

数学

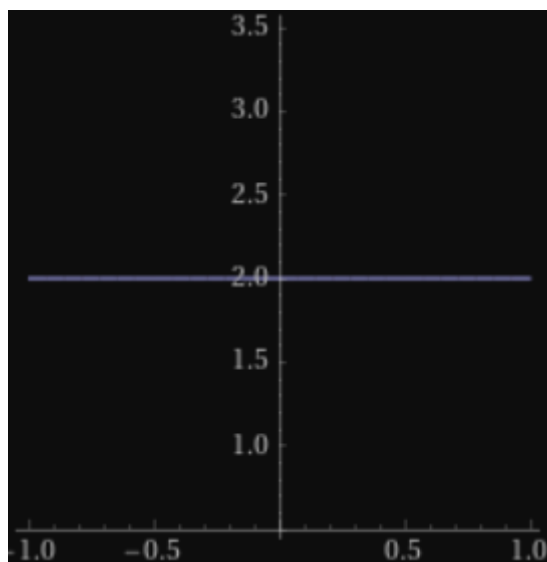
第一章函数极限和连续

1.函数

- $y=f(x)$
 - x 是自变量 x 的范围叫定义域
 - y 是因变量 y 的范围叫做值域
 - f 是对应法则
- $\frac{b}{a}$ 、 $\frac{x}{y}$ 、 $\frac{1}{x+1}$ 开方数 $\sqrt{\text{被开方数}}$

常数函数

- $y=c$ (常数) 偶函数 关于 y 轴对称

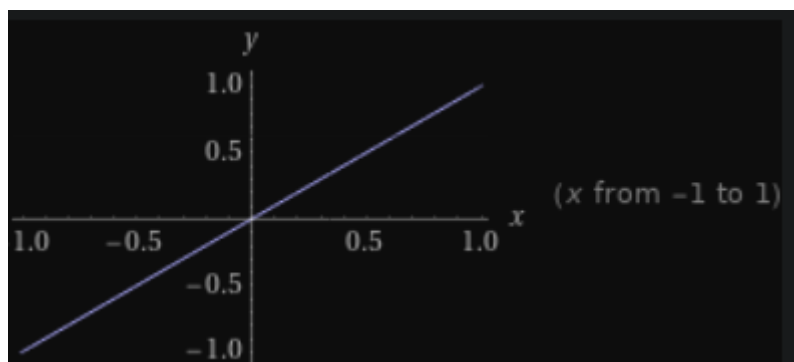


基本初等函数

幂函数

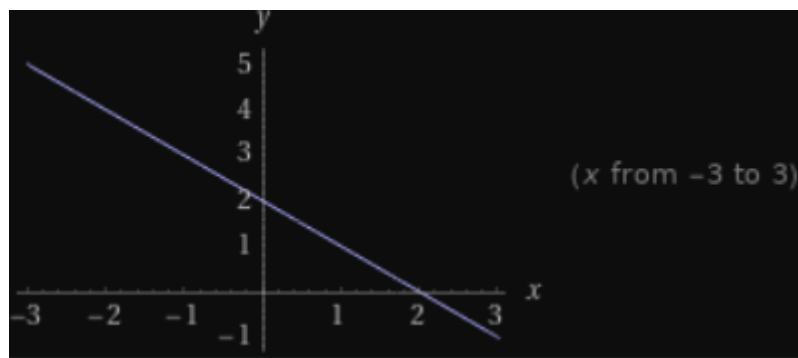
幂函数 $y=x^\mu$ ($\mu \neq 0$)

