Contents

0 Einführung **1**

1 Definition, Klassifikation, Beispiele **2**

1.1 Klassifikation 3

1.2 Anwendungen 5

1.2.1 Elektrotechnik 5

1.2.2 Mechanik 7

1.2.3 Bilanzgleichungen 10

2 Elementare Lösungsverfahren **12**

2.1 Elementar lösbare Differentialgleichungen 12

2.2 Separierbare Differentialgleichungen 13

2.3 Richtungsfeld 14

3 Lineare DGL 1. Ordnung **15**

3.1 Hauptsatz 15

3.2 Allgemeine Lösung der homogenen DGL 16

3.3 Partikuläre Lösung der inhomoegenen DGL 17

3.4 Variation der Konstanten 17

3.5 Spezialfall konstante Koeffizienten 18

0 Einführung

Bisher bekannte Gleichungen:

1. Algebraische Gleichung
$$2x + 5 = -2$$
Gesucht: x (Eine oder mehrere Zahlen)
Lösungsverfahren: Umformen (Schule)

2. (Lineares) Gleichungssystem
$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$
Gesucht: Vektor $\vec{x}$ (n-Zahlen)
Lösungsverfahren: z.B. Gauss (2. Semester)

Jetzt neu:

3. (Gewöhnliche) Differentialgleichung
$$y''(x) + 4y(x) = 0$$
Gesucht: Funktion $y(x)$ (∞ viele Werte)
Lösungsverfahren: *DWW*

Beispiel: Raten dass Lösung $y = \sin(2x)$

Beweis:

$$\left.\begin{aligned} y &= \sin(2x) \\ y' &= 2\cos(2x) \\ y'' &= -4\sin(2x) \end{aligned}\right\}\text{Einsetzen}$$

$$\underbrace{-4\sin(2x)}_{y''(x)} + 4\underbrace{\sin(2x)}_{y(x)} = 0$$

1 Definition, Klassifikation, Beispiele

Differentialgleichung (DGL): Gleichung, deren Unbekannte eine Funktion ist, und die Ableitungen der gesuchten Funktion enthält.

Beispiele

$$\begin{aligned} y''(x) + 2y(x) &= 0 \\ y'' + 2y &= x^2 \\ \ddot{y} + 2y &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{(\partial x_1)^2} + \frac{\partial^2 f}{(\partial x_2)^2} &= 0 \end{aligned}$$

Spezielle / partikuläre Lösung: Eine Funktion, die die DGL erfüllt.

Allgemeine Lösung: Funktion mit Parametern, die alle speziellen Lösungen parametrisiert (beinhaltet).

Zum Festlegen der Parameter einer allgemeinen Lösungen werden Zusatzbedingungen benötigt. Je nachdem ob diese im Ort oder in der Zeit gegeben sind, wird eine DGL mit Zusatzbedingungen ein *Anfangswertproblem* oder ein *Randwertproblem* genannt.

Beispiel

$$\ddot{y} = -y$$

$$\begin{aligned} \text{allgemeine Lsg:} &\quad y(t) = A\sin(t+\phi) \\ \text{Zusatzbedingungen:} &\quad y(0) = 0 \text{ und } y(\pi/2) = 2 \\ \text{spezielle Lsg:} &\quad y(t) = 2\sin(t) \end{aligned}$$

Notation

$$\begin{aligned} y' &: \text{ Ableitung der Funktion y nach der Variablen x (meistens Ort)} \\ \dot{y} &: \text{ Ableitung der Funktion y nach der Variablen t (meistens Zeit)} \\ y^{(n)} &: \text{ n-te Ableitung der Funktion y} \\ y^n &: \text{ n-te Potenz der Funktion y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &: \text{ Ableitung der Funktion f nach x} \end{aligned}$$

1.1 Klassifikation

a) elementar Lösbar

Eine DGL ist elementar Lösbar wenn sie als

$$y^{(n)} = f(x)$$

geschrieben werden kann.

b) Ordnung

DGL n-ter Ordnung: Hat Ableitungen bis zur Ordnung n

Bemerkung: DGL n-ter Ordngung hat als allg. Lösung i.A. eine Funktion mit n Parametern.

