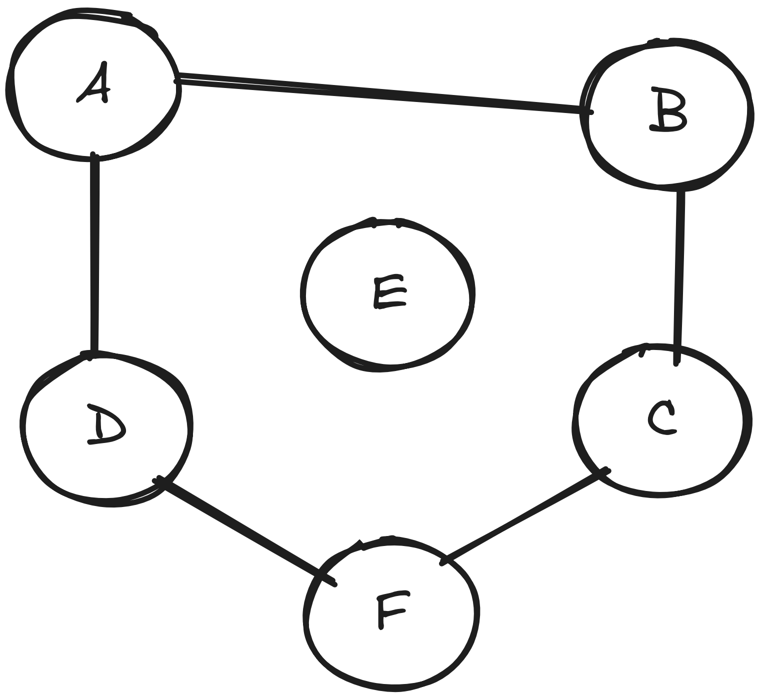
TD1

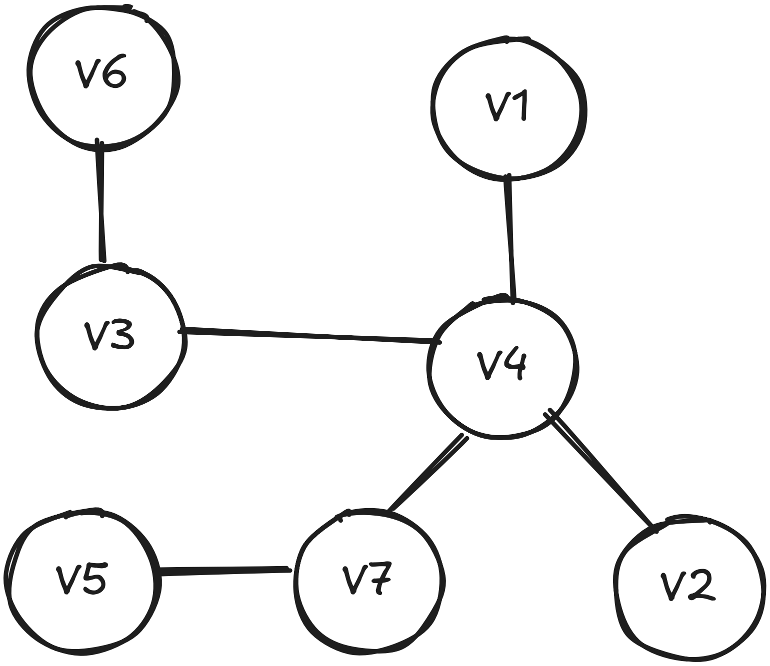
Exercice 1

1. 1. G = (V, E)
   2. V = $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
   3. E = $\{v_1v_3, v_2v_3, v_4v_3, v_5v_3\}$

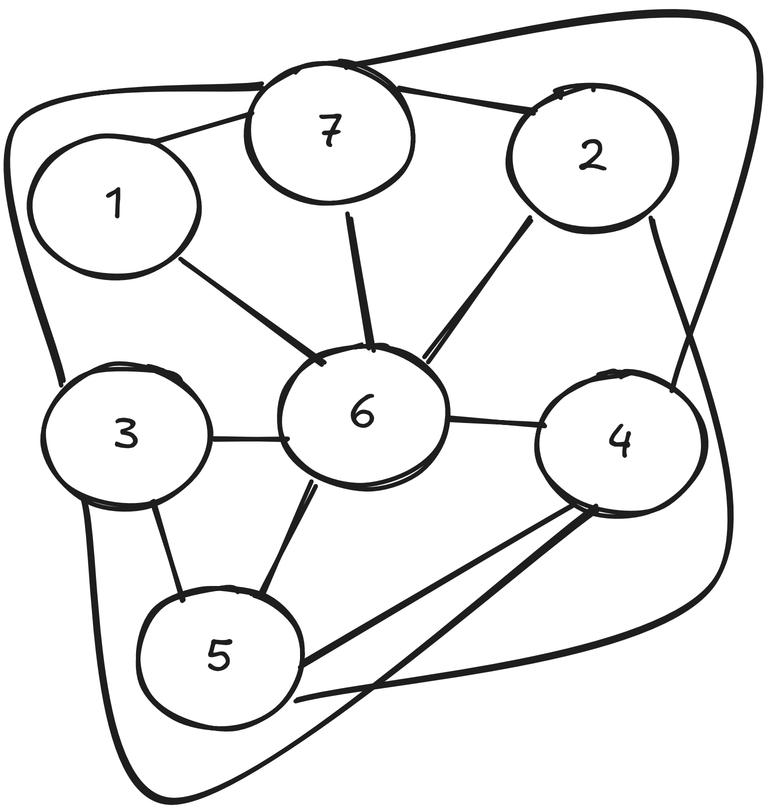
Exercice 2



1.

