

Fiche de Révision : Théorie des Graphes

1. Définitions de Base

- **Graphe** : Objet mathématique modélisant des relations entre éléments.
 - **Graphe orienté** : $D = (V, A)$ où V = sommets, $A \subseteq V \times V$ = arcs.
Exemple : Réseau routier à sens unique.
 - **Graphe non orienté** : $G = (V, E)$ où E = arêtes (paires non ordonnées).
Exemple : Réseau social (amis mutuels).
 - **Ordre** : Nombre de sommets ($|V|$).
 - **Taille** : Nombre d'arêtes/arcs ($|E|$ ou $|A|$).
-

2. Vocabulaire et Propriétés

- **Degré d'un sommet** :
 - **Non orienté** : Nombre d'arêtes incidentes ($\delta(v)$).
Théorème : $\sum \delta(v) = 2|E|$.
 - **Orienté** :
 - Degré entrant ($\delta^-(v)$).
 - Degré sortant ($\delta^+(v)$).
 - **Voisinage** :
 - $N_G(v)$ = sommets adjacents à v .
 - Pour un graphe orienté :
 - Voisins sortants ($N^+(v)$).
 - Voisins entrants ($N^-(v)$).
-

3. Types de Graphes Classiques

- **Graphe complet** K_n : Tous les sommets sont reliés.
 - Taille : $\frac{n(n-1)}{2}$.
- **Cycle** C_n : Chaîne fermée sans répétition.

- Degré constant = 2.
- **Arbre** : Graphe connexe sans cycle, taille = $n - 1$.
- **Biparti complet** $K_{p,q}$: Deux ensembles de sommets, toutes les arêtes entre eux.

Exemple :

- K_3 (triangle) : 3 sommets, 3 arêtes.
 - C_4 (carré) : 4 sommets, 4 arêtes.
-

4. Connexité

- **Non orienté** :
 - **Connexe** : Chemin entre toute paire de sommets.
 - **Composante connexe** : Sous-graphe connexe maximal.
- **Orienté** :
 - **Fortement connexe** : Chemins dans les deux sens entre toute paire.
 - **Composante fortement connexe (CFC)** : Sous-graphe maximal fortement connexe.

Exemple :

- Graphe non connexe : Deux triangles disjoints.
 - Graphe fortement connexe : Cycle orienté.
-

5. Chaînes, Cycles, Chemins, Circuits

- **Chaîne** (non orienté) : Suite d'arêtes consécutives.
 - **Élémentaire** : Pas de sommet répété.
- **Cycle** : Chaîne fermée ($v_0 = v_k$).
- **Chemin** (orienté) : Suite d'arcs consécutifs.
- **Circuit** : Chemin fermé.

Exemple :

- Chaîne : $a - b - c - d$.
 - Circuit : $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$.
-

6. Parcours dans les Graphes

- **Parcours en largeur (BFS) :**
 - Utilise une file, calcule les distances depuis un sommet.
 - *Application* : Plus court chemin dans un graphe non pondéré.
- **Parcours en profondeur (DFS) :**
 - Utilise une pile, détection de cycles.

Algorithme BFS :

1. Initialiser une file avec le sommet de départ.
 2. Marquer les sommets visités.
 3. Pour chaque voisin, mettre à jour la distance.
-

7. Graphes Eulériens et Hamiltoniens

- **Eulérien** : Cycle passant par chaque arête une fois.
 - *Condition* : Tous les degrés pairs et graphe connexe.
- **Hamiltonien** : Cycle passant par chaque sommet une fois.
 - *Condition* : Aucune condition simple connue.

Exemple :

- Eulérien : Cycle C_n .
 - Non eulérien : Graphe avec un sommet de degré impair.
-

8. Algorithmes et Applications

- **Tri topologique** : Ordonnancement de tâches (graphe sans circuit).
 - *Exemple* : $T_5 \rightarrow T_6 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots$ (cf. TD4).
 - **Graphes de précedence** : Modélisation de dépendances.
-

9. Exercices Types

1. **Calculer ordre/taille/degrés :**

- *Exemple* : Graphe $G = (V, E)$ avec $V = \{a, b, c\}$, $E = \{ab, bc\}$.
 - Ordre = 3, Taille = 2, $\delta(a) = 1$, $\delta(b) = 2$, $\delta(c) = 1$.

2. Détecter une CFC :

- Identifier les sommets mutuellement accessibles.

3. Vérifier si eulérien :

- Compter les degrés et vérifier la connexité.
-

10. Formules Utiles

- Nombre maximal d'arêtes :
 - Non orienté : $\frac{n(n-1)}{2}$.
 - Orienté : $n(n-1)$.
 - Somme des degrés :
 - Non orienté : $2|E|$.
 - Orienté : $\sum \delta^+(v) = \sum \delta^-(v) = |A|$.
-

À Retenir

- Un graphe est un outil puissant pour modéliser des relations.
- La connexité et les parcours (BFS/DFS) sont fondamentaux.
- Les conditions pour les cycles eulériens/hamiltoniens sont classiques en examen.