数学

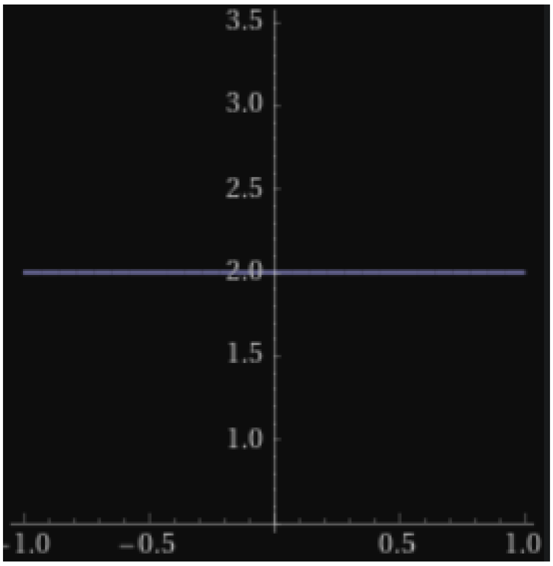
第一章函数极限和连续

1.函数

- y=f(x)
  - x是自变量 x 的范围叫定义域
  - y是因变量 y 的范围叫做值域
  - f是对应法则
- $\frac{b}{a}$、$\frac{x}{y}$、$\frac{1}{x+1}$ $\sqrt[\text{开方数}]{\text{被开方数}}$

常数函数

- y=c(常数) 偶函数 关于y轴对称

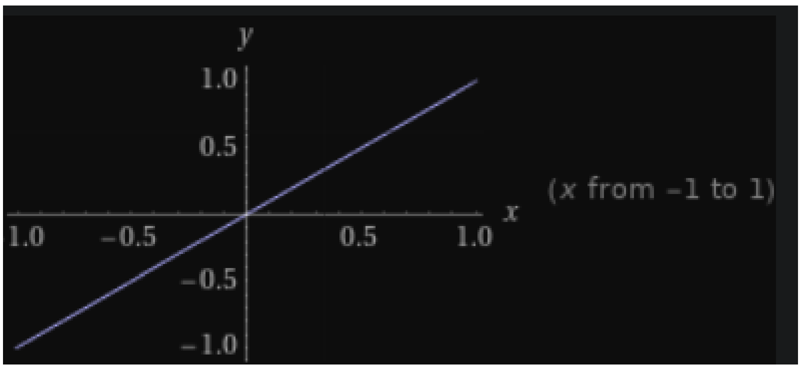


基本初等函数

幂函数

幂函数 $y=x^{\mu}$ (μ != 0)

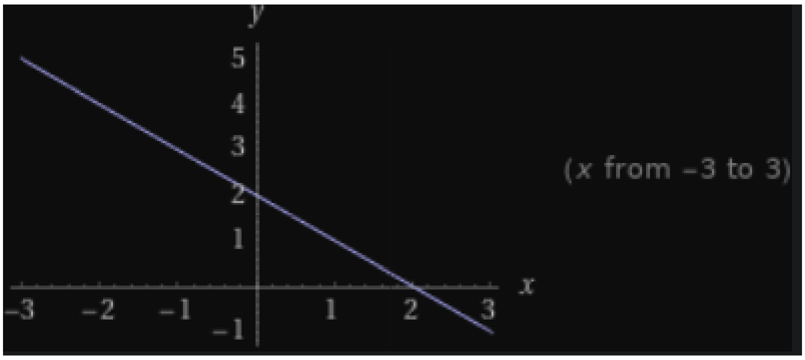
- $y=x^1$ =x 奇函数



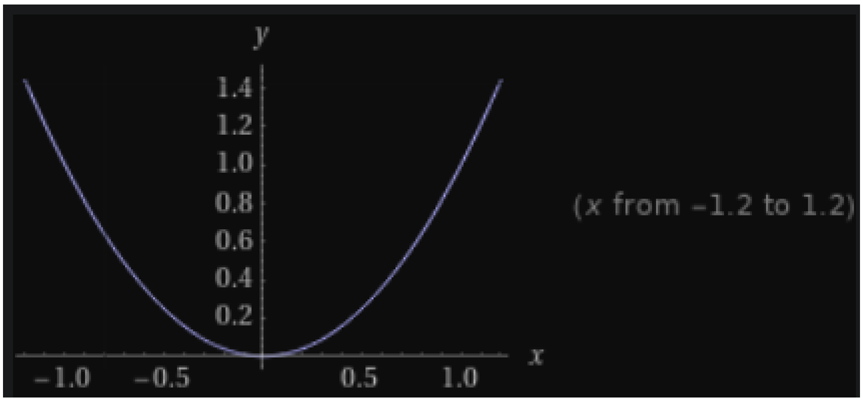
  注意 奇函数特点关于圆点对称

- y=kx+b (一条直线)

  例子 y=2-x 如何判断是直线 x是一次幂

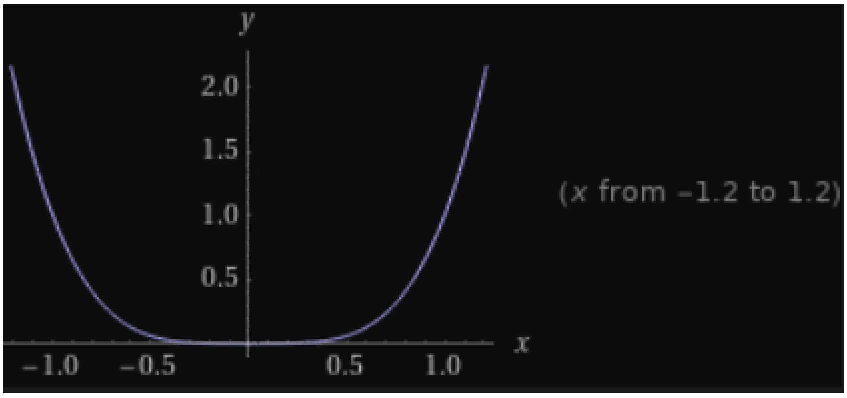


- $y=x^2$ 偶函数



注意 偶函数特点关于y轴对称

- $y=x^4$ 偶函数

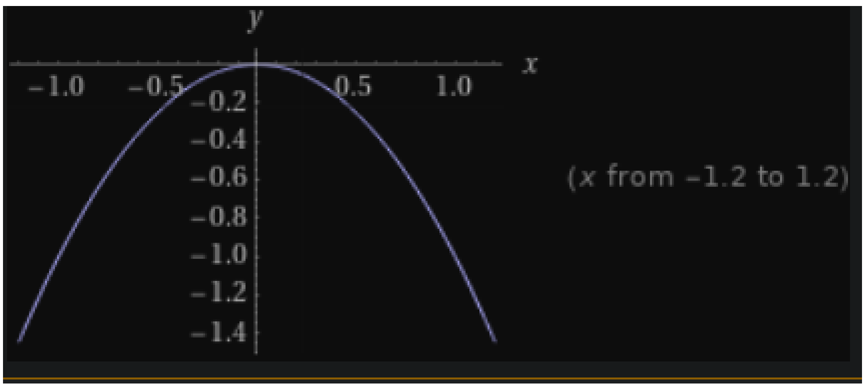


- $y=ax^2+bx+c$(抛物线)