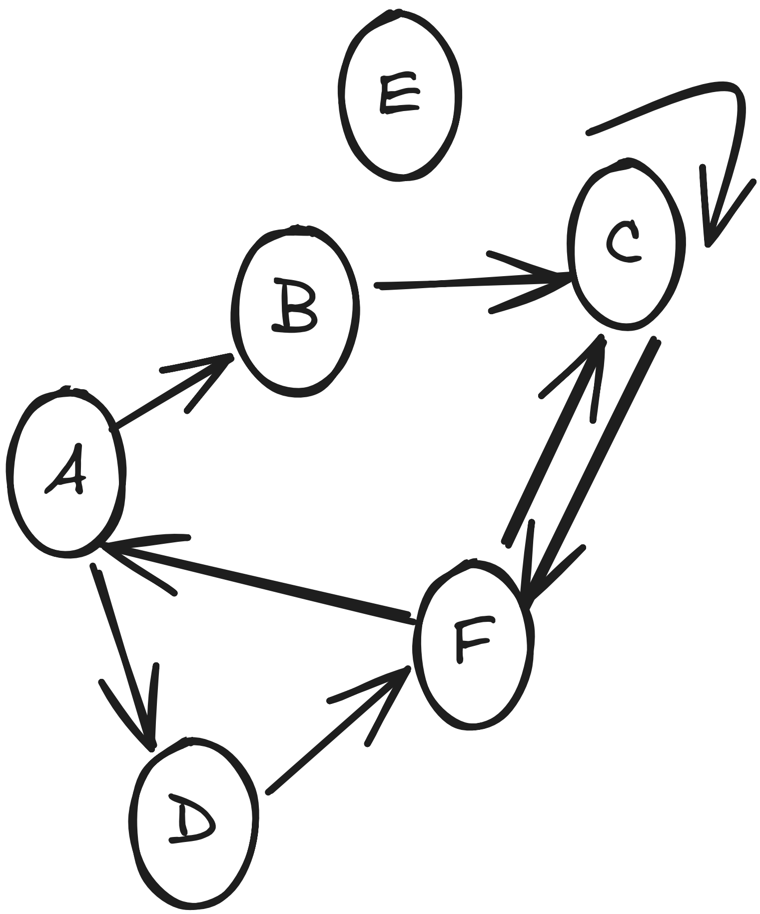


2.

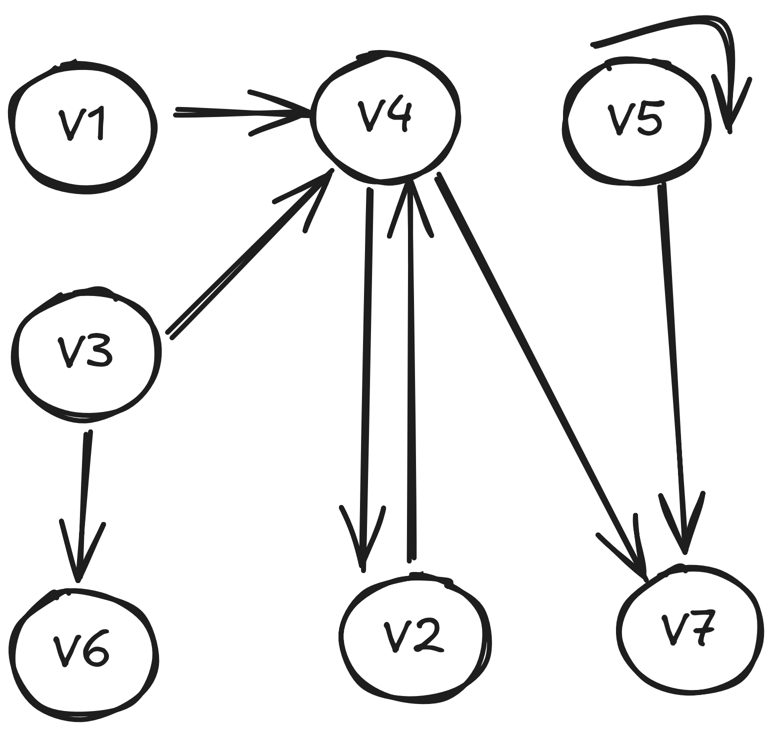


3.

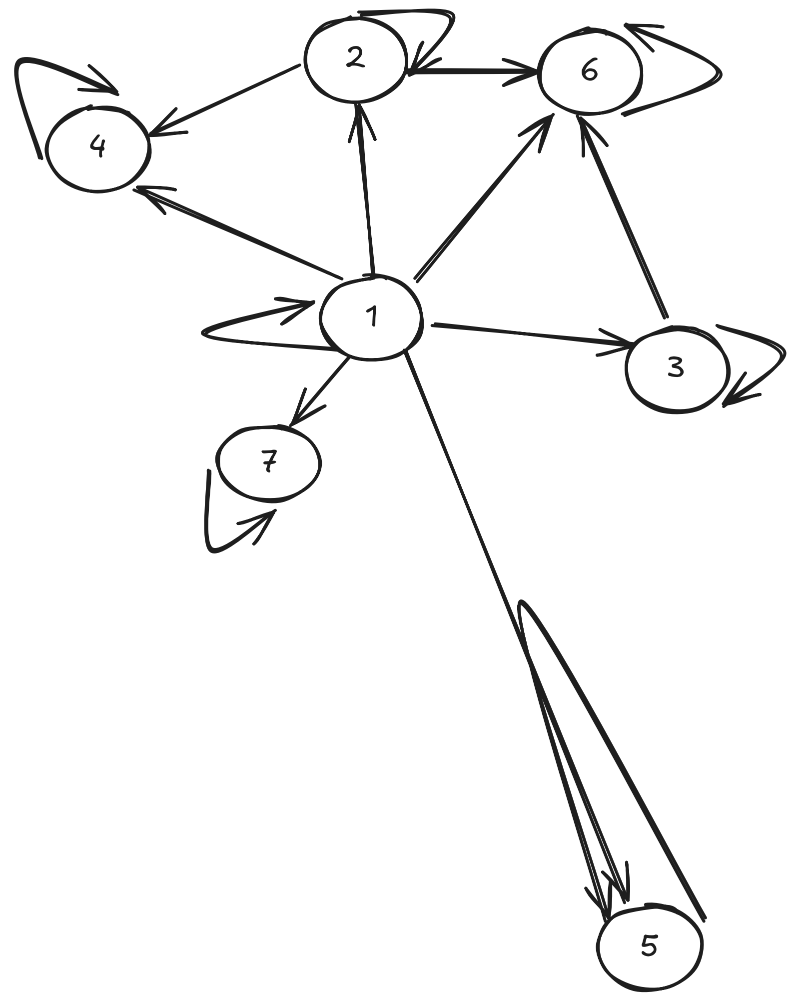
Exercice 3



1.

