数学

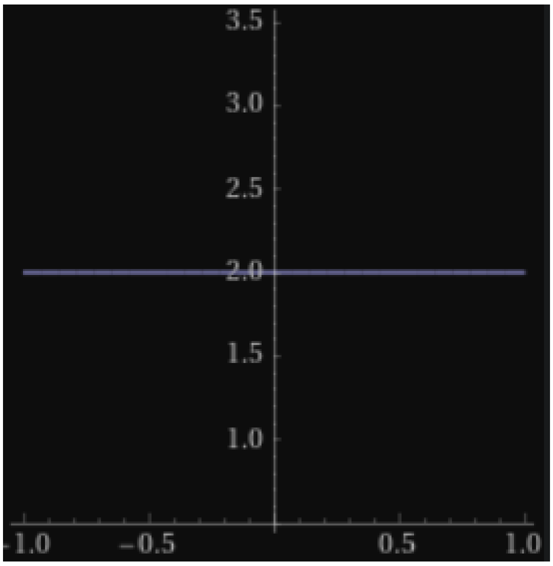
第一章函数极限和连续

1.函数

- y=f(x)
  - x是自变量 x 的范围叫定义域
  - y是因变量 y 的范围叫做值域
  - f是对应法则
- $\frac{b}{a}$、$\frac{x}{y}$、$\frac{1}{x+1}$ $\sqrt[开方数]{被开方数}$

常数函数

- y=c(常数) 偶函数 关于y轴对称

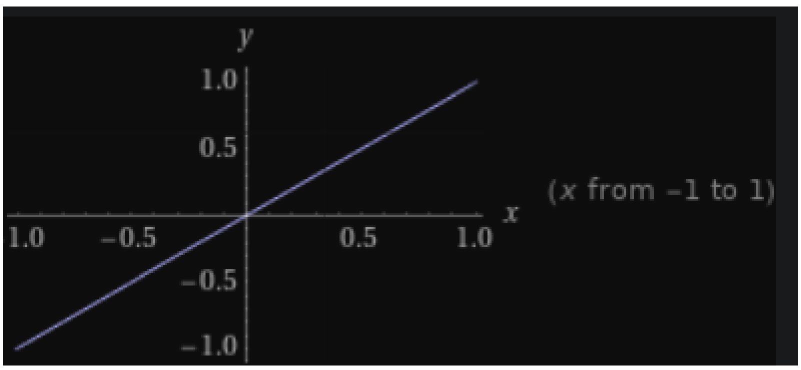


基本初等函数

幂函数

幂函数 $y=x^{\mu}$ (μ != 0)

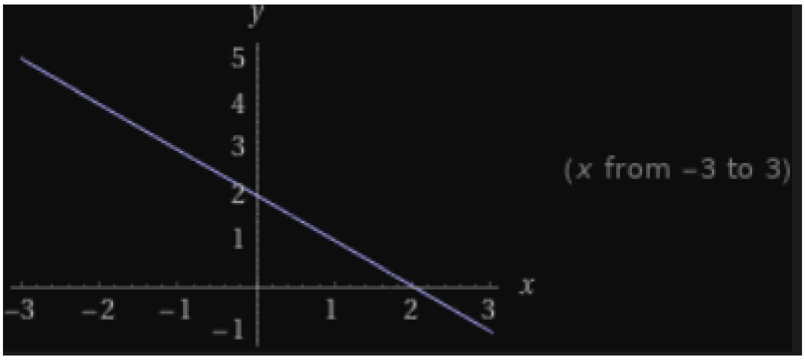
- $y=x^1$ =x 奇函数



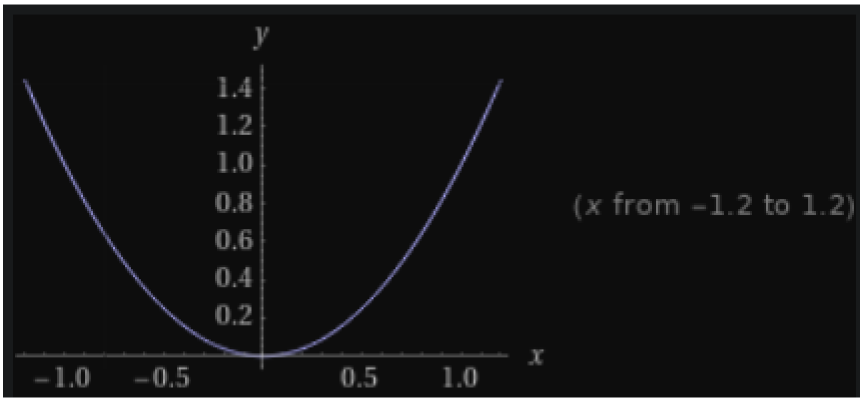
注意 奇函数特点关于圆点对称

- y=kx+b (一条直线)