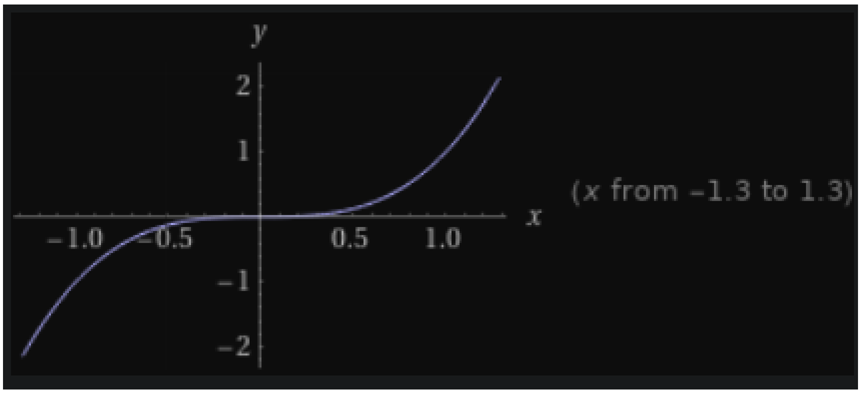
  a>0 开口向上

  a<0 开口向下

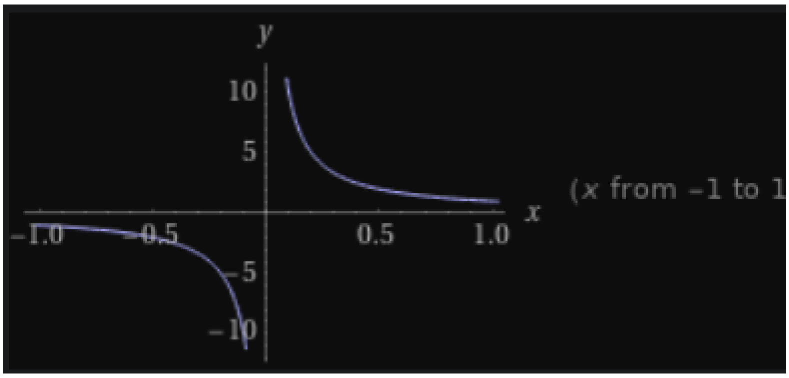
- $y=-x^2$ 偶函数



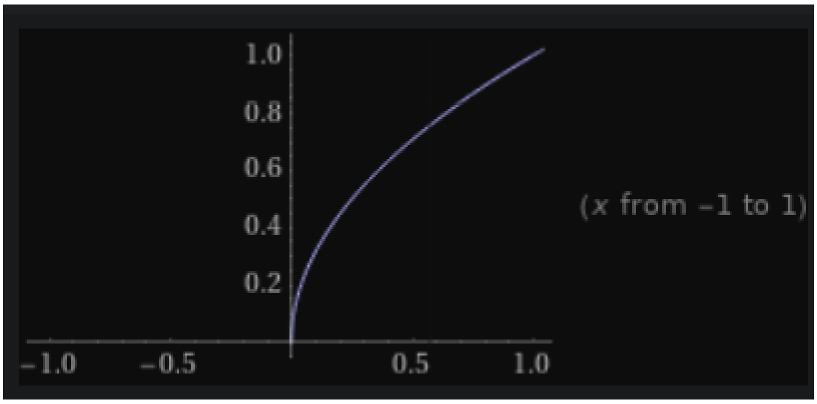
- $y=x^3$ 奇函数



- $y=x^{-1}=\frac{1}{x}$ 奇函数 定义域（$-\infty$,0)∪（0，$+\infty$)



- $y=\sqrt{x}$ =x^ $\frac{1}{2}$ ^ 非奇非偶 定义域 [0,+∞)



幂函数的性质

1. $(x^{p})^{q} = x^{p*q}$

   例子 （x^{3}）$^{2} = x^{6}$!= x^{5}

2. $X^{p} * X^{q} = x^{p+q}$

   例子（x^{3}）$^{2} = x^{5}$!= x^{6}

3. $x^{q} \backslash x^{p} = x^{p-q}$

   例子 $x^{3} \backslash x^{2} = x$

4. $x^{p} \backslash 1 = x^{-p}$

   例子 $x \backslash 1 = x^{-1}$ （反比例函数） $x^{3} \backslash 1 = x^{-3}$

5. $^{m}\sqrt{\,}x^{n} = x^{m\backslash n}$

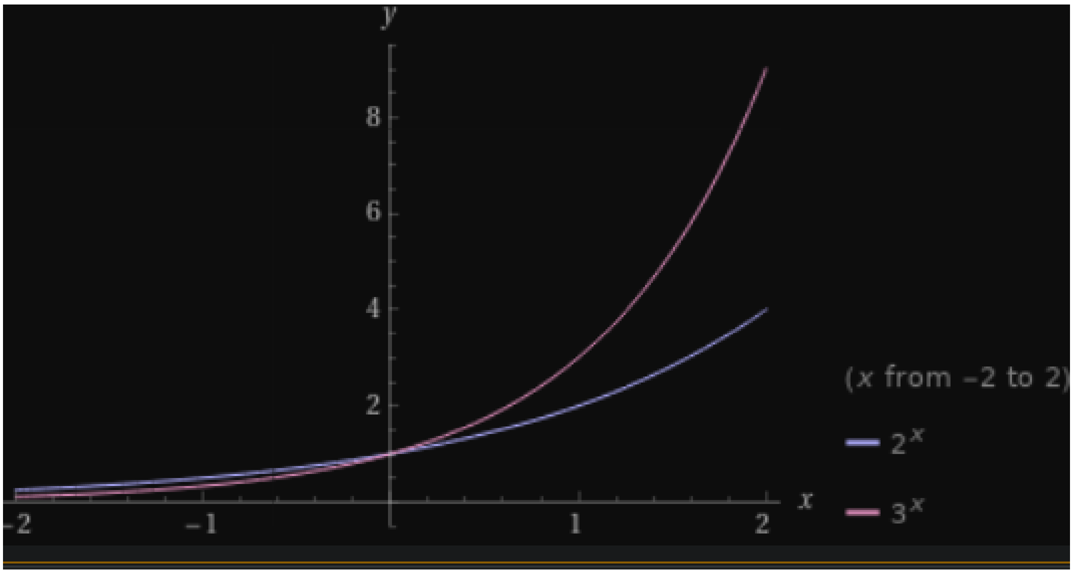
   例子 $^{2}\sqrt{\,}x^{1} = \sqrt{\,}x = x^{2\backslash 1}$ $^{3}\sqrt{\,}x = x^{3\backslash 1}$ $^{4}\sqrt{\,}x^{3} = x^{4\backslash 3}$

指数函数

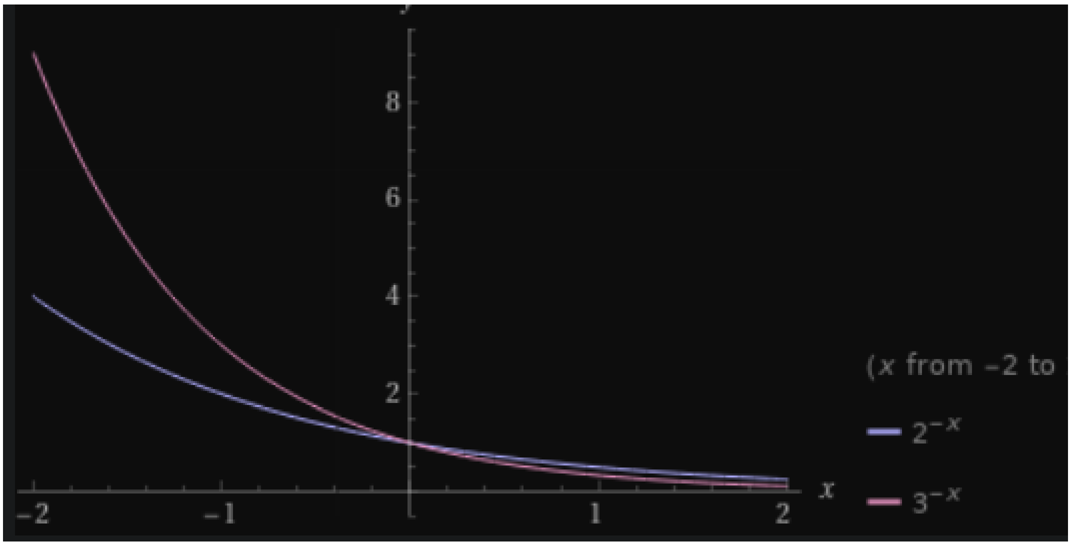
- y= a ^{x} (a>0 且, a!= 1) x∈ (-∞,+∞) y∈(0,+∞)