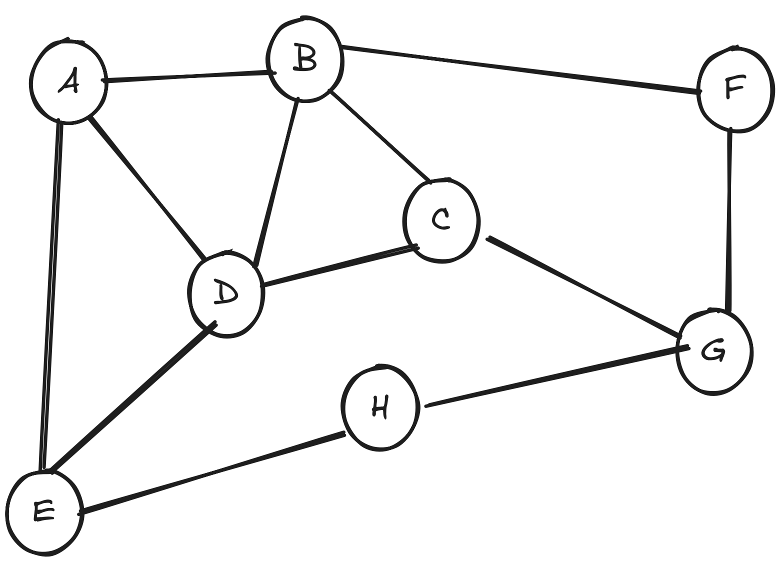


2.

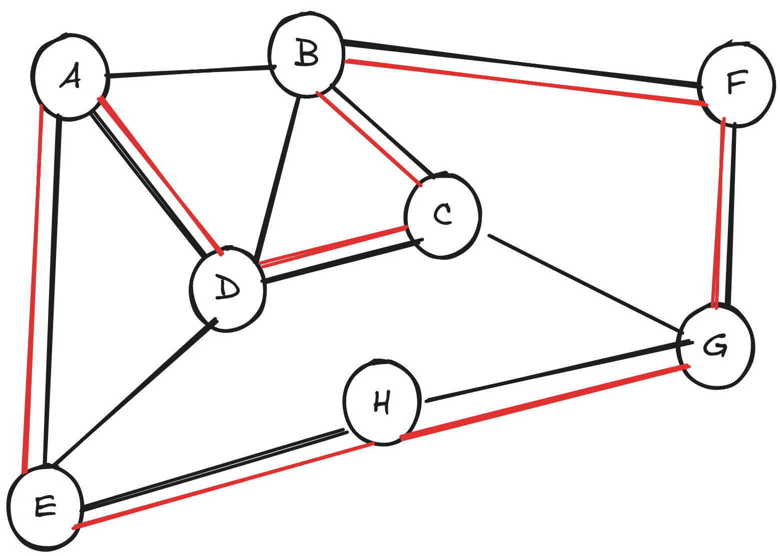


3.

Exercice 4



1. Ordre, taille, degré
    1. Ordre = 8
    2. Taille = 12

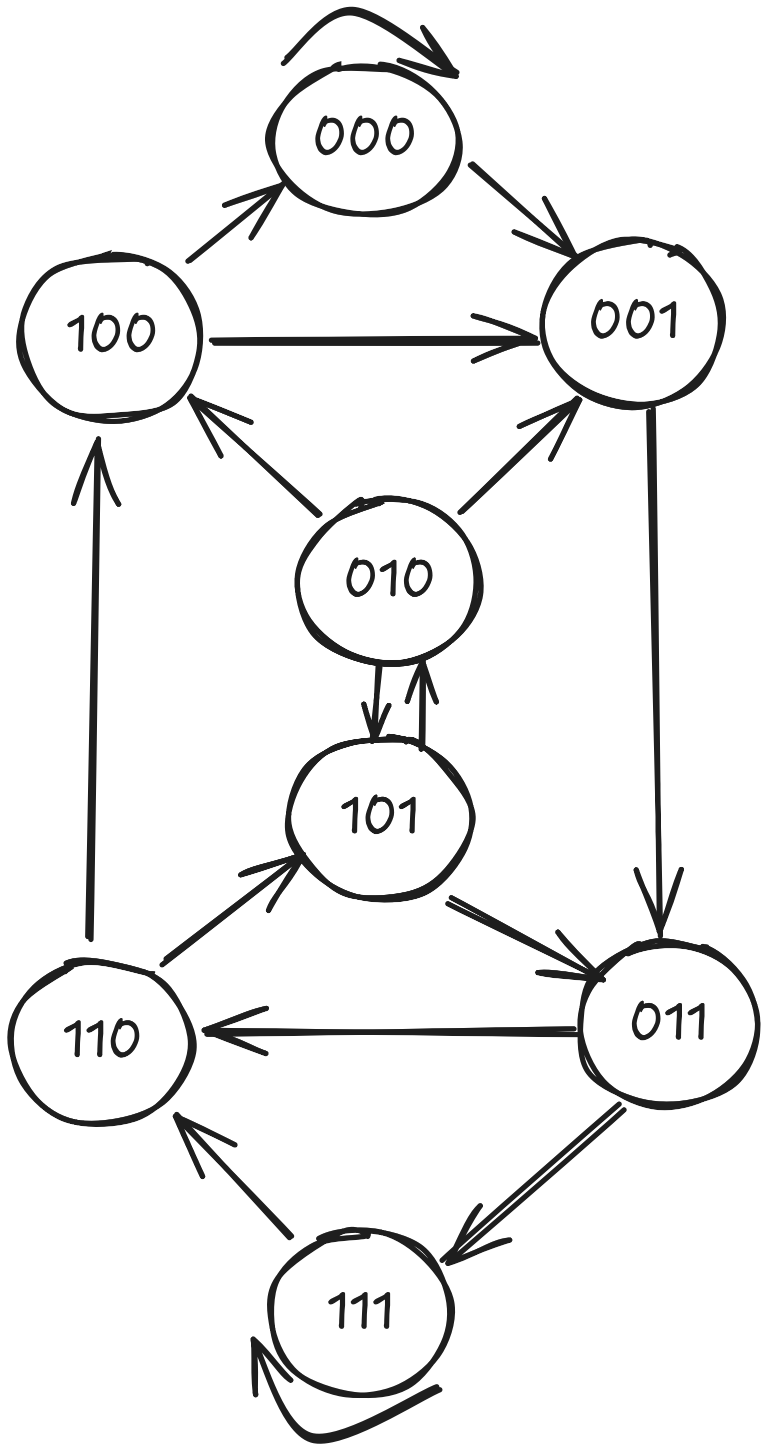
3. Degré :
    1. δ(a) = 3
    2. δ(b) = 4
    3. δ(c) = 3
    4. δ(d) = 4
    5. δ(e) = 3
    6. δ(f) = 2
    7. δ(g) = 3
    8. δ(h) = 2
    9. Total = 24
2. Déterminer un cycle, le plus court possible, passant par chaque sommets :
    1. a d c b f g h e a
    2. 