Spezialfall: Eine Differentialgleichung 1. Ordnung, die in der Form

$$y' = \frac{g(x)}{f(y)}$$

geschrieben werden kann, heisst separierbar.

c) Linearität

Eine Differentialgleichung ist linear, wenn die Gesuchte Funktion und alle Ableitungen nur mit der Potenz 1 vorkommen und wenn keine Mischterme vorhanden sind.

Lineare Differentialgleichungen können immer in die Form

$$g(x) = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y' + c(x) \cdot y'' + \dots$$

Spezialfall: Eine lineare Differentialgleichung ist homogen, wenn der Anregungsterm $g(x) = 0$ (D.h. die Funktion oder deren Ableitungen in allen Termen vorkommen).

Spezialfall: Eine lineare Differentialgleichung hat konstante Koeffizienten, wenn alle Koeffizienten $a, b, c \dots$ nicht von der Funktionsvariablen abhängen.

d) Ableitungen

Gewöhnliche DGL (ODE): Hat nur Ableitungen nach einer Variablen.

Partielle DGL (PDE): Hat Ableitungen nach mehreren Variablen.

Beispiele

$$(y'')^4 = 5y$$

- Es ist nicht möglich, die Gleichung als $y'' = f(x)$ zu schreiben, sie ist nicht elementar lösbar.
- Die maximale auftretende Ableitung ist $y'' \Rightarrow$ Ordnung 2.
- Die Ableitung y'' hat die Potenz 4 $\Rightarrow$ nichtlinear.
- nicht-linear $\Rightarrow$ nicht auf Homogenität prüfen.
- Es wird nur nach x abgeleitet $\Rightarrow$ ODE.

$$\frac{d^2x}{(dt)^2} + 2\frac{dx}{(dt)} = x\left(t\right)$$

- Es ist nicht möglich, die Gleichung als $\ddot{x} = f(t)$ zu schreiben, sie ist nicht elementar lösbar.
- Die maximale auftretende Ableitung ist $\ddot{x} \Rightarrow$ Ordnung 2.
- Alle Ableitungen von x kommen nur mit der Potenz 1 vor $\Rightarrow$ linear.
- Die Funktion x oder Ableitungen davon kommen in allen Termen vor $\Rightarrow$ Homogen.
- Es wird nur nach t abgeleitet $\Rightarrow$ ODE.

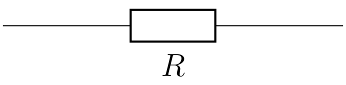
$$\frac{\partial f}{(\partial x)} - \frac{\partial f}{(\partial t)} = t^2$$

- Es ist nicht möglich, die Gleichung als $f = g(t, x)$ zu schreiben, sie ist nicht elementar lösbar.
- Die maximale auftretende Ableitung ist f' bzw $\dot{f} \Rightarrow$ Ordnung 1.
- Alle Ableitungen von f kommen nur mit der Potenz 1 vor $\Rightarrow$ linear.
- Die Funktion f kommt nicht in allen Termen vor $\Rightarrow$ inhomogen. (Anregungsterm $g(t) = t^2$)
- Es wird nach t und nach x abgeleitet $\Rightarrow$ PDE.

