1、一租赁公司有40套设备，若每月每套租金200元时可全租出，当租金每月每套增加10元时，租出设备就减少一套，对于租出的设备每套每月需要花20元的维护费。问每月一套的租金多少时公司可获得最大利润？

$40-\frac{x-200}{10}$

解：设每月每套租金为 $\boxed{200+10x}$、则租出设备的总数 $40-x$

利润：$L(x)=(200+10x)(40-x)-20(40-x)\quad(0\le x\le 40)$

$=8000-200x+400x-10x^2-800+20x$

$=-10x^2+220x+7200$

$L'(x)=-10\cdot 2x+220$

令 $L'(x)=0\Rightarrow$ 得驻点 $x=11$

由于驻点唯一，所求实际问题最值一定存在，即租金310元时，利润最大

2、已知某厂生产 x 件产品的成本为 $C(x)=25000+200x+\frac{1}{40}x^2$（元），产品产量 x 与价格 P 之间的关系为：$P(x)=440-\frac{1}{20}x$（元）

求：(1) 要使平均成本最小，应生产多少件产品？

(2) 当企业生产多少件产品时，企业可获最大利润，并求最大利润.

平均成本 $\overline{C(x)}=\frac{C(x)}{x}=\frac{25000}{x}+200+\frac{1}{40}x$

$\overline{C(x)}'=25000\left(-\frac{1}{x^2}\right)+0+\frac{1}{40}\cdot 1$

$=-\frac{25000}{x^2}+\frac{1}{40}$

令 $\overline{C(x)}'=0$ 得驻点 $x=1000$（件）

由于驻点唯一，所求实际问题最值一定存在，即生产1000件时平均成本最小。

2、已知某厂生产 x 件产品的成本为 $C(x)=25000+200x+\frac{1}{40}x^2$（元），产品产量 x 与价格 P 之间的关系为：$P(x)=440-\frac{1}{20}x$（元）

求：（1）要使平均成本最小，应生产多少件产品？

（2）当企业生产多少件产品时，企业可获最大利润，并求最大利润.

利润 $L(x) = xP(x) - C(x) = x\cdot\left(440-\frac{1}{20}x\right) - \left(25000+200x+\frac{1}{40}x^2\right)$

$= 440x - \frac{1}{20}x^2 - 25000 - 200x - \frac{1}{40}x^2$

$= -\frac{3}{40}x^2 + 240x - 25000$

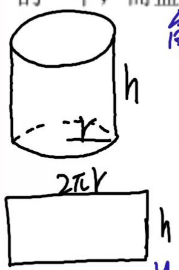
$L'(x) = -\frac{3}{40}\cdot 2x + 240 = -\frac{3}{20}x + 240$

令 $L'(x)=0$ 得驻点 $x=1600$

由于驻点唯一，所求实际问题最值一定存在.

即生产1600件时，利润最大. $L(1600)=167000$（元）

3、要设计一个容积为 V 立方米的有盖圆形油桶，已知单位面积造价：侧面是底面的一半，而盖又是侧面的一半，问油桶的尺寸如何设计，可以使造价最低？



解 设圆柱形油桶底面半径 r，高为 h，侧面单位面积造价为 L，造价 y.

$$\begin{cases} V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi r^2} \\ y = \pi r^2\cdot 2L + 2\pi r\cdot hL + \pi r^2\cdot\dfrac{L}{2} \end{cases}$$

$y = 2\pi r^2 L + 2\pi r\cdot\frac{V}{\pi r^2}L + \pi r^2\cdot\frac{L}{2}$

$= \pi r^2\frac{5}{2}L + \frac{2V}{r}L$

$y' = \pi\frac{5}{2}L\cdot 2r + 2VL\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right)$

$= 5\pi L r - \frac{2VL}{r^2}$

$5\pi L r = \frac{2VL}{r^2}$

$5\pi r^3 = 2V$

$r^3 = \frac{2V}{5\pi}$

$r = \sqrt[3]{\frac{2V}{5\pi}}$

令 $y'=0$ 得驻点 $r=\sqrt[3]{\frac{2V}{5\pi}}$

由于驻点唯一，所求实际问题最值一定存在，即油桶底面半径 $\sqrt[3]{\frac{2V}{5\pi}}$，高 $\sqrt[3]{\frac{25V}{4\pi}}$ 时造价最低

