中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B0912003Y

课程名称：组合数学

任课教师：孙晓明

注意事项：

1.考试时间为 ___90___ 分钟，考试方式 ___闭___ 卷；

2.全部答案写在答题本（纸）上；

3.考试结束后，请将本试卷和答题本（纸）、草稿纸一并交回。

---

1. （15 分）求满足如下要求的由a,b,c三个字母组成的长为n的字符串的个数：

   a) （7 分）a出现偶数次，b出现奇数次；

   b) （8 分）a出现偶数次，b出现奇数次，且a必须出现。

2. （10 分）令h_n表示由a,b,c三个字符组成的长度为n，且不含连续的a以及连续的b的字符串的个数。

   a) （5 分）写出h_n的递推关系；

   b) （5 分）求出h_n的通项公式。

3. （10 分）计算如下方程非负整数解的个数：

$$x_1+x_2+x_3+x_4=14,\quad 0\le x_1,x_2,x_3,x_4\le 7.$$

4. （10 分）证明下述结论：

   a) （5 分）证明：

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

   b) （5 分）利用上面的恒等式证明：

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}^2=n\binom{2n-1}{n-1}.$$

5. （15 分）回答以下两个问题：

   a) （6 分）叙述高斯二次互反律；

   b) （9 分）计算勒让德符号$\left(\frac{2022}{41}\right)$。

6. （10 分）证明：存在两个正整数m,n，使得$\left|\sqrt{2}m-n\right|\le\frac{1}{1000}$。（提示：考虑$\{x\}$）

7. （15 分）回答以下两个问题：

   a) （6 分）叙述 Ramsey 数$R(3,3,3)$和$R(3,3,3,3)$的定义；

   b) （9 分）证明：$R(3,3,3,3)\le 4(R(3,3,3)-1)+2$。

8. （15 分）斐波那契数列F_n满足递推关系：$F_0=0,F_1=1,F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\ (n\ge 2)$。

   a) （6 分）判断F_{2022}的奇偶性；

b） （9 分）证明：对于任意素数p，斐波那契数列模p是周期的，即存在$t > 0$，使得$\forall n$, $F_{n+t} \equiv F_n (mod\ p)$。