- $y=x^1=x$ 奇函数

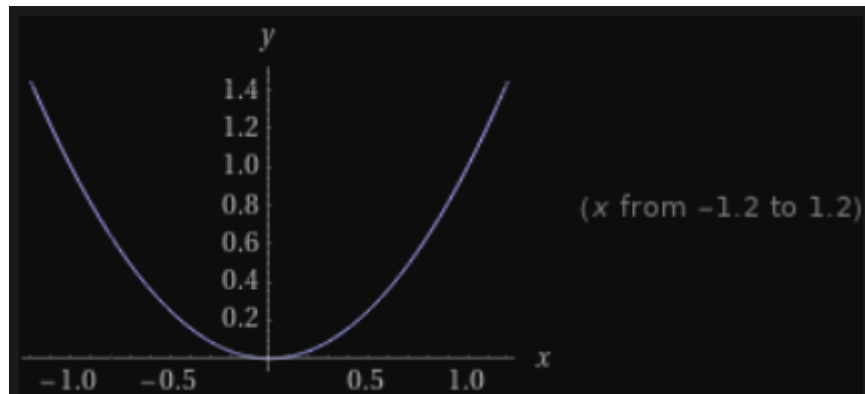


注意 奇函数特点关于圆点对称

- $y=kx+b$ (一条直线)
例子 $y=2-x$ 如何判断是直线 x 是一次幂

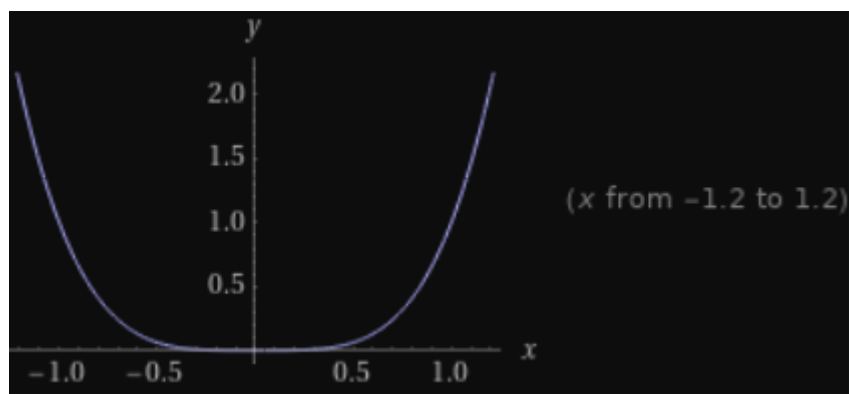


- $y=x^2$ 偶函数



注意 偶函数特点关于y轴对称

- $y=x^4$ 偶函数

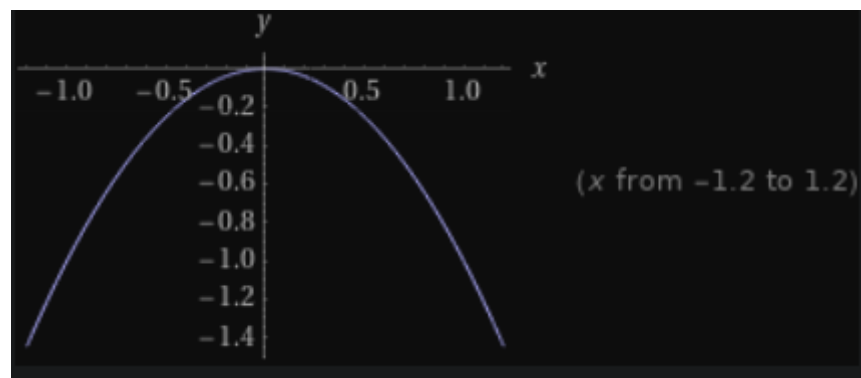


- $y=ax^2+bx+c$ (抛物线)