1. a^{0} =1 a必须大于0

2. a>1 y=2^{x} y=3^{x}

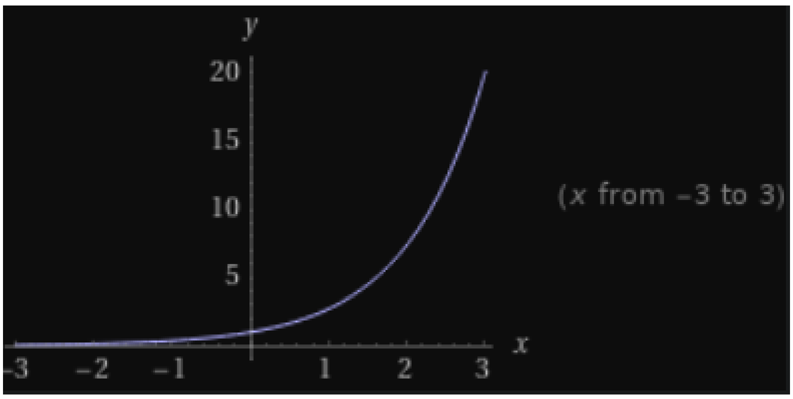


3. 0<a<1 y=($\frac{1}{2}$)^{x} y=($\frac{1}{3}$)^{x}

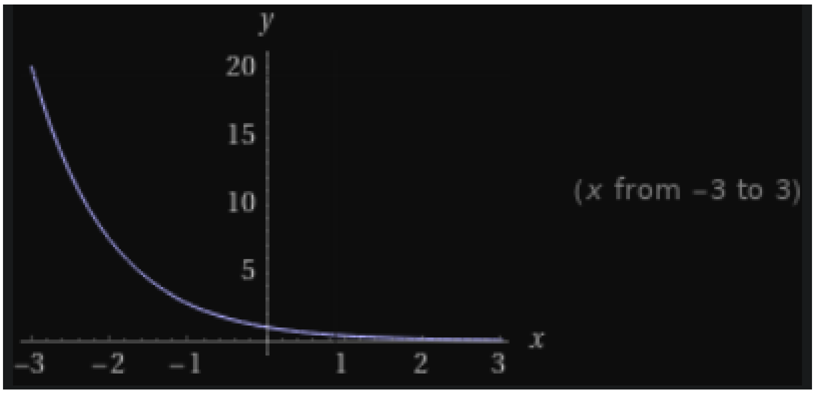


4. y=e^{x} e=2.718281... >1

注意：y=e^{x}<=>x=ln^{y}



5. y=e^{-x} =(e^{-1})^{x} = (e\1)^{x} e\1<1 和y=e^{x} 对称

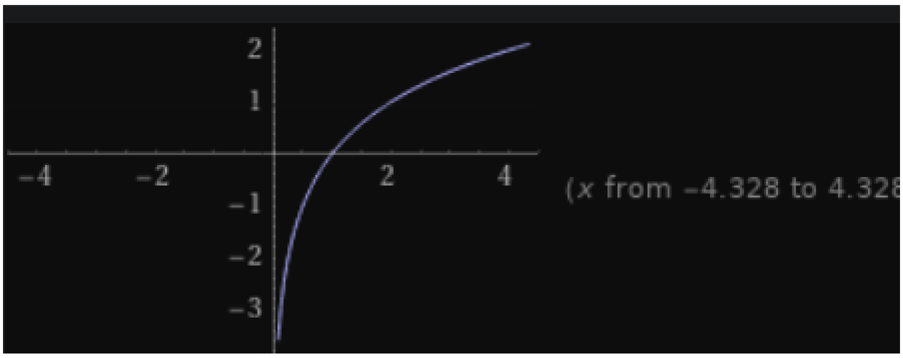


指数函数性质

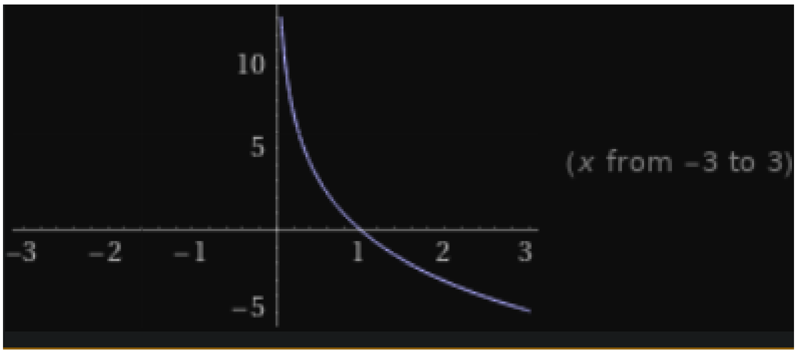
1. $(e^x)^y = e^{xy}$
2. $e^{x1} * e^{x2} = e^{x1+x2}$
3. $e^{x1} \backslash e^{x2} = e^{x1-x2}$
4. $e^x \backslash 1 = e^{-x}$
5. $^m\sqrt{(e^x)^n} = {}^m\sqrt{e^{xn}} = e^{m\backslash xn}$
6. $(a*b)^x = a^x * b^x$
7. 例题
    - $(e^x)^2 = e^{2x}$!= e^{x2}
    - $e^{3x} * e^{2x} = e^{5x}$
    - $e^{3x} - e^{2x} = e^{2x}(e^x - 1)$! $= e^x$
    - $e^{3x} \backslash e^{2x} = e^x$
    - $^3\sqrt{e^{2x}} = e^{3\backslash 2x}$
    - $2^x * e^x = (2e)^x$

对数函数

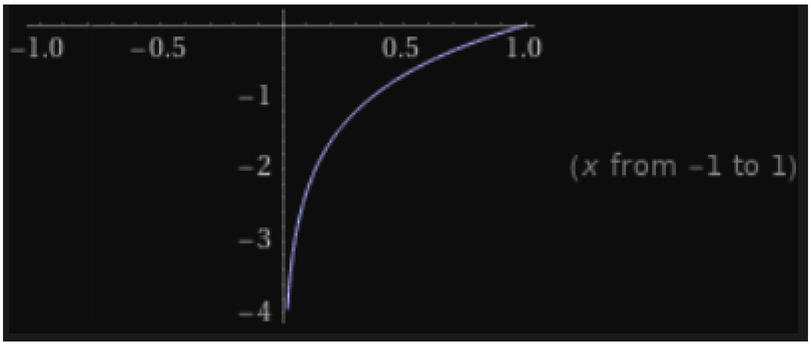
- $y=\log^x{}_a$ x>0 x是对数里面的真数 a >0 a != 1 a是对数里面的底数 定义域 （0，+∞）
- a>1



