



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

**ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ"**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Μελέτη & Υλοποίηση Μεθοδολογιών Ελέγχου Διάταξης
Ανεστραμμένου Εκκρεμούς**

του

ΧΕΣΜΑΤΙ ΑΛΑΜΝΤΑΡΙ ΣΑΧΑΜΠΙΟΝΤΙΝ

Επιβλέποντες: Κωνσταντίνος Κυριακόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π

**ΑΘΗΝΑ
Οκτώβριος 2011**

*Στη μνήμη των παππού μου
ο οποίος άνοιξε από πολύ νωρίς τους πνευματικούς μου ορίζοντες*

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια των μεταπτυχιακών σπουδών μου στο διατμηματικό πρόγραμμα «Συστήματα Αυτοματισμού» του Ε.Μ.Π στο εργαστήριο CSL(Control Systems Laboratory). Αντικείμενο της αποτελεί η μελέτη και η υλοποίηση μεθοδολογιών ελέγχου σε διάταξη ανεστραμμένου εκκρεμούς (μοντέλο 505 της εταιρίας ECP), και τελικός σκοπός της ήταν ο σχεδιασμός εργαστηριακών ασκήσεων για τα μαθήματα «Εισαγωγή στον αυτόματο έλεγχο I» και «Συστήματα αυτοματισμού II» της σχόλιης μηχανολόγων μηχανικών του εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου της Αθήνας.

Αρχικά αναλύεται η διάταξη του ανεστραμμένου εκκρεμούς ECP model 505, μοντελοποιείται και στην συνεχεία γραμματικοποιείται πάνω στο ασταθές σημείο ισορροπίας. Για το σχεδιασμό των εργαστηριακών ασκήσεων στο μάθημα ''ΣΑΕ I'', το υποεπενεργούμενο και πολυμεταβλητό σύστημα ανεστραμμένου εκκρεμούς απλοποιείται σε ένα σύστημα μιας είσοδου-μιας εξόδου.

Στην συνεχεία σχεδιάστηκε η πρώτη εργαστηριακή άσκηση `` Αντίστροφο διαγράμματος BODE ''. Μετά από την εξαγωγή της συνάρτησης μεταφοράς του απλοποιημένου συστήματος δημιουργήθηκε η δεύτερη εργαστηριακή άσκηση ``Τόπος των ριζών- Ελεγκτής PID'' .

Ακόμα σχεδιάστηκε η εργαστηριακή άσκηση ``τοποθέτηση πόλων-LQR'' για το μάθημα ''ΣΑΕ II'', στην οποία χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις χωροκατάστασης του γραμμικοποιημένου συστήματος. Επίσης δημιουργήθηκε η εργαστηριακή άσκηση `` Παρατηρητής κατάστασης''. Τέλος σχεδιάστηκε και μια επίδειξη για τη σύγκριση του γραμμικοποιημένο μοντέλου συστήματος με το πραγματικό σύστημα του ανεστραμμένου εκκρεμούς.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα της μεταπτυχιακής μου εργασίας κ. Κωνσταντίνο Κυριακόπουλο, Καθηγητή Ε.Μ.Π, ο οποίος μου προσέφερε μια ευχάριστη συνεργασία και με τις πολύτιμες γνώσεις του με καθοδήγησε και μου συμπαραστάθηκε αμέριστα σε όλα τα στάδια της μεταπτυχιακής μου εργασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη του εργαστηρίου CSL τόσο για την υποστήριξή τους όσο και για το φιλικό περιβάλλον που δημιούργησαν στον εργαστηριακό χώρο για τους μήνες της συνεργασίας μας.

Με εκτίμηση,

Shahab Heshmati alamdarı

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή	1
1.1 Αντικείμενο της Εργασίας	1
1.2 Το Σύστημα Ανεστραμμένο Εκκρεμές	2
2 Τεχνική Περιγραφή του Συστήματος	3
2.1 Ηλεκτρομηχανολογικό Σύστημα	4
2.2 Περιγραφή του Διοικητικού Προγραμμάτος	5
2.2.1 Απαιτήσεις του Συστήματος	6
2.2.2 Το Φόντο του Προγράμματος	6
2.2.3 Γενικό Μενού	7
2.3 Real-Time Controller	14
2.3.1 Servo Loop Closure	14
2.3.2 Παραγωγή Εντολής	17
2.3.3 Σερβοκινητήρας Συνεχούς με Ψήκτρες και Ενισχυτή Ισχύος	19
2.3.4 Αισθητήρες	21
3 Μοντελοποίηση	23
3.1 Εξισώσεις της κίνησης	23
3.1.1 Μη Γραμμικές Καταστατικές Εξισώσεις	23
3.1.2 Γραμμικοποίηση του Συστήματος	26
3.1.3 Συνάρτηση Μεταφοράς	30
3.2 Αναγνώριση / Ταυτοποίηση Συστήματος (System Identification)	31
3.3 Ανάλυση του γραμμικοποιημένου συστήματος	36
3.3.1 Κατανομή και Επίδραση των Μηδενιστών	37
3.3.2 Κατανομή και Επίδραση των Πόλων	37
4 Πεδίο Συχνότητας	39
4.1 Διαμόρφωση του συστήματος	39
4.1.1 Απλοποίηση της συναρτησής μεταφοράς $\frac{X}{F}$	40
4.2 Μελέτη διαγράμματος BODE	42

4.2.1	Διαδικασία του πειράματος	43
4.2.2	Ανάλυση του Διαγράμματος Bode	43
4.3	Μελέτη Τόπου των Ριζών	47
4.3.1	διαδικασία του πειράματος	47
4.3.2	Ελεγκτής PID	56
5	Πεδίο Χρόνου	59
5.1	Εισαγωγή	60
5.2	Πείραμα Τοποθέτησης Πόλων	61
5.2.1	Πείραμα LQR	72
5.3	Πείραμα Παρατηρητή	73
5.4	Σύγκριση του Γραμμικοποιημένο Συστήματος με Πραγματικό Σύστημα	104
A	plant.m	109
B	bode.mdl	113
C	findbode.m	115
D	roott.mdl	119
E	PIDD.mdl	121
F	state-feedback.mdl	123
G	statefeedback.m	125
H	lq.m	127
I	Observer.mdl	129
J	observer.m	131
K	Linearcompare.mdl	133
L	Εργαστηριακή Ασκηση “Αντιστροφό Διάγραμμα BODE”	135
M	Εργαστηριακή Ασκηση “Τόπος των Ριζών”	141
N	Εργαστηριακή Ασκηση “Γραμμικοποίηση”	147
O	Εργαστηριακή Ασκηση “Τοποθέτηση Πόλων”	153

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Αντικείμενο της Εργασίας

Η ανάγκη για δημιουργία ενός συστήματος αυτόματου έλεγχου είναι ένα από τα παλιότερα προβλήματα που έχει απασχολήσει τον άνθρωπο . Το 200 Π.Χ το πρώτο σύστημα αυτόματο ελέγχου φλοτέρ νερού φτιάχτηκε στην Ελλάδα ύστερα μετά από 100 χρόνια φτιάχτηκε το πρώτο αυτόματο ρολόι με νερού. Το 1600 το πρώτο σύστημα με ανάδραση για ρύθμιση θερμοκρασίας φτιάχτηκε στην Ολλανδίας.

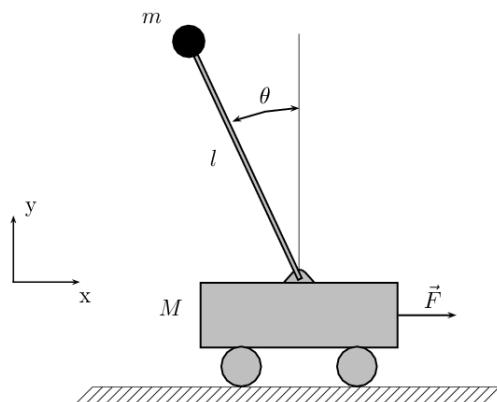
Με την ραγδαία εξέλιξη των ηλεκτρομηχανολογικών συστημάτων η ανάγκη για ένα σύστημα πλήρους αυτομάτου έχει μεγαλώσει, μέχρι εκεί που προβλέπεται να ξεπεράσει τα όρια της σημερινής μας φαντασίας. Έτσι προσπαθώντας κάθε μέρα να φτιάχνουμε συστήματα που βελτιώνουν την ποιότητα της ζωής μας η έννοια του αυτομάτου έλεγχου αποκτά όλο και περισσότερο διάφορες εφαρμογές και έτσι η ανάγκη για βέλτιστα συστήματα όλο και περισσότερο γίνονται απαραίτητα.

Στα πλαίσια αυτής της φιλοσοφίας πραγματοποιήθηκε αυτή η μελέτη - μετα-

πτυχιακή εργασία, Στην οποία πραγματοποιήθηκαν και εφαρμόστηκαν κάποιες βασικές έννοιες της θεωρίας αυτομάτου ελέγχου πάνω στο σύστημα του ανεστραμμένου Εκκρεμούς μοντέλο 505 της εταιρίας ECP (Inverted pendulum model 505 -ECP) από τις οποίες σχεδιάστηκαν οι εργαστηριακές ασκήσεις στα μαθήματα “Εισαγωγή στα Συστήματα Αυτομάτου ’Έλεγχου 1’” και “Συστήματα Αυτομάτου ’Έλεγχου 2’” της σχολής μηχανολόγων μηχανικών .

1.2 Το Σύστημα Ανεστραμμένο Εκκρεμές

Το ανεστραμμένο εκκρεμές είναι ένα Εκκρεμές που έχει την μάζα στο άνω σημείο ισορροπίας. Εφαρμόζεται συχνά πάνω σε ένα αμάξι που μπορεί να κινηθεί σε οριζόντια άξονα και έτσι σε μερικές βιβλιογραφίες αναφέρεται ως σύστημα πόλος-αμάξι (cart and pole). 'Ένα κανονικό σύστημα εκκρεμές είναι ευσταθές όταν κρέμεται προς τα κάτω (κάτω σημείο ισορροπίας) ενώ το ανεστραμμένο παρουσιάζει αστάθεια, δηλαδή με παραμικρή διαταραχή το σύστημα απομακρύνεται από το σήμειο ισορροπίας. 'Ένα τέτοιο σύστημα θα μπορούσε να γίνει ευσταθές είτε με την εφαρμογή μιας ροπής στη ράβδος είτε μετακινώντας το αμάξι (στο ορίζοντα άξονα) μέσω ενός συστήματος ελέγχου με ανάδραση.



Σχήμα 1.1: Σύστημα Ανεστραμμένο Εκκρεμές

Το ανεστραμμένο εκκρεμές είναι ένα κλασικό πρόβλημα στην δυναμική και στη θεωρία αυτομάτου ελέγχου και χρησιμοποιείται συχνά ως σημείο αναφοράς για την δοκιμή αλγόριθμων ελέγχου (PID ελεγκτές, νευρωνικά ά δίκτυα, fuzzy control, γενετικοί αλγόριθμοι κλπ). Οι διάφορες μέθοδοι σε αυτό το σύστημα εφαρμόζονται με σκοπό να κρατήσουν το εκκρεμές στο άνω σημείο ισορροπίας χρησιμοποιώντας την μετακίνηση του αμαξιού όταν είσοδο ελέγχου στο σύστημα.

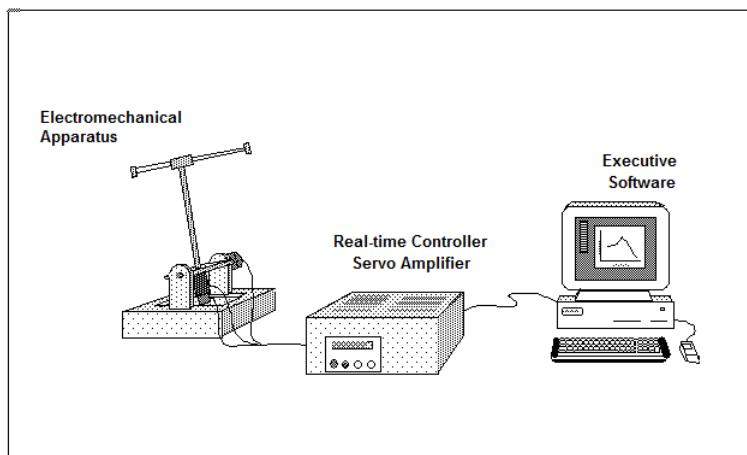
Το ανεστραμμένο εκκρεμές που χρησιμοποιήθηκε σε αυτην την μελέτη οπώς αναφέρθηκε παραπάνω είναι το "Inverted pendulum model 505" της εταιρίας ECP. Το οποίο διαφέρει αρκετά από το κλασικό ανεστραμμένο εκκρεμές του σχήματος 1.1 και θα παρουσιαστεί αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 2

Τεχνική Περιγραφή του Συστήματος

Περίληψη του Συστήματος

Το σύστημα έλεγχου του ανεστραμμένου εκκρεμούς της εργασίας αυτής αποτελείται από τρία υποσυστήματα όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.1. Στα οποία το πρώτο είναι το ηλεκτρομηχανολογικό σύστημα, το οποίο αποτελείται από το σύστημα ανεστραμμένου εκκρεμούς, τους ενεργητές και τους αισθητήρες του. Πιο αναλυτικά το σύστημα περιέχει ένα DC σερβόρο κινητήρα, δύο αισθητήρες ψηλής ανάλυσης, μια συρρόμενη ράβδο και ρυθμιζόμενα βάρη ισορροπίας.



Σχήμα 2.1: Συνολικό Σύστημα Ανεστραμμένου Εκκρεμούς μαζί με Ενισχυτή

Το δεύτερο υποσύστημα το όποιο φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα είναι το real-time controller το όποιο περιέχει το ψηφιακό σύστημα επεξεργασίας σήματος (DSP)¹, Σέρβο Ενισχυτή. Το DSP είναι ικανό να υλοποιεί νόμους έλεγχου σε πολύ ψήλη ταχύτητα δειγματοληψίας². Με αυτό τον τρόπο επιτρέπει την εφαρμογή διαφόρων αλγορίθμων ελέγχου σε μορφή συνεχούς και διακριτού χρόνου. Επίσης το controller διαθέτει σύστημα αποκωδικοποίησης του σήματος που έρχεται από τους αισθητήρες και σύστημα μετατροπής από ψηφιακό σε αναλογικό³ και αντιστρόφως⁴.

Το τρίτο υποσύστημα είναι το διοικητικό πρόγραμμα (executive program) το οποίο τρέχει σε ένα υπολογιστή υπό λειτουργικό MS-DOS ή windows. Το executive program υποστηρίζει την εκτέλεση διάφορων αλγορίθμων έλεγχου, απόκτηση και αποθήκευση των δεδομένων και σχεδίαση διαγραμμάτων από σήματα έλεγχου καθώς και αποκρίσεις του συστήματος κτλ. τα οποία θα παρουσιαστούν πιο αναλυτικά στα επόμενα υποκεφάλαια.

2.1 Ηλεκτρομηχανολογικό Σύστημα

Το ηλεκτρομηχανολογικό σύστημα ή το “Ανεστραμμένο εκκρεμές” που μελετάται σε αυτήν την εργασία όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.2 αποτελείται από ένα εκκρεμές (“pendulum rod”) πάνω στο όποιο υποστηρίζεται μια συρόμενη και ισορροπημένη ράβδο. Στα άκρα της συρομένη ράβδου τοποθετούνται δυο χάλκινα βαράκια τα οποία μπορούν να αφαιρεθούν από το σύστημα. Η συρομένη ράβδος οδηγείται και μετακινείται μέσω ενός υάντα. Ο υάντας μετακινείται μέσω μιας τροχαλίας η οποία κινείται από τον dc κινητήρα (στο κάτω άκρο του εκκρεμούς) μέσω ενός άξονα. Κάτω από τον dc κινητήρα όπως φαίνεται και στο σχήμα έχει τοποθετηθεί ένας αισθητήρας⁵ (“Encoder”) ο οποίος μετράει την τιμή της X (μετακίνηση της συρομένη ράβδου). Κάτω από το εκκρεμές τοποθετούνται δυο χάλκινα βαράκια τα οποία είναι ρυθμιζόμενα (πάνω και κάτω) και μπορούν να αφαιρεθούν τελείως από το σύστημα. Κάθετα στον άξονα του εκκρεμούς έχει τοποθετηθεί ένας αισθητήρας υψηλής ακριβείας, ο οποίος μετράει την τιμή της Θ (γωνία του εκκρεμούς). Έτσι με την μετακίνηση της θέσης της συρομένης ράβδου και με την παρουσία της βαρύτητας μπορεί το εκκρεμές να ελεγχτεί. Με την μετακίνηση του κάτω βά-

¹DSP- Digital Signal Processor

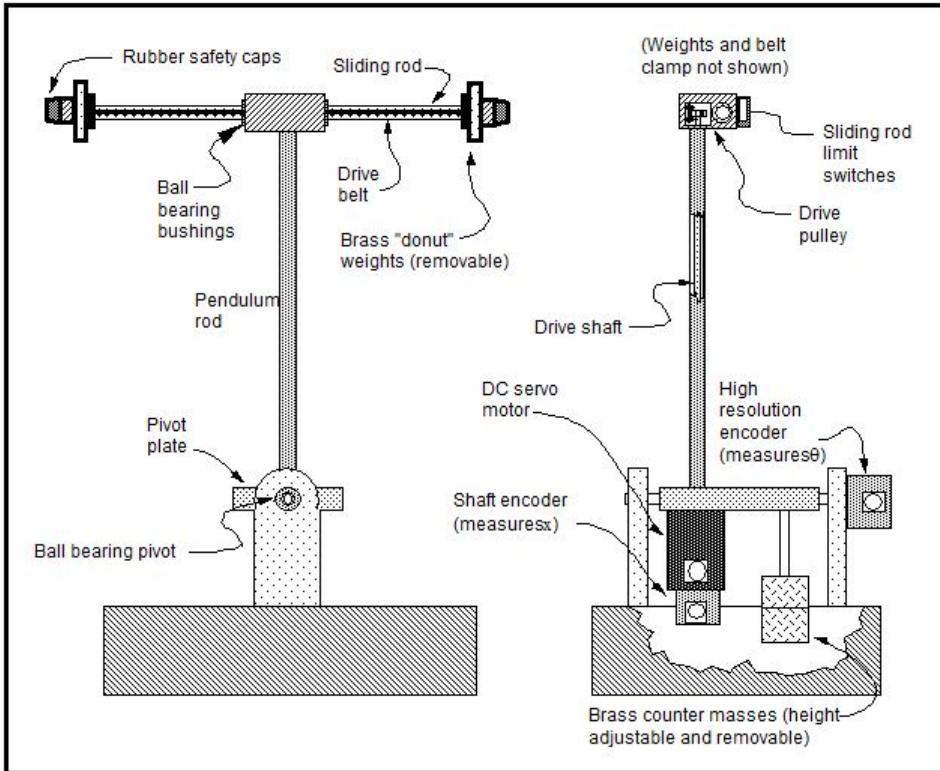
²sampling rates

³DAC-Digital to Analog Converter's

⁴ADC- Analog to Digital Converter's

⁵Οι αισθητήρες στο σύστημα μας μετράνε την θέση και παραγωγίζοντας την θέση μετριέται η ταχύτητα

ρους, μπορεί κανείς να αλλάξει το κέντρο βάρος του εκκρεμούς και έτσι να αλλάξει τις δυναμικές τους συστήματος.