Exercice 5

- 0<m<$\dfrac{n(n-1)}{2}$

Exercice 6

Graphe de Brujin

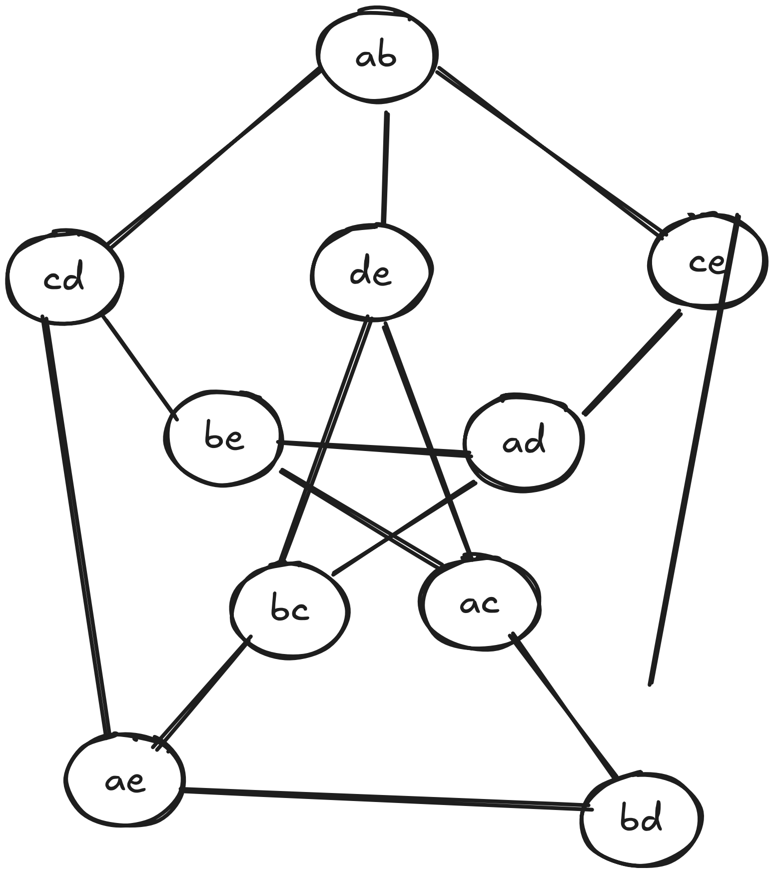


Exercice 7

$G = (V, E)$

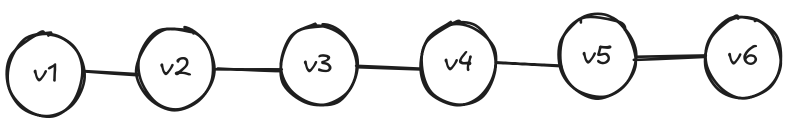
$V = \{a, b, c, d, e\}$

Ordre $n = |V| = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2! \times 3!}$



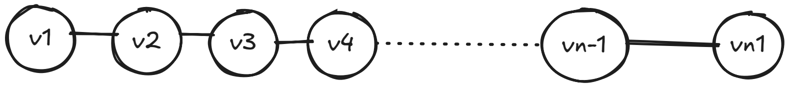
Quelques graphes classiques

La chaîne a 6 sommets



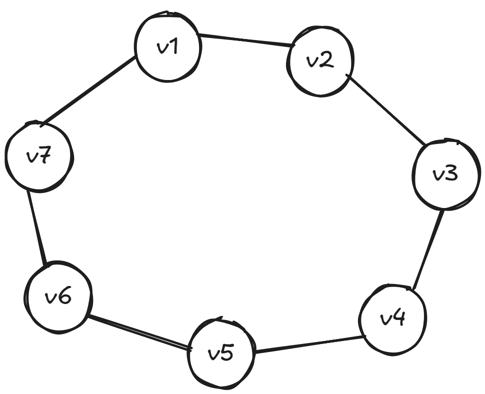
Ensemble de sommet : V={ v1,v2,v3,v4,v5,v6 }
Ensembles d'arrêtes : E={ v1v2,v2v3,v3v4,v4v5,v5v6 }
Ordre : n = |V| = 6
Taille : |E| = 5
Degré min : 1
Degré max : 2
Diamètre : [distance(v1,v6)] = 5
Ex : Distance(v3,v5) = 2

La chaîne a n sommets



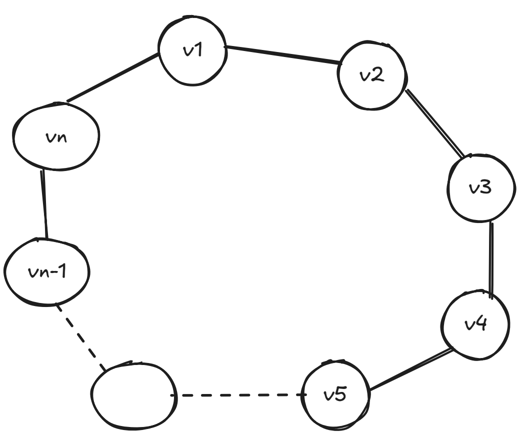
Ensemble de sommet : V={ v1,v2,...,vn }
Ensembles d'arrêtes : E={ v1v2,v2v3,...,vn-1vn }
Ordre : n = |V| = n
Taille : |E| = n-1
Degré min : 1
Degré max : 2
Somme des degrés : 1+2(n-2)+1 = 2(n-1) = 2 |E|
Diamètre : [distance(v1,vn)] = n-1

Le cycle a 7 sommets



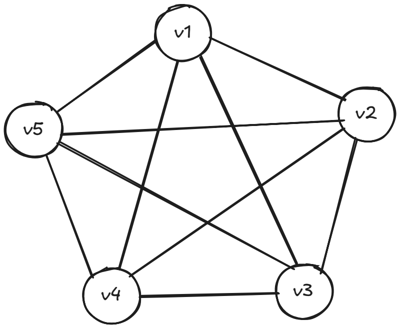
Ensemble de sommet : V={ v1,v2,v3,v4,v5,v6,v7 }
Ensembles d'arrêtes : E={ v1v2,v2v3,v3v4,v4v5,v5v6,v6v7, v7v1 }
Ordre : n = |V| = 7
Taille : |E| = 7
Degré min : 2
Degré max : 2
Diamètre : [distance(v1,v5)] = 3