  例子 y=2-x 如何判断是直线 x是一次幂

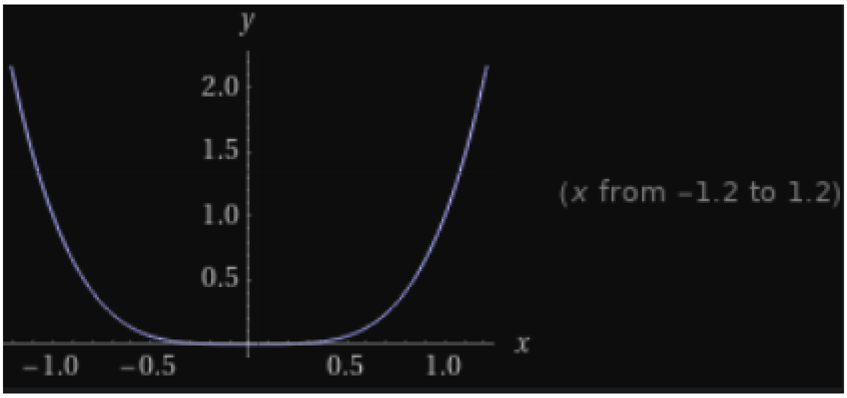


- $y=x^2$ 偶函数



注意 偶函数特点关于y轴对称

- $y=x^4$ 偶函数

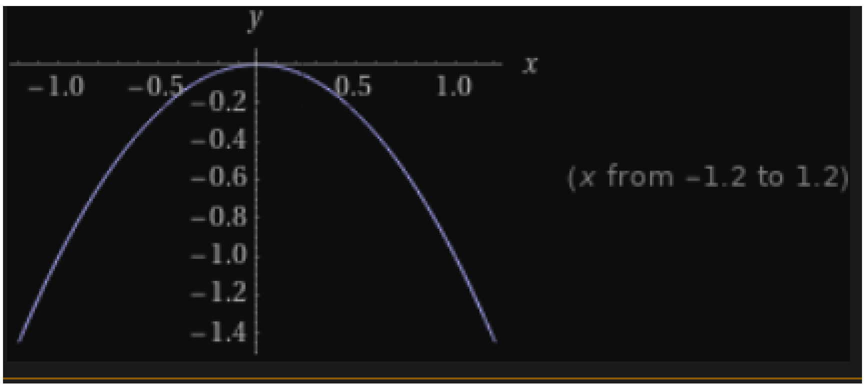


- $y=ax^2+bx+c$(抛物线)

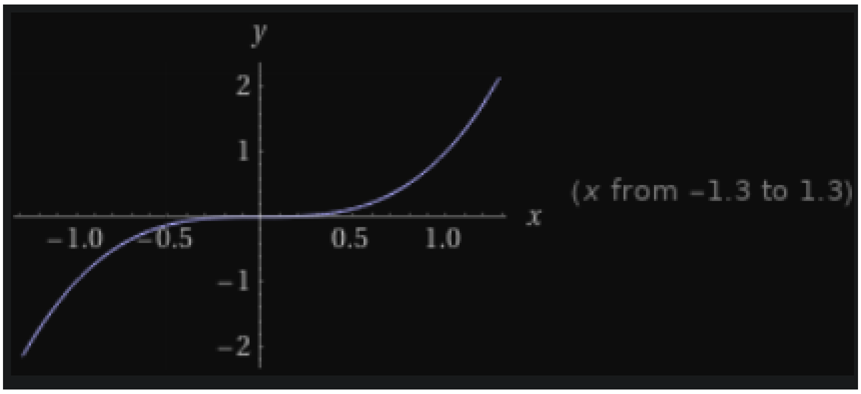
  a>0 开口向上

  a<0 开口向下

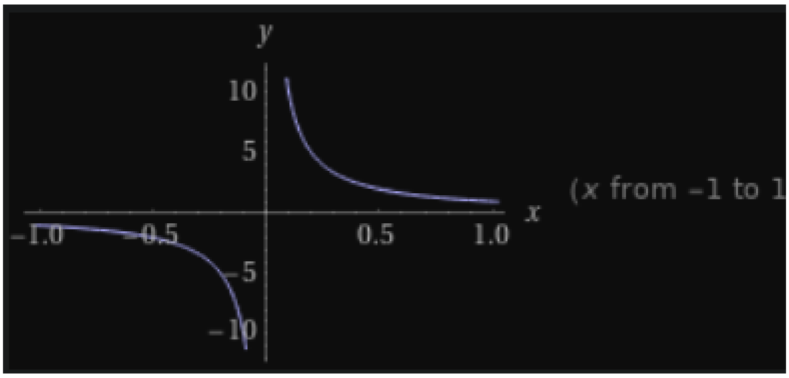
- $y=-x^2$ 偶函数



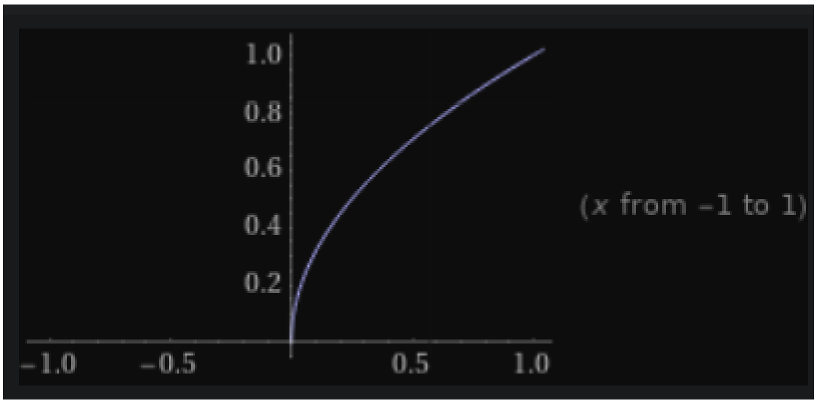
- $y=x^3$ 奇函数



- $y=x^{-1} = \frac{1}{x}$ 奇函数 定义域 (-∞,0)∪（0，+∞)



- $y=\sqrt{x} = x$^ $\frac{1}{2}$ ^ 非奇非偶 定义域 [0,+∞)



幂函数的性质

1. $(x^p)^q = x^{p*q}$

   例子 （x^3）$^2 = x^6$!= x^5

2. $X^p * X^q = x^{p+q}$

   例子（x^3）$^2 = x^5$!= x^6

3. $x^q \backslash x^p = x^{p-q}$

   例子 $x^3 \backslash x^2 = x$

4. $x^p \backslash 1 = x^{-p}$

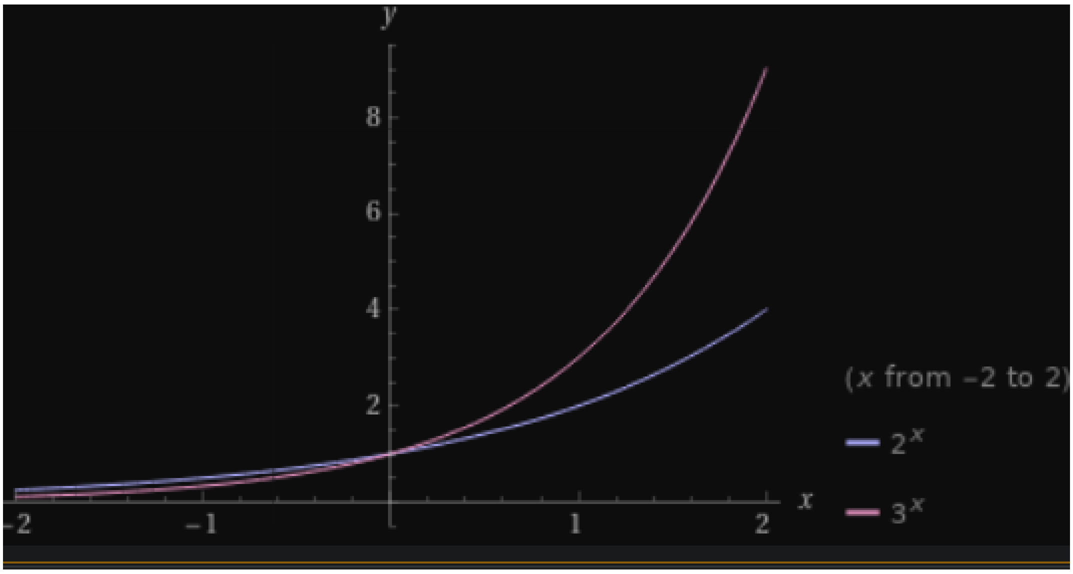
   例子 $x \backslash 1 = x^{-1}$ （反比例函数） $x^3 \backslash 1 = x^{-3}$

