

תרגיל בית 1

שאלה 1

במאגר הבחינות של הקורס בהסתברות יש 100 שאלות. בכל מועד בחינה נשלפות 10 שאלות באופן אקראי. הנח כי לכל בחירה של 10 שאלות אותה הסתברות. תלמיד שמעולם לא ביקר בקורס (ולכן אינו יודע את החומר), הצליח להשיג ולהתכונן על 60 מהשאלות במאגר. על מנת לעבור את הבחינה עליו לענות נכונה לפחות על 6 שאלות מתוך 10. על מנת להצטיין בבחינה עליו ענות נכונה לפחות על 9 מתוך 10.

א. חשב את ההסתברות שהתלמיד יעבור את הבחינה

ב. חשב את ההסתברות שהתלמיד יצטיין

חברו של התלמיד ראה פרסומת בטלוויזיה והבין ש "רד בול נותן לך כנפיים". אם ידוע שרד בול מעניק כוחות על, ואם ישתה רד בול לפני המבחן יענה נכונה על x שאלות בהסתברות $c \cdot x$ (לכל $x \in [0, 1, \dots, 10]$).

ג. הגדירו מרחב מדגם מתאים

ד. מצאו את הקבוע c והגדירו מידת הסתברות מתאימה על מרחב המדגם. שימו לב, מידת ההסתברות צריכה להיות מוגדרת לכל תת קבוצה של מרחב המדגם שלכם.

ה. בהנחה שחברו מעוניין רק לעבור, האם הייתם ממליצים לו ללמוד גם הוא את השאלות למבחן או לשתות רד בול? נמקו.

ו. בהנחה שחברו מעוניין להצטיין, האם הייתם ממליצים לו ללמוד גם הוא את השאלות למבחן או לשתות רד בול? נמקו.

שאלה 2

הוכיחו את הרציפות של פונקציית ההסתברות עבור סדרה יורדת של מאורעות. כלומר, הוכיחו שעבור סדרה יורדת של מאורעות מתקיים:

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

שאלה 3

תהא P מידת הסתברות מעל Ω כך ש $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ ו- P מקיימת:

$$P(k) = \frac{5}{k} P(k-1) \quad (k \geq 1)$$

מצא את ההסתברות $P(k)$ באופן מפורש.

שאלה 4

מטילים שלוש קוביות מאוזנות: לבנה, שחורה ואדומה.

הנחה: כל שלישית תוצאות הטלה (אחת ללבנה, אחת לשחורה ואחת לאדומה) מתקבלת בהסתברות שווה.

א. תארו מרחב מדגם מתאים.

ב. מה ההסתברות שתוצאת הקובייה השחורה היא אי-זוגית?

ג. מה ההסתברות שסכום התוצאות בקובייה הלבנה והאדומה הוא 5?

ד. מה ההסתברות שסכום התוצאות בקובייה הלבנה והשחורה שווה לפעמיים תוצאת הקובייה האדומה?

ה. מה ההסתברות שקיים לפחות זוג אחד של קוביות שסכומם הוא 6?

הערה: ניתן להשתמש בכלל הכלה והפרדה:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

שאלה 5

למסיבה חורפית הוזמנו n אורחים. כל אחד מהם נעל מגפיים, והסיר את המגפיים בכניסה למסיבה.

בתום המסיבה כל אחד מהם בחר שני מגפיים באופן מקרי. מה ההסתברות שלכל אורח יש מגף ימני ומגף שמאלי?

הניחו כי לכל השמה של $2n$ המגפיים ל- n האורחים (2 לכל אורח), סיכוי שווה להתקבל.