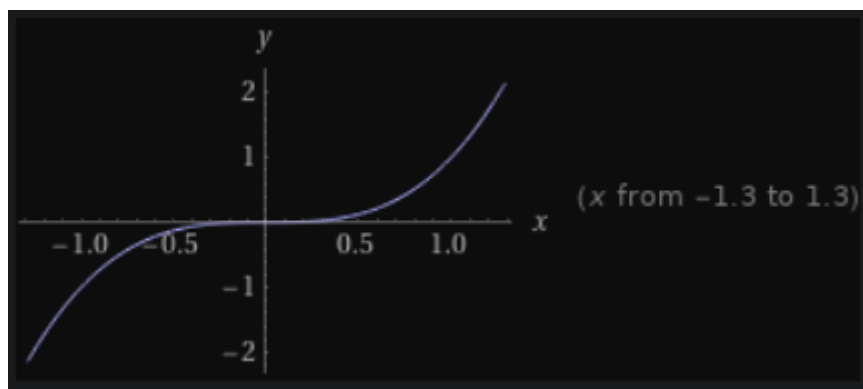
$a>0$ 开口向上

$a<0$ 开口向下

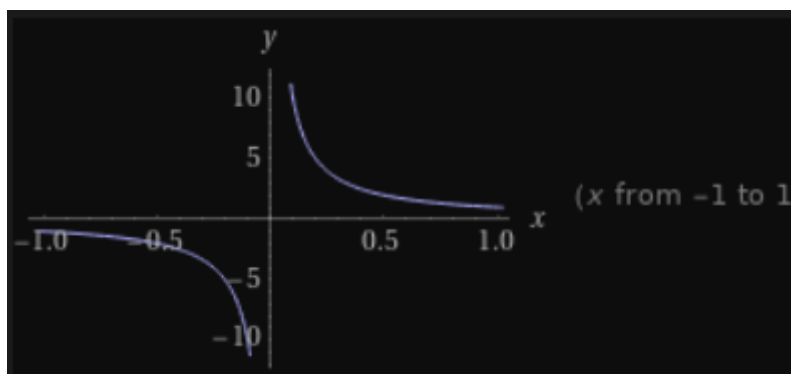
- $y=-x^2$ 偶函数



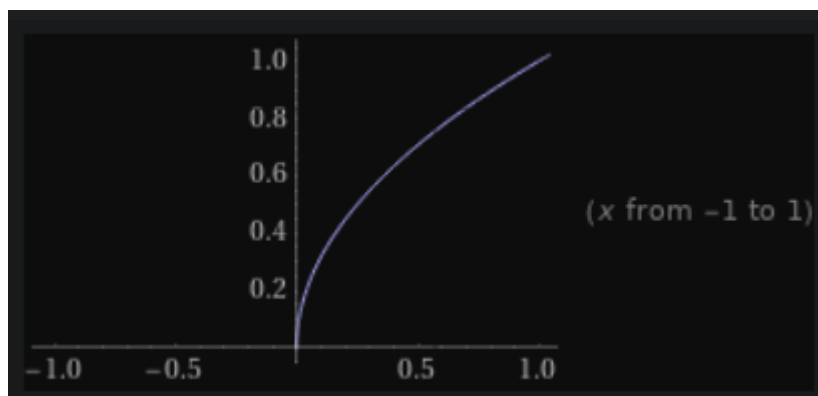
- $y=x^3$ 奇函数



- $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ 奇函数 定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



- $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ 非奇非偶 定义域 $[0, +\infty)$



幂函数的性质

$$1. (x^p)^q = x^{p \cdot q}$$

$$\text{例子 } (x^3)^2 = x^6 \neq x^5$$

$$2. x^p \cdot x^q = x^{p+q}$$

$$\text{例子 } (x^3)^2 = x^6 \neq x^5$$

$$3. x^q \div x^p = x^{q-p}$$

$$\text{例子 } x^3 \div x^2 = x$$

$$4. x^p \div 1 = x^{-p}$$

$$\text{例子 } x \div 1 = x^{-1} \text{ (反比例函数)} \quad x^3 \div 1 = x^{-3}$$

$$5. \sqrt[m]{x^n} = x^{n/m}$$

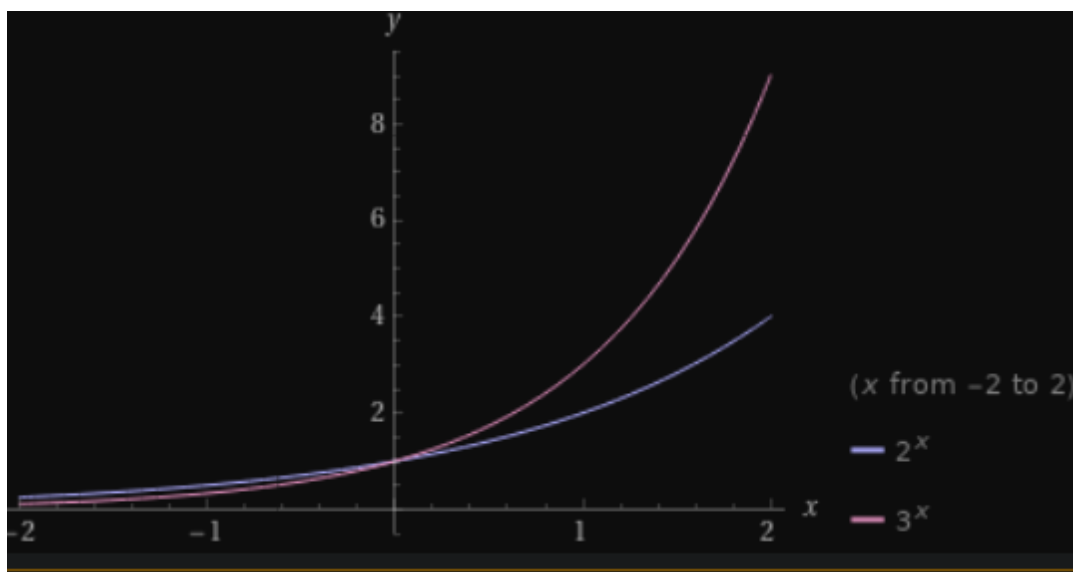
$$\text{例子 } \sqrt[2]{x^1} = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \quad \sqrt[4]{x^3} = x^{3/4}$$

指数函数

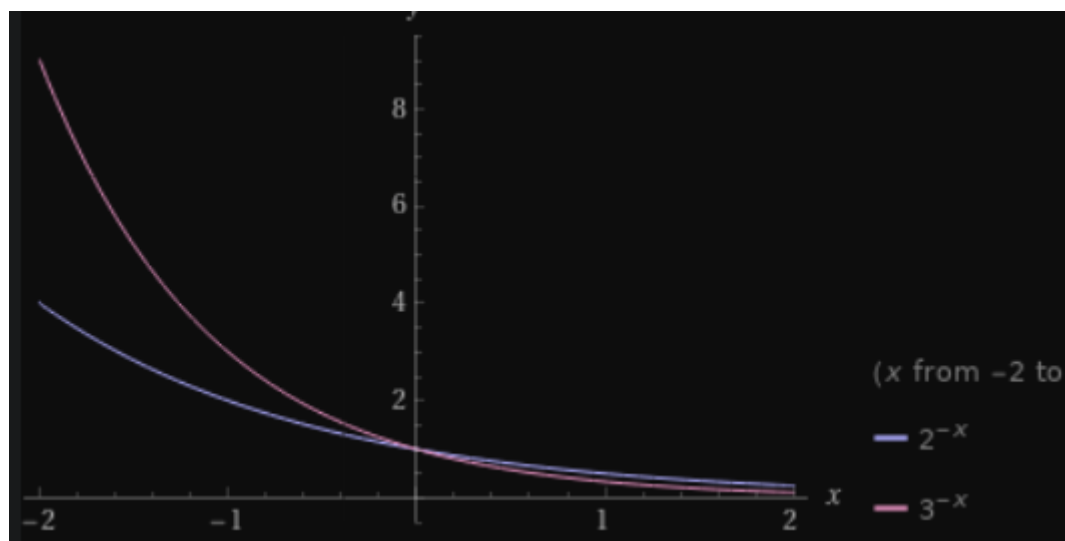
- $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) $x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$