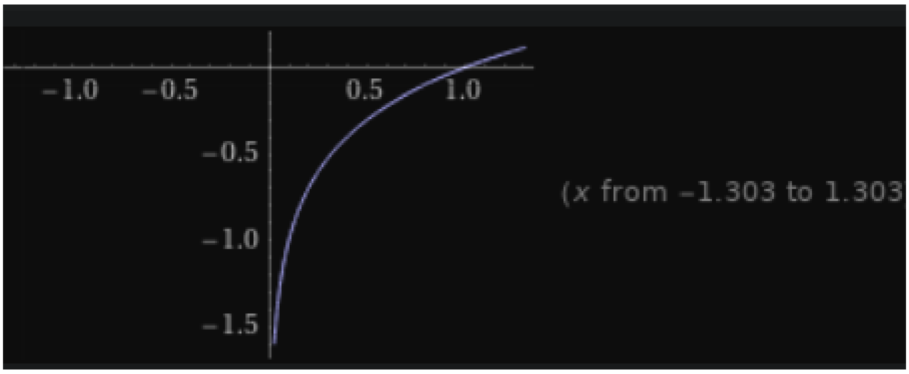
- 0<a<1



- y=$\log^{1}{}_{a}$=0　　y=$\log^{a}{}_{a}$ =1
- a=e 时 y=$\log^{x}{}_{e}$ =$\ln^{x}$



- a=10 时 y=$\log^{x}{}_{10}$ =$\lg^{x}$

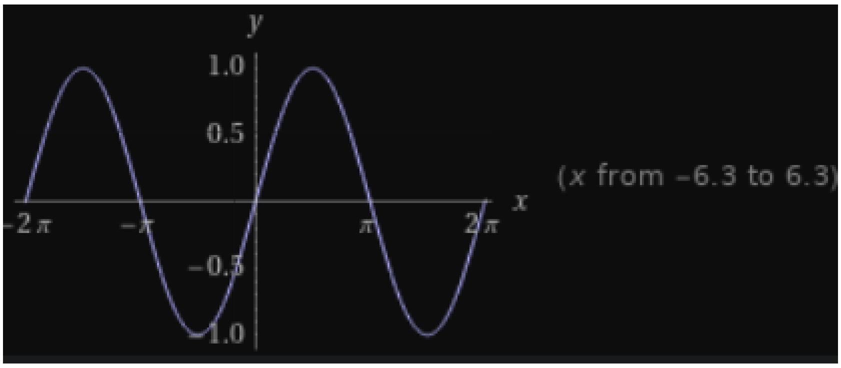


对数性质

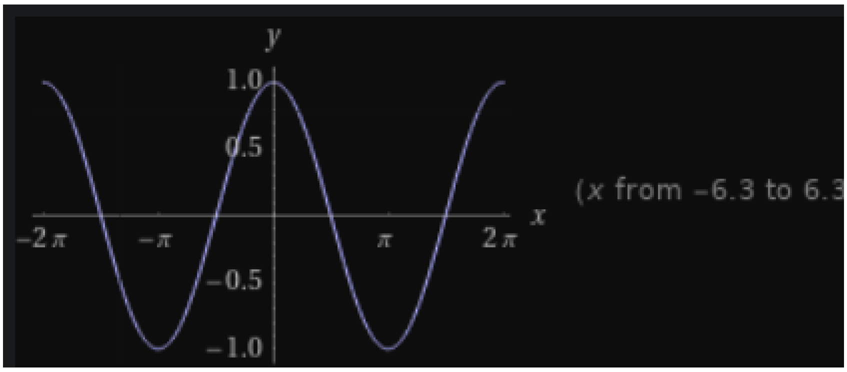
1. $\log^{x}{}_{a}$ +$\log^{y}{}_{a}$ =$\log^{xy}{}_{a}$　　$\ln^{x}$ + $\ln^{y}$ =$\ln^{xy}$
2. $\log^{x}{}_{a}$ -$\log^{y}{}_{a}$ =$\log^{y/x}{}_{a}$　　$\ln^{x}$ - $\ln^{y}$ =$\ln^{y/x}$
3. $\log_a b^m = m\log_a b$　　$\ln x^m = m\ln x$
4. 对数恒等式 $e^{\ln A}$ =A
5. $\log^{b}{}_{a}$ =$\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$　　$\log_2 3 = \dfrac{\ln 3}{\ln 2} = \dfrac{\log_4 3}{\log_4 2}$

三角函数

1. 正弦函数 y=sinx 周期 t=2π 有界函数 奇函数 最大1 最小-1



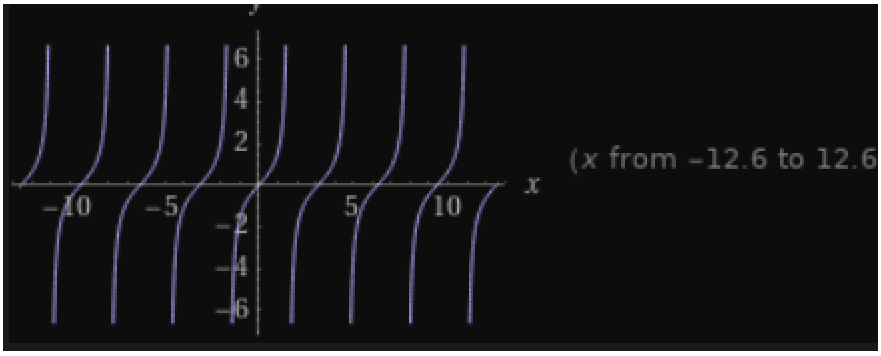
2. 余弦函数 y=cosx 周期 t=2π 有界函数 偶函数 最大1 最小-1



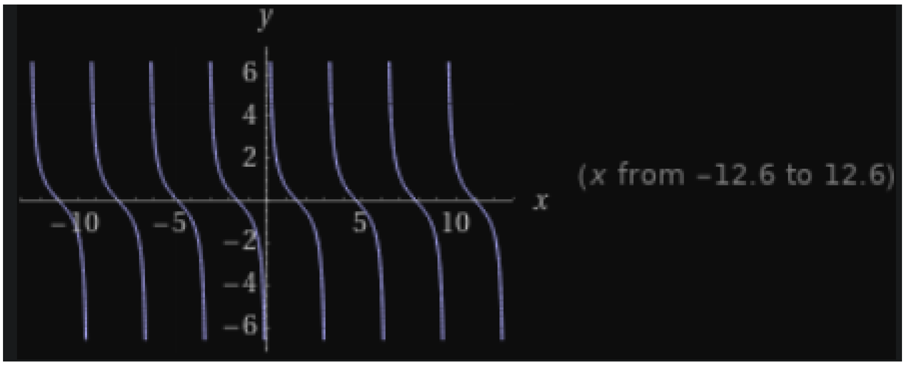
cosπ=-1   必考

cos0=1   必考

3. 正切函数 y=tanx = $\frac{sinx}{cosx}$ 周期 t=π 奇函数



4. 余切函数 y=cotx= $\frac{1}{tanx}$ = $\frac{cosx}{sinx}$ 周期 t=π 奇函数

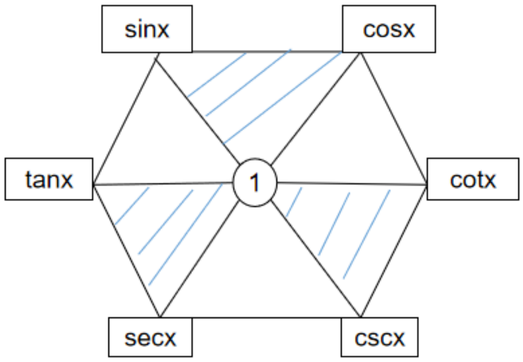


5. 正割函数 y=secx=$\frac{1}{cosx}$ 偶函数

6. 余割函数 y=cscx=$\frac{1}{sinx}$ 奇函数

记忆技巧

-



- $\sin^2 x + \cos^2 x=1$ $\tan^2x+1=\sec x^2$ $1+\cot^2x=\csc^2x$

  三角形上顶点的平方等于下顶点的平方
- tanx=$\frac{sinx}{cosx}$ cotx=$\frac{cosx}{sinx}$

  任意一个顶点等于顺时针的两个相邻顶点的商
- secx=$\frac{1}{cosx}$ tanx=$\frac{1}{cotx}$ cscx=$\frac{1}{sinx}$