5. ${}^{m}\sqrt{x^n} = x^{m\backslash n}$

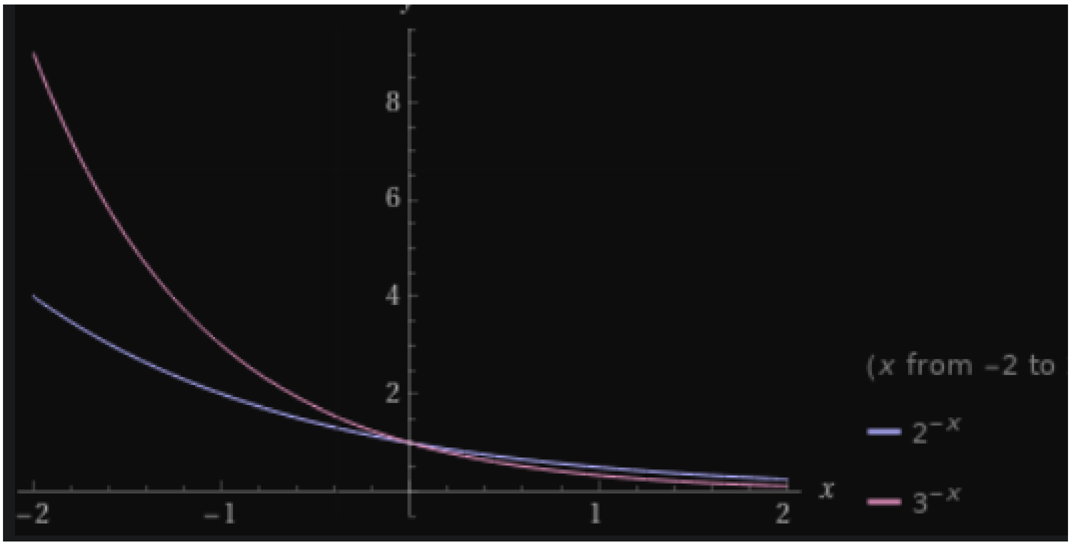
   例子 ${}^{2}\sqrt{x^1} = \sqrt{x} = x^{2\backslash 1}$ ${}^{3}\sqrt{x} = x^{3\backslash 1}$ ${}^{4}\sqrt{x^3} = x^{4\backslash 3}$

指数函数

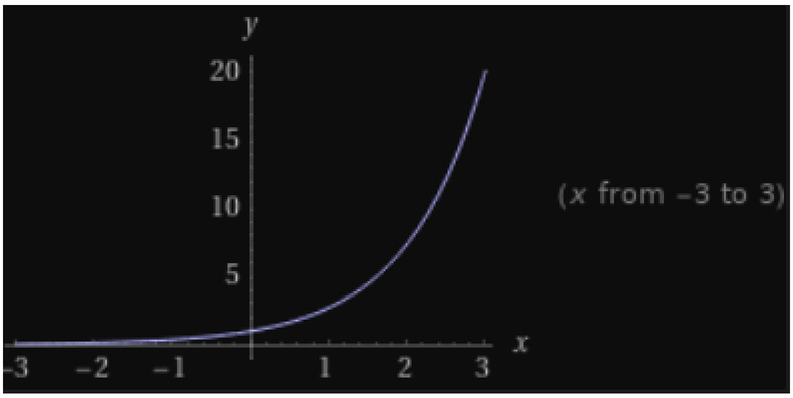
- y= a ^{x} (a>0 且, a!= 1) x∈ (-∞,+∞) y∈(0,+∞)
  1. a^{0} =1 a必须大于0
  2. a>1 y=2^{x} y=3^{x}



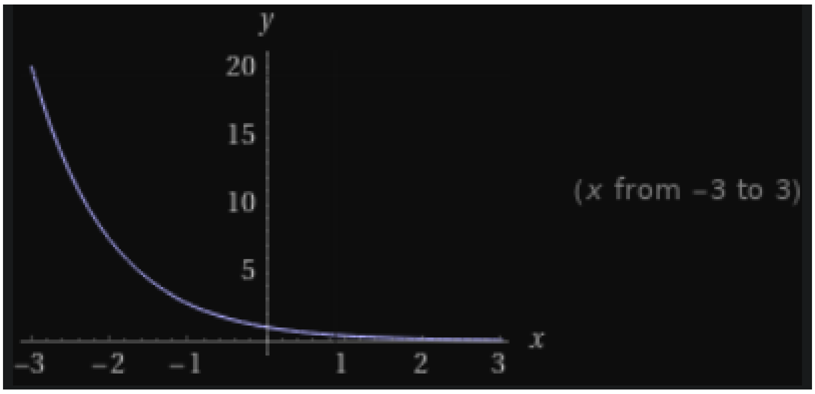
  3. 0<a<1 y=($\frac{1}{2}$)^{x} y=($\frac{1}{3}$)^{x}