Le cycle a n sommets



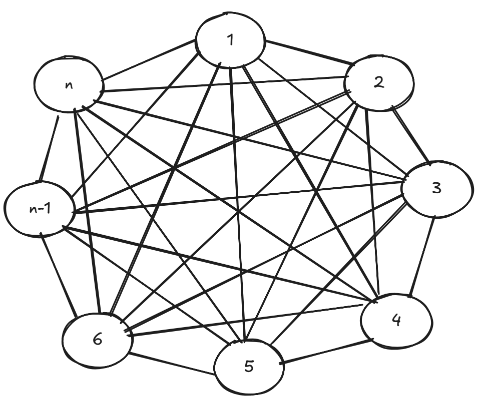
Ensemble de sommet : V={ v1,v2,v3,...,vn-1,vn }
Ensembles d'arrêtes : E={ v1v2,v2v3,v3v4,...,vn-1vn, vn1 }
Ordre : n = |V| = n
Taille : |E| = n
Degré min : 2
Degré max : 2
Diamètre : [distance(v1,vn/2)] si pair ou [distance(v1,(vn-1)/2] si impair

Le graphe complet à 5 sommets



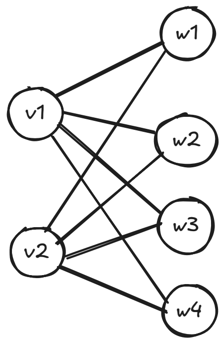
Ensemble de sommet : V={ v1,v2,v3,v4,v5 }
Ensembles d'arrêtes : E={ v1v2,v1v3,v1v4,v1v5,v2v3,v2v4,v2v5,v3v4,v3v5,v4v5 }
Ordre : n = |V| = 5
Taille : |E| = 10
Degré min : 4
Degré max : 4
Diamètre : [distance(v1,v5)] = 1

Le graphe complet à n sommets



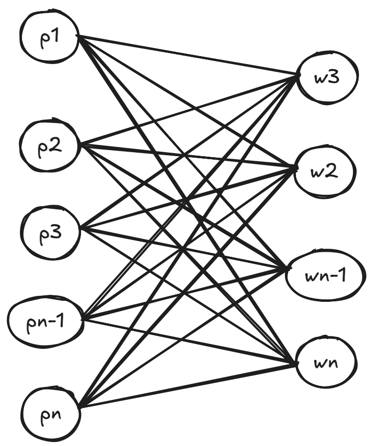
Ensemble de sommet : V={ 1,2,3,n-1,n }
Ensembles d'arrêtes : E={ 12,13,14,15,16,1n-1,1n,...n-1n }
Ordre : n = |V| = n
Taille : |E| = n(n-1)/2
Degré min : n-1
Degré max : n-1
Diamètre : [distance(1,n)] = 1

Le graphe biparti complet $K_{2,4}$



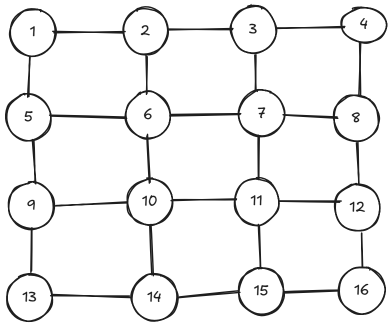
Ensemble de sommet : V={ v1,v2 } ∪ { w1,w2,w3,w4 }
Ensembles d'arrêtes : E={ v1w1,v1w2,v1w3,v1w4,v2w1,v2w2,v2w3,v2w4 }
Ordre : n = |V| = 6
Taille : |E| = 8
Degré min : 2
Degré max : 4
Diamètre : [distance(v1,v2)] = 2

Le graphe biparti complet $K_{p,q}$



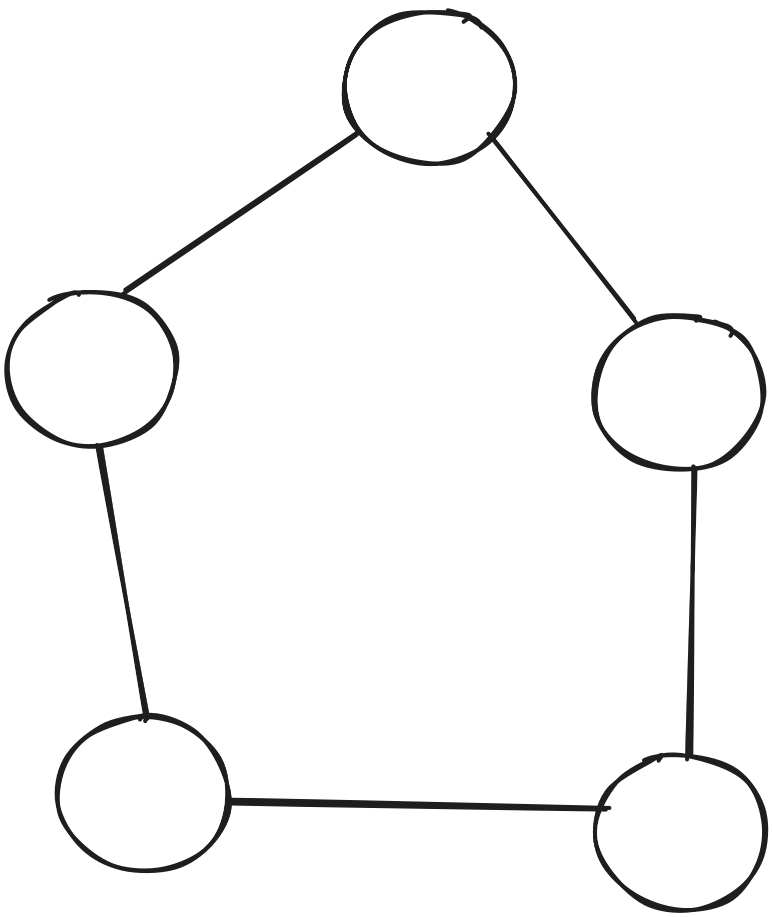
Ensemble de sommet : V={ p1,p2,pn-1,pn } ∪ { w1,w2,wn-1,wn }
Ensembles d'arrêtes : E={ p1w1,p1w2,p1w3,...,pnw1,pnw2,...,pnwn }
Ordre : n = |V| = p+q
Taille : |E| = Degré min X Degré max
Degré min : w
Degré max : p
Diamètre : [distance(p,pn)] = 2