  对角线互为倒数

二倍角公式：

- sin2x=xsinx * cosx
- $\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x = 2\cos^2-1=1-2\sin^2x$

降幂公式

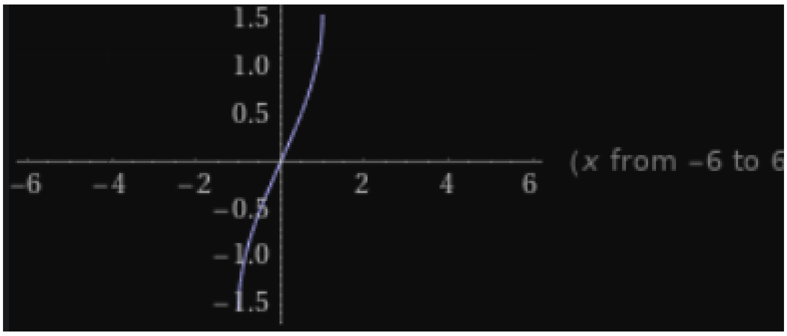
- $\sin^2x=\frac{1-cos2x}{2}$
- $\cos^2x=\frac{1+cos2x}{2}$

三角函数值

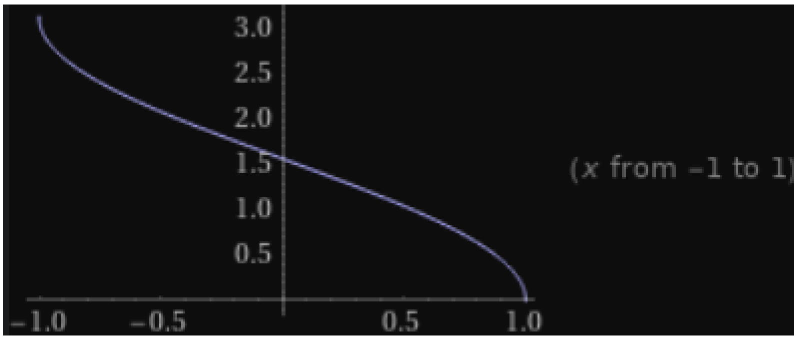
角α	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**120°**	**135°**	**150°**	**180°**
弧度制	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sinx	0	1/2	√2/2	√3/2	1	√3/2	√2/2	1/2	0
cosx	1	√3/2	√2/2	1/2	0	-1/2	-√2/2	-√3/2	-1
tanx	0	√3/3	1	√3	\	-√3	-1	-√3/3	0
cotx	\	√3	1	√3/3	0	-√3/3	-1	-√3	\
cotx=$\frac{1}{tanx}$									
secx=$\frac{1}{cosx}$									
secx=$\frac{1}{sinx}$									

反三角函数

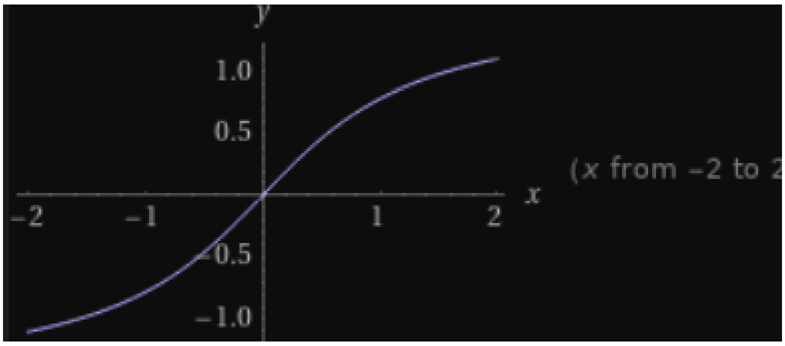
1. 反正弦函数 y=arcsinx 奇函数 有界函数 定义域 x [-1,1] y[-$\frac{\pi}{2}$,$\frac{\pi}{2}$]



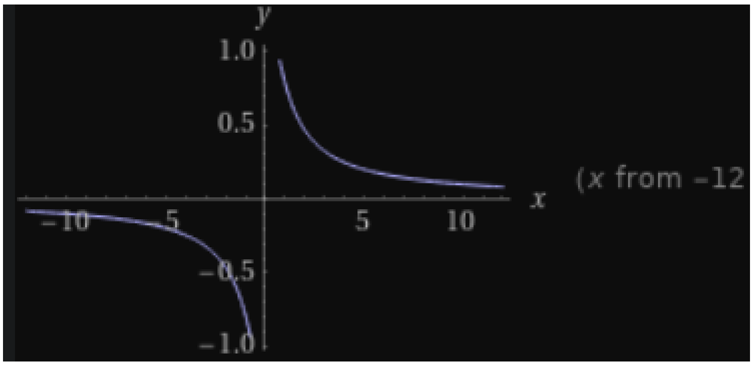
2. 反余弦 y=arccosx　定义域 x [-1,1] y[0,π]



3. **反正切函数** y=arctanx　奇函数 有界函数 定义域 x [-∞,∞] y[-$\frac{\pi}{2}$,$\frac{\pi}{2}$]



4. **反余切函数** y=arccotx 有界函数　定义域 x [-∞,∞]　y[0,π]



图像可能有差距

5. 考试题型
   1. sin$\frac{\pi}{6}$=$\frac{1}{2}$　arcsin$\frac{1}{2}$=$\frac{\pi}{6}$
   2. tan$\frac{\pi}{4}$=1 arctan1=$\frac{\pi}{4}$

复合函数

- 例 y=$(x^2+3)^3$　由u=x^2+3 和 y=u^3 复合
- 技巧 符合拆分分单独的初等函数
- 例题
  1. y=sin(x+1)　由u=x+1 和 y=sinu 复合
  2. y=$\log^{2x+2}{}_3$　由u=^2x+2 和 y= $\log^{u}{}_3$　复合

3. y=arssinx^2 由u=x^2 和 y=arssinu 复合
4. y=$\cos^2 x$ 由u=cosx 和 y=y=u^2 复合
5. y=$\ln^2 x$ 由u=lnx 和 y=u^2 复合

初等函数

- 初等函数：由基本初等函数及常数，经过有限次的加，减，乘，除及有限次的复合运算所构成，并能用一个式子表示的函数

分段函数

- $y = \begin{cases} x & x > 0 \\ 1 - x & x <= 0 \end{cases}$

考点一求函数定义域

1. 求初等函数及分段函数的定义域
   1. $\frac{1}{□}$ **□ != 0 例** $\frac{1}{x}$ **!= 0**
   2. **$\sqrt[2n]{□}$ □ >= 0 例 y=$\sqrt{x}$ x>=0**
   3. $\sqrt[2n+1]{□}$ □ [-∞,∞] 例 y=$\sqrt[3]{x}$ [-∞,∞]
   4. **y=$\log_a □$ □ > 0 或者 y=$\ln^x$ x>0 y=$\lg^x$ x>0**
   5. arcsin□ 或者 arccos□ □ [-1,1] 例子 arcsinx [-1,1] arccosx [-1,1]
   6. 例子

      y=$\sqrt{2-x}$ 2-x>=0 -> x<=2 ->∞

      y=ln(x-3) x-3>0 -> x>3 -> ∞

      y=$\frac{1}{x+1}$ x+1 !=0 ->x!=-1 -> **(-∞,-1)U(-1,∞)**

      y=$\frac{\sqrt{64-x^2}}{ln(x-5)}$ $\begin{cases} 64-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 64 \\ x-5>0 \Rightarrow x>5 \\ \ln(x-5) \neq 0 \Rightarrow x-5 \neq 1 \end{cases}$ $-8 \leq x \leq 8$, $x>5$, $x \neq 6$ $[5,6) \cup (6,8]$