  4. y=e^{x} e=2.718281... >1



  5. y=e^{-x} =(e^{-1})^{x} = (e\1)^{x} e\1<1 和y=e^{x} 对称

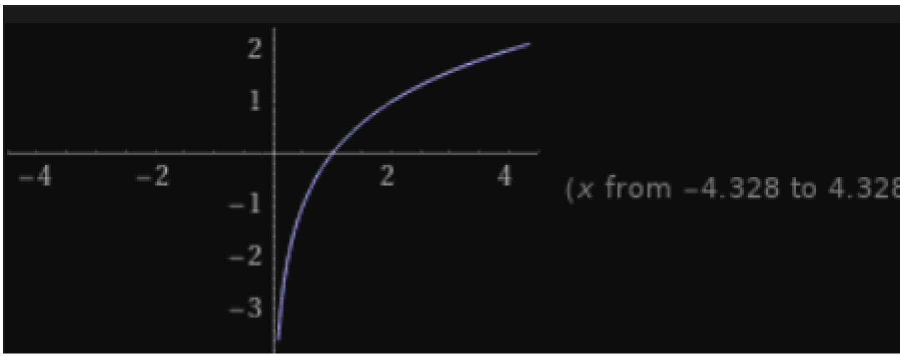


指数函数性质

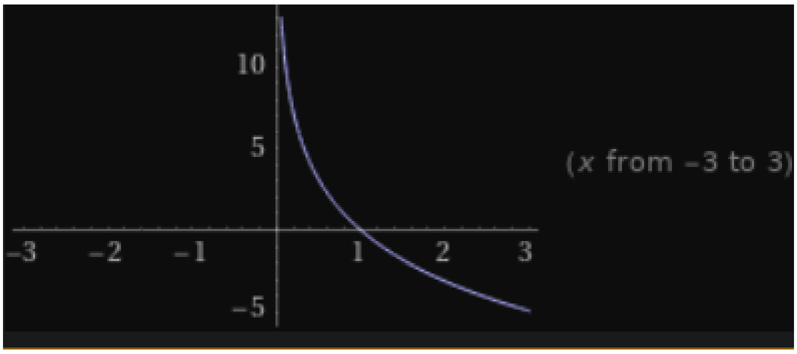
1. $(e^{x})^{y} = e^{xy}$
2. $e^{x1} * e^{x2} = e^{x1+x2}$
3. $e^{x1} \backslash e^{x2} = e^{x1-x2}$
4. $e^{x} \backslash 1 = e^{-x}$
5. ${}^{m}\sqrt{}(e^{x})^{n} = {}^{m}\sqrt{}e^{xn} = e^{m\backslash xn}$
6. $(a*b)^{x} = a^{x} * b^{x}$
7. 例题
   - $(e^{x})^{2} = e^{2x}$!= e^{x2}
   - $e^{3x} * e^{2x} = e^{5x}$
   - $e^{3x} - e^{2x} = e^{2x}(e^{x} - 1)$!= e^{x}
   - $e^{3x} \backslash e^{2x} = e^{x}$
   - ${}^{3}\sqrt{}e^{2x} = e^{3\backslash 2x}$
   - $2^{x} * e^{x} = (2e)^{x}$

对数函数

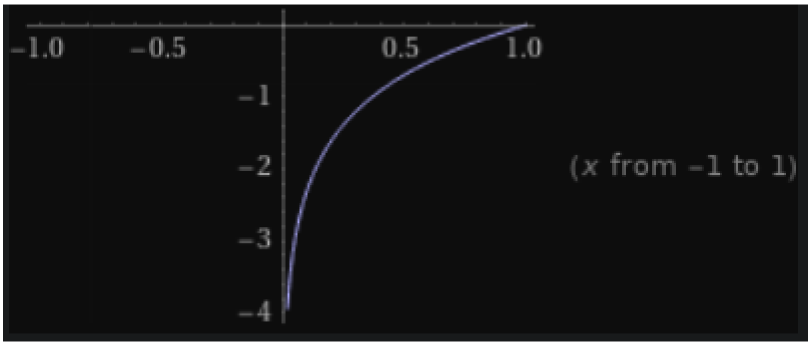
- $y=\log^{x}_{a}$ x>0 x是对数里面的真数 a >0 a != 1 a是对数里面的底数 定义域 （0，+∞）
- a>1



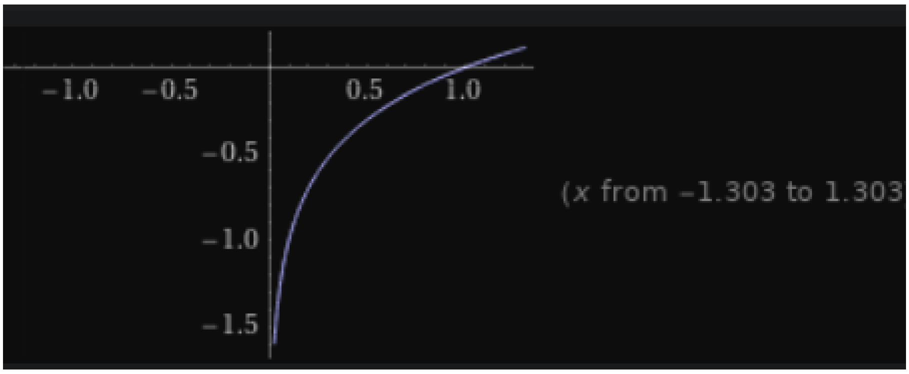
- 0<a<1



- y=$\log^{1}{}_{a}$=0   y=$\log^{a}{}_{a}$ =1
- a=e 时 y=$\log^{x}{}_{e}$ =$\ln^{x}$