$r = \sqrt[3]{\frac{2V}{5\pi}}$

$r = \left(\frac{2V}{5\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$

$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi\left[\left(\frac{2V}{5\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2}$

$= \frac{V}{\pi\left(\frac{2V}{5\pi}\right)^{\frac{2}{3}}}$

$= \frac{V}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{2V}{5\pi}\right)^2}}$

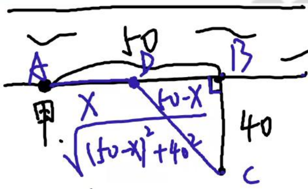
$= \frac{V}{\pi\sqrt[3]{\frac{4V^2}{25\pi^2}}}$

$= \frac{\sqrt[3]{V^3}}{\sqrt[3]{\pi^3}\sqrt[3]{\frac{4V^2}{25\pi^2}}}$

$= \sqrt[3]{\frac{V^3}{\pi^3\cdot\frac{4V^2}{25\pi^2}}}$

$= \sqrt[3]{\frac{25V}{4\pi}}$

4、甲、乙二城位于一直线形河流的同一侧，甲城位于岸边，乙城离河岸 40 公里，乙城在河岸的垂足与 甲 城 相距 50 公里，两城计划在河岸上合建一个污水处理厂，已知从污水处理厂到甲乙二城铺设排污管道的费用分别为每公里 500、700 元。问污水处理厂建在何处，才能使铺设排污管道的费用最省？



$(\sqrt{u})'$ $u=(50-x)^2+40^2$

解：设污水厂建在河岸离甲城 x 公里处.

费用 $L(x)=500x+700\sqrt{(50-x)^2+40^2}$ $(0\le x\le 50)$

$L'(x)=500+700\dfrac{1}{2\sqrt{(50-x)^2+40^2}}\cdot 2(50-x)\cdot(-1)$

$=500-700\cdot\dfrac{\cancel{2}(50-x)}{\cancel{2}\sqrt{(50-x)^2+40^2}}$

令 $L'(x)=0$ 得驻点. $x=50-\dfrac{100}{\sqrt6}$

由于驻点唯一，所求实际问题最值一定存在

即建在河岸离甲城 $50-\frac{100}{\sqrt6}$ 公里处时，费用最省

$500-700\dfrac{(50-x)}{\sqrt{(50-x)^2+40^2}}=0$

$500=700\dfrac{(50-x)}{\sqrt{(50-x)^2+40^2}}$

$5\sqrt{(50-x)^2+40^2}=7(50-x)$

$25[(50-x)^2+40^2]=49(50-x)^2$

$25(50-x)^2+25\times40^2=49(50-x)^2$

$25\times40^2=24(50-x)^2$

$(50-x)^2=\dfrac{25\times40^2}{24}$

$50-x=\sqrt{\dfrac{25\times40^2}{4\times6}}$

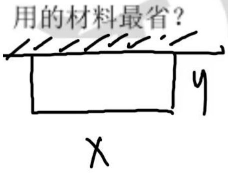
$50-x=\dfrac{5\cdot40}{2\sqrt6}=\dfrac{100}{\sqrt6}$

$x=50-\dfrac{100}{\sqrt6}$

$=50-\dfrac{100\sqrt6}{6}$

$=50-\dfrac{50}{3}\sqrt6$

5、某工厂需要围建一个面积为 512 m^2 的矩形堆料场，一边可以利用原有的墙壁，其他三边需要砌新的墙壁。问：堆料场的长和宽各为多少时，才能使砌墙所用的材料最省？



解：设堆料场的长为 x 米，宽为 y 米，则 $xy=512$.

所砌墙壁的长度 $L=x+2y=x+2\cdot\dfrac{512}{x}$.

$L=x+\dfrac{1024}{x}$ $(x>0)$

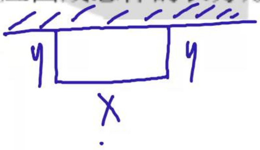
$L'=1+1024(-\dfrac{1}{x^2})=1-\dfrac{1024}{x^2}$

令 $L'=0$ 得驻点 $x=32$.