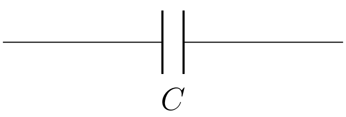
1.2 Anwendungen

1.2.1 Elektrotechnik

Was braucht man:



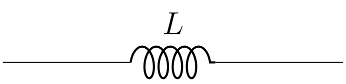
$$U_R = R \cdot i = R \cdot \dot{q}$$



$$U_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} q$$

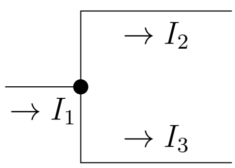
oder

$$\dot{U}_C = \frac{1}{C} i$$



$$U_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L\ddot{q}$$

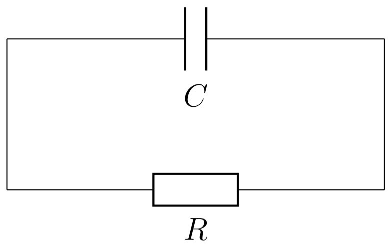
Knotenregel: In einem Knotenpunkt ist die Summe der zu- und abfliessenden Ströme gleich null



$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Maschenregel: In jeder Masche ist die Summe der Spannungen gleich 0

Beispiel: Kondensator-Entladung



Kondensator anfänglich geladen auf Q_0
$Q = C \cdot U \rightarrow U_0 = \frac{Q_0}{C}$

Maschenregel:

$$U_R + U_C = 0$$

Es gibt 3 Möglichkeiten, die DGL aufzustellen:

a) Strom

$$\begin{aligned} U_R + U_C &= 0 \\ &\Rightarrow \\ R \cdot i + \frac{1}{C} \int idt &= 0 && \Big| \frac{d}{dt} \\ R \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{1}{C} i &= 0, && i(0) = \frac{1}{R} U_0 \end{aligned}$$

b) Ladung

$$\begin{aligned} U_R + U_C &= 0 \\ &\Rightarrow \\ R \cdot \dot{q} + \frac{1}{C} q &= 0, && q(0) = C \cdot U_0 \end{aligned}$$

c) Spannung (am Kondensator)

$$U_R + U_C = 0$$

Ausnützen dass der Strom im Kondensator und im Widerstand gleich sind: $i_R = i_C$:

$$\begin{aligned} U_R &= R \cdot i \\ &= R \cdot \left(C \cdot \dot{U}_C \right) \\ &\Rightarrow \\ R \cdot C \cdot \dot{U}_C + U_C &= 0, \qquad U_C\left(0\right) = U_0 \end{aligned}$$

1.2.2 Mechanik

a) ohne Schwingungen

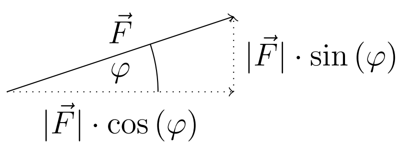
Bewegungsgleichungen

	Lineare Bewegung	Drehbewegung
Ort	$s(t)$	$\varphi(t)$
Geschw.	$v(t) = \dot{s}$	$\omega(t) = \dot{\varphi}$
Beschl.	$a(t) = \dot{v} = \ddot{s}$	$\alpha(t) = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$

Bewegungsgesetz von Newton: Beschleunigung = Summe aller angreifenden Kräfte geteilt durch Masse

$$\begin{aligned} m\vec{a} = m\ddot{\vec{s}} = \sum \vec{F}_i \\ J\vec{\alpha} = m\ddot{\vec{\varphi}} = \sum \vec{M}_i \end{aligned}$$

Kräftezerlegung: Das Bewegungsgesetz von Newton gilt in einem senkrechten Koordinatensystem für alle Komponenten einzeln.



Beispiel Freier Fall ohne Reibung

$$
\begin{aligned}
m \cdot a &= -g \cdot m \\
\ddot{y} &= -g \\
\dot{y} &= -g \cdot t + v_0 \\
y &= -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + y_0
\end{aligned}
$$

Kräfte

Schwerkraft: $F_G = g \cdot m$

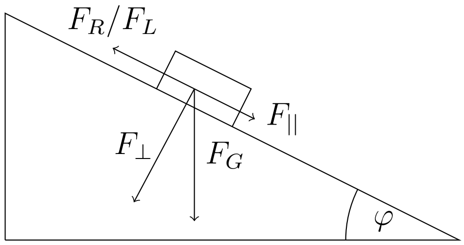
Coulombsche Reibung: Trockene Reibung: $F_R = -\mu \cdot F_N$

Stokes Reibung: In Flüssigkeiten (Re klein) $F_R = -\mu \cdot v$

Newton Reibung: In Luft (Re gross) $F_R = -\mu \cdot \text{sign}(v) \cdot v^2$

Wichtig: Reibkraft immer der Geschwindigkeit entgegengerichtet.