1. $a^0 = 1$ a 必须大于 0

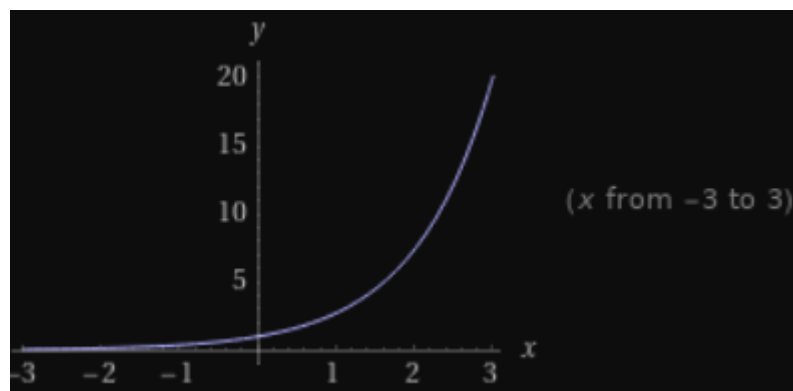
2. $a > 1$ $y = 2^x$ $y = 3^x$



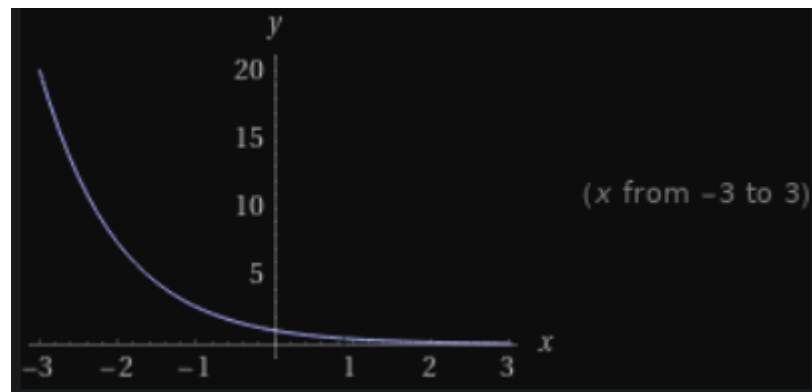
3. $0 < a < 1$ $y = (\frac{1}{2})^x$ $y = (\frac{1}{3})^x$



4. $y = e^x$ $e = 2.718281... > 1$



5. $y = e^{-x} = (e^{-1})^x = (\frac{1}{e})^x$ $e^{-1} < 1$ 和 $y = e^x$ 对称



指数函数性质

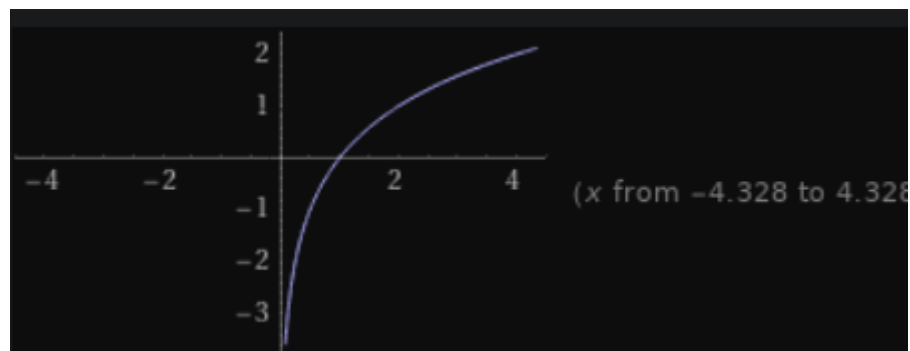
1. $(e^x)^y = e^{xy}$
2. $e^{x1} * e^{x2} = e^{x1+x2}$
3. $e^{x1} \setminus e^{x2} = e^{x1-x2}$
4. $e^x \setminus 1 = e^{-x}$
5. $\sqrt[m]{(e^x)^n} = \sqrt[m]{e^{xn}} = e^{m \setminus xn}$
6. $(a*b)^x = a^x * b^x$