La grille 2D de côté 4

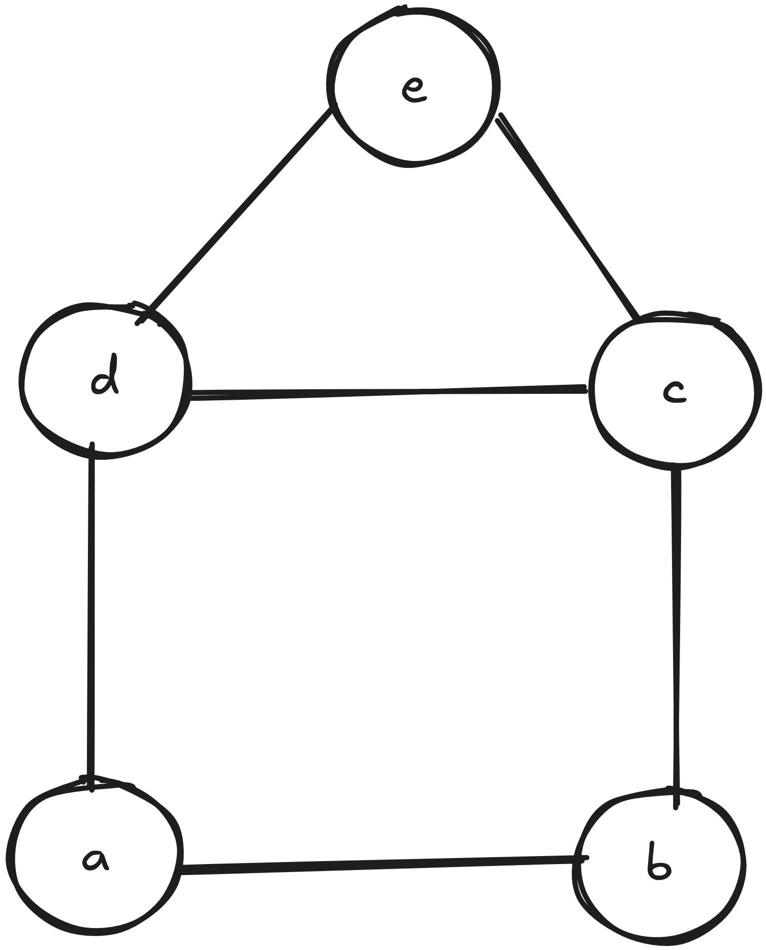


Ensemble de sommet : V={ 1,2,3,4,5,6,7,...,15,16 }
Ensembles d'arrêtes : E={ 12,15,23,26,35,37,48,56,59,67,610,78,711,812,...,1112,1115,1216 }
Ordre : n = |V| = 16
Taille : |E| = 24
Degré min : 2
Degré max : 4
Diamètre : [distance(1,16)] = 6

Exercice 7



Exercice 8



	Graphe complet K_n	Graphe biparti complet $K_{p,q}$	Chaîne élémentaire d'ordre n	Cycle élémentaire d'ordre n
Ordre	n	$p + q$	n	n
Taille	$\frac{n(n-1)}{2}$	pq	$n - 1$	n
Degré minimum	$n - 1$	$\min(p,q)$	1	2
Degré maximum	$n - 1$	$\max(p,q)$	2	2
Cardinal d'une clique maximum	n	2	2	3 si n=3 2 si n!=3
Cardinal d'un stable maximum	1	$\max(p,q)$	$\frac{E(n-1)}{2}$	

Nombre de composantes connexes	1	2	2	3	3	4	5
Nombre de sommets par composantes connexe	5	4 - 1	3 - 2	3 - 1 - 1	2 - 2 - 1	2 - 1 - 1 -1	1 - 1 - 1 - 1 -1
Taille Max							

Exercice 4

a) Connexité de G

Preuve :
Supposons G non connexe. Alors G a deux composantes C_1 et C_2 d'ordres n_1 et n_2.
Degré minimal $\geq n$ implique $n_1 \geq n+1$ et $n_2 \geq n+1$, donc $n_1 + n_2 \geq 2n+2$. Contradiction avec $n_1 + n_2 = 2n$.
Conclusion : G est connexe.

---

b) Diamètre ≤ 2

Preuve :
Pour deux sommets u et v :

- Si adjacents : $d(u,v) = 1$.
- Sinon, $|N(u) \cap N(v)| \geq 2$ (car $\delta_G \geq n$), donc $d(u,v) = 2$.
  Conclusion : diamètre ≤ 2.

Exercice 5

a) Graphes 2-réguliers et 3-réguliers

Ordre 4 :

- 2-régulier : Carré (4-cycle C_4)
- 3-régulier : K_4 (graphe complet)

Ordre 5 :

- 2-régulier : Pentagone (5-cycle C_5)
- 3-régulier : N'existe pas (somme des degrés impaire)

b) Conditions sur k et n

Parité :
$\sum \deg = kn$ doit être pair ⇒ k et n pas tous deux impairs.

Connexité si $n - 2k - 2 < 0$:
Preuve par l'absurde : si non connexe, une composante aurait $\leq k+1$ sommets ⇒ impossible car degré minimal k.

---

c) Complément d'un graphe régulier

Preuve :
Si G est k-régulier d'ordre n, chaque sommet de $\overline{G}$ a degré $(n-1)-k$ ⇒ $\overline{G}$ est $(n-k-1)$-régulier.

---

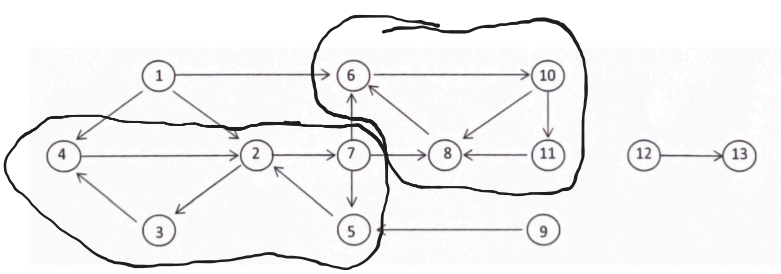
d) Graphe complémentaire $\overline{G}$

Données :
G 5-régulier d'ordre 12.

Propriétés de $\overline{G}$:

- Ordre : 12 (inchangé)
- Degré : $12 - 1 - 5 = 6$ ⇒ 6-régulier
- Taille : $\frac{12 \times 6}{2} = 36$ arêtes

Exercice 6



.