      注意ln算法是 $\ln^1$ =0 所以 x-5 !=1 大于取两边小于取中间

      y=$\sqrt{16-x^2}$ + ln(x-2) $y=\sqrt{16-x^2}+\ln(x-2)$ $\begin{cases} 16-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 16 \\ x-2>0 \Rightarrow x>2 \end{cases}$ $(2,4]$

      y=$\frac{arcsin(\frac{x-1}{3})}{\sqrt[3]{x-2}}$ $\begin{cases} -1 \leq \frac{x-1}{3} \leq 1 \Rightarrow -3 \leq x-1 \leq 3, \ -2 \leq x \leq 4 \\ x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \end{cases}$ $[-2,2) \cup (2,4]$

      y=$ \begin{cases}
      x& x <= 0 \\ x+1 & 0<x<2 \\ x^2 & 2<=x<=5

      \end{cases}$ $(-\infty,5]$

      分段函数求定义域 就是把所有加一起
   7. 真题
      1. 2017 .11 $y=\frac{\sqrt{x-1}}{\ln x}$ $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x>0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 1 \\ x>0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ $(1,+\infty)$
      2. 2018.11 $y=\frac{\ln(x-1)}{\sqrt{2-x}}$ $\begin{cases} x-1>0 \\ 2-x>0 \end{cases}$ $x>1$, $x<2$ $(1,2)$

3. 2019.11 $y=\frac{\sqrt{16-x^2}}{\ln(x+3)}$ $\begin{cases}16-x^2\geq 0\\ x+3>0\\ \ln(x+3)\neq 0\end{cases}$ $x^2\leq 16$ $x>-3$ $x+3\neq 1$ $-4\leq x\leq 4$ $x>-3$ $x\neq -2$ $-4\ -3\ -2\ 4$ $(-3,-2)\cup(-2,4]$

4. 2020.11 $y=\frac{\ln(x-1)}{\sqrt{5-x}}$ $\begin{cases}x-1>0\\ 5-x>0\end{cases}$ $x>1$ $x<5$ $1\ 5$ $(1,5)$

5. 2021.11 $y=\frac{\ln(x-6)}{\sqrt{9-x}}$ $\begin{cases}x-6>0\\ 9-x>0\end{cases}$ $x>6$ $x<9$ $6\ 9$ $(6,9)$

6. 2022.11 $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & x>0\\ \ln(1+x) & x\leq 0\end{cases}$ $\begin{matrix}x>0\\ 1-x^2\geq 0\\ x^2\leq 1\Rightarrow -1\leq x\leq 1\end{matrix}$ $\cup$ $\begin{cases}x\leq 0\\ 1+x>0\Rightarrow x>-1\end{cases}$ $(0,1]\cup(-1,0]$ $-1\ 0\ 1$ $(-1,1]$ $\checkmark$

7. 第6题　分段函数取并集

8. 求抽象函数的定义域

    1. 定义域x的取值范围
    2. f对()内的范围一致

例：y=f(x)的定义域（0，1] 则f(x+1) 的定义域（-1, 0]

0<x<=1　　　　　　0<x+1<=1 -> -1<x<=0

例：y=f(x)的定义域[0，1] 则f($\ln^x$) 的定义域 [1,e]

0<=x<=1　　　　　　0<=$\ln^x$<=1 -> 1<=x<=e

注$\ln^x$ 函数性质 x=1 时y=0 x=e时y=1

例：y=f(2x-1)的定义域[0,1]，求f(x)的定义域 [-1,1]

0<=x<=1　0<=2x<=2 -1<=2x-1<=1　[-1,1]

解题思路：f(2x-1)=f(x) 需要用当前x的定义域去还原

考点二

单调性

- 定义：若对任意$x_1,x_2\in(a,b)$,当$x_1<x_2$则$f(x_1)<f(x_2)$称f(x)在a,b单调递增

  若对任意$x_1,x_2\in(a,b)$,当$x_2<x_1$则$f(x_2)<f(x_1)$称f(x)在a,b单调递减

奇偶性

- 定义：设函数f(x)在定义域D关于圆点对称（-a,a)

  f(x)=f(-x) 偶函数 关于y轴对称

  f(-x)=-f(x)或f(x)+f(-x)=0 奇函数 关于圆点对称

- 常见奇函数

  $x,x^3,x^5,\ldots,x^{2n+1}$,sinx,tanx,cotx,cscx,arcsinx,arctanx

  g(x)=f(x)-f(-x) 例：$g(x)=e^x-e^{-x}$ ->$g(-x)=e^{-x}-e^x$ -> g(x)=-g(x) =>奇函数

- 常见偶函数

  $x^2,x^4,x^6,\ldots,x^{2n}$, cosx ,secx, |x| ,c(常数)

  g(x)=f(x)+f(-x) 例：$g(x)=e^x+e^{-x}$ ->$g(x)=e^x+e^{-x}$ -> g(x)=-g(x) =>偶函数

- 计算
  - 加减奇偶性： 奇 +/- 奇=奇 偶 +/- 偶 =偶　奇 +/- 偶 =非奇，非偶
  - 乘除奇偶性：同偶异奇 ， 奇 x/÷ 奇=偶　偶 x/÷ 偶 =偶 奇 x/÷ 偶 =奇
  - 复合函数奇偶性：内偶则偶，内奇同外 奇与奇复合=奇、

内层是偶的复合函数是偶

- 例题

  判断奇偶性：

  1. y=x^3-3sinx　奇-奇=奇
  2. y=$\frac{1-x^2}{1+x^2}$　$\frac{偶}{偶}$　=偶

周期性

- 定义：设函数的定义域D,若存在实数T>0,对于任意x∈恒有f(x+/-T)=f(x),则称　f（x）为周期函数 T周期
- 注意：周期一般是最小正周期
- 例
  - y=Asin(ωx+φ)+B　T=$\frac{2\pi}{|\omega|}$
  - y=Acos(ωx+φ)+B　T=$\frac{2\pi}{|\omega|}$

    例子 y=sin2x 周期 T=$\frac{2\pi}{2}$　=π

    例子 y=cos(x+3)+4 周期 T=$\frac{2\pi}{1}$　=2π 看x前面系数

    例子 y=sin2x+cos$\frac{x}{3}$　周期 T1=$\frac{2\pi}{2}$ =π　T2=$\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}$　=6π 然后找最小公倍数 6π
  - y=Atan(ωx+φ)+B　T=$\frac{\pi}{|\omega|}$
  - y=Acot(ωx+φ)+B　T=$\frac{\pi}{|\omega|}$

    例子：y=tan2x+1 周期 $\frac{\pi}{2}$

有界性

- 定义：设函数f(x)在某个区间有定义，若存在实数M>0，对于改区间内任意的x恒有|f(x)| <M 则称函数f(x)在该区间内有界函数
- 例
  - y=sinx　-1<=sinx<=1　|sinx|<=1
  - y=cosx　|cosx|<=1
  - y=arctanx　|arctanx|<$\frac{\pi}{2}$
  - y=arccotx　arccotx　<π