7. 例题

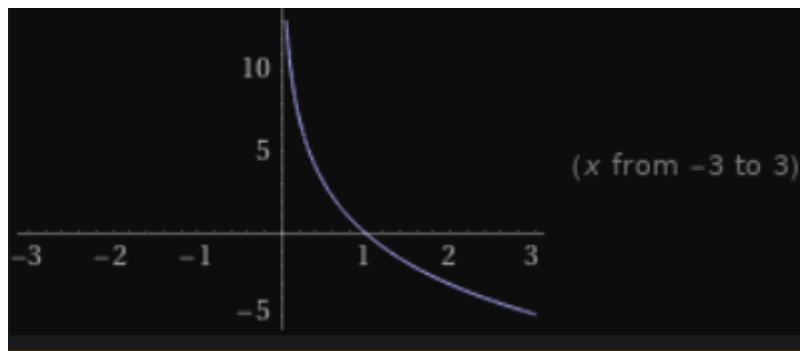
- $(e^x)^2 = e^{2x} \neq e^{x2}$
- $e^{3x} * e^{2x} = e^{5x}$
- $e^{3x} - e^{2x} = e^{2x}(e^x - 1) \neq e^x$
- $e^{3x} \setminus e^{2x} = e^x$
- $\sqrt[3]{e^{2x}} = e^{3 \setminus 2x}$
- $2^x * e^x = (2e)^x$

对数函数

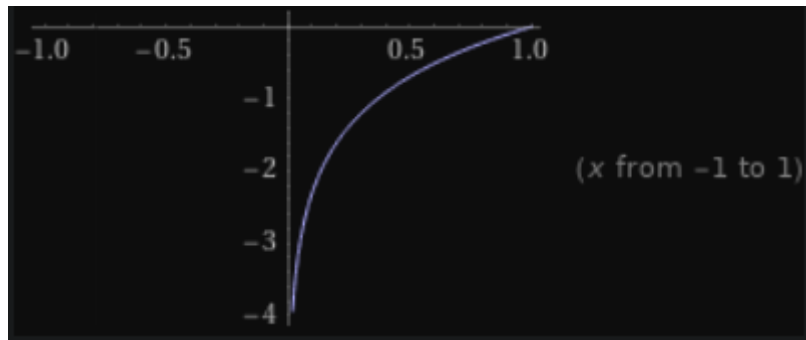
- $y = \log_a x$ $x > 0$ x 是对数里面的真数 $a > 0$ $a \neq 1$ a 是对数里面的底数 定义域 $(0, +\infty)$
- $a > 1$



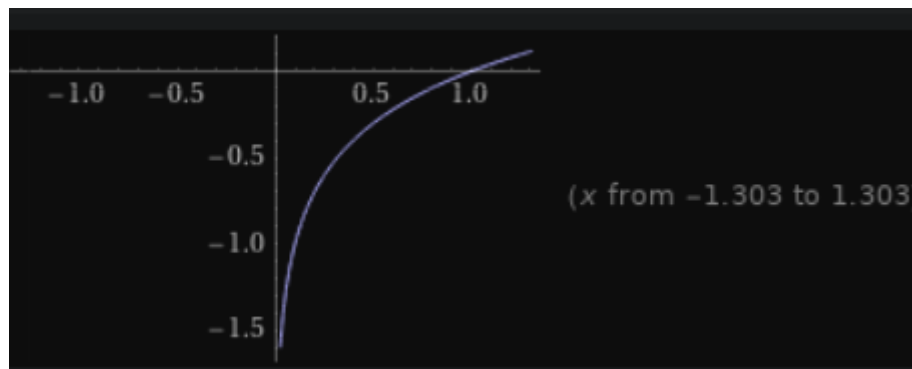
- $0 < a < 1$



- $y = \log_a^1 = 0$ $y = \log_a^a = 1$
- $a=e$ 时 $y = \log_e^x = \ln^x$



- $a=10$ 时 $y = \log_{10}^x = \lg^x$



对数性质

$$1. \log_a^x + \log_a^y = \log_a^{xy} \quad \ln^x + \ln^y = \ln^{xy}$$

$$2. \log_a^x - \log_a^y = \log_a^{y/x} \quad \ln^x - \ln^y = \ln^{y/x}$$

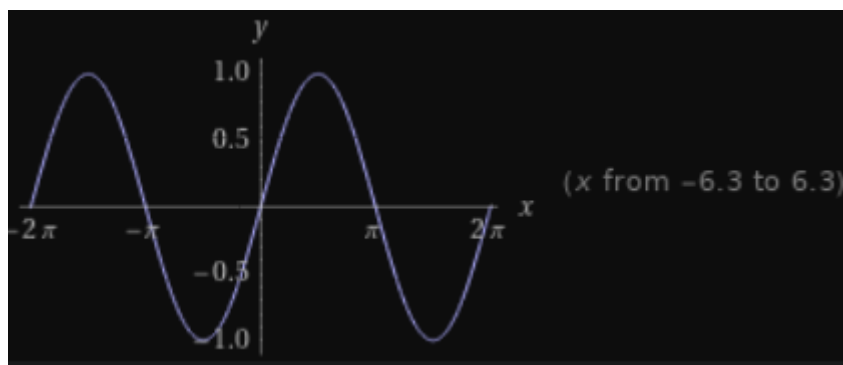
$$3. \log_a^{b^m} = m \log_a^b \quad \ln^{x^m} = m \ln^x$$