Exercice 7 :

Graphe orienté $D = (V, A)$ avec $V = [0; 99]$ et pour v, w distincts :

$$vw \in A \iff (w \equiv v + 10 \mod 100 \quad \text{ou} \quad w = v^2 + 1)$$

Analyse :

- **Arcs** $w \equiv v + 10 \mod 100$: Crée 10 cycles de longueur 10 (e.g., $0 \to 10 \to \cdots \to 90 \to 0$).
- **Arcs** $w = v^2 + 1$: Liens non linéaires dépendants de v^2. Par exemple, $0 \to 1$, $1 \to 2$, $2 \to 5$, etc.

Structure : Combinaison de cycles (première règle) et d'arbres/chaînes (deuxième règle).

Exercice 8 :

Graphe non orienté où chaque sommet est de degré 2.

Composantes connexes :

- Chaque composante est un **cycle** (simple ou multiple).
- Raison : Un graphe 2-régulier est une union disjointe de cycles.

Exemple :

- Un triangle (C_3), un carré (C_4), etc., ou plusieurs cycles disjoints.

Exercice 9 :

Soit $G = (V, E)$ et $\bar{G} = (V, \bar{E})$ son complémentaire.

1. G **connexe** $\Rightarrow \bar{G}$ **non connexe ?**
   - **Non.** Contre-exemple : $G = P_3$ (chemin à 3 sommets).
     - $\bar{G}$ est connexe (sommet central relié aux autres).
   - **Cas particulier :** Si G est complet (K_n), $\bar{G}$ est vide (non connexe pour $n \geq 2$).
2. G **non connexe** $\Rightarrow \bar{G}$ **connexe ?**
   - **Oui**, sauf si G est une union disjointe de deux cliques complètes.
   - **Preuve :** Soit G non connexe avec composantes $C_1, C_2, \ldots$. Pour $u \in C_1$, $v \in C_2$, l'arête $uv \notin E$ donc $uv \in \bar{E}$. Ainsi, $\bar{G}$ relie toutes les composantes.
   - **Exception :** $G = K_n \sqcup K_m$ (alors $\bar{G}$ est deux cliques disjointes).

Conclusion :

- G connexe $\nRightarrow \bar{G}$ non connexe.
- G non connexe $\Rightarrow \bar{G}$ connexe (sauf cas spécifique).

TD 4

Exercice 6

Graphe de précédence :

- **Sommets** : (T_1) à (T_8).
- **Arcs** (contraintes) :
  - (T_5 \to T_2), (T_5 \to T_6), (T_5 \to T_4), (T_5 \to T_8),
  - (T_6 \to T_1), (T_6 \to T_4),
  - (T_8 \to T_1),
  - (T_2 \to T_3), (T_4 \to T_3), (T_4 \to T_8),
  - (T_1 \to T_7).

Ordre topologique possible :

1. **Sources initiales** : (T_5) (seule tâche sans prédécesseur).
2. **Étapes** :
   - Retirer (T_5) → nouvelles sources : (T_6), (T_2), (T_4), (T_8).
   - Retirer (T_6) → nouvelles sources : (T_2), (T_4), (T_8).
   - Retirer (T_2) → (T_4), (T_8) restent.
   - Retirer (T_4) → (T_8), (T_3) deviennent sources.
   - Retirer (T_8) → (T_1), (T_3) restent.
   - Retirer (T_1) → (T_3), (T_7) restent.
   - Retirer (T_3), puis (T_7).

Solution :

Un ordre valide est :
(T_5, T_6, T_2, T_4, T_8, T_1, T_3, T_7).

Validation : Toutes les contraintes sont respectées (ex: (T_5) avant (T_6), (T_6) avant (T_1), etc.).

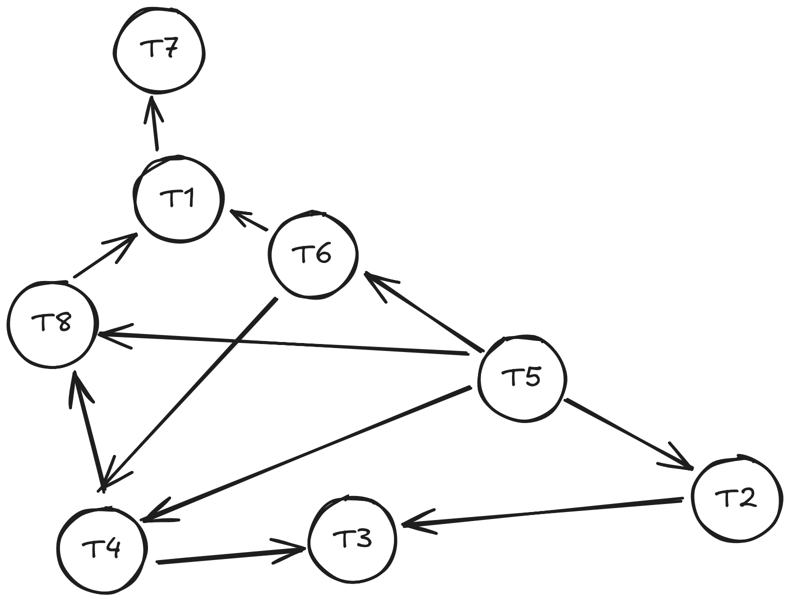
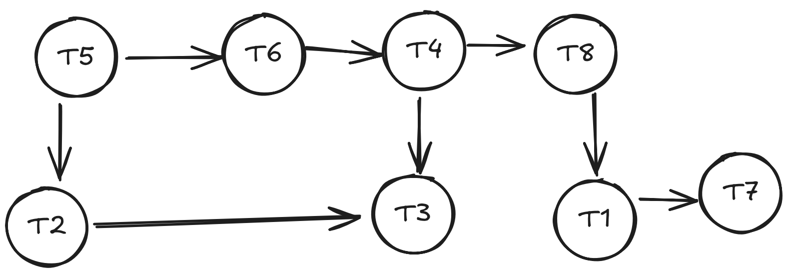


Diagramme de Hasse



Exercice 2

1. Ensemble (E) des arêtes en extension :

À partir de la liste d'adjacence :

- Le sommet **0** est adjacent à **1**, **4**, **5** → arêtes : ({0,1}, {0,4}, {0,5}).
- Le sommet **1** est adjacent à **0**, **2** → arête : ({1,2}) (déjà comptée pour ({0,1})).
- Le sommet **2** est adjacent à **1**, **4** → arête : ({2,4}) (déjà comptée pour ({1,2})).
- Le sommet **3** n'a pas de voisins → aucune arête.
- Le sommet **4** est adjacent à **0**, **2** → arêtes déjà comptées.
- Le sommet **5** est adjacent à **0** → arête déjà comptée.