- a=10 时 y=$\log^{x}{}_{10}$ =$\lg^{x}$

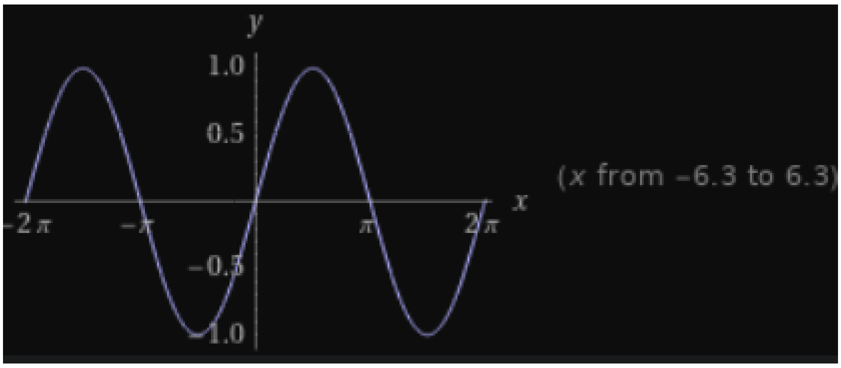


对数性质

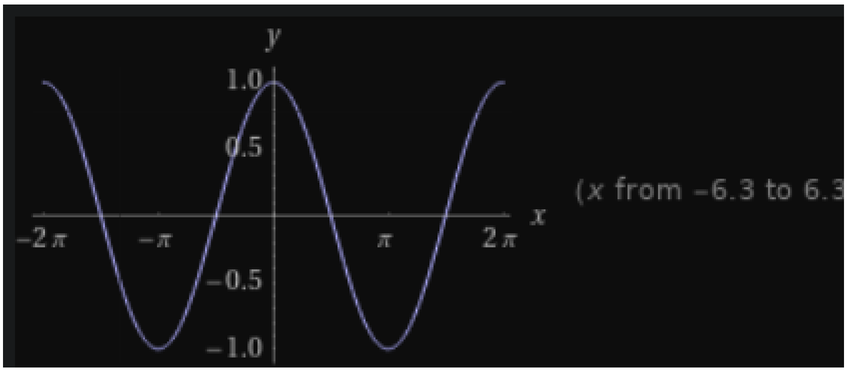
1. $\log^{x}{}_{a}$ +$\log^{y}{}_{a}$ =$\log^{xy}{}_{a}$ $\ln^{x}$ + $\ln^{y}$ =$\ln^{xy}$
2. $\log^{x}{}_{a}$ -$\log^{y}{}_{a}$ =$\log^{y/x}{}_{a}$ $\ln^{x}$ - $\ln^{y}$ =$\ln^{y/x}$
3. $\log_a b^m = m\log_a b$ $\ln x^m = m\ln x$
4. 对数恒等式 $e^{\ln A}$ =A
5. $\log^{b}{}_{a}$ =$\frac{\log_c b}{\log_c a}$ $\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{\log_4 3}{\log_4 2}$

三角函数

1. 正弦函数 y=sinx 周期 t=2π 有界函数 奇函数 最大1 最小-1



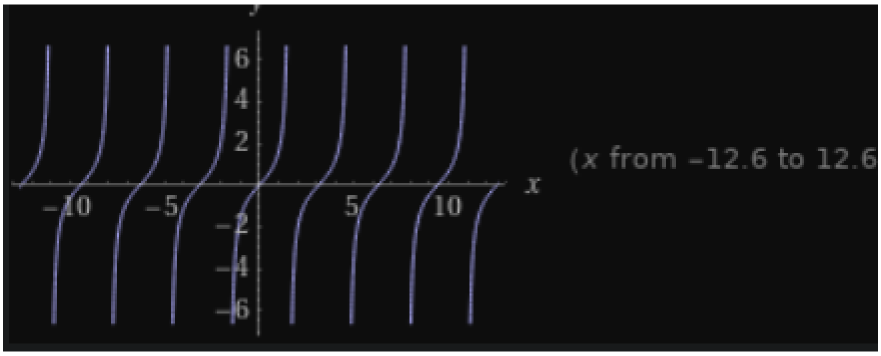
2. 余弦函数 y=cosx 周期 t=2π 有界函数 偶函数 最大1 最小-1



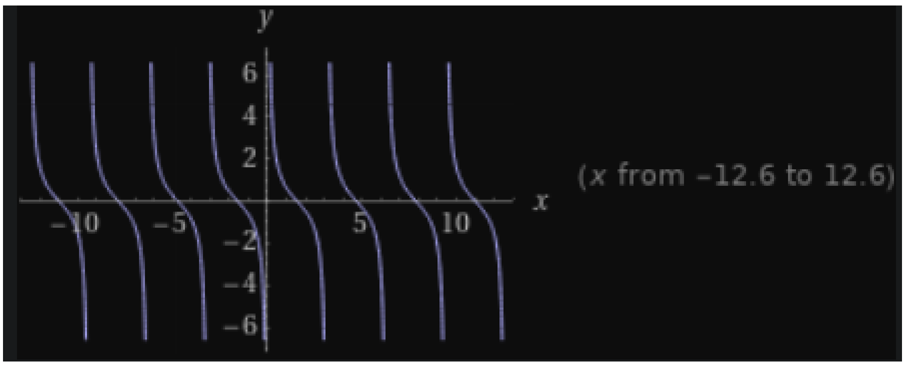
cosπ=-1 必考

cos0=1 必考

3. 正切函数 y=tanx = $\frac{sinx}{cosx}$ 周期 t=π 奇函数



4. 余切函数 y=cotx= $\frac{1}{tanx}$= $\frac{cosx}{sinx}$ 周期 t=π 奇函数

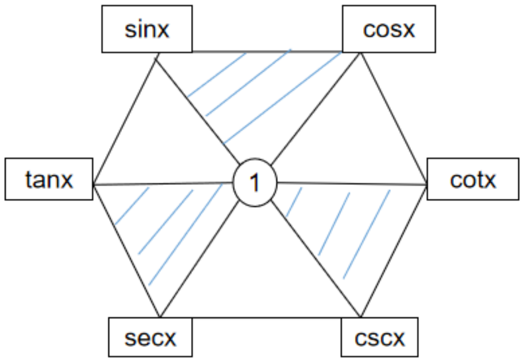


5. 正割函数 y=secx=$\frac{1}{cosx}$ 偶函数

6. 余割函数 y=cscx=$\frac{1}{sinx}$ 奇函数

记忆技巧

-



- $\sin^2x + \cos^2 x=1$ $\tan^2x+1=\sec x^2$ $1+\cot^2x=\csc^2x$

  三角形上顶点的平方等于下顶点的平方

- tanx=$\frac{sinx}{cosx}$ cotx=$\frac{cosx}{sinx}$

  任意一个顶点等于顺时针的两个相邻顶点的商

- secx=$\frac{1}{cosx}$ tanx=$\frac{1}{cotx}$ cscx=$\frac{1}{sinx}$

  对角线互为倒数

二倍角公式:

- sin2x=xsinx * cosx
- $\cos2x=\cos^2x-\sin^2x = 2\cos^2-1=1-2\sin^2x$

降幂公式

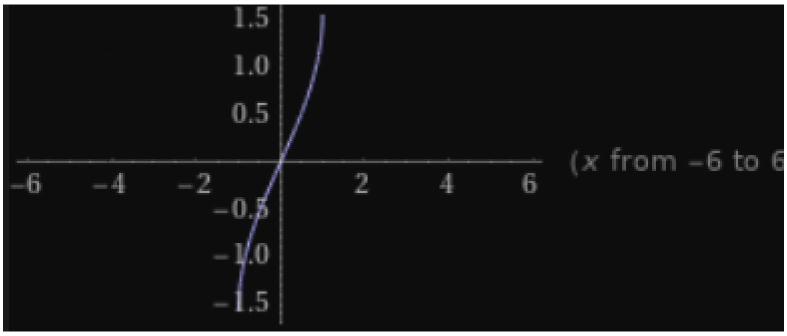
- $\sin^2x=\frac{1-cos2x}{2}$
- $\cos^2x=\frac{1+cos2x}{2}$

三角函数值

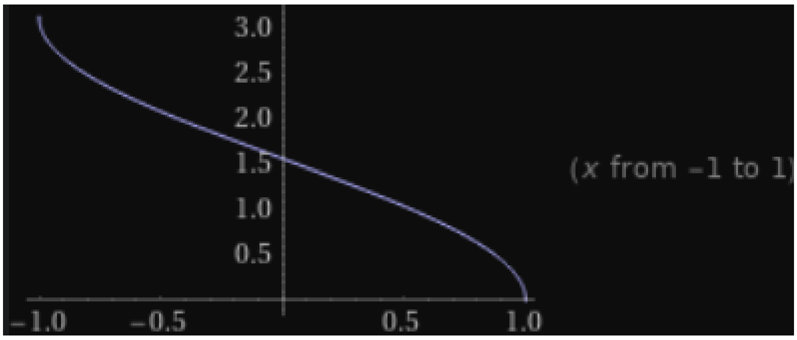
角α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
弧度制	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sinx	0	1/2	√2/2	√3/2	1	√3/2	√2/2	1/2	0
cosx	1	√3/2	√2/2	1/2	0	-1/2	-√2/2	-√3/2	-1
tanx	0	√3/3	1	√3	\	-√3	-1	-√3/3	0
cotx	\	√3	1	√3/3	0	-√3/3	-1	-√3	\
cotx=$\frac{1}{tanx}$									
secx=$\frac{1}{cosx}$									
secx=$\frac{1}{sinx}$									

反三角函数

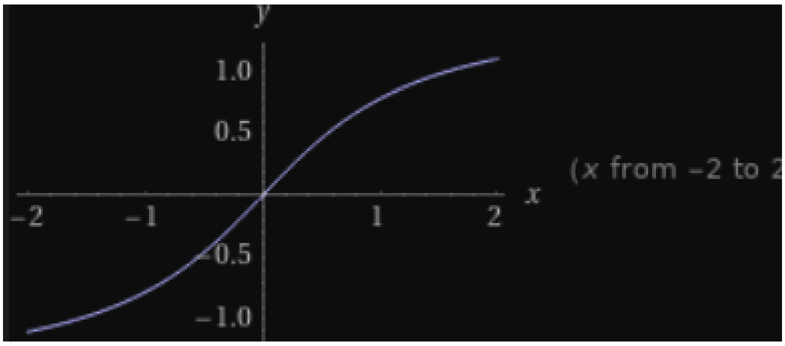
1. 反正弦函数 y=arcsinx 奇函数 有界函数 定义域 x [-1,1] y[-$\frac{\pi}{2}$,$\frac{\pi}{2}$]



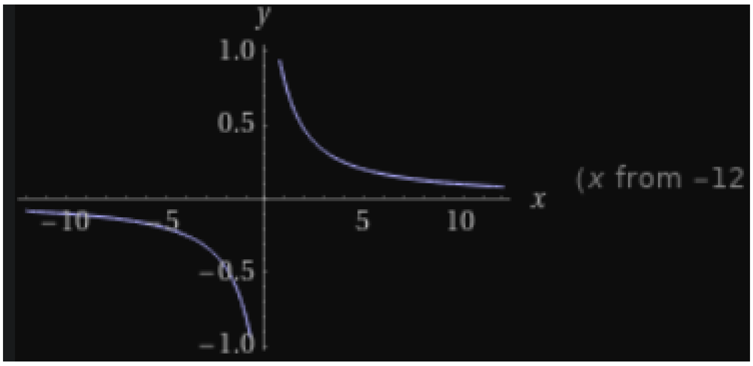
2. 反余弦 y=arccosx　定义域 x [-1,1] y[0,π]



3. 反正切函数 y=arctanx　奇函数 有界函数 定义域 x [-∞,∞] y[-$\frac{\pi}{2}$,$\frac{\pi}{2}$]



4. 反余切函数 y=arccotx 有界函数　定义域 x [-∞,∞]　y[0,π]



图像可能有差距

5. 考试题型
    1. sin$\frac{\pi}{6}$=$\frac{1}{2}$　arcsin$\frac{1}{2}$=$\frac{\pi}{6}$
    2. tan$\frac{\pi}{4}$=1 arctan1=$\frac{\pi}{4}$

复合函数

- 例 y=(x^2+3)^3　由u=x^2+3 和 y=u^3 复合
- 技巧 符合拆分分单独的初等函数
- 例题
    1. y=sin(x+1)　由u=x+1 和 y=sinu 复合
    2. y=$\log^{2x+2}{}_3$　由u=^2x+2 和 y= $\log^{u}{}_3$　复合

3. y=arssinx^2 由u=x^2 和 y=arssinu 复合
4. y=cos^{2}x 由u=cosx 和 y=y=u^2 复合
5. y=ln^{2}x 由u=lnx 和 y=u^2 复合

