^1\left(1+x^2\right)^2dx-\pi\int_0^1 x^2\,dx=\pi\int_0^1\left(1+x^2+x^4\right)dx=\pi\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{23\pi}{15}$$

נפח גוף סיבוב (שיטת הקליפות)

10. תהיה פונקציה $f(x) \geq 0$ שרציפה ב-$[a,b]$. נסמן ב- R את תחום המישורי המוגבל על ידי $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$. נסובב את R סביב ציר ה- y.

11. לפי שיטת הקליפות הנפח יהיה שווה ל- $V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$.

12. דוגמה. מצא את נפח של גוף הסיבוב הנוצר כסיבוב של התחום $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 0, x = 4$ סביב ציר ה- y. שני דרכים לפתרון.

דרך 1. $V = 2\pi \int_0^4 x\sqrt{x}\, dx = 2\pi \left. \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} \right|_0^4 = \frac{128\pi}{5}$

דרך 2. נמצא את נפח הגוף הנוצר כסיבוב של $x = y^2$ סביב ציר ה- y, אז

$V_1 = \pi \int_0^2 y^4\, dy = \pi \left. \frac{y^5}{5} \right|_0^2 = \frac{32\pi}{5}$, ונחסר אותו מנפח הגליל $V_2 = \pi R^2 H = 32\pi$. נקבל

$V = V_2 - V_1 = 32\pi - \frac{32\pi}{5} = \frac{128\pi}{5}$.

אורך קשת של עקומה

13. אורך קשת העקומה $y = f(x)$ כאשר f גזירה בריפות ב-$[a,b]$ - עקומה חלקה.

14. נחלק קטע $[a,b]$ לתת קטעים נחליף את אורך העקומה באורך של קו שבור. נבנה סכום אינטגראלי: $L_n = \sum_{k=1}^{n} l_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\, \Delta x_k$,

בתנאי שסדרה $\{x_k\}$ עולה.

15. אם נסמן ב- $d = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ ונדרוש ש- $d \to 0$ אז הסכום האינטגראלי שואף לאינטגרל

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

16. דוגמה. מצא את אורך קשת המעגל.

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ כאשר $-r \leq x \leq r$ ונמצא את חצי אורך הקשת. אז

$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ והאינטגרל

$$l = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 2\int_{-r}^{r} \frac{r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 4r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} =$$

$$= 4r \arcsin \left. \frac{x}{r} \right|_0^r = 4r \arcsin 1 = 2\pi r$$

שטח מעטפת של גוף סיבוב

17. תהיה פונקציה $f(x) \geq 0$ שרציפה ב-$[a,b]$ יחד עם הנגזרת. אז שטח של מעטפת גוף הנוצר כסיבוב של העקומה $y = f(x)$ בין $x = a, x = b$ סביב ציר ה-x הוא:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx .$$

18. דוגמה. מצא את השטח של מעטפת הכדור.

$$S = 2\pi \int_0^r f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx = 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = 2\pi r \int_0^r dx = 4\pi r^2$$

יישומים פיזיקאליים

19. עבודה של הכוח משתנה עם התנועה על ציר ה-x מנקודה $x = a$ ל-$x = b$: $W = \int_a^b F(x)\,dx$

.

20. מרכז הכובד: $x_C = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, y_C = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$.

21. דוגמה. מצא את מרכז הכובד של המשולש שקודקודיו הם $A(0,4), O(0,0), B(2,0)$.

הנוסחה היא $x_C = \dfrac{\int_0^2 xf(x)\,dx}{\int_0^2 f(x)\,dx} = \dfrac{\int_0^2 x(-2x+4)\,dx}{\int_0^2 (-2x+4)\,dx} = \dfrac{\left(-\frac{2x^3}{3}+2x^2\right)\Big|_0^2}{\left(-x^2+4x\right)\Big|_0^2} = \dfrac{2}{3}$ ו-

$$y_C = \frac{\frac{1}{2}\int_0^2 f^2(x)\,dx}{\int_0^2 f(x)\,dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^2 (-2x+4)^2\,dx}{\int_0^2 (-2x+4)\,dx} = \frac{2\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right)\Big|_0^2}{\left(-x^2+4x\right)\Big|_0^2} = \frac{4}{3} .$$

אפשר לבדוק את התוצאה באמצעות בניית התיכונים ומציאת נקודת החיתוך שלהם.