Beispiel Schiefe Ebene:



Schwerkraft: $F_G = m \cdot g$

$F_{||} = m \cdot g \cdot \sin(\varphi)$

$F_\perp = m \cdot g \cdot \cos(\varphi)$

Luftreibung: $F_L = -k \cdot v^2$

Haftreibung: $F_R = -\mu \cdot F_\perp = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\varphi)$

In die Bewegungsgleichung einsetzen

$$\begin{aligned}
m \cdot a &= \sum F \\
m \cdot a &= F_{||} + F_L + F_R \\
&= m \cdot g \cdot \sin(\varphi) - k \cdot v^2 - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\varphi) \\
&= m \cdot g \cdot (\sin(\varphi) - \mu \cdot \cos(\varphi)) - k \cdot v^2 \\
&\Rightarrow \\
m \cdot \dot{v} + k \cdot v^2 &= m \cdot g \cdot (\sin(\varphi) - \mu \cdot \cos(\varphi))
\end{aligned}$$

Nichtlineare, nicht Elementar lösbare, inhomogene (mit konstanten Koeffizienten) und gewöhnliche DGL 1. Ordnung.

b) mit Schwingungen

Eine Schwingung kommt dann zustande, wenn es eine vom Ort abhängige, rücktreibende Kraft gibt.
Zusätzliche Kräfte:

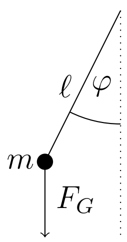
Federkraft: (Hooksches Gesetz)

$$F = -k \cdot x$$

Dämpfer: (Reibkraft in einer Schwingung)

$$F = -\gamma \cdot \dot{x}$$

Beispiel Physikalisches Pendel:



Trägheitsmoment: $J = m \cdot \ell^2$
Drehmoment: $M = m \cdot g \cdot \sin(\varphi) \cdot \ell$

In die Bewegungsgleichung einsetzen

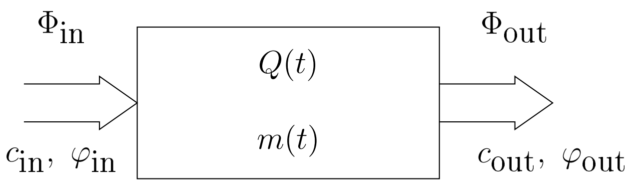
$$
\begin{aligned}
J \cdot \ddot{\varphi} &= \sum M \\
&\Rightarrow \\
m \cdot \ell^2 \cdot \ddot{\varphi} &= m \cdot g \cdot \sin(\varphi) \cdot \ell \\
&\Rightarrow \\
\ell \ddot{\varphi} - g \sin(\varphi) &= 0
\end{aligned}
$$

Für kleine φ gilt $\sin(\varphi) \approx \varphi \Rightarrow$

$$
\underbrace{\ell \ddot{\varphi} - g\varphi}_{\text{Schwingungsgleichung}} \quad = 0
$$