Σχήμα 2.2: Μηχανισμός του Ανεστραμμένου εκκρεμούς

2.2 Περιγραφή του Διοικητικού Προγραμμάτος

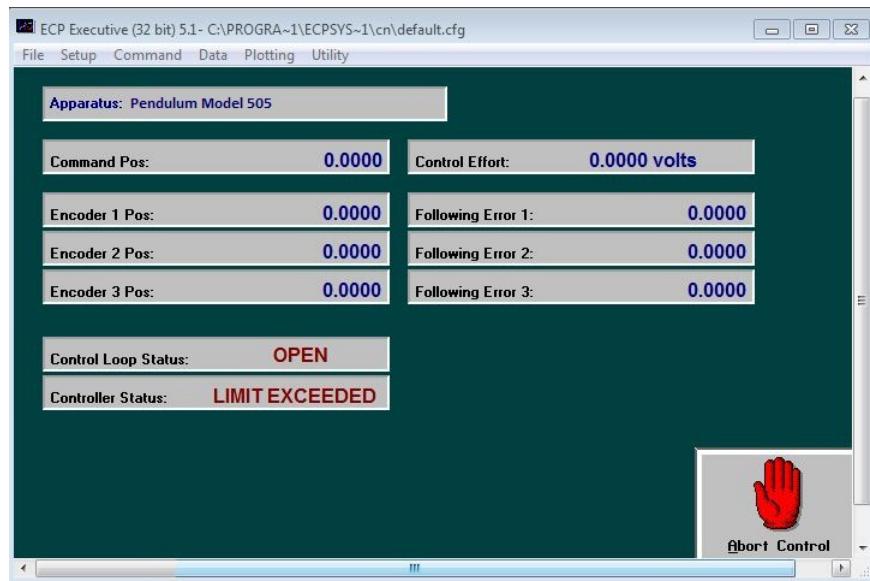
Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως το executive program ECP είναι η θύρα επαφής μεταξύ του χρήστη του συστήματος και του ανεστραμμένου εκκρεμούς. Το λογισμικό αυτό έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε να προσφέρει στον χρήστη ένα φιλικό περιβάλλον υπό λειτουργικό σύστημα Windows με διάφορα παράθυρα και μενού. Το λογισμικό αυτό υποστηρίζει διάφορες μορφές ελεγκτών (συνεχούς και διακριτού χρόνου) και έτσι μπορεί κανείς να εφαρμόσει διάφορες μορφές ελεγκτών. Επίσης προσφέρει στον χρήστη την δυνατότητα να επιλέξει ξεχωριστά δεδομένα (αποκρίσεις) από διάφορους αισθητήρες του συστήματος και έπειτα σχεδίαση διαγραμμάτων μεταξύ τους. Επίσης προσφέρει την δυνατότητα επιλογής εισόδου στο σύστημα (σχεδίαση αλγορίθμων ελέγχου). Όλα αυτά θα παρουσιαστούν αναλυτικότερα στη συνέχεια.

2.2.1 Απαιτήσεις του Συστήματος

To executive program (ECP) μπορεί να εγκατασταθεί σε οποιοδήποτε υπολογιστή με ελάχιστο RAM ένα megabyte και ελάχιστο διαθέσιμο σκληρό δίσκο τρία megabytes. Μπορεί να εγκατασταθεί στο λειτουργικό MSDOS 3.x, 4.x, και 5 και επίσης σε λειτουργικό windows 98 και XP. Προτείνεται να χρησιμοποιηθεί ένας υπολογιστής Pentium 4 ή ανώτερο.

2.2.2 Το Φόντο του Προγράμματος

Το φόντο του προγράμματος ECP παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα, στο οποίο φαίνεται ότι το πρόγραμμα έχει σχεδιαστεί για τρεις αισθητήρες ενώ εμείς στο σύστημα μας έχουμε δύο αισθητήρες. Επίσης φαίνεται το κουμπί Abort Control, το οποίο έχει σχεδιαστεί για να σταματήσει την λειτουργία του συστήματος σε κάθε ενδεχόμενη επικίνδυνη ανεπιθύμητη συμπεριφορά του. Επίσης όπως φαίνεται και στο σχήμα το πρόγραμμα περιέχει ένα γενικό μενού το οποίο θα παρουσιαστεί πιο αναλυτικά.



Σχήμα 2.3: Το Φόντο του λογισμικού ECP

Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν ακόμα δύο ενδείξεις της λειτουργιάς του συστήματος. Η Control loop Status μας δείχνει αν ο αλγόριθμος του ελεγκτή είναι στην λειτουργία (Close), ή όχι (Open). Η ένδειξη “Controller Statuses” μας δείχνει την κατάσταση του ελεγκτή, με το “Active” μας δείχνει ότι το σύστημα μας είναι ευσταθές και ο ελεγκτής δουλεύει, ενώ αν το σύστημα κλειστού βρόγχου με ελεγκτή δεν είναι ευσταθές και το σύστημα παρουσιάζει

ασταθή συμπεριφορά, (Χτύπα στα άκρα), τότε η ένδειξη “Controller Statues” μας παρουσιάζει “Limit Exceeded”.

2.2.3 Γενικό Μενού

Το γενικό Μενού όπως φαίνεται και στο προηγούμενο σχήμα αποτελείται από επιλογές:

- File
- Setup
- Command
- Data
- Plotting
- utility

File Menu

Στην επιλογή File υπαρχουν οι εξής επιλογές:

- Load Setting
- Save Setting
- About
- Exit

To “Load Setting” επιτρέπει στον χρήστη να φορτώνει στο λογισμικό ένα παλιότερο αποθηκευμένο configuration του συστήματος. Το αρχείο αυτό⁶ μπορεί να είναι οποιοδήποτε αρχείο με επέκταση “.cfg” το οποίο έχει αποθηκευτεί προηγουμένως από τον χρήστη με την επιλογή του “Save setting”.

⁶Configuration file

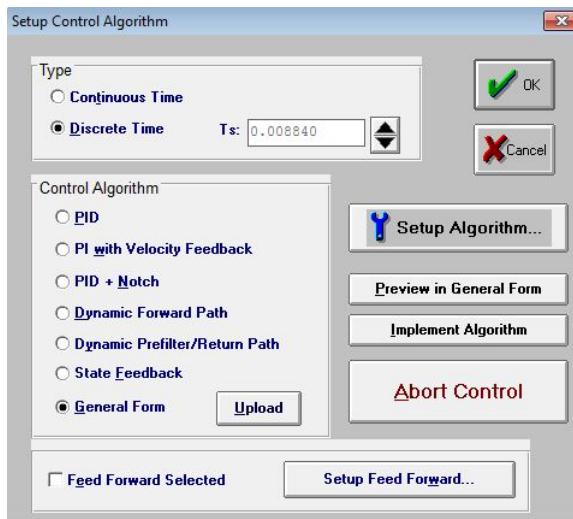
Setup Menu

To “Setup Menu” περιέχει τις επιλογές:

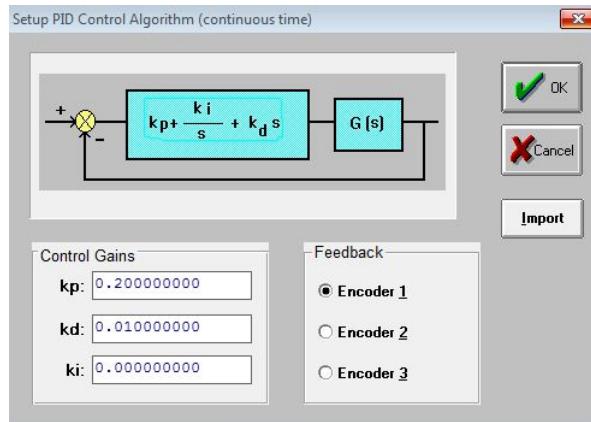
- Control Algorithm
- User Units
- Communications

Setup Control Algorithm

Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, η “Setup Control Algorithm” μας δίνει την δυνατότητα να επιλέξουμε την μορφή του χρόνου (Συνεχούς ή Διαχριτού) και τη δυνατότητα επιλογής του χρόνου δειγματοληψίας. Στο παράθυρο “Control Algorithm” μας δίνεται την δυνατότητα να επιλέξουμε μεταξύ διαφόρων τύπων ελεγκτών. Κάθε μορφή ελεγκτή μεταφράζεται και τοποθετείται στο “General form” (βλέπε σχήμα 2.6) και το πρόγραμμα από κει φορτώνει τα διάφορα επιλεγμένα κέρδη. Πρέπει να τονιστεί σε αυτό το σημείο ότι οι επιλογές “PID”, “PI with velocity”, “PID + Notch”, “Dynamic Forward Path”, “Dynamic prefilter /Return Path” δεν είναι εφαρμόσιμες στο σύστημα μας, γιατί με βάση αυτές μπορεί να επιλεγεί μονάχα ένας βρόχος από έναν αισθητήρα (encoder) του συστήματος (βλέπε σχήμα 2.5). Έτσι όπως είναι κατανοητό με την επιλογή μοναχά ένος βρόχου (είτε Θ είτε X) δεν μπορούμε να ελέγξουμε το σύστημα ανεστραμμένου εκχρεμούς.

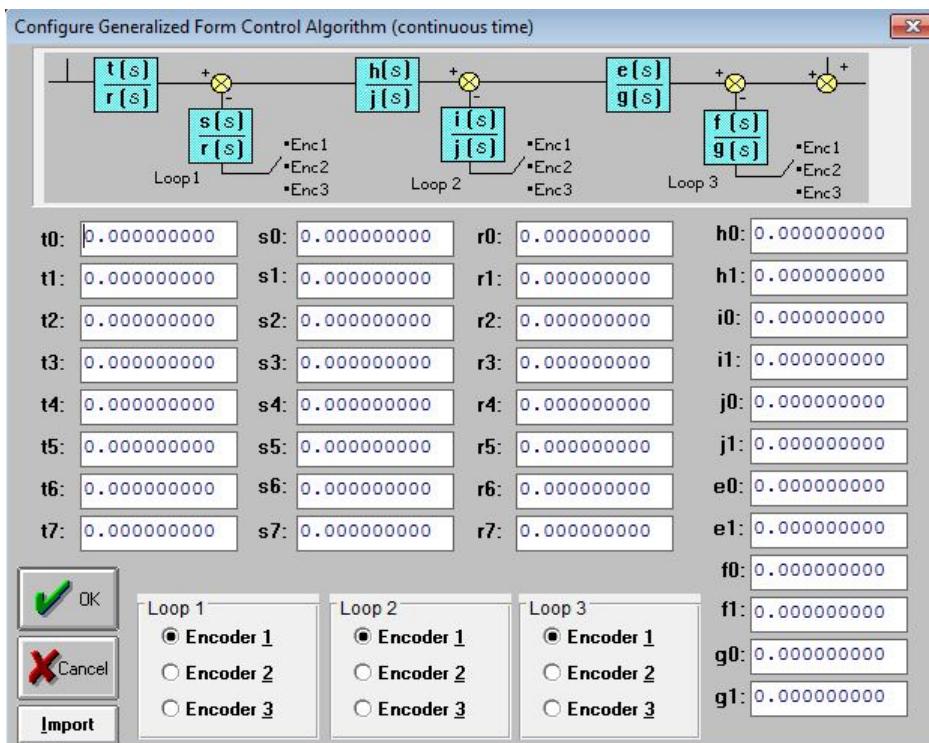


Σχήμα 2.4: παράθυρο “setup control algorithm”



Σχήμα 2.5: παράθυρο “PID algorithm”

Όπως φαίνεται και από την μορφή του παραθυρού “General form” (σχήμα 2.6), μπορεί κανείς με τοποθέτηση κερδών σε κατάλληλες θέσεις να σχεδίασει διάφορους τύπους ελέγχου, τα οποία θα συζητηθούν πιο αναλυτικά στα επόμενα κεφάλαια. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.4 ο χρήστης του συστήματος



Σχήμα 2.6: παράθυρο “General form”

για να εφαρμόσει έναν ελεγκτή στο σύστημα, πρέπει να διαλέξει μια μορφή ελεγκτή από το υποπαράθυρο “Control Algorithm”, ύστερα πρέπει να διαλέξει “Setup Algorithm” για να τοποθετήσει τα συγκεκριμένα κέρδη και μετά “Implement Algorithm” για να λειτουργήσει το σύστημα με το συγκεκριμένο ελεγκτή.

Όσον αφορά το “sampling time” πρέπει να τονιστεί ότι ο μικρότερος χρόνος δειγματοληψίας που μπορεί να εφαρμοστεί στο σύστημα είναι 0.000884 ts (1.1 KHz είναι η μεγαλύτερη συχνότητα του συστήματος), όμως σε πολλές εφαρμογές ο χρονός δειγματοληψίας $T_s = 0.00442$ είναι ένας μέσος και καλός χρόνος δειγματοληψίας.

Συνεχής Χρόνος και διακριτός Χρόνος

Σε πολλές εφαρμογές χρειαζόμαστε να εφαρμόζουμε έναν ελεγκτή σε συνεχούς χρόνου ή διακριτού χρόνου⁷. Ένας εμπειρικός χανόνας που χρησιμοποιείται συχνά είναι ότι η προσέγγιση του δειγματοληψίας του συστήματος με συνεχή χρόνο είναι σωστή και ορθή αν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι τουλάχιστον 10 φορές ταχύτερη από το εύρος ζώνης του κλειστού συστήματος (system bandwidth). Αφού το εφικτό εύρος ζώνης του κλειστού συστήματος του ανεστραμμένου εκκρεμούς της εργασίας είναι γενικώς μικτότερο από 5 Hz, τότε μια συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη από 100 Hz μας εξασφαλίζει αποτελέσματα τα οποία είναι μη-διακρινόμενα μεταξύ ισοδύναμων ελεγκτών συνεχούς και διακριτού χρόνου. Έτσι για συχνότητα δειγματοληψίας άνω των 50 Hz, ο χρήστης μπορεί να σχεδιάσει ελεγκτές συνεχούς χρόνου χωρίς καμία μετρίσιμη διαφορά σε σχέση με την περίπτωση του ίδιου ελεγκτή στο διακριτό χρόνο.

Πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι γενικότερα ακόμα και στην περίπτωση του ελεγκτή συνεχούς χρόνου, ο πραγματικός ελεγκτής που εφαρμόζεται στο σύστημα είναι διακριτού χρόνου. Δηλαδή αν σχεδιάσουμε έναν ελεγκτή συνεχούς χρόνου, οι ελεγκτές μετατρέπονται τελικά σε διακριτού χρόνου. Για πολυώνυμα $n(s), d(s)$ στο “PID + Notch”; $s(s), t(s)$ και $r(s)$ στο “Dynamic Forward Path, Dynamic Prefilter / Return Path” και “General form”; και $k(s), l(s)$ στο “Feed Forward”, χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός Tustin (bilinear):

$$S = \frac{2}{T_S} \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} \quad (2.1)$$

⁷Σε εργαστηριακές ασκήσεις στα μαθήματα ΣΑΕ 1 και ΣΑΕ 2 χρησιμοποιούμε “Συνεχούς Χρόνου”

Στις άλλες περιπτώσεις (Πρώτης τάξης) χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός “Backward Difference”:

$$S = \frac{1 - Z^{-1}}{T_s} \quad (2.2)$$

Όπου το T_s είναι χρόνος δειγματοληψίας και το Z είναι μετασχηματισμός Z των διακριτών συστηματών.

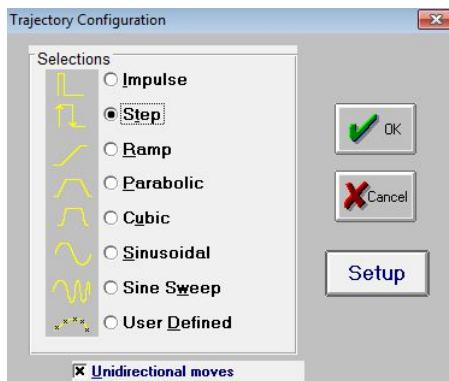
Command Menu

Με την επιλογή “Command” από το γενικό μενού έχουμε τις παρακατώ επιλογές:

- Trajectory Configuration
- Execute

Trajectory Configuration

Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, το “Trajectory configuration” μας δίνει την δυνατότητα επιλογής μεταξύ διαφόρων τύπων εισόδου τις οποίες μπορεί το σύστημα μας να χειριστεί. Η είσοδος “Step” μας δίνει επίσης την δυνατότητα για είσοδο “step” στο σύστημα ανοιχτού βρόχου ή κλειστού.



