

贪心算法作业

2021K8009918003 王静初

第一题 Commando War

思路

对士兵的讲解是顺序进行的，而士兵们的行动是并行的。

因此，从一开始，对士兵讲解所花时间的总和就是确定的，我们假定为 m 。假设最后一个士兵需要执行的任务耗时 k 秒，那么总时间至少为 $m+k$ 秒。

至此，一个贪心的想法产生了：不妨让最后那个士兵执行耗时最短的任务，让总时间的下限尽量低一些。如果存在多个执行时间同样最短的任务，那么选择哪一个都可以：不论怎么选，总讲解时间是相同的，最后一个任务执行完成的时间也是相同的。

用数组**brief**和**exec**分别表示讲解和执行的时间，且执行时间最短的任务标号为 i 。既然已经确定了最后一个任务，假设倒数第二个要执行的任务标号为 j ，那么可以知道结束讲解这个任务的时间为 $m - \text{brief}[i]$ ，任务完成的时间为 $m - \text{brief}[i] + \text{exec}[j]$ 。让任务完成的时间尽量短即可。

由此可以看出，只要按执行时间长短排序，使执行时间越长的任务越先执行即可。

伪代码

```
// 为方便排序，使用数据结构
typedef struct{
    brief;
    exec;
}task;

// 排序判断
function cmp(a,b)
return a.exec>b.exec;
end function

// 输入为n个task的数组tasks，输出为最短完成时间
function CommandoWar(n,tasks)
b_time=0;
sort(tasks,tasks+n,cmp);
done_time=INT_MAX;
for i=0 to n-1 do:
    b_time+=tasks[i].brief;
    done_time=max(done_time,b_time+tasks[i].exec);
end for
return done_time;
end function
```

按题目要求进行输入输出：

```

int main()
{
    int case=1;
    int n,b,j;
    task tasks[MAX];
    scanf("%d",&n);
    while(n)
    {
        int i;
        for(i=0;i<n;i++)
        {
            scanf("%d %d",&b,&j);
            tasks[i].brief=b;
            tasks[i].exec=j;
        }
        printf("CASE %d: %d\n",case,ComandoWar(n,tasks));
        case++;
        scanf("%d",&n);
    }
    return 0;
}

```

正确性证明

现在tasks数组以按exec从大到小的顺序排序好，并按上述伪代码算出了结果done_time。假设tasks[n-1]不是在最后一个执行：

- 1.如果 $done_time = tasks[n-1].exec + \sum_{i=0}^{n-1} tasks[i].brief$ ，显然更改位置后的时间会延长。
- 2.如果 $done_time = tasks[j-1].exec + \sum_{i=0}^{j-1} tasks[i].brief$ ，那么tasks[n-1]必须换到tasks[j]及之前的位置才可能使结果改变。假设换到了位置k ($k \leq j$)，这样的话，位置k之前的完成时间不变，位置k后的完成时间增加tasks[n-1].brief。总完成时间延长。

故tasks[n-1]最后一个执行是最优解之一。递归来看tasks[n-2]、tasks[n-3]...可知按排序顺序排列即为最优解之一（最优解可能不唯一）。

算法复杂度

时间复杂度为 $O(\log n)$ ：排序需 $O(\log n)$ ，计算done_time需 $O(n)$ 。

空间复杂度为 $O(n)$ ：仅需保存tasks数组。如果不算tasks数组的话空间复杂度为 $O(1)$ 。

第二题 DNA Consensus String

思路

似乎也没有什么特别好的办法，直接模拟即可。

对二维数组dna[m][n]，其中每一行表示一组DNA。对dna的每一列，找到重复最多的碱基并记录下来，如果有重复次数相同的，选择字母序较小的那一个。将得到的碱基按序拼接即可得到答案。

伪代码

```

function char2num(c)
if c=='A' then return 0;
if c=='C' then return 1;
if c=='G' then return 2;
else return 3;
end function

function num2str(num)
static const string arr[4]={"A","C","G","T"};
return arr[num];

function DNAConsensusString(dna,m,n) //dna[m][n]
cnt[4]={0};
str="";
dist=0;
for i=0 to n-1 do:
    for j=0 to 3 do:
        cnt[j]=0;
    end for
    max=0;
    min_k=4;
    for j=0 to m-1 do:
        k=char2num(dna[j][i]);
        cnt[k]++;
        if cnt[k]>max then
            max=cnt[k];
            min_k=k;
        end if
        else if cnt[k]==max&&k<min_k then
            min_k=k;
        end else if
    end for
    str+=num2str(min_k);
    dist+=m-max;
end for
print(str);
print(dist);
end function

```

按题目要求进行输入输出：

```

int main()
{
    int m,n;
    scanf("%d %d",&m,&n);
    vector<vector<char>> dna(m,vector<char>(n));
    for(int i=0;i<m;i++)
    {
        for(int j=0;j<n;j++)
        {
            scanf("%d",&dna[i][j]);