1.2.3 Bilanzgleichungen

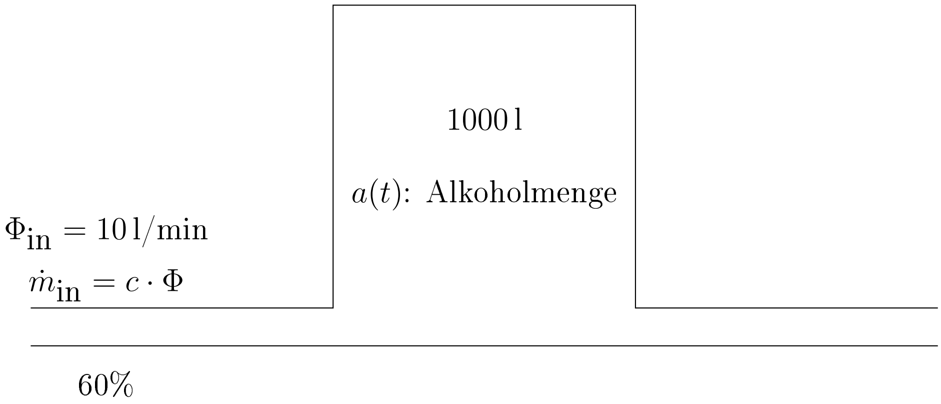
(Kalkül mit Differentialen)



$$
\begin{aligned}
\Phi &: \text{Fluss} &&: \left[\frac{\text{Menge, Vol}}{\text{Zeit}}\right] \\
\varphi &: \text{Volumenfluss} \\
c &: \text{Konzentration} &&: \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]
\end{aligned}
$$

Beispiel 1 Alkoholtank

Ein 1000l Tank ist gefüllt mit mit 80% Alkohol. Mit einer Füllrate von 10l/min wird 60% Alkohol nachgefüllt und gut gemischt. Die gleiche Menge fliesst aus.



$$
\begin{aligned}
\Delta a &= 10 \cdot 0.6 \Delta t - 10 \cdot \frac{a(t)}{1000} \Delta t \\
\Delta a &= \left(6 - \frac{a(t)}{100}\right) \Delta t \\
\frac{\Delta a}{\Delta t} &= 6 - \frac{a(t)}{100} \\
\Delta t \to 0 \Rightarrow & \\
\dot{a}(t) &= 6 - \frac{a(t)}{100}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Die Alkoholmenge $a(t)$ wird durch die Differentialgleichung $\dot{a}(t) = 6 - \frac{a(t)}{100}$ beschrieben. Zusammen mit der Anfangsbedingung $a(0) = 800$ ergibt sich das entsprechende Anfangswertproblem.

Beispiel 2 Bakterienkultur

Eine Bakterienkultur enthält eine Menge $x(t)$ Bakterien. Sie wächst mit einer Geschwindigkeit proportional zu der Anzahl bereits vorhandenen Bakterien.

$$
\begin{aligned}
\Delta x &= \lambda x(t) \Delta t \\
\frac{\Delta x}{\Delta t} &= \lambda x(t) \\
\dot{x}(t) &= \lambda x(t)
\end{aligned}
$$

Diese DGL hat die allgemeine Lösung $x(t) = Ce^{\lambda t}$

2 Elementare Lösungsverfahren

2.1 Elementar lösbare Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung heisst Elementar Lösbar wenn sie in der Form

$$y^{(n)} = f(x)$$

geschrieben werden kann.

Lösungsverfahren: n-mal integrieren.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
y'' &= x^2 && \Big| \int dx \\
\int y'' dx &= \int x^2 dx \\
y' &= \frac{1}{3}x^3 + C_1 && \Big| \int dx \\
y &= \int \left(\frac{1}{3}x^3 + C_1\right) dx \\
&= \frac{1}{12}x^4 + C_1 \cdot x + C_2
\end{aligned}$$

Zusätzliche Bedingungen:
Ordnung 2 $\Rightarrow$ Es braucht 2 RB: $y\left(0\right) = 1,\ y'\left(1\right) = -2$

$$\begin{aligned}
y\left(0\right) &= C_2 = 1 \\
y'\left(1\right) &= \frac{1}{3} \cdot 1 + C_1 = -2 \\
&\Rightarrow \\
C_1 &= -2 - \frac{1}{3} = -\frac{7}{3} \\
&\Rightarrow \\
y\left(x\right) &= \frac{1}{12}x^4 - \frac{7}{3}x + 1
\end{aligned}$$

2.2 Separierbare Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung 1.Ordnung heisst separierbar, wenn sie in der Form

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

geschrieben werden kann.