$$4. \text{对数恒等式 } e^{\ln A} = A$$

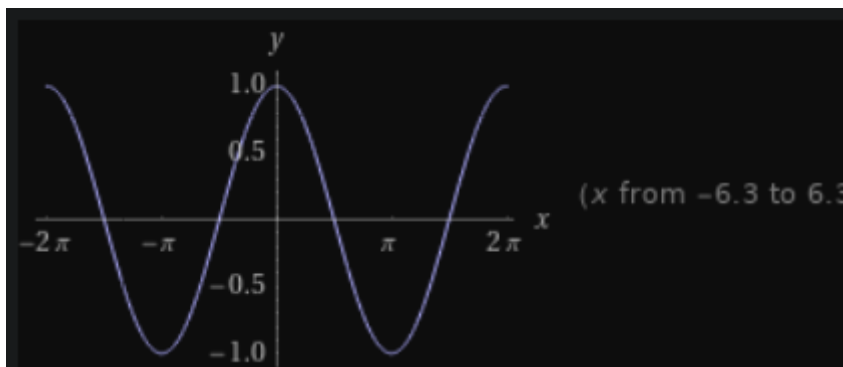
$$5. \log_a^b = \frac{\log_c^b}{\log_c^a} \quad \log_2^3 = \frac{\ln^3}{\ln^2} = \frac{\log_4^3}{\log_4^2}$$

三角函数

1. 正弦函数 $y = \sin x$ 周期 $t=2\pi$ 有界函数 奇函数 最大1 最小-1



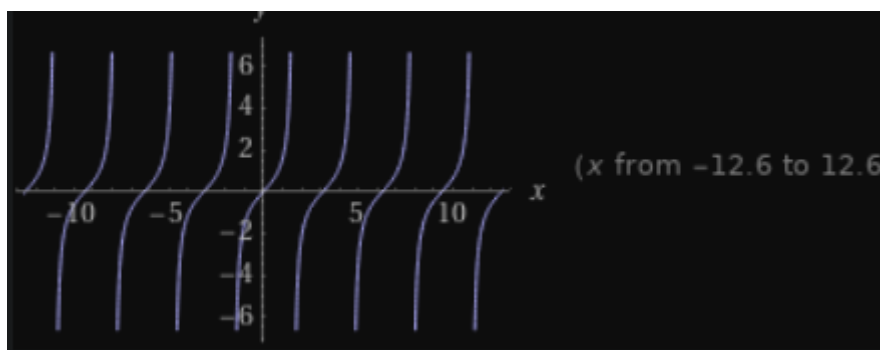
2. 余弦函数 $y = \cos x$ 周期 $t = 2\pi$ 有界函数 偶函数 最大1 最小-1



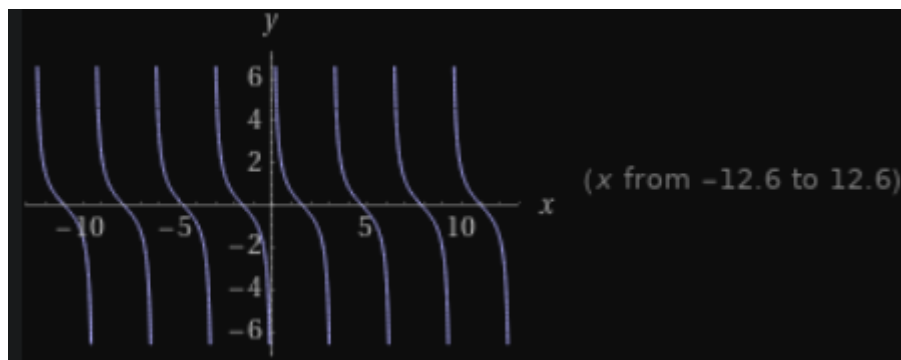
$\cos \pi = -1$ 必考

$\cos 0 = 1$ 必考

3. 正切函数 $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 周期 $t = \pi$ 奇函数



4. 余切函数 $y = \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$ 周期 $t = \pi$ 奇函数

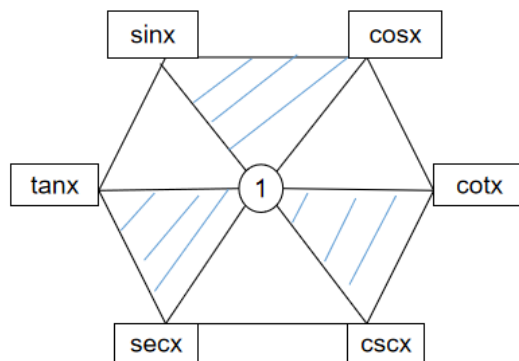


5. 正割函数 $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ 偶函数

6. 余割函数 $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$ 奇函数

记忆技巧

•



- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

三角形上顶点的平方等于下顶点的平方

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

任意一个顶点等于顺时针的两个相邻顶点的商

- $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\tan x = \frac{1}{\cot x}$ $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