初等函数

- 初等函数：由基本初等函数及常数，经过有限次的加，减，乘，除及有限次的复合运算所构成，并能用一个式子表示的函数

分段函数

- $y=\begin{cases} x & x>0 \\ 1-x & x<=0 \end{cases}$

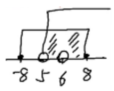
考点一求函数定义域

1. 求初等函数及分段函数的定义域
   1. $\frac{1}{\square}$ **口 != 0 例** $\frac{1}{x}$ **!= 0**
   2. **$^{2n}\sqrt{}$口 口 >= 0 例 y=$\sqrt{}$x x>=0**
   3. $^{2n+1}\sqrt{}$口 口 [-∞,∞] 例 y=$^3\sqrt{}$x [-∞,∞]
   4. **y=log$^{口}{}_{a}$ 口 > 0 或者 y=ln^{x} x>0 y=lg^{x} x>0**
   5. arcsin口 或者 arccos口 口 [-1,1] 例子 arcsinx [-1,1] arccosx [-1,1]
   6. 例子

      y=$\sqrt{}$2-x 2-x>=0 -> x<=2 ->∞

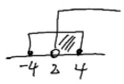
      y=ln(x-3) x-3>0 -> x>3 -> ∞

      y=$\frac{1}{x+1}$ x+1 !=0 ->x!=-1 -> **(-∞,-1)U(-1,∞)**

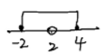
      y=$\frac{\sqrt{\ \ 64-x^2}}{ln(x-5)}$ $\begin{cases} 64-x^2\geqslant 0 \Rightarrow x^2\leq 64 \\ x-5>0 \Rightarrow x>5 \\ \ln(x-5)\neq 0 \Rightarrow x-5\neq 1 \end{cases}$ $-8\leq x\leq 8$ $x>5$ $x\neq 6$ 

      [5. 6)U(6. 8]

      注意ln算法是 ln^1 =0 所以 x-5 !=1 大于取两边小于取中间

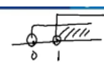
      y=$\sqrt{}$16-x^2 + ln(x-2) $y=\sqrt{16-x^2}+\ln(x-2)$ $\begin{cases} 16-x^2\geqslant 0 \Rightarrow x^2\leq 16 \\ x-2>0 \Rightarrow x>2 \end{cases}$ 

      (2, 4]

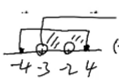
      y=$\frac{arcsin(\frac{x-1}{3})}{^3\sqrt{\ \ x-2}}$ $\begin{cases} -1\leq \frac{x-1}{3}\leq 1 \Rightarrow -3\leq x-1\leq 3 \\ \qquad\qquad\qquad\quad -2\leq x\leq 4 \\ x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2 \end{cases}$ 

      [-2. 2)U(2. 4]

      y=$y=\begin{cases} x & x<=0 \\ x+1 & 0<x<2 \\ x^2 & 2<=x<=5 \end{cases}$ (-∞. 5]

      分段函数求定义域 就是把所有加一起
   7. 真题
      1. 2017 .11 $y=\frac{\sqrt{x-1}}{\ln x}$ $\begin{cases} x-1\geqslant 0 \\ x>0 \\ \ln x\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geqslant 1 \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$ 

         (1.+∞)
      2. 2018.11 · $y=\frac{\ln(x-1)}{\sqrt{2-x}}$ $\begin{cases} x-1>0 \\ 2-x>0 \end{cases}$ $x>1$ $x<2$ 

         (1.2)
      3. 2019.11 $y=\frac{\sqrt{16-x^2}}{\ln(x+3)}$ $\begin{cases} 16-x^2\geqslant 0 \\ x+3>0 \\ \ln(x+3)\neq 0 \end{cases}$ $x^2\leq 16$ $x>-3$ $x+3\neq 1$ $-4\leq x\leq 4$ $x>-3$ $x\neq -2$ 

         (-3,-2)U(-2,4]

4. 2020.11 $y=\frac{\ln(x-1)}{\sqrt{5-x}}$ $\begin{cases} x-1>0 \\ 5-x>0 \end{cases}$ $x>1$ $x<5$ $(1,5)$

5. 2021.11 $y=\frac{\ln(x-6)}{\sqrt{9-x}}$ $\begin{cases} x-6>0 \\ 9-x>0 \end{cases}$ $x>6$ $x<9$ $(6,9)$

6. 2022.11 $y=\begin{cases} \sqrt{1-x^2} & x>0 \\ \ln(1+x) & x\le 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ 1-x^2\geq 0 \\ x^2\le 1 \Rightarrow -1\le x\le 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x\le 0 \\ 1+x>0 \Rightarrow x>-1 \end{cases}$ $(0,1]\cup(-1,0]$ $(-1,1]$

7. 第6题　分段函数取并集

8. 求抽象函数的定义域

   1. 定义域x的取值范围
   2. f对()内的范围一致

例：y=f(x)的定义域（0，1] 则f(x+1) 的定义域 (-1, 0]

0<x<=1　　　　　　　0<x+1<=1 -> -1<x<=0

例：y=f(x)的定义域[0，1] 则f($\ln^x$) 的定义域 [1,e]

0<=x<=1　　　　　　　0<=$\ln^x$<=1 -> 1<=x<=e

注$\ln^x$ 函数性质 x=1 时y=0 x=e时y=1

例：y=f(2x-1)的定义域[0,1]，求f(x)的定义域 [-1,1]

0<=x<=1　0<=2x<=2 -1<=2x-1<=1 [-1,1]

解题思路：f(2x-1)=f(x) 需要用当前x的定义域去还原

考点二

单调性

- 定义：若对任意$x_1,x_2\in$(a,b) ,当$x_1<x_2$则$f(x_1)<f(x_2)$称f(x)在a,b单调递增

  若对任意$x_1,x_2\in$(a,b) ,当$x_2<x_1$则$f(x_2)<f(x_1)$称f(x)在a,b单调递减

奇偶性

- 定义：设函数f(x)在定义域D关于圆点对称（-a,a）

  f(x)=f(-x) 偶函数 关于y轴对称

  f(-x)=-f(x)或f(x)+f(-x)=0 奇函数 关于圆点对称

- 常见奇函数

  $x,x^3,x^5,\ldots,x^{2n+1}$,sinx,tanx,cotx,cscx,arcsinx,arctanx

  g(x)=f(x)-f(-x) 例：$g(x)=e^x-e^{-x}$ ->$g(-x)=e^{-x}-e^x$ -> g(x)=-g(x) =>奇函数

- 常见偶函数

  $x^2,x^4,x^6,\ldots,x^{2n}$, cosx ,secx, |x| ,c(常数)

  g(x)=f(x)+f(-x) 例：$g(x)=e^x+e^{-x}$ ->$g(x)=e^x+e^{-x}$ -> g(x)=-g(x) =>偶函数

- 计算
  - 加减奇偶性：奇 +/- 奇=奇 偶 +/- 偶 =偶　奇 +/- 偶 =非奇，非偶
  - 乘除奇偶性：同偶异奇 ，奇 x/÷ 奇=偶　偶 x/÷ 偶 =偶 奇 x/÷ 偶 =奇
  - 复合函数奇偶性：内偶则偶，内奇同外 奇与奇复合=奇、