Lösungsverfahren:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} && \Big| \begin{array}{l} \cdot dx \\ \cdot g(y) \end{array} \\ &\Rightarrow \\ g(y)\,dy &= f(x)\,dx && \Big| \int \\ \int g(y)\,dy &= \int f(x)\,dx \end{aligned}$$

und ausrechnen...
Die Methode ist einfach, schwierig ist das Erkennen der Separierbarkeit (und das Integrieren der Funktionen)

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3y}{x} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3y}{x} \\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x \\ \ln(y) + C_1 &= 3 \cdot \ln(x) + C_2 \\ \ln(y) &= 3 \cdot \ln(x) + C_3 \\ &= \ln\left(x^3\right) + C_3 \\ &\Rightarrow \\ y &= e^{\ln(x^3)+C_3} \\ &= e^{\ln(x^3)} \cdot e^{C_3} \\ &= x^3 \cdot e^{C_3} \\ &= C \cdot x^3 \end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$y' = \ln(x+y)$$

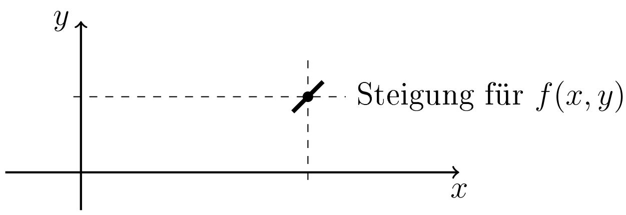
Ist nicht separierbar.

Beispiel 3:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -6x \\
\frac{dx}{dt} &= -6x \\
\int \frac{1}{x} dx &= \int -6 dt \\
\ln x &= -6t + C_1 \\
x &= e^{-6t+C_1} = e^{-6t} \cdot \underbrace{e^{C_1}}_{C} \\
x(t) &= C \cdot e^{-6t}
\end{aligned}$$

2.3 Richtungsfeld

Für DGL der Form $y' = f(x, y)$
(Nur für DGL 1. Ordnung, die nach y' auflösbar sind)



Beispiel: $y' = 2x$

3 Lineare DGL 1. Ordnung

Repetition:

$$y' + f(x) \cdot y = \underbrace{g(x)}_{\text{Störfunktion}}$$

Störfunktion $= 0$: homogen
Störfunktion $\neq 0$: inhomogen $f(x) =$ konstant: Mit konstanten Koeffizienten

3.1 Hauptsatz

Allgemeine Lösung der linearen DGL
=
allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL
+
irgendeine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

Beweis:

y_h ist allgemeine Lösung von $y' + f(x) \cdot y = 0$ (1 Parameter)
y_p ist partikuläre Lösung von $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ (0 Parameter)

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \\ y_p' + f(x)y_p &= g(x) \\ y_h' + f(x)y_h &= 0 \\ & \Rightarrow \text{(Summe)} \\ y_h' + y_p' + f(x)y_h + f(x)y_p &= g(x) \\ y_h' + y_p' + f(x)\,(y_h + y_p) &= g(x) \\ (y_h + y_p)' + f(x)\,(y_h + y_p) &= g(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow y_h + y_p$ ist allgemeine (weil 1 Parameter) Lösung von $y' + f(x)y = g(x)$

Beispiel:

$$y' + y = 2e^x$$

homogen:

$$y' + y = 0$$

Separierbar:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -y \\
\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int -1\,\mathrm{d}x \\
\ln(y) &= -x + C_1 \\
y_h &= C \cdot e^{-x} && \text{(allgemeine Lösung)}
\end{aligned}
$$

inhomogen:

$$y' + y = 2 \cdot e^x$$

Raten: $y_p\,(x) = e^x$
$\Rightarrow y(x) = y_h + h_p = Ce^{-x} + e^x$

3.2 Allgemeine Lösung der homogenen DGL

Homogene DGL:

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

Lineare, homogene DGL 1. Ordnung ist immer separierbar $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
y' + f(x) \cdot y &= 0 \\
y' &= -f(x) \cdot y \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -f(x) \cdot y \\
\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= -f(x)\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int -f(x)\,\mathrm{d}x \\
\ln(y) &= -F(x) + C_1 \\
y &= e^{-F(x)+C_1} \\
&= C \cdot e^{-F(x)}
\end{aligned}
$$

3.3 Partikuläre Lösung der inhomoegenen DGL

Methode

- Raten (z.B. mit Richtungsfeld) und Einsetzen
- Variation der Konstanten (Kapitel 3.4)
- Spezialfälle: Tabellen (Papula)

3.4 Variation der Konstanten

Die Lösung der homogenen DGL hat immer die Form

$$y_h(x) = C \cdot e^{-F(x)}$$

Die Lösung der inhomogenen DGL *sollte* so ähnlich aussehen.

Idee: ersetze Konstante C durch die Funktion $C(x)$ und setze sie in die DGL ein. Dadurch kann $C(x)$ berechnet, und y_p bestimmt werden.

Beispiel

$$y' - \frac{y}{x} = x^2$$

Homogene Lösung y_h:

$$\begin{aligned} y' \underbrace{- \frac{1}{x}}_{f(x)} y &= 0 \\ &\Rightarrow \\ y_h &= C \cdot e^{-F(x)} \\ &= C \cdot e^{--\ln(x)} \\ &= C \cdot x \end{aligned}$$

Partikuläre Lösung y_p:

Ansatz: $y_p = C(x) \cdot x$ in <u>inhomogene</u> DGL einsetzen:

$$\begin{aligned} [C(x) \cdot x]' - \frac{[C(x) \cdot x]}{x} &= x^2 \\ C(x)' \cdot x + C(x) \cdot 1 - C(x) &= x^2 \\ C(x)' \cdot x &= x^2 \\ C(x)' &= x \\ C(x) &= \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$y_p(x) = C(x) \cdot x = \frac{1}{2}x^2 \cdot x = \frac{x^3}{2}$$

$\Rightarrow$

$$y(x) = y_h + y_p = C \cdot x + \frac{x^3}{2}$$

Bemerkung: Die Variation der Konstanten führt <u>immer</u> zu einer elementar lösbaren DGL für $C(x)'$. Der Term $C(x)$ kürzt sich jeweils weg.

3.5 Spezialfall konstante Koeffizienten

Für

$$y' + \underbrace{a}_{\text{konst. Koeff.}} \cdot y = g(x)$$

Dies ist ein einfacher Spezialfall:

- Die homogene Lösung ist einfacher
- Für die partikuläre Lösung muss man nicht die Konstante variieren, sondern man kann (in vielen Fällen) in einer Tabelle nachschlagen

Homoegen Lösung:

$$y_h = C \cdot e^{-F(x)} = C \cdot e^{-ax}$$

Beispiel

$$y' \underbrace{-2}_{a=-2} \cdot y = \underbrace{4x - 2}_{g(x)}$$

Homogen:

$$y_h = C \cdot e^{--2x} = C \cdot e^{2x}$$

Inhomogen: Ansatz aus Tabelle $y_p = c_1 \cdot x + c_0$

$$\begin{aligned}
(c_1 \cdot x + c_0)' - 2 \cdot (c_1 \cdot x + c_0) &= 4x - 2 \\
c_1 - 2 \cdot c_1 \cdot x - 2 \cdot c_0 &= 4x - 2 \\
&\Rightarrow \\
-2 \cdot c_1 &= 4 \\
c_1 - 2 \cdot c_0 &= -2 \\
&\Rightarrow \\
c_1 &= -2 \\
c_0 &= 0 \\
&\Rightarrow \\
y_p &= -2 \cdot x
\end{aligned}$$

somit $y(x) = y_h + y_p = C \cdot e^{2x} - 2x$