Ensemble final (E) :
$E = \{\{0,1\},\{0,4\},\{0,5\},\{1,2\},\{2,4\}\}$

---

2. Ordre et taille à partir de la liste d'adjacence :

- **Ordre** : Nombre de sommets (|V|). Ici, (V = [0;5]) → ordre = **6**.
- **Taille** :
  - Méthode 1 : Compter les arêtes dans (E) → taille = **5** (voir ci-dessus).
  - Méthode 2 : Somme des degrés divisée par 2.
    Degrés : (3) (sommet 0), (2) (1), (2) (2), (0) (3), (2) (4), (1) (5).
    ($\frac{3+2+2+0+2+1}{2} = \frac{10}{2} = 5$).

Exercice 3

Partie a)

Oui, si on retire **une arête quelconque d'un cycle** dans un graphe connexe, le graphe reste connexe.
Explication : Un cycle est un chemin fermé. Si on enlève une arête, les sommets restent connectés par l'autre partie du cycle.

Contre-exemple si le graphe n'a pas de cycle (arbre) : Retirer une arête déconnecte le graphe.

Partie b)

Les graphes connexes qui se déconnectent en retirant **une seule arête** sont **les arbres** (graphes connexes sans cycle).
Caractérisation :

- Un arbre a exactement **(n-1) arêtes** (où (n =) nombre de sommets).
- Toute arête est un **isthme** (son retrait déconnecte le graphe).

Preuve :

- Dans un arbre, il existe un unique chemin entre deux sommets. Si on retire une arête, ce chemin est rompu.
- À l'inverse, un graphe avec un cycle reste connexe après suppression d'une arête du cycle.

Conclusion :
Les graphes vérifiant cette propriété sont **exactement les arbres**.

Exercice 4

Partie a) Analyse des graphes proposés

(Les graphes décrits correspondent aux cas classiques suivants :)

1. **Graphe 1 (Cycle simple, ex : C_4)**
   - **Eulérien ? Oui**
   - **Justification :** Tous les degrés sont pairs (2) et le graphe est connexe.
2. **Graphe 2 (Deux cycles partageant un sommet, ex : "∞")**
   - **Eulérien ? Non**
   - **Justification :** Le sommet commun a degré 4 (pair), mais l'ensemble n'est pas un seul cycle (nécessiterait un parcours unique).
3. **Graphe 3 (Arbre, ex : chemin P_3)**
   - **Eulérien ? Non**
   - **Justification :** Présence de sommets de degré impair (comme 1 pour les feuilles).
4. **Graphe 4 (Cycle avec une diagonale, ex : K_3)**
   - **Eulérien ? Oui**
   - **Justification :** Tous les degrés pairs (ex : dans K_3, chaque sommet a degré 2).

Partie b) Condition nécessaire sur les degrés

Un graphe non orienté est eulérien **si et seulement si** :

1. **Tous les sommets ont un degré pair**,
2. **Le graphe est connexe** (à l'exception des sommets isolés, qui doivent être absents ici).

Preuve (intuition) :

- Un cycle eulérien doit entrer et sortir de chaque sommet autant de fois → degré pair.
- La connexité assure un parcours unique.

Remarque :

- Un graphe avec exactement **2 sommets de degré impair** admet un **chemin eulérien** (non fermé), mais n'est pas eulérien.

Exo 6 p2

0 => [1,2]

0

1 => [2]

1

2 => [5]

2

3 => [2,4]

0

4 => [5]

1

5 => []

2

S = [0,3]

On commence par 0 ou 3 qui n'on pas de prédecesseurs

Ici on commence avec 0 :

CH = 0

0 => [1,2]

0

1 => [2]

0

2 => [5]

1

3 => [2,4]

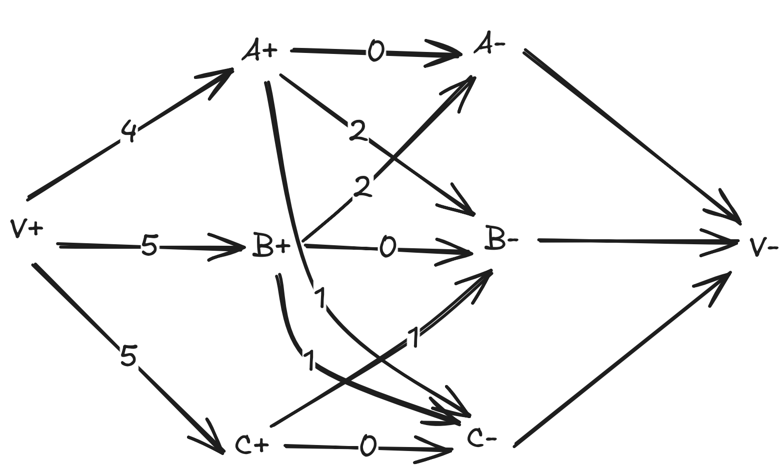
0

4 => [5]

1

5 => [ ]

2



A => B (2)
A => C (1)
B => A (2)
B => C (1)
C => B (1)

V+ => [A+,B+,C+]
0 => X
V- => []
3 => 3 => 3 => 2 => 1 => 0 => X
A+ => [A-,B-]
1 => 0 => X
A- => [V-]
2 => 2 => 1 => 0 => X
B+ => [A-,B-,C-]
1 => 0 => X
B- => [V-]
3 => 3 => 2 => 1 => 0 => X
C+ => [B-,C-]
1 => 0 => X
C- => [V-]
3 => 3 => 2 => 1 => 0 => X

S = [V+]
Ch = V+

S = [A+,B+,C+]
Ch = V+, A+ (distance V=>A = 4 donc plus courte) (4)

S = [B+,C+,]
Ch = V+, A+, C+ (5)

S = [B+]
Ch = V+, A+, C+, B+ (6)

S = [A-, B-, C-]
Ch = V+, A+, C+, B+, B- (6)

S = [A-, C-]
Ch = V+, A+, C+, B+, B-, C- (7)

S = [A-]
Ch = V+, A+, C+, B+, B-, C-, A- (8)

S= [V-]
Ch = V+, A+, C+, B+, B-, C-, A-, V- (12)

S = []
Ch = V+, A+, C+, B+, B-, C-, A-, V- (12)