中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B01GB003Y-B01

课程名称：线性代数 II-B（期末 A 卷）

任课教师：魏达盛

注意事项：

1.考试时间为 180 分钟，考试方式 闭 卷；

2.全部答案写在答题纸上；

3.考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (10')应用施密特正交化方法，求出欧氏空间$\mathbb{R}^4$中由向量$(1,1,1,1)$，$(3,3,-1,-1)$，$(-2,0,6,8)$ 张成的子空间的一组标准正交基。

2. (10')在埃米特空间$\mathbb{C}^3$中求出子空间 $\langle(1,0,1),(2,i,1)\rangle$ 的正交补。

3. (10') 设 3 阶矩阵 A 的特征值为$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$. 设矩阵 $\mathrm{B}=2\mathrm{A}^2+2\mathrm{A}-3\mathrm{E}$，求矩阵 B 的若当标准型以及行列式。

4. (10')设矩阵 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} x & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$的一个特征值为 0，求 A 的另外两个特征值。

5. (10')设 A 是n阶正交矩阵并且它的行列式为-1，证明：-1 是 A 的一个特征值。

6. (10') 设$\mathcal{A}$ 是埃米特空间上的正规算子，如果存在一个正整数n，使得 $\mathcal{A}^n=0$. 证明：$\mathcal{A}=0$.

7. (10')设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) (5')求A的特征多项式、特征值以及对应的特征向量；

2) (5')求A的若当标准型；

8. (10’)设实对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

求正交矩阵 Q，使得$Q^{-1}AQ$为对角矩阵，并给出这个对角矩阵。

9. (10’)设$\mathcal{A}$ 是一个线性算子，如果 1 是$\mathcal{A}^2$的特征值，证明：1 与-1 有一个为$\mathcal{A}$的特征值。

10. (10’)证明: 3 阶复方阵 A 与 B 相似的充分且必要条件是，方阵 A 与 B 具有相同的特征多项式与极小多项式。