

中国科学院大学

试题专用纸

课程编号: B01GB007Y-03

课程名称: 数学物理方法(期末A卷)

任课教师: 张文生

注意事项:

1. 考试时间为 180 分钟, 考试方式 闭卷;
2. 全部答案写在答题纸上;
3. 考试结束后, 请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (12分) 利用留数定理计算实积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx$$

2. (12分) 利用留数定理计算实积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+a)(x+b)} dx, \quad b > a > 0$$

3. (12分) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-z^{n+1}} - \frac{1}{1-z^n} \right)$ 在区域 $|z| < 1$ 与 $|z| > 1$ 内分别代表两个解析函数, 但不互为解析延拓。

4. (15分) 求 $zw'' - zw' + w = 0$ 方程在 $z = 0$ 邻域内的两个幂级数解。

5. (16分) 用分离变量法求解下列定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (0, \pi), \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 3 \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, & x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

6. (16分) 用 Duhamel 原理 (冲量原理) 求解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x(l-x), & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, & t \geq 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

7. (17分) 用格林函数法求解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos \frac{\pi x}{l} \sin \omega t, & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$