对角线互为倒数

二倍角公式：

- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$

降幂公式

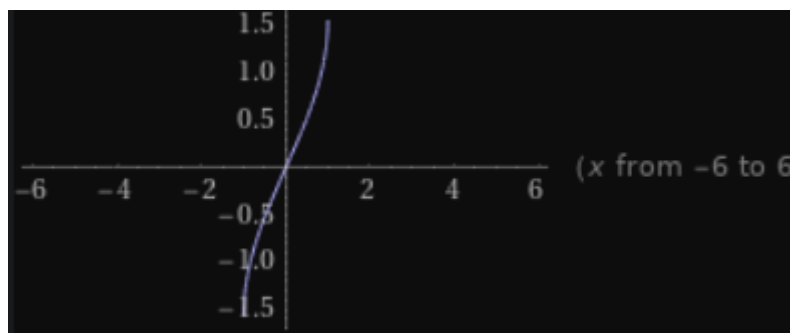
- $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

三角函数值

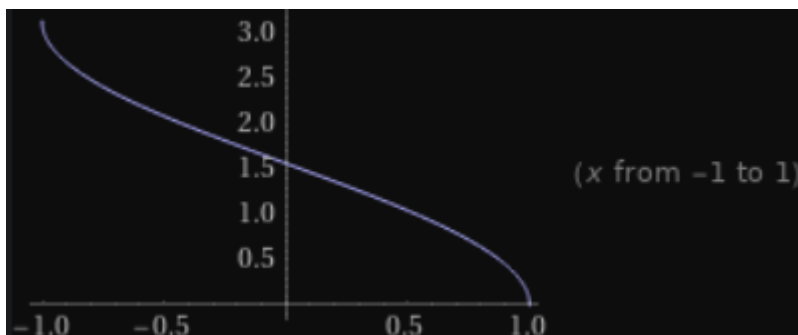
角 α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
弧度制	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
$\tan x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	\	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0
$\cot x$	\	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-\sqrt{3}/3$	-1	$-\sqrt{3}$	\
$\cot x = \frac{1}{\tan x}$									
$\sec x = \frac{1}{\cos x}$									
$\csc x = \frac{1}{\sin x}$									

反三角函数

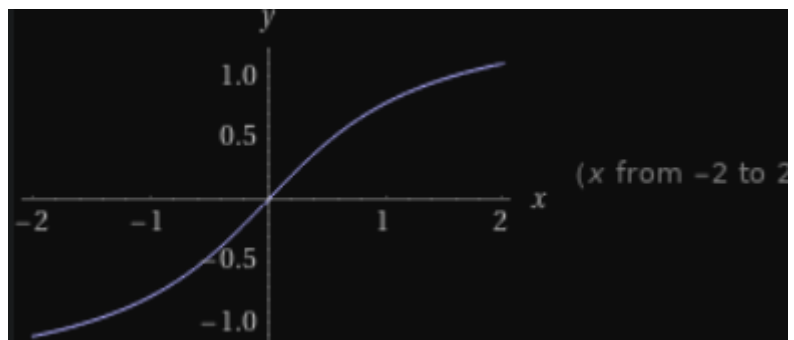
1. 反正弦函数 $y = \arcsin x$ 奇函数 有界函数 定义域 $x \in [-1, 1]$ $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



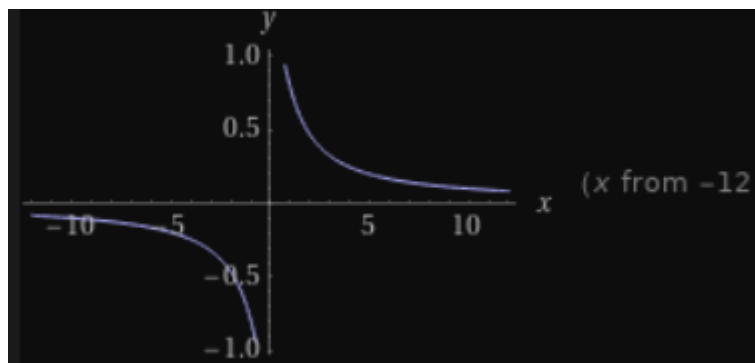
2. 反余弦 $y = \arccos x$ 定义域 $x \in [-1, 1]$ $y \in [0, \pi]$



3. 反正切函数 $y = \arctan x$ 奇函数 有界函数 定义域 $x \in [-\infty, \infty]$ $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



4. 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 有界函数 定义域 $x \in [-\infty, \infty]$ $y \in [0, \pi]$