2.极限

数列极限

- 分析下面几个数列的变化趋势 n->∞
  - 1,$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}$ 2,$\frac{1}{2}$ 3,......,$\frac{1}{2}$ n　-->0　　收敛
  - 2,$\frac{3}{2}$,$\frac{4}{3}$,......,$\frac{n+1}{n}$　...... 1+ $\frac{1}{n}$-->1　　收敛
  - 1,$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$,...... $\sqrt{n}$,...... -->∞　发散
  - 0,1,0,1,...... $\frac{1+(-1)^n}{2}$　　不清楚0/1　　发散
  - 6,6,6,6,6,...... , 6 ,...... ,6　　　　收敛
- 数列的定义：当n——>∞时，若数列{x_n}无限接近某个确定的常数a则称

  n——>∞时,{x_n}收敛于a

  $\lim_{n\to+\infty} x_n$=a

  若这样的a不存在，则称|x_n|发散 $\lim_{n\to+\infty} x_n$不存在
- 结论：

- $\lim_{n\to+\infty} c$=c　　　　例：$\lim_{n\to+\infty} 6$=6
- $\lim_{n\to+\infty} q^n$=0 （|q| < 1）例：$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}^n$=0
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$=0
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k}$=0 (k>0)　　例：$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}$=0

- 收敛数列的性质：
  1. 唯一性，若{xn}收敛则它的极限唯一 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = a$　$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = b$ 则 $a=b$
  2. 有界性，若{xn}收敛则{xn}比有界，反之不成立

     注意：有界不一定收敛 0.1.0.1.0.1... 有界 但它发散

     无界一定发散 例如：$1^2,2^2,3^3,\ldots,n^2,\ldots$发散
  3. 单调有界数列必收敛

     例：收敛是有界的**充分不必要**条件

     箭头向右=>充分条件

     箭头向左<=必要条件

     箭头向左向右<=>充分必要条件

- 数列极限四则运算法则
  - $\lim_{n\to+\infty} x_n$=A ，$\lim_{n\to+\infty} y_n$=B 则
    1. $\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n)$=A +/- B
    2. $\lim_{n\to+\infty}(x_n * y_n)$=A * B
    3. $\lim_{n\to+\infty}(\frac{x_n}{y_n})$=$\frac{A}{B}$ (B != 0)

- 例题
  - $\lim_{n\to+\infty}(\frac{n-2}{3n+3})$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}-\frac{2}{n}}{\frac{3n}{n}+\frac{3}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\frac{2}{n}}{3+\frac{3}{n}} = \frac{1-0}{3+0} = \frac{1}{3}$

    技巧抓大头 $\frac{n}{3n}$=$\frac{1}{3}$
  - $\lim_{n\to+\infty}(\frac{n^2+2n+3}{4n^2+5n+6})$　$\frac{n^2}{4n^2}=\frac{1}{4}$
  - $\lim_{n\to+\infty}(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3})$　$\frac{n^3}{5n^3}=\frac{1}{5}$
  - 2017.12 $\lim_{n\to+\infty}(\frac{2n^2+n-1}{3n^2-5n+7})$　$\frac{2n^2}{3n^2}=\frac{2}{3}$
  - $\lim_{n\to+\infty}(\frac{3n+1}{2n+5})^2$　$\frac{9n^2}{4n^2}=\frac{9}{4}$
  - $\lim_{n\to+\infty} \frac{(4n+5)(2n+8)}{(3n+6)(n+2)}$　$\frac{8n^2}{3n^2}=\frac{8}{3}$
  - $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{5^n}$ = $\lim_{n\to+\infty}(\frac{3}{5})^n$　=0
  - $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2^2}) + (\frac{1}{2^3}) + \ldots (\frac{1}{2^n})$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} 1-(\frac{1}{2})^n = 1$

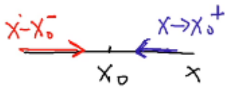
    等比数列求和公式$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$
  - $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2}) + (\frac{2}{n^2}) + (\frac{3}{n^2}) + \ldots (\frac{n}{n^2})$

    等差数列求和公式$\frac{(a_1+a_n)n}{2}$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1+n)n}{2n^2}$

    $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+6^n}{2^{n+1}+6^{n+1}} = \frac{1}{6}$

函数极限

x --> x_0 时极限

- 一.x --> x_0 时极限 
- x ——> x_0的含义：
  1. x——>x_0^-
  2. x——>x_0^+
  3. x != x_0
- 定义：当x ——> x_0时，若f(x)无限接近某个确定常数A,则称x ——> x_0时，t(x)以A为极限
- 记：$\lim_{x\to x_0} f(x)$=A
- **结论：$\lim_{x\to x_0} f(x)$=A <=> $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$=$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$=A**
- 真题：2019.1 $\lim_{x\to a} f(x)$=A 的充要条件（）

  A:$\lim_{x\to a^-} f(x)$=A B:$\lim_{x\to a^+} f(x)$=A

  C:$\lim_{x\to a^-} f(x)$=$\lim_{x\to a^+} f(x)$ D:C:$\lim_{x\to a^-} f(x)$=$\lim_{x\to a^+} f(x)$=A
- 极限的性质：如果函数的极限存在，则极限唯一
  1. $\lim_{x\to x_0} c$=c
  2. $\lim_{x\to x_0} x$=x_0
- 函数极限四则运算法则：

  设：$\lim_{x\to x_0} f(x)$=A $\lim_{x\to x_0} g(x)$=B (均存在)，则
  - $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$=A+B
  - $\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$=A-B
  - $\lim_{x\to x_0}[f(x)*g(x)]$=A*B $\lim_{x\to x_0} cf(x)$=C * A $\lim_{x\to x_0} f^2(x)$=A^n
  - $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$=$\frac{A}{B}$ (B !=0)
- 例题：
  1. $\lim_{x\to 2}[2x^3-x^2+1]$= 2*$2^3$-$2^2$+1=16-4+1=13
  2. $\lim_{x\to 1}[x^3+2\sqrt{\quad} x+\frac{1}{x}]$=1+2+1=4
  3. $\lim_{x\to -1}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2-6x+4}$=$\frac{4+3+1}{2+6+4}$=$\frac{8}{12}$=$\frac{2}{3}$

     推广：$\lim_{x\to x_0}(a_nx^n+\ldots a_1x^1+a_0)$= $a_nx_0^n+\ldots a_1x_0+a_0$ **（将x_0代入）**
  4. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-9}$=$\frac{(x-1)(x-3)}{(x+3)(x-3)}$=$\frac{2}{6}$=$\frac{1}{3}$

     做题思路因为带入之后分母为0 分母因式分解 a^2-b^2=(a+b)(a-b) 分子十字相乘法
  5. $\lim_{x\to 2}(\frac{x^2}{x^2-4}-\frac{1}{x-2})$=$\lim_{x\to 2}(\frac{x^2}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x-2})$=$\lim_{x\to 2}(\frac{x^2}{(x-2)(x+2)}-\frac{x+2}{(x-2)(x+2)})$

     =$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{(x-2)(x+2)}$=$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}$=带入 =$\frac{3}{4}$
  6. f(x)=$\begin{cases} x^2+1 & x!=0 \\ 2 & x=0 \end{cases}$ 求$\lim_{x\to 0} f(x)$ 找不等于0 的式子

     =$\lim_{x\to 0} x^2+1$=1
  7. f(x)=$\begin{cases} 2x+5 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ x^2+1 & x<0 \end{cases}$ 求$\lim_{x\to 0} f(x)$ 正方向 负方向分别求

     =$\lim_{x\to 0^+} 2x+5$=5

     =$\lim_{x\to 0^-} x^2+1$=1

     因为$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$!**=$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$