由于驻点唯一，所求实际问题最值一定存在.

即堆料场长为 32 米，宽为 16 米时，所用材料最省

6、某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋，现有存砖只能够砌成 20 m 长的墙壁。问：应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大。



设小屋的长为 X 米，宽为 y 米.

则 $x+2y=20 \Rightarrow y=\frac{20-x}{2}$.

$S=xy=x\cdot\frac{20-x}{2}=\frac{20x-x^2}{2}=10x-\frac{1}{2}x^2\ (0<x<20)$

$S'=10-\frac{1}{2}\cdot 2x=10-x$

令 $S'=0$ 得驻点 $x=10$

由于驻点唯一，所求实际问题最值一定存在

即小屋长为 10 米宽为 5 米时面积最大

7、某公司通过电视和报纸两种方式做某种产品的推销广告，经统计，销售收入 R（万元）与电视广告费用 x（万元）及报纸广告费用 y（万元）之间的关系为：

$R=16x+22y-2xy-x^2-2y^2+50$

$x+y=10 \Rightarrow y=10-x$

现准备投入广告费用 10 万元，问如何分配电视和报纸的广告费用，可使销售收入最大？

解 $x+y=10 \Rightarrow y=10-x$

$R=16x+22y-2xy-x^2-2y^2+50$

$=16x+22(10-x)-2x(10-x)-x^2-2(10-x)^2+50$

$=16x+220-22x-20x+2x^2-x^2-2(100-20x+x^2)+50$

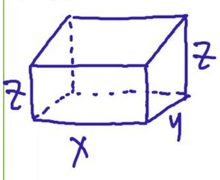
$=16x+220-22x-20x+\cancel{2x^2}-x^2-200+40x\cancel{-2x^2}+50$

$=-x^2+14x+70$

$R'=-2x+14$ 令 $R'=0$ 得驻点 $x=7$.

由于驻点唯一，所求实际问题最值一定存在，即电视广告费7，报纸3

8、要作一无盖长方体形水槽，已知底部造价为每平方米 6 元，侧面造价均为每平方米 2 元，设计的总造价为 72 元，问水槽的长、宽、高各为多少时，它的容积最大？



解设水槽的长为 x 米、宽为 y 米，高为 z 米，容积 V 立方米

则 $V=xyz$

$72=6xy+2yz\cdot 2+2xz\cdot 2$

$72=6xy+4yz+4xz$

$z=\frac{72-6xy}{4y+4x}=\frac{36-3xy}{2y+2x}$

$V=xy\cdot\frac{36-3xy}{2y+2x}\quad (x>0,\ y>0)$

$$V=\frac{xy(36-3xy)}{2(x+y)}=\frac{36xy-3x^2y^2}{2(x+y)}$$

$$V_x'=\frac{(36y-3y^2 2x)\cancel{2}(x+y)-(36xy-3x^2y^2)\cancel{2}}{2\cancel{4}(x+y)^2}$$

$$=\frac{\cancel{36xy}+36y^2-\cancel{6x^2y^2}-6xy^3-\cancel{36xy}+\cancel{3x^2y^2}}{2(x+y)^2}$$

$$=\frac{-3x^2y^2+36y^2-6xy^3}{2(x+y)^2}$$

$$V_x'=\boxed{\frac{y^2(-3x^2+36-6xy)}{2(x+y)^2}}=0$$

$$\begin{cases} V_x'=\dfrac{y^2(-3x^2+36-6xy)}{2(x+y)^2}=0 \\ V_y'=\dfrac{x^2(36-3y^2-6xy)}{2(x+y)^2}=0 \end{cases}$$

得驻点$(2,2)$

由驻点唯一，所求实际问题最值一定存在

即水槽长为2米、宽为2米，高为3米时，水槽容积最大

$$\begin{cases} -3x^2+36-6xy=0 & ① \\ 36-3y^2-6xy=0 & ② \end{cases}$$

①−② $-3x^2+3y^2=0$

$\therefore x^2=y^2$

$x=y$

$-3x^2+36-6x^2=0$

$36-9x^2=0$

$36=9x^2$

$x^2=4 \Rightarrow x=2 \quad y=2$