Σχήμα 2.7: παράθυρο “Trajectory Configuration”

Execute

Με την χρήση του “Execute” τρέχουμε το “Trajectory” που έχουμε διαλέξει στο παράθυρο “Trajectory Configuration”. Για να τρέξουμε ένα σύστημα με ελεγκτή και μια είσοδο, πρέπει αρχικά να διαλέξουμε τον ελεγκτή μας από

το “Setup Algorithm”, ύστερα να τρέξουμε το σύστημα με την χρήση της “Implement Trajectory” και να διαλέξουμε μια είσοδο από “Trajectory Configuration” και τέλος με την χρήση της “Execute” να τρέξουμε το σύστημα ακλειστού βρόχου (ή ανοιχτού με ελεγκτή).

Data Menu

To “Data Menu” περιέχει τις παρακάτω επιλογές:

- Setup Data Acquisition
- Upload Data
- Export Raw Data

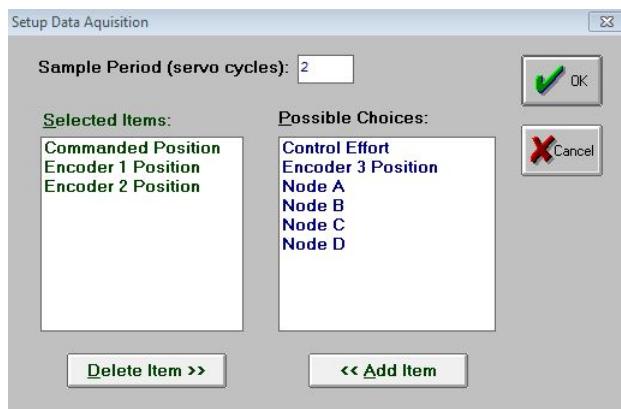
Setup Data Acquisition

Η επιλογή “Setup Data Acquisition” επιτρέπει στον χρήστη να διαλέξει σε ποιο από τα παρακάτω να συλλέγονται τα δεδομένα κατά διάρκεια εκτέλεσης μιας εισόδου (από “Execute Trajectory”) στο σύστημα, δηλαδή μπορεί να επιλέξει σε ποια από αυτά τα παρακάτω να γίνει δειγματοληψία δεδομένων όταν τρέχουμε μια είσοδο στο σύστημα.

- Commanded position
- Encoder 1 Position (Αντιστοιχεί στην γωνία του εκκρεμούς)
- Encoder 2 Position (Αντιστοιχεί στην θέση της Ράβδου)
- Encoder 3 Position (Δεν Χρησιμοποιείται στο Ανεστραμμένο εκκρεμές της εργασίας)
- Control Effort (Αντιστοιχεί στην έξοδο προς σερβό κινητήρα)
- Node A : Είσοδο στο Πολυώνυμο H (βλέπε Σχήμα 2.6)
- Node B : Είσοδο στο Πολυώνυμο E (βλέπε Σχήμα 2.5)
- Node C : Έξοδος από το Πολυώνυμο $\frac{1}{G}$ (βλέπε Σχήμα 2.6)
- Node D : Έξοδος από το “feedforward controller” (βλέπε Σχήμα 2.4)

Σε αυτό το παράθυρο όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.8, Ο χρήστης με την επιλογή “Delete item” ή “Add item” μπορεί να προσθέτει ή να αφαιρεί από την λίστα των επιλεγμένων προς δειγματοληψία. Επίσης ο χρήστης πρέπει να επιλέξει περίοδο δειγματοληψίας “Sampling period”, Για παράδειγμα αν ο

χρόνος δειγματοληψίας (T_S βλέπε Σχήμα 2.4) είναι 0.00442 δευτερόλεπτα και ο χρήστης διαλέγει 5 για την περίοδο δειγματοληψίας “Sampling period”, τότε τα επιλεγμένα δεδομένα συλλέγονται κάθε πέντε επί χρόνο δειγματοληψίας ή με άλλα λόγια κάθε 0.0221 δευτερόλεπτα. Συχνά για συστήματα με είσοδο που περιέχει γρήγορη συχνότητα (Π.Χ “step” ή “Sine Sweep” με υψηλή συχνότητα), πρέπει να επιλεχτεί μικρή περίοδος δειγματοληψίας, Αλλά από την άλλη πλευρά, παποφεύγονται πολύ μικροί περίοδοι όπου δεν χρειάζεται για να μην έχουμε καθυστέρηση για την διαδικασία “upload” και “plot” των δεδομένων.



Σχήμα 2.8: παράθυρο “Setup Data Acquisition”

Export Raw Data

Το “Export Raw Data” επιτρέπει στον χρήστη να αποθηκεύσει τα συλλεγόμενα δεδομένα σε ένα “text file” σε μια διάταξη που είναι κατάλληλη και βολική για να επεξεργαστεί σε άλλο λογισμικό όπως Matlab®.

Plotting Menu

Το “Plotting Menu” επιτρέπει στον χρήστη να πλοττάρει “plotting” τα δεδομένα δειγματοληψίας. Επιτρέπει στον χρήστη να διαλέξει διαφόρους συνδυασμούς μεταξύ των δεδομένων και επίσης του προσφέρει την δυνατότητα αποθήκευσης των διαγραμμάτων και φόρτισης τους στον και από τον σκληρό δίσκο. Επίσης δίνει την δυνατότητα “Real time plot” κατά την οποία μπορεί κανείς να βλέπει “live” την απόκριση του συστήματος.

2.3 Real-Time Controller

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα δοθεί μια σύντομη περίληψη της αρχής λειτουργίας των διαφορών τμημάτων του “Real-Time Controller”. Όπως αναφέρθηκε και στα προηγούμενα το “ECP Real-Time Controller” είναι ένας ψηφιακός επεξεργαστής σήματος⁸, ο οποίος βασίζεται σε ένα “Single-Board Computer”⁹ ο οποίος εκτελεί τις παρακάτω καθήκοντα:

- Servo loop closure
- Command generation
- Sensor Interface

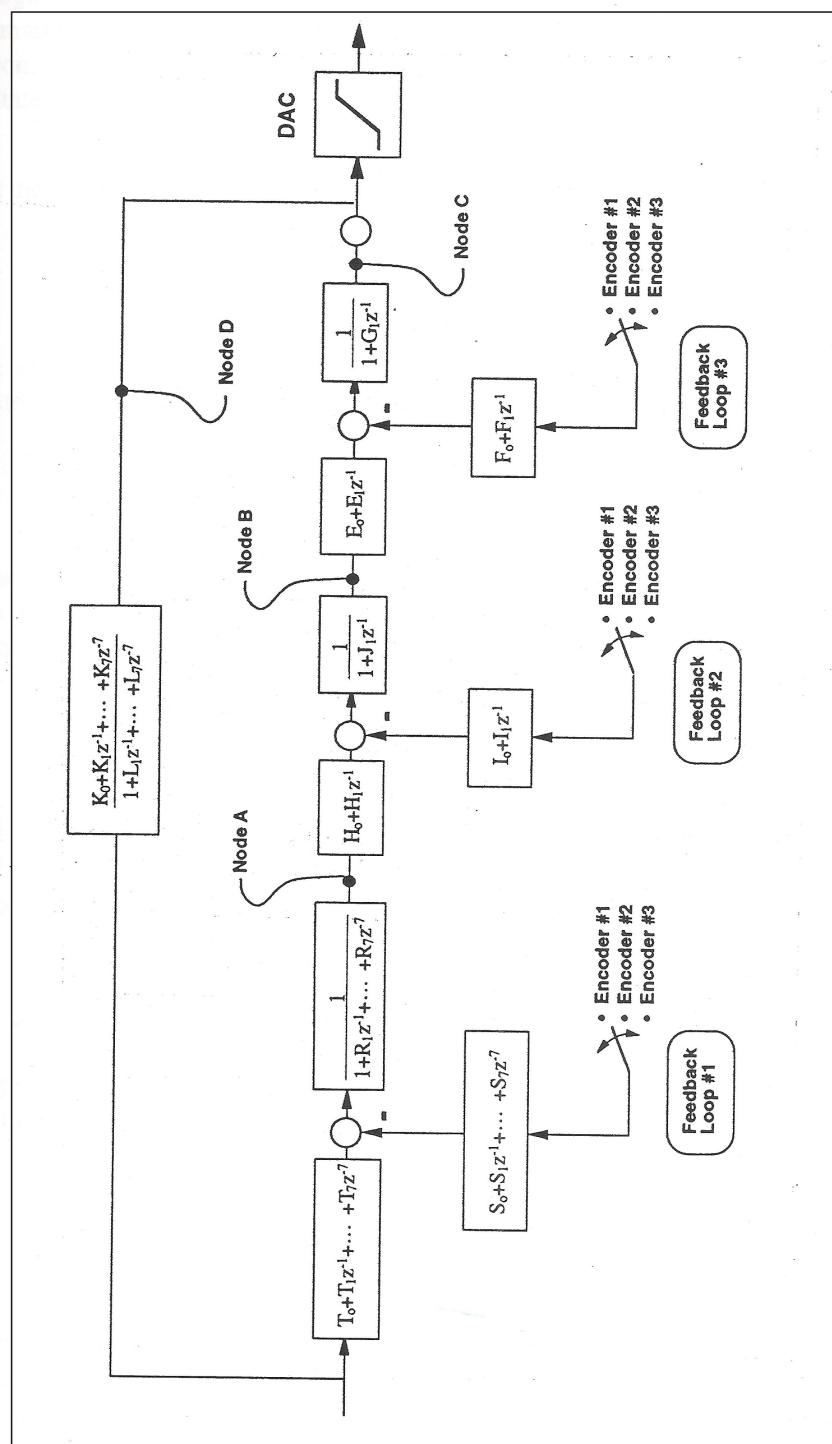
2.3.1 Servo Loop Closure

Το “Servo loop closure” συνθέτει τον υπολογισμό του αλγορίθμου ελέγχου με τον χρόνο δειγματοληψίας. Το “Real-time controller” εκτελεί το “General form” το οποίο περιέχει την εξίσωση του νόμου έλεγχου για κάθε περίοδο δειγματοληψίας T_S . Η μικρότερη δυνατή τιμή της περίοδος αυτής είναι 0.000884 δευτερόλεπτα (περίπου 1.1 KHz). Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, όλοι οι αλγόριθμοι έλεγχου που διαλέγει και φτιάχνει ο χρήστης στο τελικό στάδιο μέσω του διοικητικού προγράμματος μεταφράζονται στο “General form” πριν κατέβει και εφαρμοστεί από το “Controller”. Το “General form” χρησιμοποιεί πραγματικούς αριθμούς 96bit (48-bit για ακέραιους αριθμούς και 48-bit για κλασματικούς) για υπολογισμούς της εντολής έλεγχου (control effort). Η εντολή έλεγχου (control effort) μέσω του διοικητικού προγράμματος μεταφράζεται (απλώνεται) σε ένα εύρος των +/- 16384 counts που αντιστοιχεί στα +/- 5 Volts στο 16 μπιτάρι DACs (δηλαδή το range του DACs είναι συνολικά 32768 counts που αντιστοιχεί στα 16 bits του DACs). Ο Περιορισμός του 5 Volts οφείλεται στην κλιμάκωση της τάσης του ενισχυτή εισόδου του ενεργοποιητή¹⁰ του συστήματος.

⁸DSP-Digital Signal Processor

⁹Ένας single board Computer (SBC) είναι ολόκληρος υπολογιστής ο οποίος έχει φτιαχτεί πάνω σε μια πλακά κυκλωμάτων, Περιέχει μικρό-επεξεργαστή (ες), μνήμη, είσοδο/έξοδο(I/O) και όλα τα άλλα απαραίτητα χαρακτηριστικά που χρειάζεται ένας υπολογιστής, με τι διαφορά ότι ο SBC δεν διαθέτει slot για διαφορές κάρτες.

¹⁰actuator



Σχήμα 2.9: διάγραμμα “General form” του αλγόριθμου έλεγχου

Παρατηρώντας το σχήμα (2.9), ο αλγόριθμος που αποτελεί την Εντολή ελέγχου (η οποία ύστερα εισάγεται στο DACs), αποτελείται από:

$$R(q^{-1}) \cdot nodeA(k) = T(q^{-1}) \cdot c_p(k) - S(q^{-1}) \cdot f_{b1}(k) \quad (2.3)$$

Όπου T , S , και R είναι πολυώνυμα εβδόμης τάξης της μεταβλητή q , ¹¹ και το γράμμα “ k ” παριστάνει την k^{th} περίοδο δειγματοληψίας. ¹²

Η μεταβλητή “nodeA” όπως φαίνεται και από το διάγραμμα, είναι μια ενδιάμεση τιμή του ολικού νόμου έλεγχου, ο οποίος συνεχόμενα αποθηκεύεται στην μνήμη του συστήματος και μπορεί ο χρήστης να την εξάγει μέσω του “Data Acquisition” όπως έχει αναφερθεί προηγουμένως. Η μεταβλητή τιμή της $c_p(k)$ είναι η τιμή (command) της επιθυμητής θέσης η οποία παράγεται από το “real-time Controller” και θα συζητηθεί περισσότερο στο επόμενο υποκεφάλαιο. Η μεταβλητή τιμή της $f_{b1}(k)$ είναι η τιμή της ανάδρασης ερχόμενη από έναν αισθητήρα, ο οποίος ανάλογα με την μορφή του επιθυμητού αλγορίθμου έλεγχου επιλέγεται μεταξύ των δύο διαθέσιμων αισθητήρων στο σύστημα. Έτσι φτιάχνεται και ο πρώτος βρόχος του συστήματος.

Ο επόμενος ενδιάμεσος βρόχος υπολογίζεται από την παρακάτω:

$$J(q^{-1}) \cdot nodeB(k) = H(q^{-1}) \cdot nodeA(k) - I(q^{-1}) \cdot f_{b2}(k) \quad (2.4)$$

Η μεταβλητή τιμή της node(B) εδώ όπως πριν είναι η ενδιάμεση τιμή του ολικού νομού έλεγχου, η οποία αποθηκεύεται στην μνήμη και η f_{b2} είναι η τιμή της ανάδρασης ερχόμενη από έναν αισθητήρα, ο οποίος οπώς για τον προηγούμενο βρόχο, ανάλογα με την μορφή του επιθυμητού αλγορίθμου έλεγχου επιλέγεται μεταξύ των δύο διαθέσιμων αισθητήρων για να φτιαχτεί ο δευτερος βρόχος του συστήματος. J , H και I είναι πολυώνυμα δευτέρης τάξης.

Για τον τελευταίο βρόχο έχουμε:

$$G(q^{-1}) \cdot nodeC(k) = E(q^{-1}) \cdot nodeB(k) - F(q^{-1}) \cdot f_{b3}(k) \quad (2.5)$$

η μεταβλητή τιμή της “nodeC” είναι η τιμή της εντολής ελέγχου που παράγεται από τον ολικό σχεδιασμένο ελεγκτή και η μεταβλητή τιμή f_{b3} είναι προφανώς η τιμή της ανάδρασης από επιθυμητό και επιλεγμένο αισθητήρα του συστήματος για την δημιουργία του βρόχου τρία. Τα πολυώνυμα G , E , και F είναι πολυώνυμα δεύτερης τάξης. Αν έχουμε σχεδιάσει και προσθέσει και “Feedforward” θα έχουμε:

$$L(q^{-1}) \cdot nodeD(k) = K(q^{-1}) \cdot c_p(k) \quad (2.6)$$

¹¹unit time shift operator q

¹² $k=0, 1, 2, \dots$

Σε αυτήν την περίπτωση τα L και K είναι πολυώνυμα έκτης τάξης και η μεταβλητή τιμή της nodeD είναι η τιμή που παράγεται από το βρόχο του feedforward και όπως είναι αντιληπτό η συνολική τιμή της εντολής ελέγχου που εισάγεται στο DACs είναι:

$$\text{Τελική Εντολή έλεγχου} = \text{nodeC}(k) + \text{nodeD}(k) \quad (2.7)$$

2.3.2 Παραγωγή Εντολής

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα εξηγηθεί ο τρόπος με τον οποίο παράγονται οι διάφορες μορφές εισόδου στο βρόχο. Με την τοποθέτηση των διάφορων κερδών για κατασκευή μιας επιθυμητής εισόδου στο σύστημα, τα κέρδη αυτά κατεβάζονται στο “Real-time controller” μέσω του executive προγράμματος (“Trajectory Configuration”) και έπειτα με διαδικασία η οποία παρουσιάζεται ξεχωριστά για κάθε μορφή εισόδου παράγονται οι διάφορες είσοδοι του συστήματος.