```

```
    }  
  }  
  DNAConsensusString(dna,m,n);  
  return 0;  
}
```

正确性证明

整个dna序列的汉明距离为每个位置的汉明距离之和。因此，只要能保证每个位置的汉明距离最小，就能使整个dna序列的汉明距离最小。

算法复杂度

时间复杂度为 $O(m*n)$ ：对dna数组遍历一遍即可。

不算dna数组的话，空间复杂度为 $O(1)$ 。

因为至少也得把输入遍历一遍，应该没有比本算法复杂度更低的算法了。

第三题 Opponents

思路

只有对手都出席才可能被打败。每天检查对手是否都来，如果都来了则标记为“失败”，反之为成功。

用双指针保存成功的最长持续时间（长度）。j指针始终向后走一天，如果该天成功则i指针不动，否则i指针指向j指针的后方。

伪代码

```
function Opponents(opnts,d,n)  
  fail=1;  
  maxlen=0;  
  i=j=0;  
  for j=0 to d-1 do:  
    fail=1;  
    for k=0 to n-1 do:  
      fail&=opnts[j][k]; //有对手不出席则不会被打败  
    end for  
    if fail==1 then:  
      i=j+1; //下一次成功必须在j之后  
    end if  
    else then:  
      maxlen=max(maxlen,j-i+1); //更新长度  
    end else  
  end for  
  return maxlen;  
end function
```

按程序要求进行输入输出：

```

int main()
{
    int n,d;
    cin>>n>>d;
    vector<vector<int>> opnts(d,vector<int>(n));
    for(int i=0;i<d;i++)
    {
        for(int j=0;j<n;j++)
        {
            cin>>opnts[i][j];
        }
    }
    cout<<Opponents(opnts,d,n)<<endl;
    return 0;
}

```

正确性证明

失败时令 $i=j+1$ 是为了计算可能的最长时间时 i 指向成功序列。且， i 指向的位置的前一天失败了，所以 i 指向的位置是成功序列的第一天。不断更新最长成功序列的长度即可得到答案，故而正确。

算法复杂度

时间复杂度为 $O(m*n)$ ，空间复杂度（不算输入）为 $O(1)$ 。

第四题 Minimum Varied Number

思路

要想让答案最小，前面的数字越小越好，位数越少越好。

故，先确定最后一位数字是9，然后让输入数字减去9。如果输入数字小于9则把这个数字放到最后一位，计算结束。接着按8、7、6、5、4、3、2、1的顺序对十位、百位一直到亿位重复此过程直到计算结束。这样算出来的数满足最高位最小且位数最少，所得即为所求。

伪代码

```

function MinimumVariedNumber(num)
dgt=9;
ans=0;
pow=1;
while num>0&&dgt>0 do:
    if num>=dgt then:
        num-=dgt;
        ans+=pow*dgt;
        pow*=10;
        dgt--;
    end if
else then:
    ans+=pow*num;
    num=0;

```

```
    end else
  end while
  if num>0 then return -1;
  return ans;
end function
```

按题目要求输入输出;

```
int main()
{
    int t,s;
    cin>>t;
    for(int i=0;i<t;i++)
    {
        cin>>s;
        cout<<MinimumVariedNumber(s)<<" ";
    }
    cout<<endl;
    return 0;
}
```

正确性证明

从后往前进行判断，按9、8、7...这个最大的递减序列取数，可以保证剩下的数字和最小。每一位都取到可以取得的最大，使输出结果位数最小。故最终结果是最小的。

算法复杂度

时间复杂度为 $O(1)$ ，因为最多需要执行9次。空间复杂度为 $O(1)$ 。

第五题 Joey Takes Money^[1]

思路

我们都知道，乘积一定时，两个数相差越大其和越大。所以不妨每次交换时把 a_i 和 a_j 换成1和 $a_i \cdot a_j$ 。则最终的数组为 $n-1$ 个1和数组累乘之积。

伪代码

```
function JoeyTakesMoney(money,n)
mul=1;
for i=0 to n-1 do:
    mul*=money[i];
end for
return (mul+n-1)*2022;
end function
```

按题目要求进行输入输出：

```
int main()
{
    int t,n;
    cin>>t;
    for(int i=0;i<t;i++)
    {
        cin>>n;
        vector<int> money(n);
        for(int j=0;j<n;j++)
        {
            cin>>money[i];
        }
        cout<<JoeyTakesMoney(money,n)<<endl;
    }
    return 0;
}
```

正确性证明

假设我们找到了一组 a_i 和 a_j ，使将其替换为1和 $a_i * a_j$ 后数组最大。

那么接下来，被换成1的数就不需要和别的数一起被选中了，因为1已经是最小值，换数最好的结果就是互换，没有意义。

还剩下 $n-1$ 个数需要进行换数。重复过程，最终的数组会是 $n-1$ 个1和数组累乘之积。这时数组的和最大。

算法复杂度

时间复杂度为 $O(n)$ ，空间复杂度（不算输入）为 $O(1)$ 。

[^1]:RIP Chandler Muriel Bing