    内层是偶的复合函数是偶

- 例题

判断奇偶性：

1. y=x^3-3sinx　奇-奇=奇
2. y=$\frac{1-x^2}{1+x^2}$　　$\frac{偶}{偶}$　=偶

周期性

- 定义：设函数的定义域D,若存在实数T>0,对于任意x∈恒有f(x+/-T)=f(x),则称　　f（x）为周期函数T周期
- 注意：周期一般是最小正周期
- 例
    - y=Asin(ωx+φ)+B　T=$\frac{2\pi}{|\omega|}$
    - y=Acos(ωx+φ)+B　T=$\frac{2\pi}{|\omega|}$

      例子 y=sin2x 周期 T=$\frac{2\pi}{2}$　=π

      例子 y=cos(x+3)+4 周期 T=$\frac{2\pi}{1}$　=2π　看x前面系数

      例子 y=sin2x+cos$\frac{x}{3}$　周期 T1=$\frac{2\pi}{2}$　=π　T2=$\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}$　=6π　然后找最小公倍数 6π
    - y=Atan(ωx+φ)+B　T=$\frac{\pi}{|\omega|}$
    - y=Acot(ωx+φ)+B　T=$\frac{\pi}{|\omega|}$

      例子：y=tan2x+1 周期 $\frac{\pi}{2}$

有界性

- 定义：设函数f(x)在某个区间有定义，若存在实数M>0，对于改区间内任意的x恒有|f(x)| <M 则称函数f(x)在该区间内有界函数
- 例
    - y=sinx　-1<=sinx<=1　|sinx|<=1
    - y=cosx　|cosx|<=1
    - y=arctanx　|arctanx|<$\frac{\pi}{2}$
    - y=arccotx　arccotx <π

2.极限

数列极限

- 分析下面几个数列的变化趋势 n->∞
    - 1,$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}^2$,$\frac{1}{2}^3$,......,$\frac{1}{2}^n$　-->0　　　收敛
    - 2,$\frac{3}{2}$,$\frac{4}{3}$,......,$\frac{n+1}{n}$　...... 1+ $\frac{1}{n}$-->1　　收敛
    - 1,$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$,...... $\sqrt{n}$,...... -->∞　发散
    - 0,1,0,1,......　$\frac{1+(-1)^n}{2}$　　不清楚0/1　　发散
    - 6,6,6,6,6,...... , 6 ,...... ,6　　　　　　收敛
- 数列的定义：当n——>∞时，若数列{x_n}无限接近某个确定的常数a则称

  n——>∞时,{x_n}收敛于a

  $\lim_{n\to+\infty} x_n$=a

  若这样的a不存在，则称|x_n|发散 $\lim_{n\to+\infty} x_n$不存在
- 结论：
    - $\lim_{n\to+\infty} c$=c　　　　　　例：$\lim_{n\to+\infty} 6$=6
    - $\lim_{n\to+\infty} q^n$=0（|q| < 1）例：$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}^n$=0

- $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}$=0
- $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^k}$=0 (k>0)　　例：$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}$=0

- 收敛数列的性质：

1. 唯一性，若{xn}收敛则它的极限唯一 $\lim_{n\to\infty} X_n = a$　$\lim_{n\to\infty} X_n = b$ 则 $a=b$
2. 有界性，若{xn}收敛则{xn}比有界，反之不成立

 注意：有界不一定收敛0.1、0.1、0.1…有界 但它发散

 无界一定发散 例如：$1^2,2^2,3^3,\ldots,n^2,\ldots$发散
3. 单调有界数列必收敛

 例：收敛是有界的**充分不必要**条件

 箭头向右=>充分条件

 箭头向左<=必要条件

 箭头向左向右<=>充分必要条件

- 数列极限四则运算法则
  - $\lim_{n\to+\infty} x_n$=A ， $\lim_{n\to+\infty} y_n$=B 则
    1. $\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n)$=A +/- B
    2. $\lim_{n\to+\infty}(x_n * y_n)$=A * B
    3. $\lim_{n\to+\infty}(\frac{x_n}{y_n})$=$\frac{A}{B}$ (B != 0)

- 例题
  - $\lim_{n\to+\infty}(\frac{n-2}{3n+3})$ $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}-\frac{2}{n}}{\frac{3n}{n}+\frac{3}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}}{3+\frac{3}{n}} = \frac{1-0}{3+0} = \frac{1}{3}$

    技巧抓大头 $\frac{n}{3n}=\frac{1}{3}$
  - $\lim_{n\to+\infty}(\frac{n^2+2n+3}{4n^2+5n+6})$　$\frac{n^2}{4n^2}=\frac{1}{4}$
  - $\lim_{n\to+\infty}(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3})$　$\frac{n^3}{5n^3}=\frac{1}{5}$
  - 2017.12 $\lim_{n\to+\infty}(\frac{2n^2+n-1}{3n^2-5n+7})$　$\frac{2n^2}{3n^2}=\frac{2}{3}$
  - $\lim_{n\to+\infty}(\frac{3n+1}{2n+5})^2$　$\frac{9n^2}{4n^2}=\frac{9}{4}$
  - $\lim_{n\to+\infty}\frac{(4n+5)(2n+8)}{(3n+6)(n+2)}$　$\frac{8n^2}{3n^2}=\frac{8}{3}$
  - $\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{5^n}$ = $\lim_{n\to+\infty}(\frac{3}{5})^n$　=0
  - $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})+(\frac{1}{2^2})+(\frac{1}{2^3})+\ldots(\frac{1}{2^n})$ $=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} 1-(\frac{1}{2})^n = 1$

    等比数列求和公式$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$
  - $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2})+(\frac{2}{n^2})+(\frac{3}{n^2})+\ldots(\frac{n}{n^2})$

    等差数列求和公式$\frac{(a_1+a_n)n}{2}$ $=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)n}{2n^2}$ $=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}=\frac{1}{2}$
  - $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+6^n}{2^{n+1}+6^{n+1}} = \frac{1}{6}$

函数极限