Βηματική Είσοδος(Step)

Το Σχήμα 2.10α δείχνει την τροχιά της εντολής βηματικής εισόδου. Η επιθυμητή τροχιά μπορεί να εξηγηθεί με τον παρακάτω τρόπο:

$$\begin{aligned} C_p(t) &= C_p(0) + C && \text{for } t > 0 \\ C_v(t) &= 0 && \text{for } t > 0 \\ C_v(0) &= \infty \end{aligned} \quad (2.8)$$

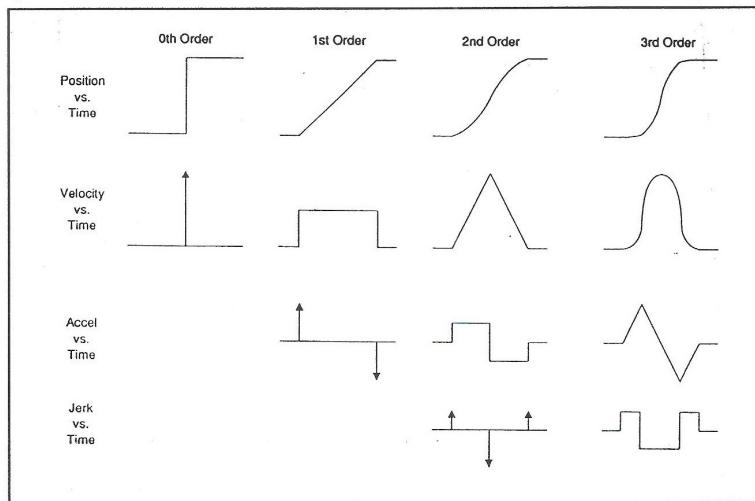
Οπού το $C_p(t)$ και $C_v(t)$ παριστούν την επιθυμητή (εντολή) θέσης και ταχύτητας αντίστοιχα στην μονάδα του χρόνου και το C είναι το πλάτος της βηματικής εισόδου. Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει από το σχήμα 2.10α, για μια τέτοια τροχιά απαιτεί μια μεγάλη και δυνατή ροπή από τον κινητήρα. Η απόκριση σε ένα μηχανολογικό σύστημα εξαρτάται από την δυναμική χαρακτηριστική του ενεργοποιημένου ελεγκτή και του ίδιου του συστήματος. Ωστόσο σε μια βηματική είσοδο η στιγμιαία ταχύτητα και η παράγωγος της δεν είναι απευθείας ελέγχιμοι. Έτσι γενικώς μια βηματική είσοδος συνήθως χρησιμοποιείται για δοκιμαστικούς σκοπούς των ελεγκτών.

Είσοδος μορφής Ramp

Η μορφή της τροχιάς της εισόδου “Ramp” φαίνεται στο σχήμα 2.10b. αυτή η τροχιά μπορεί να εξηγηθεί:

$$\begin{aligned} C_p(t) &= C_p(0) + V \cdot t && \text{for } t > 0 \\ C_v(t) &= V && \text{for } t > 0 \\ C_a(0) &= \infty \end{aligned} \quad (2.9)$$

Όπου η $C_a(0)$ παριστάνει τη διατεταγμένη επιτάχυνση της αρχικής χρονικής στιγμής και η V είναι μια σταθερή ταχύτητα. Σχετικά με την βηματική είσοδο (step), η είσοδος Ramp είναι πιο διακεκριμένη όμως ακόμα η επιτάχυνση είναι αυθόρυμη.



Σχήμα 2.10: Γεωμετρική αναπαράσταση τροχιάς διάφορων εισόδων

Παραβολική Είσοδος (Parabolic)

Το Σχήμα 2.10c παριστάνει την μορφή της τροχιάς μιας παραβολικής εισόδου. Η τροχιά αυτή εξισώνεται με παρακάτω τρόπο:

$$\begin{aligned}
 C_p(t) &= C_p(0) + C_V(0) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot A \cdot t^2 && \text{for } t > 0 < \frac{1}{2}t_f \\
 C_v(t) &= C_v(0) + A \cdot t && \text{for } t > 0 < \frac{1}{2}t_f \\
 C_a(t) &= A && \text{for } t > 0 < \frac{1}{2}t_f \\
 C_j &= \infty
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Όπου $C_j(t)$ παριστάνει την διατεταγμένη υπερεπιτάχυνση¹³ και A είναι η σταθερή επιτάχυνση, και το t_f είναι ο τελικός χρόνος του προορισμού.

¹³jerk at the time t

Κυβική Είσοδος(Cubic)

Το Σχήμα 2.10d παρουσιάζει την μορφή μιας Κυβικής τροχιάς εισόδου στο σύστημα. η οποία μπορεί να εκφραστεί με τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned} C_p(t) &= C_p(0) + C_v(0) \cdot t + \frac{C_a(0) \cdot t^2}{2} + \frac{J \cdot t^3}{6} && \text{for } t > 0 < \frac{t_f}{4} \\ C_v(t) &= C_v(0) + C_a(0) \cdot t + \frac{J \cdot t^2}{2} && \text{for } t > 0 < \frac{t_f}{4} \\ C_a(t) &= C_a(0) + J \cdot t && \text{for } t > 0 < \frac{t_f}{4} \\ C_j(0) &= J \end{aligned} \quad (2.11)$$

Οπού το J παριστάνει μια σταθερή υπερεπιτάχυνση¹⁴. Έτσι μια είσοδος κυβικής τροχιάς είναι από κάθε άποψη πιο ολοκληρωμένη σε σχέση με τις προηγούμενες μορφές εισόδου που αναφέρθηκαν. Η διατεταγμένη επιτάχυνση είναι μια εξίσωση η οποία αλλάζει γραμμικά κατά τρία διαφορετικά κομμάτια της μανούβρας της.

Ημιτονοειδή Είσοδος(Sinusoidal)

Η Ημιτονοειδή τροχιά παράγεται μέσω της παρακάτω σχέσης:

$$C_p(k) = R \cdot \sin(\theta(k)) \quad (2.12)$$

Οπού το R είναι το πλάτος, $\theta(k) = \omega \cdot k \cdot T_p$ για $K=0,1,\dots$ και ω είναι η διατεταγμένη συχνότητα σε Hertz (Hz). Το T_p είναι ρυθμιζόμενο στα 5 χιλιοστά δευτερόλεπτου. Για να γίνει πιο απαλή η τροχιά της κίνησης, μια κυβική τροχιά προσαρμόζεται μεταξύ των σημείων με την παρακάτω εξίσωση:

$$\hat{C_p}(k) = \frac{c_p(k-1) + 4 \cdot C_p(k) + C_p(k+1)}{6} \quad (2.13)$$

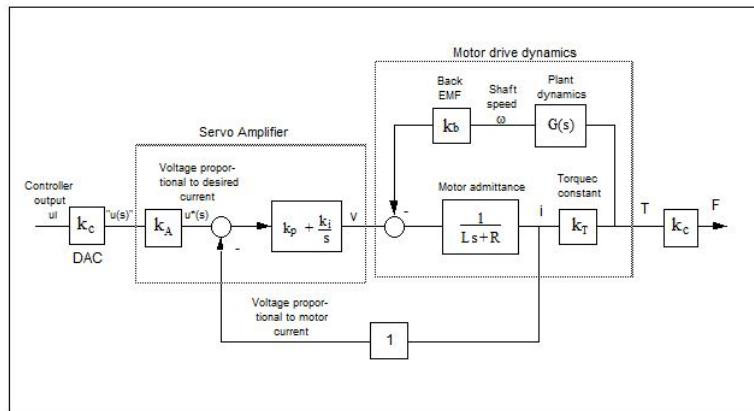
Στην γραμμική ημιτονοειδή σάρωση, $\omega(k) = \alpha \cdot T_p$, το α είναι μια σταθερά που καθορίζεται από την διάφορα της μεγαλύτερης και μικρότερης συχνότητας διαιρούμενη με το χρόνο σάρωσης.

2.3.3 Σερβοκινητήρας Συνεχούς με Ψήκτρες και Ενισχυτή Ισχύος

Το εισαγόμενο σήμα (εντολή) στη K^{th} περίοδο δειγματοληψίας εισάγεται στο 16-μπιτάρι DAC, το οποίο εξασφαλίζει και παράγει ένα αναλογικό σήμα στον

¹⁴jerk

ενισχυτή του κινητήρα. Ο ενισχυτής λειτουργει με υπεραγωγιμότητα, έτσι εξασφαλίζει και παράγει το ζητούμενο ρεύμα (σε αντίθεση με την τάση) προς τον κινητήρα, το οποίο με την σειρά του αντιπροσωπεύει μια ζητούμενη ροπή από το κινητήρα. Για να εξασφαλίζει την ικανότητα παραγωγής ζητούμενου ρεύματος, στο πλαίσιο του ενισχυτή υλοποιείται ένας ολοκληρωτικός ελεγκτής (PI) όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.11: Διάγραμμα του μηχανισμού κίνησης

Η συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ ρεύματος του κινητήρα και εισαγόμενου σήματος (εντολή, η έξοδος από το DAC) είναι:

$$\frac{i(s)}{u(s)} = \frac{K_A K_C (K_P s + K_i)}{s(Ls + R + K_T K_b G(s)) + K_P s + K_i} \quad (2.14)$$

Όπου το K_C είναι το κέρδος του DAC σε volts/count (10 volts ανά 32767 counts), το K_A είναι το πρόωρο (forward) κέρδος του ενισχυτή το οποίο είναι αδιάστατο ($\frac{V}{V}$). Το R είναι η αντίσταση σε ohms, το L είναι η επαγωγή του κινητήρα σε Henrys. Το K_b είναι αντι-ηλεκτρεγερτική σταθερά σε $\frac{v}{rad}$, το K_t είναι η σταθερά ροπής κινητήρα σε $\frac{Nm}{ampere}$. το K_m στην κάτω εξίσωση είναι η σταθερά του μηχανικού οφέλους το οποίο είναι ο λόγος της δύναμης που παράγεται από τον ιμάντα της κίνησης της ράβδου προς την ροπή παραγόμενη από τον κινητήρα, με άλλα λόγια μεταφράζει την παραγόμενη ροπή του κινητήρα σε δύναμη ασκόυμενη πανω στη ράβδου και είναι σε $(\frac{N}{Nm})$ και τέλος το $G(s)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ του ρεύματος και της ταχύτητας του κινητήρα. Στην συγκεκριμένη λειτουργία του ενισχυτή μας, και τα δύο κέρδη K_P και K_i (αναλογικό και ολοκληρωματικό) του ενισχυτή επιλέγονται πολύ μεγάλα σε σχέση με το εσωτερικό βρόχο με το κέρδος K_b και την συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$. Τότε σαν αποτέλεσμα, μπορεί να αγνοηθεί ο εσωτερικός

βρόχος και έτσι η συνάρτηση μεταφοράς να γίνει:

$$\frac{i(s)}{u(s)} = \frac{K_A K_C (K_P s + K_i)}{s(Ls + R) + K_P s + K_i} \quad (2.15)$$

Στην Σταθερή κατάσταση αυτή η συνάρτηση μεταφοράς απλοποιείται και έχουμε:

$$\frac{i(s)}{u(s)} = K_A K_C \quad (2.16)$$

Οπότε η δύναμη που μεταφέρεται στην ράβδο θα είναι :

$$\frac{F(s)}{u(s)} = K_A K_C K_T K_m \quad (2.17)$$

Γενικά, τα κέρδη του αναλογικού ελεγκτή (PI) του ενισχυτή είναι τέτοια που η δυναμική του βρόχου είναι πολύ πιο γρήγορη σε σχέση με την δυναμική του κινητήρα και του μηχανισμού του ανεστραμμένου εκκρεμούς. Ως αποτέλεσμα επιτυγχάνεται αμέσως μια σταθερή τιμή ρεύματος ανάλογα και με την αλλαγή των ταχυτήτων και των θέσεων. Έτσι ο συνδυασμός ενισχυτή και κινητήρα, επειδή το σύστημα είναι ευσταθές μπορεί να μοντελοποιηθεί στην μόνιμη κατάσταση και να προσεγγιστεί έως έναν δημιουργό δύναμης και να χαρακτηριστεί έως ένα κέρδος (K_f).

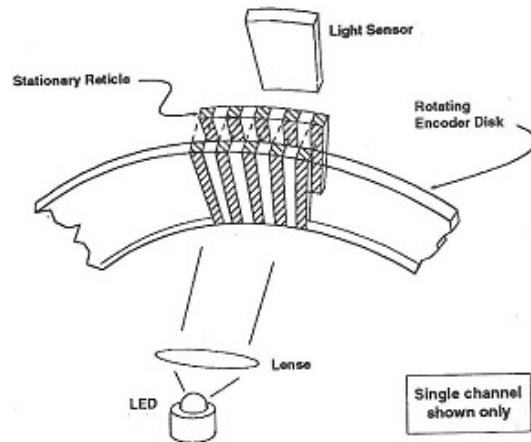
2.3.4 Αισθητήρες

Στο σύστημα του ανεστραμμένου εκκρεμούς της εργασίας όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως έχουν τοποθετηθεί δύο περιστροφικοί αισθητήρες¹⁵. Αυτοί οι αισθητήρες χρησιμοποιούνται για να καταγράψουν την θέση και την ταχύτητα του ανεστραμμένου εκκρεμούς και της συρόμενης ράβδου. Ο αισθητήρας του ανεστραμμένου εκκρεμούς έχει ανάλυση 4000 counts ανά κάθε περιστροφή. Ο αισθητήρας της συρόμενης ράβδου (συνδεδεμένη στο κινητήρα) έχει ανάλυση 500 counts ανά κάθε περιστροφή η οποία ισοδυναμεί περίπου σε 12500 counts ανά μέτρο της κίνησης της συρόμενης ράβδου. (το κινούμενο κομμάτι της συρόμενης ράβδου είναι 0.21 m).

Οι κωδικοποιητές (encoders) είναι όλοι οπτικού τύπου, των οποίων η αρχή λειτουργίας απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Μια φωτεινή πηγή χαμηλής ισχύος χρησιμοποιείται για να παραχθούν δύο ημιτονοειδή σήματα 90 μοιρών εκτός φάσης στους ανιχνευτές, καθώς η κινούμενη πλάκα περιστρέφεται σε

¹⁵Encoders

σχέση με την σταθερή. Αυτά τα σήματα στη συνέχεια υψώνονται στο τετράγωνο και ενισχύονται ώστε να παράγουν σήματα τετράγωνης λογικής κατάλληλα για είσοδοι στην προγραμματιζόμενη διάταξη πύλης στον real-time Controller.



Σχήμα 2.12: Αρχή λειτουργίας του οπτικού Αισθητήρα

Κεφάλαιο 3

Μοντελοποίηση

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δοθεί η έκφραση του συστήματος στο πεδίο του χρόνου, αναλύοντας τις κινητική και δυναμική ενεργεία του συστήματος και με την χρήση της εξίσωση του Lagrange δίνονται οι μη-γραμμικές εξισώσεις του συστήματος και υστέρα μετά την γραμμικοποίηση του συστήματος γύρω από το άνω σημείο ισορροπίας δίνονται οι γραμμικές εξισώσεις του συστήματος που θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια. Επίσης το κεφάλαιο περιλαμβάνει και μια σύντομη ανάλυση του συστήματος στο πεδίο του χρόνου και συχνότητας.

3.1 Εξισώσεις της κίνησης

3.1.1 Μη Γραμμικές Καταστατικές Εξισώσεις

Η δυναμική του ανεστραμμένου εκχρεμούς της εργασίας αυτής, αμελώντας τις τριβές μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ακολούθως (βλ. Σχ 3.1). Από το σχήμα 3.1 υπολογίζεται η Κινητική ενέργεια του συστήματος, \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}m_1v_{cg_1}^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{cg_2}^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}^2 \quad (3.1)$$

Όπου το V_{cg} είναι η αδρανειακές ταχύτητες του κέντρου βάρος αντιστοίχου σώματος. Η J_i είναι η ροπή αδράνειας του αντιστοίχου σώματος. Οπού οι αδρανειακές ταχύτητες μπορούν να υπολογιστούν (βλε. Σχήμα 3.1):

$$V_{cg_1} = |\underline{\dot{x}} + \underline{\dot{\theta}} \times \underline{l_{m1}}| \quad (3.2)$$

$$V_{cg_2} = l_c\dot{\theta} \quad (3.3)$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο τα δυο μέλη της εξίσωσης (3.2) είναι εύκολο να δειχτεί ότι:

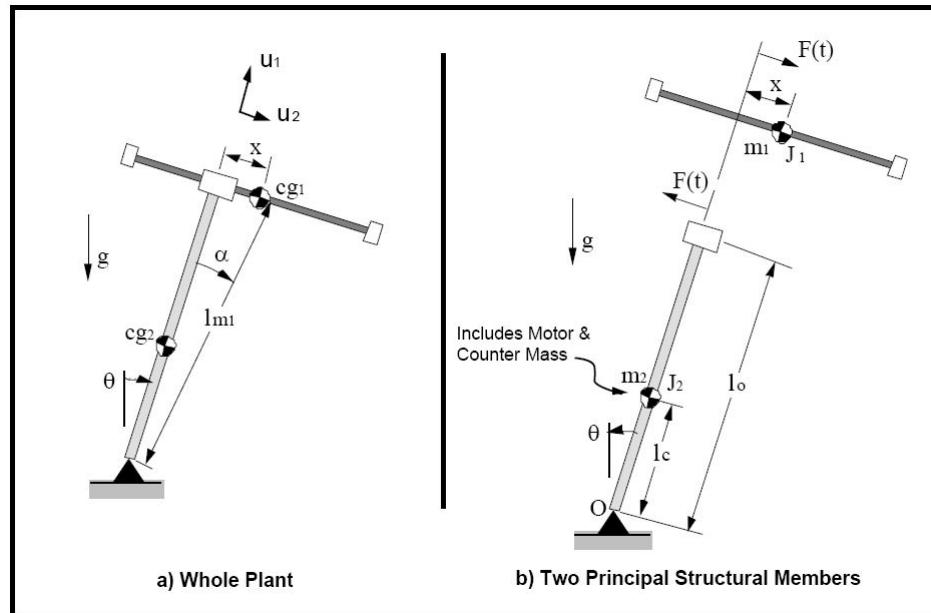
$$V_{cg_1}^2 = \dot{x}^2 + \left(l_{m1}\dot{\theta}\right)^2 + 2\left(l_{m1}\dot{x}\dot{\theta}\cos\alpha\right) \quad (3.4)$$

Όπως προκύπτει από το σχήμα 3.1 :

$$l_{m1}^2 = l_0^2 + x^2 \quad (3.5)$$

και

$$\cos\alpha = \frac{l_0}{l_{m1}} \quad (3.6)$$



Σχήμα 3.1: Περιγραφή του Μοντέλου Συστήματος

Με αντικατάσταση των εξισώσεων (3.3), (3.4), (3.5) και (3.6) Στην εξίσωση (3.1) έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{1}{2} \left(J_1 + J_2 + m_1(l_0^2 + x^2) + m_2 l_c^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + m_1 l_0 \dot{x} \dot{\theta} \\ &= \frac{1}{2} J_0(x) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + m_1 l_0 \dot{x} \dot{\theta} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Όπου:

$$J_0(x) = \left(J_1 + J_2 + m_1(l_0^2 + x^2) + m_2 l_c^2 \right) \quad (3.8)$$

Είναι η στιγμιαία αδράνεια στη θέση Ο.