所以$\lim_{x\to 0} f(x)$不存在

x-->∞时的极限

- 含义$\begin{cases} x->+\infty \\ x->-\infty \end{cases}$
- 定义：如果当x-->∞时，f(x)无限接近某个确定的常数A，则称x-->∞时，f(x)以A为极限
- 记作：$\lim_{x\to\infty} f(x)$=A
- **结论：**$\lim_{x\to\infty} f(x)$**=A <=>** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$**=**$\lim_{x\to+\infty} f(x)$**=A**
- 例：
  1. $\lim_{x\to\infty} 1+\frac{1}{x^2}$=1 x^2分之1相当于1
  2. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-2x+1}{x^2+6x+5}$=抓大头 =2
  3. $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+5x-3}{2x^3+8}$= $\frac{4x^2}{2x^3}$= $\frac{4x^2}{2x^3}=\frac{2}{x}=0$
  4. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4-2x^2-7}{5x^2+3}$=∞ $\frac{3x^4x^2}{5x^2}$ 5分之无穷大=无穷大

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots b_1x+b_0} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & m=n \\ 0 & n<m \\ \infty & n>m \end{cases}$$

口诀分母大则为0 分子大则为∞ 相等看系数

5. 2020.12 $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+10x-1}{3x^3-5x^2+8}$=0
6. 2022.12 $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2}{(x+2)^3-x^3}$=2 则a=

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2}{\cancel{x^3}+6x^2+12x+8-\cancel{x^3}}=2$$
$$\frac{a}{6}=2$$
$$a=12$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x=\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

7. $\lim_{x\to\infty} arctanx$=

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x \neq \lim_{x\to-\infty} \arctan x$$
∴ 不存在

考点：无穷大量与无穷小亮

- **无穷小量**
- 若$\lim_{x\to\square} f(x)$=0则称x-->口时，f(x)为**无穷小量**

  注：口表示x-->x_0,x-->x_0^+,x-->x_0^-,x-->∞,x-->-∞,x-->+∞
- 例题：

  $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1}$= 0， 所以当x-->∞时， y=$\frac{1}{x+1}$是无穷小

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}$= $\frac{1}{2}$，所以当x-->1时，y=$\frac{1}{x+1}$就不是无穷小

$\lim_{x\to 1} x-1$= 0，所以当x-->1时，y=x+1是无穷小

- 若$\lim_{x\to □}$ 0=0，零是可作为无穷小的唯一常数
- 无穷小的性质：
  1. 有限个无穷小的和，差，积，仍为无穷小

     例1：$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$=0

     例2：$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}...+\frac{n}{n^2}$=$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3...+n}{n^2}$=$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(1+n)n}{2}}{n^2}$= $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+n}{2}}{n^2}$=$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}$=$\frac{1}{2}$ 不是无穷小
  2. 有界函数与无穷小的乘积为无穷小

     例1：$\lim_{x\to\infty}\frac{sinx}{x}$= $\lim_{x\to\infty} sinx * \frac{1}{x}$ =0

     例2：$\lim_{x\to\infty}\frac{arctanx}{x}$= $\lim_{x\to\infty} \underbrace{\arctan x}_{有界} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{无穷小} = 0$

     例3:$\lim_{x\to 0} xsin * \frac{1}{x}$=0
  3. 常数与无穷小的乘积还是无穷小

- **无穷小量**
- 当x->口，若｜f(x)｜无限增大，则称x->口时，f(x)为无穷大量
- 记作：$\lim_{x\to □} f(x)$= ∞ (不存在)
- 例：
  1. $\lim_{x\to 0^+} lnx$=∞
  2. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$=$\infty$(分母为0 是无穷大)
- 无穷大与无穷小的关系
  1. 定理：$\lim_{x\to □} f(x)$= ∞，**则**$\lim_{x\to □}\frac{1}{f(x)}$= 0

     反之：$\lim_{x\to □} f(x)$=0 ，**则**$\lim_{x\to □}\frac{1}{f(x)}$= ∞

     $\frac{1}{0}$=∞ $\frac{2}{0}$=∞ $\frac{k(k!=0)}{0}$=∞

     $\frac{1}{\infty}$=0 $\frac{2}{\infty}$=0 $\frac{k(k!=0)}{\infty}$=0

考点：无穷小的比较

- 定义：设$\lim\alpha(x)$= 0 $\lim\beta(x)$= 0 且β(x) !=0 则
  1. $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$= 0 ，则$\alpha(x)$是$\beta$(x) 的高阶无穷小

     例子：$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}$=$\lim_{x\to 0} x$=0
  2. $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$= ∞，则$\alpha(x)$是β(x) 的低阶无穷小

     例子：$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}$=$\lim_{x\to 0} x$= ∞
  3. $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$= c (c!=0 c!=1 常数)，则$\alpha(x)$是$\beta$(x) 的同阶无穷小

     例子：$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}$=2
  4. $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$= 1 ，则称$\alpha(x)$是$\beta$(x) 的**等价无穷小**，记：$\alpha(x)$~~$\beta$(x)

     例子：$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}$=1 (x~x)
- **必背八个等价无穷小代换**

- $$x \to 0 \begin{cases} \sin x \sim x \\ \tan x \sim x \\ \arcsin x \sim x \\ \arctan x \sim x \\ e^x - 1 \sim x \\ \ln(1+x) \sim x \end{cases}$$

  $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

  $(1+x)^m - 1 \sim mx$

  特例 $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$

  推广：$$拘 \to 0 \begin{cases} \sin 拘 \sim 拘 \\ \tan 拘 \sim 拘 \\ \arcsin 拘 \sim 拘 \\ \arctan 拘 \sim 拘 \\ e^{拘} - 1 \sim 拘 \\ \ln(1+拘) \sim 拘 \end{cases}$$

  $1-\cos 拘 \sim \frac{1}{2}(拘)^2$

  $(1+拘)^m - 1 \sim m拘$

  特例：$\sqrt{1+拘} - 1 \sim \frac{1}{2}拘$

- 例题：

  1. $f(x)=2x^3+4x^2$ $g(x)=2x^2$ 当x->0时f(x)是g(x)的___无穷小

     注意：**不能抓大头无穷才能抓大头、**

     $$\lim_{x\to 0} \frac{2x^3+4x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{2x^2} + \frac{4x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} x+2 = 2 \text{ 同阶}$$

  2. $\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x^2}$= sin(x)是$x^2$的___无穷小 低阶

     例：$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

- 等价无穷小替换定理：

  在同一极限过程中则$\alpha(x)$~$\alpha_1(x)$ β(x)~β_1(x) 则

  1. $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$=$\lim \frac{\beta_1(x)}{\alpha_1(x)}$ 必须$\frac{0}{0}$
  2. $\lim \alpha(x)\beta(x)$=$\lim \alpha_1(x)\beta_1(x)$

     注意:乘积和除法是可以无穷小替换

     加法和减法不可以替换

- 例题：

  例1 $\lim_{x\to 0} \frac{tan2x}{sin3x}$= $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$

例2 $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{xsinx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x}=\frac{1}{2}$

例3 当x->0时 ax^2 与sin^2x等价 a= $\lim_{x\to 0}\frac{ax^2}{\sin^2 x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{ax^2}{\sin x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2}{x^2}=a=1$

例4 例4：$f(x)=e^{-x^2}-1$，$g(x)=x\tan x$，当$x\to 0$时 $f(x)$是$g(x)$ ______ 无穷小，

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1}{x\tan x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x\cdot x}=-1$$

同阶

例5 x->0时 2x+a sinx 与x等价 则a=

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+a\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{a\sin x}{x}=1$$

$$2+\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x}=1$$

$$2+a=1$$

$$a=-1$$