图像可能有差距

5. 考试题型

1. $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

2. $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

复合函数

- 例 $y = (x^2 + 3)^3$ 由 $u = x^2 + 3$ 和 $y = u^3$ 复合

- 技巧 符合拆分分单独的初等函数

- 例题

1. $y = \sin(x+1)$ 由 $u = x+1$ 和 $y = \sin u$ 复合

2. $y = \log^{2x+2}_3$ 由 $u = 2x+2$ 和 $y = \log^u_3$ 复合

3. $y = \arcsin x^2$ 由 $u = x^2$ 和 $y = \arcsin u$ 复合
 4. $y = \cos^2 x$ 由 $u = \cos x$ 和 $y = u^2$ 复合
 5. $y = \ln^2 x$ 由 $u = \ln x$ 和 $y = u^2$ 复合

初等函数

- 初等函数：由基本初等函数及常数，经过有限次的加，减，乘，除及有限次的复合运算所构成，并能用一个式子表示的函数

分段函数

$$y = \begin{cases} x & x > 0 \\ 1 - x & x \leq 0 \end{cases}$$

考点一求函数定义域

1. 求初等函数及分段函数的定义域

1. $\frac{1}{x}$ $x \neq 0$ 例 $\frac{1}{x} \neq 0$
 2. $\sqrt[n]{x}$ $x \geq 0$ 例 $y = \sqrt{x} \ x \geq 0$
 3. $\sqrt[n]{x}$ $x \in [-\infty, \infty]$ 例 $y = \sqrt[3]{x} \ x \in [-\infty, \infty]$
 4. $y = \log_a x$ $x > 0$ 或者 $y = \ln x \ x > 0$ $y = \lg x \ x > 0$
 5. $\arcsin x$ 或者 $\arccos x$ $x \in [-1, 1]$ 例子 $\arcsin x \ [-1, 1]$ $\arccos x \ [-1, 1]$
 6. 例子

$$y = \sqrt{2-x} \quad 2-x \geq 0 \rightarrow x \leq 2 \rightarrow (-\infty, 2]$$

$$y = \ln(x-3) \quad x-3 > 0 \rightarrow x > 3 \rightarrow (3, \infty)$$

$$y = \frac{1}{x+1} \quad x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1 \rightarrow (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$$

$$y = \frac{\sqrt{64-x^2}}{\ln(x-5)} \quad \begin{cases} 64-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 64 & -8 \leq x \leq 8 \\ x-5 > 0 \Rightarrow x > 5 & x > 5 \\ \ln(x-5) \neq 0 \Rightarrow x-5 \neq 1 & x \neq 6 \end{cases}$$

$(5, 6) \cup (6, 8]$

注意ln算法是 $\ln 1 = 0$ 所以 $x-5 \neq 1$ 大于取两边小于取中间

$$y = \sqrt{16-x^2} + \ln(x-2) \quad \begin{cases} 16-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 16 & -4 \leq x \leq 4 \\ x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 & x > 2 \end{cases}$$

$(2, 4]$

$$y = \frac{\arcsin(\frac{x-1}{3})}{\sqrt[3]{x-2}} \quad \begin{cases} -1 \leq \frac{x-1}{3} \leq 1 \Rightarrow -3 \leq x-1 \leq 3 & -2 \leq x \leq 4 \\ x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 & x \neq 2 \end{cases}$$


$[-2, 2) \cup (2, 4]$


$$y = y = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x+1 & 0 < x < 2 \\ x^2 & 2 \leq x \leq 5 \end{cases} \quad (-\infty, 5]$$










































































































































































































分段函数求定义域 就是把所有加一起

7. 真题

1. 2017.11 $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\ln x}$ $\begin{cases} x-1 \geq 0 & x \geq 1 \\ x > 0 & x > 0 \\ \ln x \neq 0 & x \neq 1 \end{cases}$ $(1, +\infty)$
2. 2018.11 $y = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{2-x}}$ $\begin{cases} x-1 > 0 & x > 1 \\ 2-x > 0 & x < 2 \end{cases}$ $(1, 2)$
3. 2019.11 $y = \frac{\sqrt{16-x^2}}{\ln(x+3)}$ $\begin{cases} 16-x^2 \geq 0 & x^2 \leq 16 & -4 \leq x \leq 4 \\ x+3 > 0 & x > -3 & x > -3 \\ \ln(x+3) \neq 0 & x+3 \neq 1 & x \neq -2 \end{cases}$ $(-3, -2) \cup (-2, 4]$

4. 2020.11 $y = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{5-x}}$ $\begin{cases} x-1 > 0 & x > 1 \\ 5-x > 0 & x < 5 \end{cases}$  (1, 5)

5. 2021.11 $y = \frac{\ln(x-6)}{\sqrt{9-x}}$ $\begin{cases} x-6 > 0 & x > 6 \\ 9-x > 0 & x < 9 \end{cases}$  (6, 9)

6. 2022.11 $y = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & x > 0 \\ \ln(1+x) & x \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 0 \\ 1+x > 0 \Rightarrow x > -1 \end{cases}$  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]  [-1, 1]  (-1, 1]