Η δυναμική ενέργεια, V , λαμβάνεται με δεδομένη την θέση $\{\theta = 90^\circ, x = 0\}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= m_1 g l_m \cos(\theta + \alpha) + m_2 g l_c \cos \theta \\ &= m_1 g l_m (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) + m_2 g l_c \cos \theta \\ &= m_1 g (l_0 \cos \theta - x \sin \theta) + m_2 g l_c \cos \theta\end{aligned}\quad (3.9)$$

Στην συνεχεία για να βρούμε τις εξισώσεις της κίνησης χρησιμοποιούμε την λαγκρανζιανή συνάρτηση¹:

$$L = T - V \quad (3.10)$$

Και:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (3.11)$$

'Οπου:

- Q_i : γενικευμένη δράση στον i βαθμό ελευθερίας².
- q_i : γενικευμένη μετατόπιση στον i βαθμό ελευθερίας

Και αποδεικνύεται τελικά ότι η δυναμική εξίσωση (μοντέλο) Lagrange βγαίνει από:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (3.12)$$

¹Lagrangian

²Η γενικευμένη δράση μπορεί να βρεθεί από τον ορισμό του πραγματικού εργού, $\delta W_i = Q \cdot \delta q_i$. Σε αυτή την περίπτωση την μοναδική εξωτερική ασκούμενη δύναμη στο σύστημα είναι η δύναμη $F(t)$, Η οποία ασκείται γραμμικά στην κατευθύνση X και είναι ανεξάρτητη από την X και θ , οπότε: $\delta W_1 = F(t) \delta x, \delta W_2 = 0$

Επιλέγοντας εως $q_1 = x, q_2 = \theta$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= -m_1 g \sin \theta \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= m_1 x \dot{\theta}^2 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= m_1 \dot{x} + m_1 l_o \dot{\theta} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m_1 \ddot{x} + m_1 l_o \ddot{\theta} \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} &= -(m_1 l_o + m_2 l_c) g \sin \theta - m_1 g x \cos \theta \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= J_0(x) \dot{\theta} + m_1 l_o \dot{x} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = m_1 x l_o \ddot{x} + J_0 \ddot{\theta} + 2m_1 x \dot{x} \dot{\theta} \quad (3.13)\end{aligned}$$

Τότε οι εξισώσεις της κίνησης είναι:

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{x} + m_1 l_o \ddot{\theta} - m_1 x \dot{\theta}^2 - m_1 g \sin \theta &= F(t) \\ m_1 l_o \ddot{x} + J_0 \ddot{\theta} + 2m_1 x \dot{x} \dot{\theta} - (m_1 l_o + m_2 l_c) g \sin \theta - m_1 g x \cos \theta &= 0 \quad (3.14)\end{aligned}$$

Οι οποίες αποτελούν και τις μη-γραμμικές εξισώσεις του συστήματος ανεστραμμένο ευκρεμές και μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την μη-γραμμική ανάλυση και έλεγχο του συστήματος.

3.1.2 Γραμμικοποίηση του Συστήματος

Τα σημεία ισορροπίας του Συστήματος

Τα σημεία ισορροπίας³ ενός μη-γραμμικού συστήματος ορίζονται από τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός. Αν για ένα σημείο του χώρου καταστάσεων, όταν η αρχική κατάσταση του σύστηματος είναι ίση με x_e , η κατάσταση θα παραμείνει ίση με x_e για κάθε μελλοντικό χρόνο, τότε το σημείο x_e καλείται σημείο ισορροπίας του συστήματος. Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος καθόριζονται από τις λύσεις της εξισώσεως:

$$\dot{x} = f(x(t)) = 0 \quad (3.15)$$

Έτσι λύνοντας τις εξισώσεις (3.14) για $\dot{x} = \ddot{x} = \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ οταν $F(t) = 0$ βρίσκονται τα σημεία ισορροπίας του συστήματος:

³equilibrium point

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{X}_e = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_e \\ \ddot{\theta}_e \\ x_e \\ \dot{x}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.16)$$

Ετσι κατά την θεωρία *Lyapunov*⁴ το ασταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος, που Θα χρησιμοποιηθεί για γραμμικοποίηση, γραμμικό έλεγχο και ανάλυση του ανεστραμμένου εκχρεμούς στα επόμενα κεφάλαια είναι:

$$\mathbf{X}_e = \begin{cases} \theta_e = 0 \\ x_e = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Γραμμικοποίηση του Συστήματος

Με επιλογή τις μεταβλητές καταστάσης εως $Z_1 = \theta, Z_2 = \dot{\theta}, Z_3 = x, \text{ και } Z_4 = \ddot{\theta}$ ξαναγράφονται οι εξισώσεις (3.14) στην μορφή⁵:

$$\dot{Z} = f(Z, u) \quad (3.18)$$

Δηλαδή:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= f_1(Z, u) \\ \dot{Z}_2 &= f_2(Z, u) \\ \dot{Z}_3 &= f_3(Z, u) \\ \dot{Z}_4 &= f_4(Z, u) \end{aligned}$$

⁴Το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές κατά *Lyapunov* έαν:

$$\forall E > 0, \exists \varepsilon > 0, \left\{ \|x(0)\| < \varepsilon \right\} \Rightarrow \left\{ \forall t \geq 0, \|x(t)\| < E \right\}$$

και Ασυμπτοτικά ευσταθές έαν:

$$\exists \varepsilon > 0, \left\{ \|x(0)\| < \varepsilon \right\} \Rightarrow \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0 \right\}$$

⁵Οι μη-γραμμικές εξισώσεις μας είναι δυνατόν να γραφτεί στην μορφή affine in control $\dot{x} = f(x) + g(x)u$

Οπότε:

$$\dot{Z}_1 = Z_2$$

$$\begin{aligned}\dot{Z}_2 &= \frac{m_1 Z_3 \dot{Z}_2^2 l_o + m_1 g \sin Z_1 l_o + 2m_1 Z_3 Z_4 - (m_1 l_o + m_2 l_c) g \sin Z_1 + m_1 g Z_3 \cos Z_1}{J_{0e} - m_1 l_o^2} \\ &\quad + \frac{l_o}{J_{0e} - m_1 l_o^2} F(t)\end{aligned}$$

$$\dot{Z}_3 = Z_4$$

$$\begin{aligned}\dot{Z}_4 &= \frac{m_1 Z_3 Z_2^2 J_{0e} - m_1 l_o (m_1 g x \cos Z_1 - 2m_1 Z_3 Z_4 Z_2 + (m_1 l_o + m_2 l_c) g \sin Z_1)}{m_1 J_{0e} - m_1^2 l_o^2} \\ &\quad + \frac{m_1 g \sin Z_1 J_{0e} + J_{0e} F(t)}{m_1 J_{0e} - m_1^2 l_o^2}\end{aligned}$$

Όπου:

$$J_{0e} = J_0 \Big|_{x=x_e, \theta=\theta_e}$$

Οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις χωροκατάστασης⁶ του συστήματος γύρω από το σημείο ισορροπίας θα είναι στην μορφή:

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= AZ + Bu \\ Y &= CZ\end{aligned}\tag{3.19}$$

Όπου $Z_{4 \times 1}$ είναι το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης και ο πίνακας $A_{4 \times 4}$ και $B_{4 \times 1}$ είναι οι λακωβιανοί πίνακες⁷ και ισούνται με:

$$A = \frac{\partial f}{\partial Z} \Big|_{x=x_e} \quad B = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x=x_e} \tag{3.20}$$

Δηλαδή:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial Z_2} & \frac{\partial f_1}{\partial Z_4} & \frac{\partial f_1}{\partial Z_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial Z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial Z_2} & \frac{\partial f_2}{\partial Z_4} & \frac{\partial f_2}{\partial Z_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial Z_1} & \frac{\partial f_3}{\partial Z_2} & \frac{\partial f_3}{\partial Z_3} & \frac{\partial f_3}{\partial Z_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial Z_1} & \frac{\partial f_4}{\partial Z_2} & \frac{\partial f_4}{\partial Z_3} & \frac{\partial f_4}{\partial Z_4} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{bmatrix}$$

⁶state space

⁷Jacobian

Όποτε προκύπτει:

$$Z = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{m_2 l_c g}{J^*} & 0 & \frac{m_1 g}{J^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(J^* - m_2 l_o l_c) g}{J^*} & 0 & \frac{-m_1 l_o g}{J^*} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{J^*} \begin{bmatrix} 0 \\ -l_o \\ 0 \\ \frac{J_{o_e}}{m_1} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}$$

Όπου:

$$J^* = [J_{o_e} - m_1 l_o^2] \quad C_i = 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (3.21)$$

Τα στοιχεία του πινάκα C επιλεχτήκαν με αυτό το τρόπο και δείχνουν αμέσως ότι και οι τέσσερεις μεταβλητές κατάστασης του συστήματος μας είναι μετρήσιμες, πράγμα που σημαίνει ότι έχουμε δυο αισθητήρες⁸ στο σύστημα οι οποίοι μας δίνουν την δυνατότητα μέτρησης τιμών των μεταβλητών κατάστασης, όπως είχε αναφερθεί και στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Οι εξισώσεις χωροκατάστασης (3.19), Τώρα μπορεί να γραφτούν εως:

$$(J_{o_e} - m_1 l_o^2) \ddot{x} + m_1 l_o g x - (J_{o_e} - m_1 l_o^2 - m_2 l_o l_c) g \theta = \frac{F(t) J_{o_e}}{m_1}$$

$$(J_{o_e} - m_1 l_o^2) \ddot{\theta} - m_1 g x - m_2 l_c g \theta = -F(t) l_o \quad (3.22)$$

Και με αντικατάσταση προκύπτει:

$$m_1 \ddot{x} + m_1 l_o \ddot{\theta} - m_1 g \theta = F(t)$$

$$m_1 l_o \ddot{x} + J_{o_e} \ddot{\theta} - (m_1 l_o + m_2 l_c) g \theta - m_1 g x = 0 \quad (3.23)$$

Οι οποίες είναι οι γραμμικοποιήμενες εξισώσεις του ανεστραμμένου εκχρεμούς γύρω από το σημείο ισορροπίας.

⁸encoders

3.1.3 Συνάρτηση Μεταφοράς

Με χρησιμοποίηση του μετασχηματισμού Laplace στις εξισώσεις (3.19) υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Z} = AZ + Bu \\ Y = CZ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Laplace}} \left\{ \begin{array}{l} sZ(s) = AZ(s) + BU(s) \\ Y = CZ(s) \end{array} \right\} \quad (3.24)$$

Λύνοντας την πρώτη εξισωση προς $Z(s)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} sZ(s) - A(s) &= BU(s) \rightarrow (sI - A)Z(s) = BU(s) \\ \rightarrow Z(s) &= (sI - A)^{-1}BU(s) \\ \rightarrow Z(s) &= \phi(s)BU(s) \\ \rightarrow Y(s) &= C\phi(s)BU(s) \\ \rightarrow Y(s) &= G_{o\lambda}(s)U(s) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Όπου ο πίνακας $G_{o\lambda}(s)_{4 \times 1}$ είναι ο πίνακας της **Μήτρας Μεταφοράς** του συστήματος. Έτσι λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \theta(s) \\ \dot{\theta}(s) \\ x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \\ G_3(s) \\ G_4(s) \end{bmatrix} \cdot F(s) \quad (3.26)$$

Όπου:

$$G_1(s) = \frac{l_o}{J^*} \frac{-s^2 + \frac{g}{l_o}}{s^4 + \left(\frac{(m_1 l_o - m_2 l_c)g}{J^*}\right)s^2 - \frac{m_1 g^2}{J^*}}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{J^*} \frac{-s^3 + gs}{s^4 + \left(\frac{(m_1 l_o - m_2 l_c)g}{J^*}\right)s^2 - \frac{m_1 g^2}{J^*}}$$

$$G_3(s) = \frac{J_{oe}}{m_1 J^*} \frac{s^2 - \frac{(m_1 l_o + m_2 l_c)g}{J_{oe}}}{s^4 + \left(\frac{(m_1 l_o - m_2 l_c)g}{J^*}\right)s^2 - \frac{m_1 g^2}{J^*}}$$

$$G_4(s) = \frac{J_{oe}}{m_1 J^*} \frac{s^3 + \frac{(m_1^2 l_o^3 + m_1 l_o^2 l_c m_2 - m_2 l_c J_{oe} - m_1 l_o J_{oe})g}{J_{oe} J^*} s}{s^4 + \left(\frac{(m_1 l_o - m_2 l_c)g}{J^*}\right)s^2 - \frac{m_1 g^2}{J^*}}$$

Όπως φαίνεται το σύστημα μας είναι ένα σύστημα πολυμεταβλητό με μήτρα μεταφοράς $G_{o\lambda}$ η οποία παρουσιάστηκε αναλυτικά παραπάνω.

Από την έκφραση της μήτρας μεταφοράς προκύπτει:

$$\frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{l_o}{J^*} \frac{-s^2 + \frac{g}{l_o}}{s^4 + \left(\frac{(m_1 l_o - m_2 l_c) g}{J^*}\right) s^2 - \frac{m_1 g^2}{J^*}} \quad (3.27)$$

Και..

$$\frac{x(s)}{F(s)} = \frac{J_{oe}}{m_1 J^*} \frac{s^2 - \frac{(m_1 l_o + m_2 l_c) g}{J_{oe}}}{s^4 + \left(\frac{(m_1 l_o - m_2 l_c) g}{J^*}\right) s^2 - \frac{m_1 g^2}{J^*}} \quad (3.28)$$

Όπου η εξίσωση (3.27) είναι η συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ θέσης ανεστραμμένου εκκρεμούς σε σχέση με την ασκούμενη δύναμη στην συρομένη ράβδο από τον ψάντα κίνησης. Επίσης η εξίσωση (3.28) είναι η συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ θέσης της συρόμενης ράβδου σε σχέση με την δύναμη ασκούμενη πάνω της από τον ψάντα κίνησης.

Από τις εξισώσεις (3.27) και (3.28) και με απλή αντικατάσταση μπορεί να εκφραστεί η συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ της θέσης του ανεστραμμένου εκκρεμούς σε σχεση με την θέση της συρόμενης ράβδου:

$$\frac{\theta(s)}{x(s)} = \frac{m_1 l_o}{J_{oe}} \frac{-s^2 + \frac{g}{l_o}}{s^2 - \frac{(m_1 l_o + m_2 l_c) g}{J_{oe}}} \quad (3.29)$$

3.2 Αναγνώριση / Ταυτοποιήση Συστήματος (System Identification)

Όπως είναι κατανοητό για να μπορέσουμε να σχεδιάσουμε και να εφαρμόσουμε κάθε διαφορετικό ελεγκτή, ο όποιος έχει σκοπό να φέρνει το σύστημα του ανεστραμμένου εκκρεμούς σε ευστάθεια, είναι απαραίτητο να αναγνωρίσουμε⁹ τις τιμές των διαφόρων παραμέτρων και σχετικούς δυναμικούς χαρακτήρες του συστήματος. Στη προηγούμενη τομή του κεφαλαίου, δόθηκαν μια οι μη-γραμμικές δυναμικές εξισώσεις του συστήματος, έπειτα μετά την γραμμικοποίηση γύρω από το άνω σημείο ισορροπίας δόθηκαν οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις του συστήματος σε μορφή χωροκατάστασης¹⁰ και συναρτήσεις μεταφοράς. Το γραμμικοποιημένο μοντέλο του συστήματος μπορεί να μετατρέπει σε διάφορα και ικανοποιητικά μοντέλα για επιδίωξη σχεδίασης και εφαρμογή του γραμμικού ελεγκτή. Η διαδικασία της αναγνώρισης των παραμέτρων¹¹ ασφαλίζει αριθμητικές τιμές για τις συμβολικές τιμές των εξισώσεων στη προηγούμενη τομή του κεφαλαίου. Εποιητικά, οι αριθμητικές τιμές των διαφόρων παραμέτρων παρουσιάζεται στο παρακάτω πινάκα.

⁹identify

¹⁰state-space

¹¹system identification

Παράμετρος	Τιμή	Περιγραφή
l_o	0.330 (m)	Το μήκος του εκχρεμούς από το άξονα έως τη συρομένη ράβδο
m_1	θOK^* (kg)	Μάζα της ολόκληρης συρόμενης ράβδου περιεχομένα ολα τα στοιχεία
m_{1o}	0.103 (kg)	Μάζα της συρόμενης ράβδου με ολα τα στοιχεία εκτός από τα διπλά χάλκινα βάρη
m_{w1}	0.110 (kg)	Συνδιασμός διπλών και χάλκινων Μάζων (=0 Αν δεν χρησιμοποιείται)
m_2	ΘOK (kg)	Μάζα του όλου Συναρμολογημένου συστήματος μείον m_1
m_{w2}	1.000 (kg) $(\div 2 \text{ Αν χρισμοποιείται μονάχα ένα βάρος})$	Μάζα του Βάρος ισορροπίας
m_{2o}	0.785 (kg)	Μάζα του όλου Συναρμολογημένου συστήματος μείον m_1 και m_{w2}
l_{co}	0.071 (m)	Θέση του κέντρου βάρους του ολόκληρου εκχρεμούς ΧΩΡΙΣ την συρόμενη ράβδου και βάρη ισορροπίας
J_o^*	0.0246 ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	$[J_{oe} - m_1 l_o^2]$ 'Οταν $m_{w2} = 0$
* Θα Οριστεί Κάτω		

Από τους ορισμούς στο Πίνακα έχουμε:

$$m_1 = m_{1o} + mw1 \quad (3.30)$$

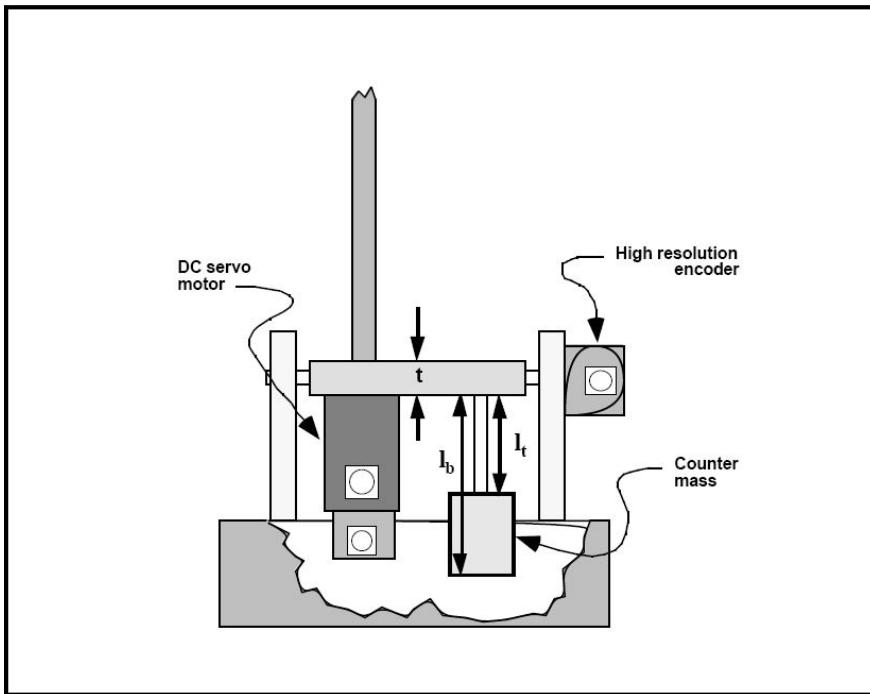
$$m_2 = m_{2o} + mw2 \quad (3.31)$$

Ο παράμετρος

$$l_{w2} \stackrel{\Delta}{=} \text{Απόσταση από το άξονα έως το κέντρο βάρος της μάζας} (m_{w2})$$

Είναι δυνατόν να αλλάζεται από τον χρήστη και είναι αμέσως μετρήσιμο, Οπώς φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα (3.2):

$$l_{w2} = -\frac{(t + l_t + l_b)}{2} \quad (3.32)$$



Σχήμα 3.2: Μέτρηση της l_{w2}

Και οι τρείς παράμετροι J^* , J_{O_e} και l_c υπολογίζονται από:

$$l_c = \frac{m_{w2}l_{w2} + m_{2o}l_{co}}{m_2} \quad (3.33)$$

$$J_{O_e} = J_o^* + m_1l_o^2 + m_{w2}(l_{w2})^2 \quad (3.34)$$

$$J^* = [J_{O_e} - m_1l_o^2] \quad (3.35)$$

Διαμόρφωση της εγκατάστασης του Συστήματος

Στα πειράματα που θα ακολουθήσουν σε αυτήν την μεταπυχαική εργασία χρησιμοποιήθηκε μοναχά μια είδος εγκατάστασης, Στην οποία έχουν τοποθετηθεί τα δίπλα χάλκινα Βάρυ στις άκρες της συρόμενης ράβδου και επίσης έχουν τοποθετηθεί και τα δυο Βάρυ ισορροπίας στο κάτω μέρος του αναστραμμένου εκκρεμούς σε απόσταση 7cm , Δηλαδή: $l_t = 7.0\text{cm}$.

Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε τους διαφόρους παραμέτρους που έχουν αναφερθεί σε αυτό το κεφάλαιο με αριθμητικές τιμές. Με την βοήθεια του κώδικα του παραρτήματος A (plant.m) υπολογίζονται τις διαφορές αριθμητικές τιμές.

Όποτε η συνάρτηση μεταφοράς (3.27) με αριθμητικές τιμές γίνεται:

$$\frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{-879s^2 + 2.612 \times 10^4}{s^4 + 33.15s^2 - 563.6}$$

Η οποία έχει δυο μηδενιστές στα σημεία ± 5.4512 και Τέσσερεις πόλους στα σημεία $\pm 0.0000 + 6.7475i$ και ± 3.5183 .

Επίσης οι πινάκες A,B και C των εξισώσεων χωροκατάστασης υπολογίζονται:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -16.7709 & 0 & 3.2196 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 323.6897 & 0 & -22.4170 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = 10^4 \pm \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1039 \\ 0 \\ 1.6825 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Κέρδη των αισθητήρων

Για για μπορέσουμε να έχουμε μια πλήρης εκτίμηση στη συνάρτηση μεταφοράς και στις εξισώσεις των χωροκατάστασης με σκοπό να εφαρμόσουμε διαφόρους ελεγκτές που σχεδιάζουμε χρειαζόμαστε και τέσσερα κέρδη που συνδέονται με ενισχυτή / ενεργοποιητή και των δυο αισθητήρων και το firmware του controller.

Τα διάφορα κέρδη των αισθητήρων και ενισχυτή και controller παρουσιάζονται στο παρακάτω πινάκα:

Κέρδος	Τιμή	Περιγραφή
k_f	0.0013(N/DAC increment)	Κέρδος με συνδιασμό DAC-ενισχυτή -κινητήρα(βλεπε: 2.3.3)
k_x	49106 (increment/m)	Κέρδος του αισθητήρα 2 (της συρόμενης ράβδου)
k_a	2327.4 (increment/m)	Κέρδος του αναστραμμένου εκκρεμούς (αισθητήρας 1)
k_S	32 (controller ή DAC incr/encoder)	Κέρδος του firmware του controller

Έτσι η πραγματική τιμή του καθέ παράμετρο υπολογίζεται από παρακάτω σχέσεις:

$$\theta_{rad} = \frac{\theta_c}{(k_s k_a)} \quad (3.36)$$

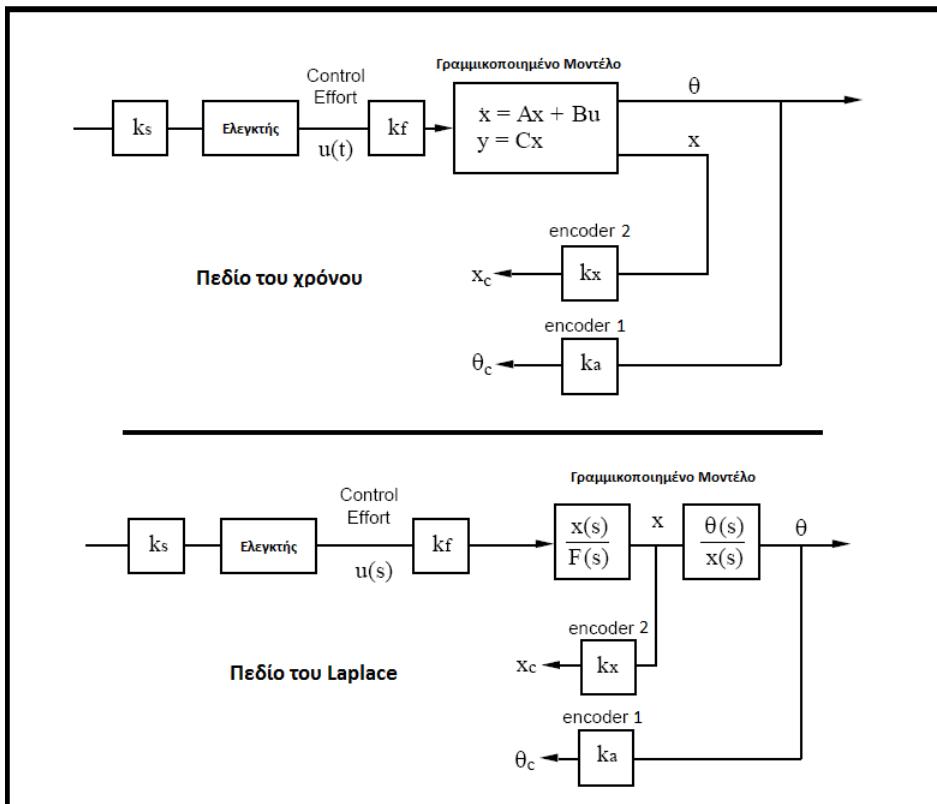
$$X = \frac{X_c}{(k_s k_x)} \quad (3.37)$$

$$F = \frac{F_c}{k_f} \quad (3.38)$$

Οπότε η γωνιακή τιμή σε μοίρες υπολογίζεται από την σχέση:

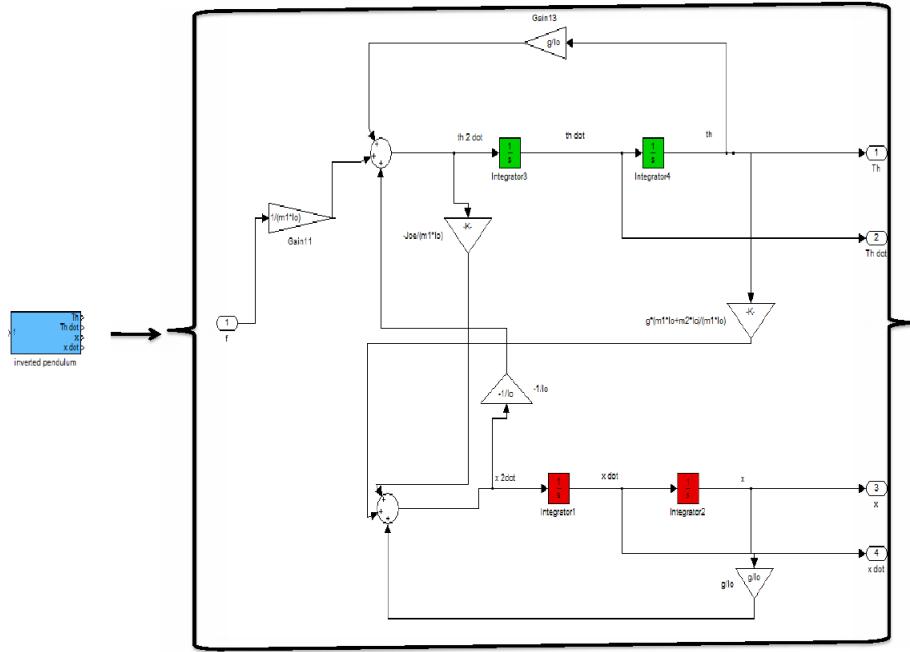
$$\theta_{deg} = \theta_{rad} \times 57.2958 \quad (3.39)$$

Όποτε για προσομοίωση του συστήματος στο Matlab μπορεί να χρησιμοποιηθεί το παρακάτω διάγραμμα:



Σχήμα 3.3: Διάγραμμα της προσομίωση με τα Κέρδη

Με δεδομένες οι τιμές των διάφορων παραμέτρων σχηματίστηκε το γραμμικοποιημένο μοντέλο σε διαφορική μορφή στο simulink για διάφορες προσομοίωση στο περιβάλλον simulink:



Σχήμα 3.4: Προσομοίωση του συστήματος στο περιβάλλον simulink

3.3 Ανάλυση του γραμμικοποιημένου συστήματος

Το σύστημα του ανεστραμμένου εκκρεμούς παρουσιάζει κάποια χαρακτηριστικά, τα οποία έχουν ενδιαφέρον όσο άφορα στην ανάλυση και έλεγχο του συστήματος. Πρώτα από όλα λόγω του ότι το συγκεκριμένο σύστημα αναστραμμένου εκκρεμούς διαθέτει μοναχά έναν κινητήρα¹² ο οποίος ενεργοποιεί την δύναμη F στην συρομένη ράβδο, δηλαδή ενώ έχουμε δυο βαθμούς ελευθερίας στο σύστημα έχουμε μοναχά έναν ενεργοποιητή. Τέτοια συστήματα λέγονται under-actuated. Επίσης, από την εξίσωση (3.27) είναι φανερό ότι η συνάρτηση μεταφοράς του γραμματικοποιημένου συστήματος ανεστραμμένου εκκρεμούς έχει ένα μηδενιστή και τουλάχιστον έναν πόλο στο δεξί ημί-επίπεδου του φανταστικού άξονα, Έτσι είναι φανερό ότι το ανοιχτό σύστημα είναι μη-ελάχιστη φάση¹³ και Ασταθές¹⁴. Όπως θα εξηγηθεί αργότερα

¹²Actuator

¹³nonminimum phase

¹⁴unstable

αυτά τα χαρακτηρίστηκα έχουν ιδιαίτερη σημασία και εμπλοκή στην απόδοση και ευστάθεια του κάθε κλειστού σύστημα (ελεγκτή) που σχεδιάσουμε.

3.3.1 Κατανομή και Επίδραση των Μηδενιστών

Από την εξίσωση (3.27) φαίνεται ξεκάθαρα ότι οι μηδενιστές βρίσκονται στο:

$$Z = \pm \sqrt{\frac{g}{l_o}} \quad (3.40)$$

Έτσι οι μηδενιστές μας θα είναι σε μια σταθερή θέση (± 5.44) αφού η τιμή του μήκους l_o δεν είναι δυνατόν να μεταβληθεί. Οπότε το σύστημα μας θα είναι πάντα ένα σύστημα μη-ελάχιστη φάση. Γενικά έτσι όπως θα εξηγηθεί αργότερα όσο χαμηλότερη είναι η "συχνότητα" (μέγεθος) του μη-ελάχιστη φάση μηδενιστή, τόσο χαμηλότερη είναι η μέγιστη εφικτή κλειστού βρόχου εύρος ζώνης, και ως εκ τούτου τις επιδόσεις.

3.3.2 Κατανομή και Επίδραση των Πόλων

Βλέποντας την εξίσωση (3.27)

$$\frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{l_o}{J^*} \frac{-s^2 + \frac{g}{l_o}}{s^4 + \left(\frac{(m_1 l_o - m_2 l_c) g}{J^*}\right) s^2 - \frac{m_1 g^2}{J^*}}$$

Υποθέτοντας:

$$a \triangleq \frac{(m_1 l_o - m_2 l_c)}{J^*} \quad (3.41)$$

$$b \triangleq \frac{m_1}{J^*} \quad (3.42)$$

$$k \triangleq \frac{l_o}{J^*} \quad (3.43)$$

Όπου διαπιστώνεται ότι $b > 0$ και $k > 0$, Έτσι η εξίσωση (3.27) μπορεί να γραφτεί :

$$\frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{-k(s^2 - \frac{g}{l_o})}{s^4 + ags^2 - bg^2} \quad (3.44)$$

Η αλλιώς:

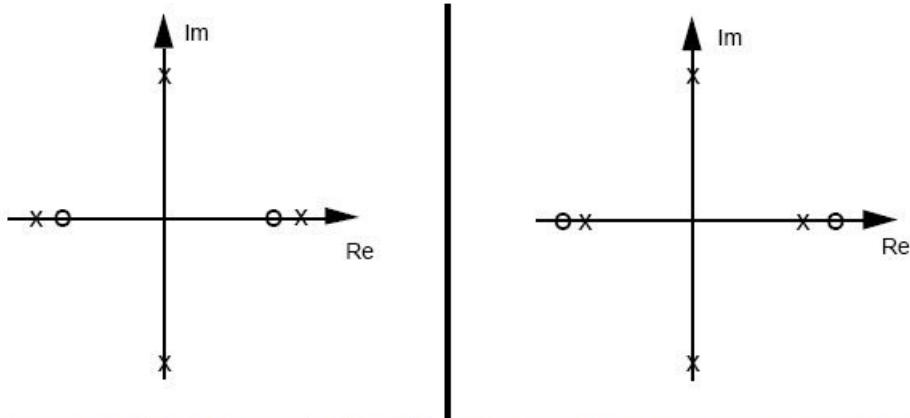
$$\frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{-k(s^2 - \frac{g}{l_o})}{(s^2 - p_1 g)(s^2 - p_2 g)} \quad (3.45)$$

Όπου:

$$p_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \quad (> 0) \quad (3.46)$$

Και:

$$p_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \quad (< 0) \quad (3.47)$$



Σχήμα 3.5: Πιθανές Πόλο-Μηδενιστή Κατανομή

Από τις εξισώσεις (3.45 - 3.47) φαίνεται ότι υπάρχουν δυο πραγματικοί πόλοι στο $\pm\sqrt{p_1g}$ και δυο φανταστικοί πόλοι στα $\pm I\sqrt{|p_2|g}$. Οι δυο πιθανές περιπτώσεις των τοποθέτησης πόλων-μηδενιστών φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

Συμφώνα με τις εξισώσεις (3.45 - 3.47) η περίπτωση του σχήματος (3.4-a) σημαίνει ότι :

$$\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} > \frac{1}{l_o} \quad (3.48)$$

Είναι σχετικά απλό να δείξουμε ότι αυτό ισχύει αν και μόνο αν:

$$J^* < m_2 l_c l_o \quad (3.49)$$

Ομοίως, η περίπτωση του σχήματος (3.3-b) σημαίνει ότι:

$$J^* > m_2 l_c l_o \quad (3.50)$$

Η εξισωση (3.49) ισοδυναμεί με την περίπτωση ότι $J_1 + J_2 + m_2(l_c)^2 < m_2 l_c l_o$. Αυτό με τη σειρά του προϋποθέτει ότι J_1 και J_2 να είναι μικρά κατά l_c να είναι μικρό σε σχέση με το l_o . Συμφώνα με το υποκεφάλαιο 3.2 μπορούμε να αποδείξουμε ότι για διαφορές δυνατές τιμές των παραμέτρων, Αυτή η περίπτωση Δεν είναι δυνατόν Ποτέ να πραγματοποιηθεί στο πειραματικό μας σύστημα.

'Ετσι 'Όλες οι πιθανές περιπτώσεις στο πειραματικό μας σύστημα θα είναι όπως φαίνεται στο σχήμα (3.5-β). Επίσης από τις εξισώσεις (3.45 - 3.47) και σύμφωνα με προηγούμενο υποκεφάλαιο, φαίνεται ότι το μέγεθος ¹⁵ (συχνότητα) των φανταστικών πόλων πάντα είναι μεγαλύτερο από των πραγματικών πόλων.

¹⁵magnitude

Κεφάλαιο 4

Πεδίο Συχνότητας

Σε αυτό το κεφάλαιο της μεταπτυχιακής εργασίας σκοπός ήταν η δημιουργία δύο εργαστηριακών ασκήσεων για το μάθημα "Εισαγωγή στον Αυτόματο έλεγχο" της σχολής "Μηχανολόγων Μηχανικών της ΕΜΠ".

Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου γίνεται διαμόρφωση του συστήματος έτσι ώστε να έρθει σε μορφή κατάλληλη για τις εργαστηριακές ασκήσεις. Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου γίνεται η πειραματική διαδικασία του αντίστροφου Bode με σκοπό την αναγνώριση του συστήματος και στο τρίτο μέρος του κεφαλαίου γίνεται πείραμα τόπου των ριζών και μετέπειτα διαμόρφωση εργαστηριακής άσκησης πάνω στο τόπο των ριζών του συστήματος.

4.1 Διαμόρφωση του συστήματος

Το μάθημα "Εισαγωγή στον Αυτόματο έλεγχο" περιέχει ανάλυση των ενεργούμενων¹ και μιας εισόδου-μιας εξόδου² συστημάτων, ενώ το σύστημα του ανεστραμμένου εκκρεμούς της μελέτης αυτής είναι ένα σύστημα υποεπενεργούμενο³ και μιας εισόδου-πολλών εξόδων⁴. Σε αυτό το υποκεφάλαιο το σύστημα μετατρέπεται σε ένα σύστημα κατάλληλο για εφαρμογή των δύο εργαστηριακών ασκήσεων.

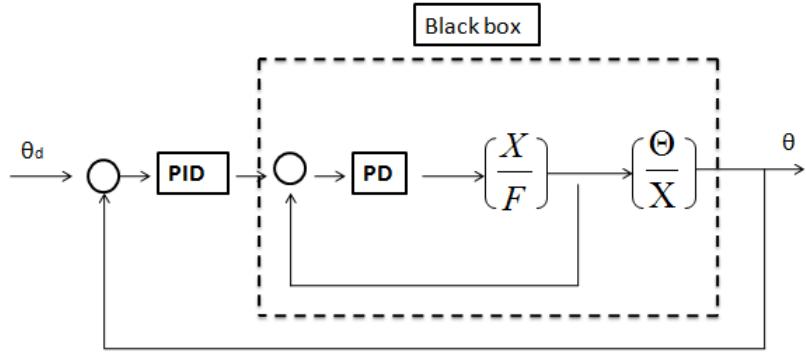
¹actuated

²siso

³underactuated

⁴simo

Από την μήτρα μεταφοράς της εξίσωσης (3.26) είναι προφανές ότι το σύστημα μας είναι τύπου simo. Το σύστημα χωρίστηκε και ήρθε στην μορφή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 4.1: Μετατρεπόμενο Σύστημα

Ουσιαστικά το σύστημα χωρίζεται σε δύο συναρτήσεις μεταφοράς $\frac{X}{F}$ και $\frac{\theta}{X}$. Φτιάχνεται ένας εσωτερικός βρόχος πάνω στην συνάρτηση μεταφοράς $\frac{X}{F}$ και με έναν ελεγκτή PD η συνάρτηση μεταφοράς $\frac{X}{F}$ σταθεροποιείται και ελέγχεται. Η έξοδος από την συνάρτηση μεταφοράς $\frac{X}{F}$ εισάγεται στην συνάρτηση μεταφοράς $\frac{\theta}{X}$ και όλο αυτό το σύστημα όπως φαίνεται και στο σχήμα παρουσιάζεται σαν ένα black box.

Έτσι έχοντας μετατρέψει το σύστημα σε σύστημα μιας εισόδου-μιας εξόδου, εισάγοντας την επιθυμητή γωνία⁵ (θέση) και με αντικατάσταση ελεγκτών PID στο εξωτερικό βρόχο ($\frac{\theta}{\theta_d}$) είναι εφικτός ο έλεγχος του μετατρεπόμενου συστήματος του ανεστραμμένου εκκρεμούς.

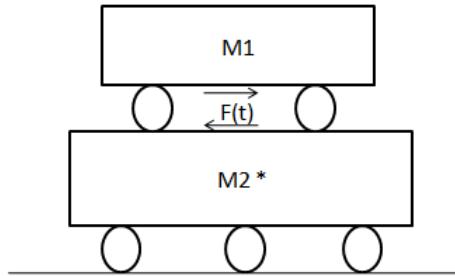
4.1.1 Απλοποιήση της συναρτησής μεταφοράς $\frac{X}{F}$

Παρατηρώντας την εξίσωση (3.28) της συνάρτησης μεταφοράς $\frac{x}{F}$ βλέπουμε ότι η χαρακτηριστική εξίσωση της συνάρτησης αυτής είναι ίδια με τη χαρακτηριστική εξίσωση της συνάρτηση μεταφοράς $\frac{\theta}{f}$ της εξίσωσης (3.27).

Παρατηρώντας το απλοποιημένο δυναμικό μοντέλο της συρόμενης ράβδου πάνω στο ανεστραμμένο εκκρεμές πάνω στο σημείο ισορροπίας όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα μπορούμε να εκτιμήσουμε ότι αυτό μοιάζει με μια δύναμη (F) που κινεί μια μάζα ($M_1 + M_2^*$). Έτσι μπορούμε να εκτιμήσουμε ένα απλοποιημένο δυναμικό μοντέλο για συνάρτηση μεταφοράς $\frac{X}{F}$ πάνω στο σημείο ισορροπίας. Από την απολοποιημένη εξίσωση:

$$F(t) = m^* \ddot{x} \quad (4.1)$$

⁵ θ_d



Σχήμα 4.2: απλοποιημένο δυναμικό μοντέλο της συρόμενης ράβδου πάνω στο σημείο ισορροπίας

όπου :

$$m^* = \frac{m_1 m_2^*}{m_1 + m_2^*} \quad (4.2)$$

Με αντικατάσταση των τιμών των βαρών και κερδών από τα encoders, θα έχουμε την συνάρτηση μεταφοράς:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{k_{hw}}{m^* s^2} \quad (4.3)$$

Μετά την αντικατάσταση:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{2042.8}{0.13 s^2} \quad (4.4)$$

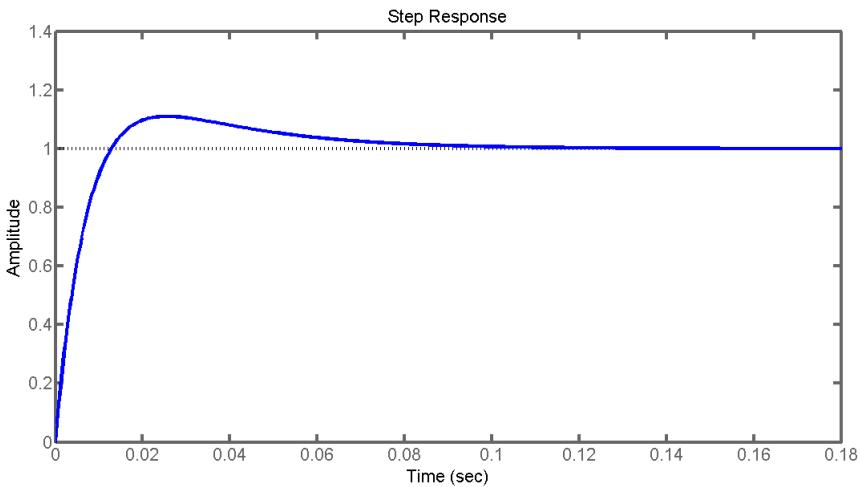
Όπου με ένα PD ελεγκτή :

$$PD = 0.011s + 0.35 \quad (4.5)$$

Το σύστημα $\frac{X}{F}$ έχει κρίσιμη απόκριση. Πράγματι η απόκριση του πραγματικού συστήματος με αυτό το ελεγκτή pd είναι ακριβώς ίδια με αυτό που βγαίνει από simulink,(δηλαδή κρατώντας σταθερό το εκκρεμές πανω στο σημείο ισορροπίας και απλώς κάνοντας έλεγχο στη ράβδο). Αυτό δείχνει ότι η προσέγγιση μας είναι σωστή.

Έτσι οι πόλοι του κλειστού συστήματος της συνάρτησης μεταφοράς $\frac{X}{F}$ με εφαρμογή του PD ελεγκτή θα είναι στα σημεία:

$$\begin{aligned} &-130.8076 \\ &-42.0455 \end{aligned}$$



Σχήμα 4.3: απόκριση της $\frac{X}{F}$ με ελεγκτή PD από Simulink

Παρατηρώντας την συνάρτηση μεταφοράς (3.29) και με αντικατάσταση τιμών παραμέτρων έχουμε:

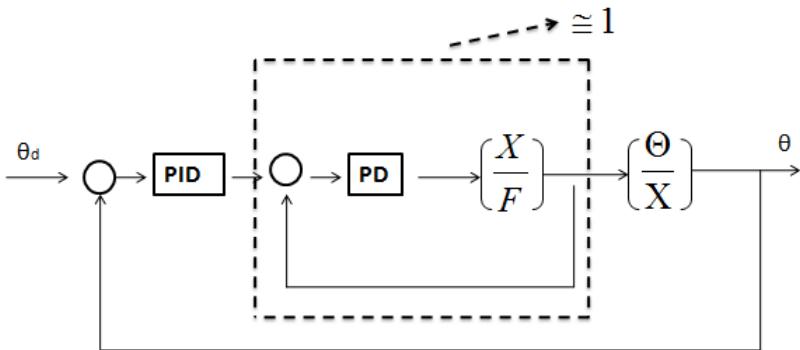
$$\frac{\theta}{X} = \frac{-0.05595s^2 + 1.663}{s^2 - 2.916} \quad (4.6)$$

Έτσι παρατηρούμε ότι οι πόλοι του συστήματος είναι στα ± 1.7075 και οι μηδενιστές του συστήματος είναι στα σημεία ± 5.4519 . Έτσι βλέπουμε ότι οι πόλοι του κλειστού συστήματος $\frac{X}{F}$ με ελεγκτή PD, είναι πολύ πιο μακριά σε σχέση με τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς $\frac{\theta}{X}$ και μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σύστημα κλειστού βρόχου $\frac{X}{F}$ είναι πολύ πιο γρήγορο σε σχέση με τη συνάρτηση $\frac{\theta}{X}$. Τότε συμπεραίνουμε ότι έχουμε το σύστημα μιας εισόδου-μιας εξόδου του αναστραμμένου εκκρεμούς στην μορφή:

4.2 Μελέτη διαγράμματος BODE

Όπως παρουσιάστηκε στη προηγούμενη παράγραφο, η συνάρτηση μεταφοράς ανεστραμμένου εκκρεμούς σε μορφή μιας εισόδου-μιας εξόδου απλοποιήθηκε σε τελική συνάρτηση μεταφοράς $\frac{\theta}{X}$. Στο υποκεφάλαιο αυτό γίνεται μια πειραματική διαδικασία αναγνώρισης της συνάρτησης μεταφοράς αυτής μέσω του πειραματικού αντίστροφου διαγράμματος bode. Έτσι θα διαμορφωθεί μέσω της πειραματικής διαδικασίας το διάγραμμα bode του κλειστού συστήματος του σχήματος (4.4) και στην συνέχεια θα αναλυθεί και θα εξαχθεί η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου.

Για να πραγματοποιηθεί η διαδικασία του αντίστροφου bode χρησιμοποιείται το αρχείο “**bode.mdl**” του παραρτήματος B.



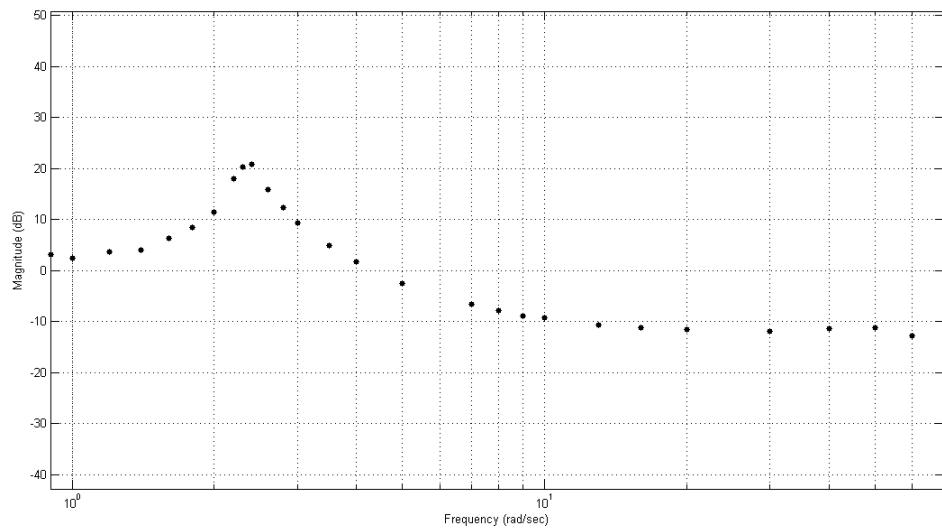
Σχήμα 4.4: Απλοποιημένη συνάρτηση εισόδου εξόδου

4.2.1 Διαδικασία του πειράματος

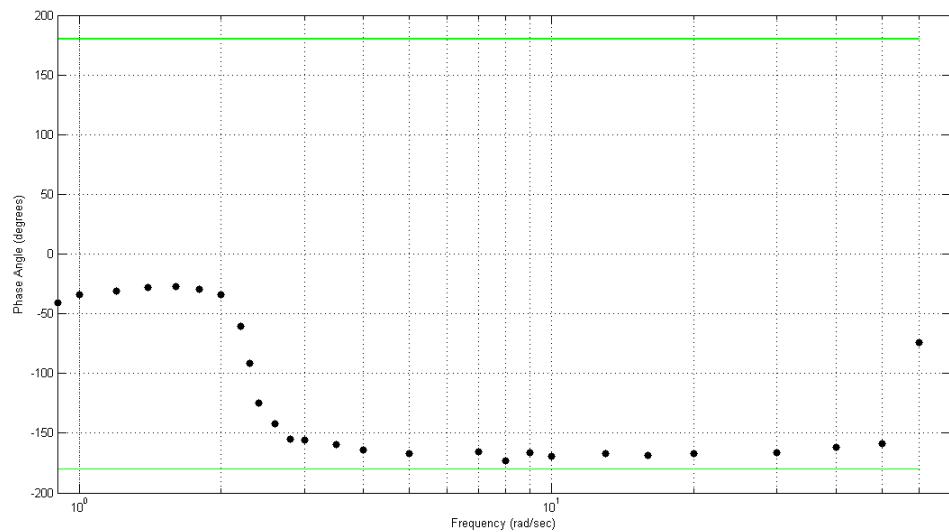
Όπως φαίνεται και στο “bode.mdl” παράγεται ένα ημιτονοειδής σήμα και εισάγεται στο σύστημα. Κάθε φορά ο χρήστης εισάγει μια διαφορετική συχνότητα, από τη χαμηλότερη συχνότητα $0.9 \frac{rad}{sec}$ έως την συχνότητα $60 \frac{rad}{sec}$. Για το πλάτος του σήματος δίνεται η τιμή 3000 η οποία οπώς αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο αντιστοιχεί σε $2.3deg$. Για το κέρδος του P ελεγκτή επιλέχτηκε $K_p = 3.8$. Το πείραμα έγινε σε 27 μετρήσεις και οι μετρήσεις όπως φαίνεται και από το “bode.mdl” συλλέχθηκαν στο workspace και στην συνέχεια επεξεργαστήκαν με την χρήση του κώδικα του παραρτήματος C “findbode.m”. Τα αποτελέσματα που παράγονται από τον κώδικα “findbode.m” αποτελούν τα διαγράμματα πλάτος και φάσης του εξεταζομένου μοντέλου. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα παρακάτω σχήματα:

4.2.2 Ανάλυση του Διαγράμματος Bode

Στο πειραματικό διάγραμμα bode που πρόεκυψε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο παρατηρούμε ότι το διάγραμμα πλάτους ξεκάνει από την τιμή +3, άρα φαίνεται ότι έχουμε ένα σταθερό κέρδος στην συνάρτηση μεταφοράς μας. Υπολογίζοντας από την $20 \log x = 3$ συμπεραίνουμε ότι έχουμε ένα σταθερό κέρδος με τιμή **1.4** στην συνάρτηση μεταφοράς μας. Επίσης στην συχνότητα 2.4 υπάρχουν συμμετρικοί πόλοι με $\zeta = 0.1$. Στη συχνότητα 4 έχουμε ένα μηδενιστή και υστέρα στην συχνότητα 5 έχουμε άλλο ένα μηδενιστή. Αλλά παρατηρώντας το διάγραμμα φάσης βλέπουμε ότι στην συχνότητα 4 και 5 η συχνότητα δεν ανεβαίνει (όπως ξέρουμε από την θεωρία για μηδενιστή), αυτό συμβαίνει γιατί στην συνάρτηση μεταφοράς μας έχουμε έναν μηδενιστή μη-ελαχίστης φάσης, ο οποίος όπως ξέρουμε από την θεωρία ανεβάζει το διάγραμμα πλάτος ανά $+20 \frac{db}{dec}$ ενώ στο διάγραμμα φάση κατεβάζει την φάση -90 μοίρες. Έτσι συμπεραίνουμε ότι στην συχνότητα 4 έχουμε έναν μηδενιστή και στην

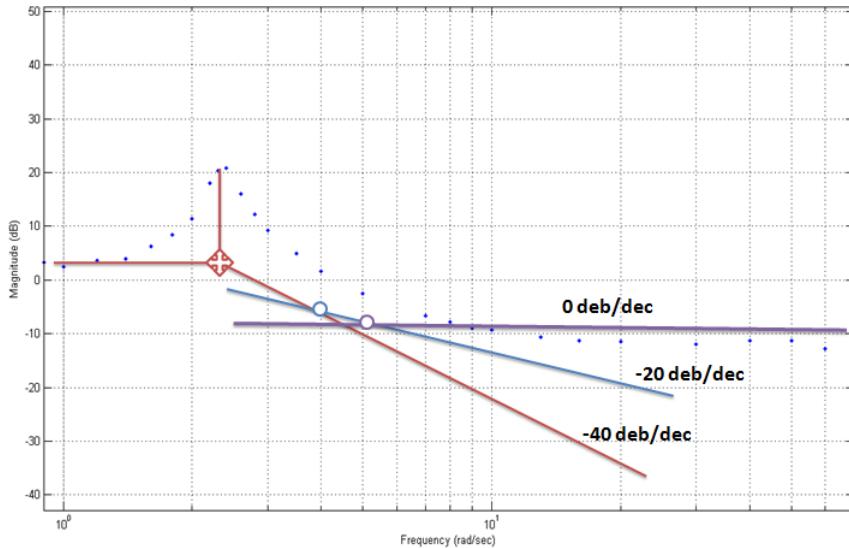


$\Sigma\chi_μα 4.5:$ Διάγραμμα Πλάτους



$\Sigma\chi_μα 4.6:$ Διάγραμμα Φάσης

συχνότητα 5 έχουμε έναν μηδενιστή μη-ελάχιστης φάσης, έτσι ο ένας ισορροπεί τον άλλον όσο αφορά στο διάγραμμα φάσης του συστήματος.



Σχήμα 4.7: Ανάλυση διαγράμματος Πλάτους

Τελικά η τελική συνάρτηση μεταφοράς κλειστού συστήματος με βάση το διάγραμμα bode είναι:

$$\frac{\theta}{\theta_d} = \frac{1.4(1 - 0.25s)(1 + 0.2s)}{1 + 0.085s + 0.1764s^2} \quad (4.7)$$

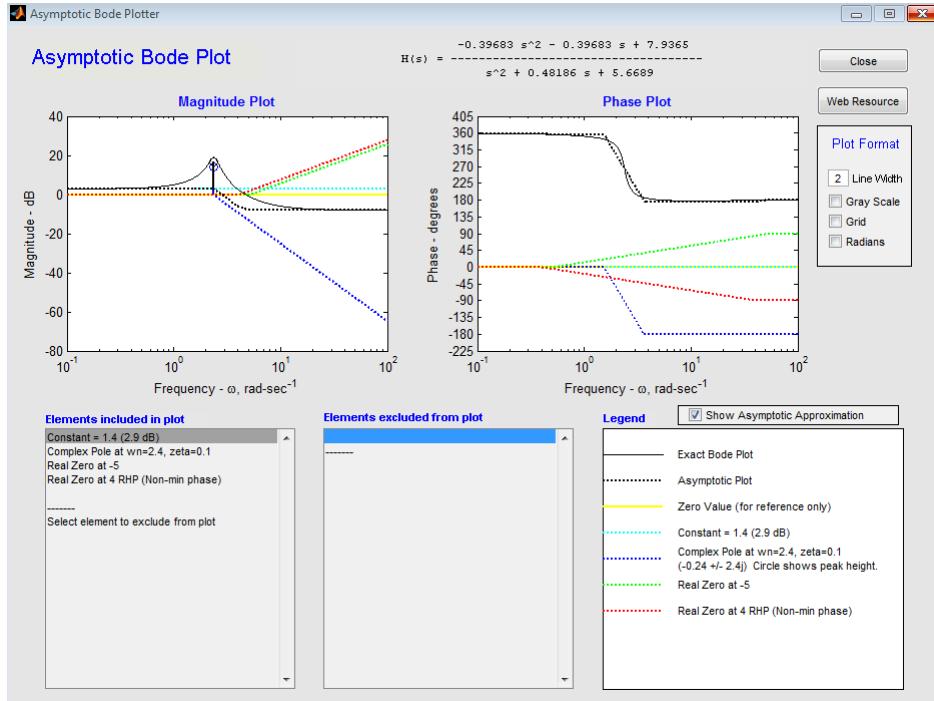
Χρησιμοποιώντας το “**BodePlotGui**”⁶ μπορούμε να παρατηρούμε το διάγραμμα bode της συνάρτησης κλειστού βρόχου επί όρο. Επίσης μπορούμε να δούμε ασύμπτωτες για κάθε όρο, τη συναρμολόγηση των διαφόρων όρων και το σχηματισμό του τελικού διαγράμματος bode.

Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου $\frac{\theta}{\theta_d} = H_{cl}(s)$, από την θεωρία έχουμε ότι:

$$H_{cl}(s) = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p} \quad (4.8)$$

Όπου G_p είναι η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου του “blackBox” και G_c είναι το κέρδος ελεγκτής, δηλαδή $G_c = 3.8$ τότε μπορούμε να εξάγουμε την συνάρτηση

⁶λόγω του μεγάλου όγκου του κώδικα του GUI, δεν υπάρχει στην διπλωματική εργασία. Όμως υπάρχει στο CD της διπλωματικής εργασίας που περιλαμβάνει διάφορους κώδικες και simulink(.mdl)



Σχήμα 4.8: BodePlotGui

μεταφοράς ανοιχτού του “blackBox”:

$$G_p = \frac{H_{cl}}{(3.8 - (3.8 * H_{cl}))} \quad (4.9)$$

Τότε έχουμε:

$$G_{blackbox} = G_p = \frac{-0.01235s^4 - 0.0183s^3 + 0.171s^2 + 0.049s + 1.4}{0.1652s^4 + 0.1835s^3 + 0.7183s^2 + 0.4598s - 1.52} \quad (4.10)$$

4.3 Μελέτη Τόπου των Ριζών

Στο πείραμα που λαμβάνεται σε αυτό το υποκεφάλαιο, χρησιμοποιείται η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου $\frac{\theta_d}{\theta}$ η οποία υπολογίστηκε από το πείραμα αντίστροφου bode στο προηγούμενο υποκεφάλαιο. Η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου του "blackbox" ήταν:

$$G_{blackbox} = G_p = \frac{-0.01235s^4 - 0.0183s^3 + 0.171s^2 + 0.049s + 1.4}{0.1652s^4 + 0.1835s^3 + 0.7183s^2 + 0.4598s - 1.52}$$

Ο τόπος των ριζών της συνάρτησης αυτής με την χρήση του λογισμικού **MATLAB** υπολογίστηκε και παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα (4.9).

Παρατηρείται ότι το σύστημα ανοιχτού βρόχου έχει πόλους στα σημεία :

$$\begin{aligned} & -0.2409 + 2.3687i \\ & -0.2409 - 2.3687i \\ & -1.6269 \\ & +0.9978 \end{aligned} \tag{4.11}$$

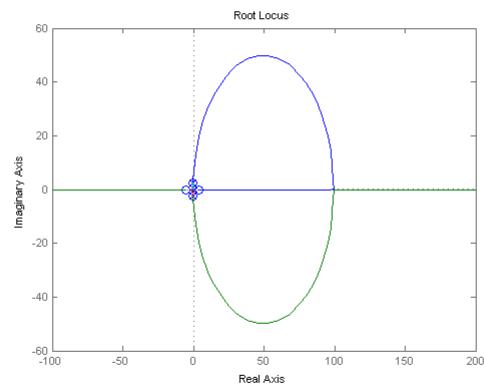
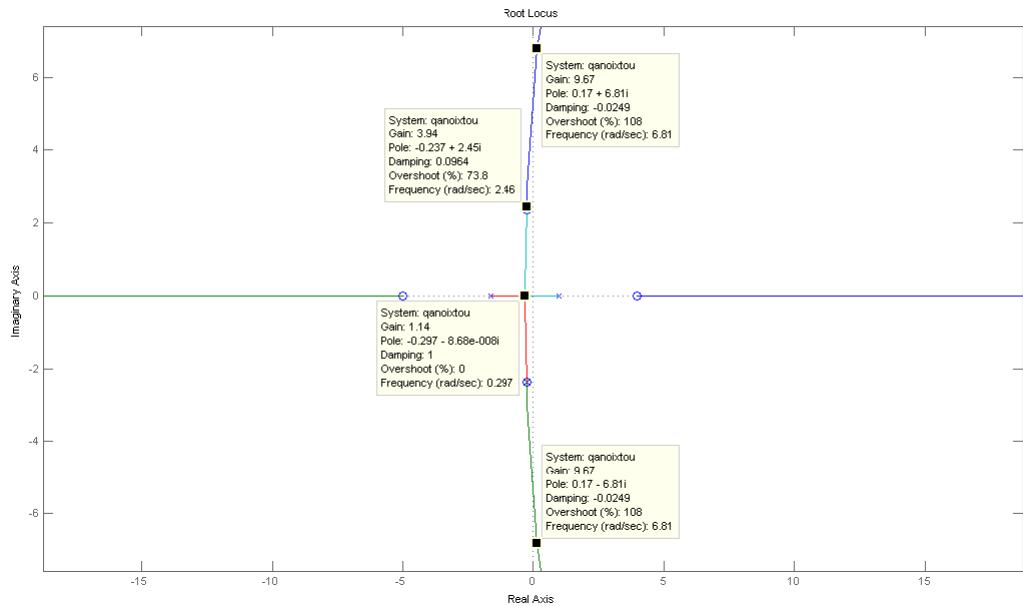
Και μηδενιστές στα σημεία :

$$\begin{aligned} & -4.9996 \\ & +3.9997 \\ & -0.2409 + 2.3687i \\ & -0.2409 - 2.3687i \end{aligned} \tag{4.12}$$

Έτσι παρατηρείται ότι έχουμε δυο πόλους και μηδενιστές στο ίδιο σημείο. Επίσης Προφανώς το σύστημα ανοιχτού βρόχου είναι ασταθές. Ανεβάζοντας το κέρδος K_P στο ελεγκτή P μεταφέρονται οι πόλοι πάνω στο τόπος των ριζών και αλλάζουν οι πόλοι της χαρακτηριστικής εξίσωσης του κλειστού βρόχου. Έτσι για K_P από μηδέν έως 1.2 έχουμε αστάθεια στο σύστημα μας. Από κέρδος 1.4 έως 3.8 περιμένουμε να έχουμε καλύτερη συμπεριφορά όσο αφορά την ευστάθεια του συστήματος, υστέρα περιμένουμε για κέρδη από 5 έως και (περίπου) 10 να έχουμε μια ταλαντωτική συμπεριφορά (σχετική ευστάθεια), γιατί οι δυο πόλοι πλησιάζουν στο φανταστικό άξονα. Στο τέλος για κέρδη πάνω από 10 περιμένουμε οι πόλοι του κλειστού συστήματος να έχουν μπει στο δεξί ημι-επίπεδου του φανταστικού άξονα και έτσι να έχουμε μπει στην ασταθή περιοχή.

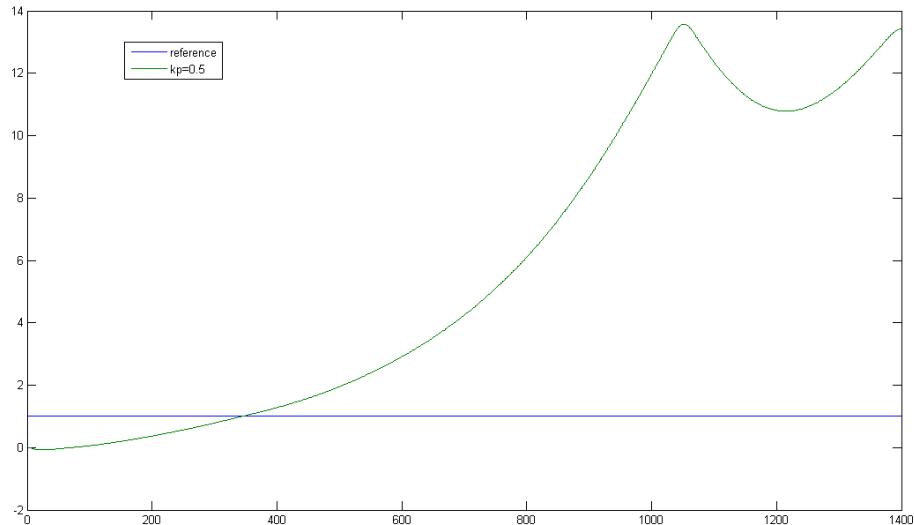
4.3.1 Διαδικασία του πειράματος

Το πείραμα γίνεται μέσω του αρχείου simulink **roott.mdl** του παραρτήματος. Κάθε φόρα αλλάζοντας το K_P του ελεγκτή, σημειώνεται η απόκριση του συστήματος.

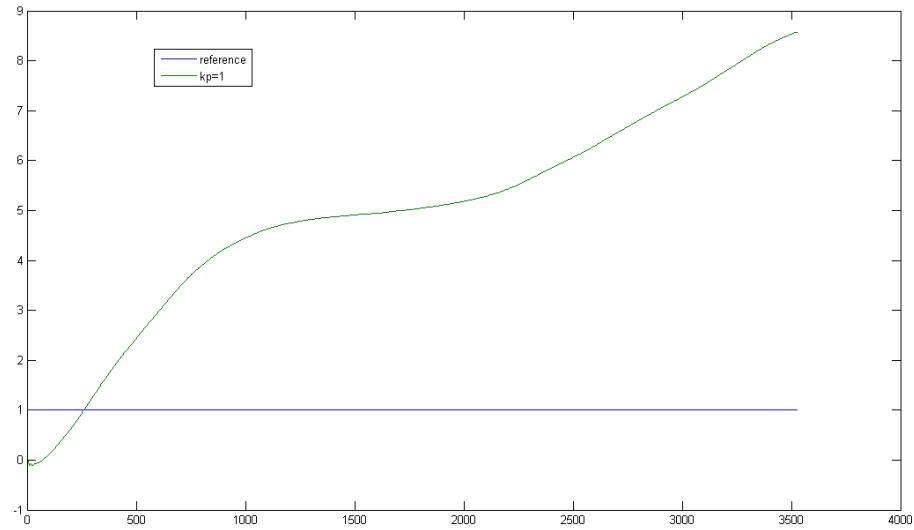


Σχήμα 4.9: Τόπος των Πιζών

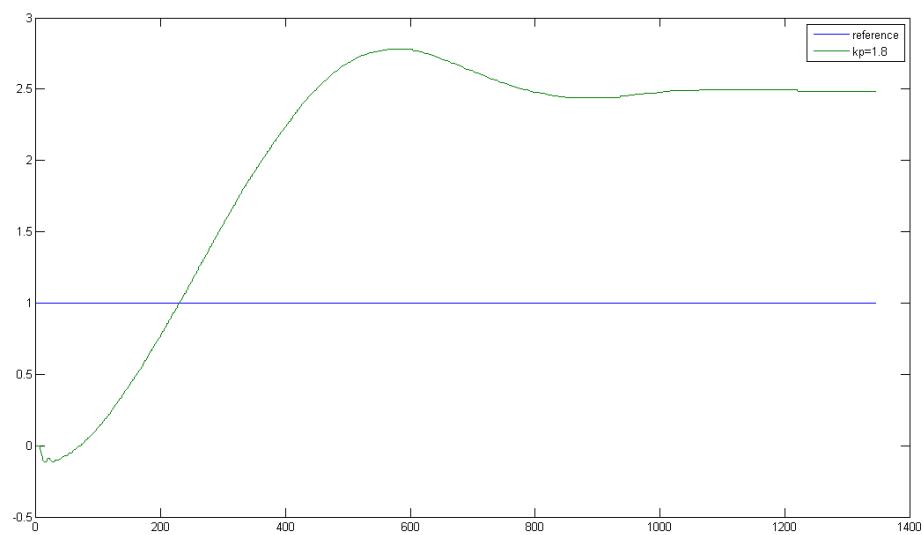
Όπως εξηγήθηκε προηγουμένως παρατηρούμε αστάθεια για μικρά κέρδη, για κέρδη από 2 έως 5 έχουμε καλύτερη συμπεριφορά και για από 5 έως 10 παρατηρούμε ταλαντώσεις στο σύστημα και στο τέλος έχουμε αστάθεια του συστήματος. Τα διαγράμματα που προκύπτουν από διάφορα κέρδη δίνονται παρακάτω.



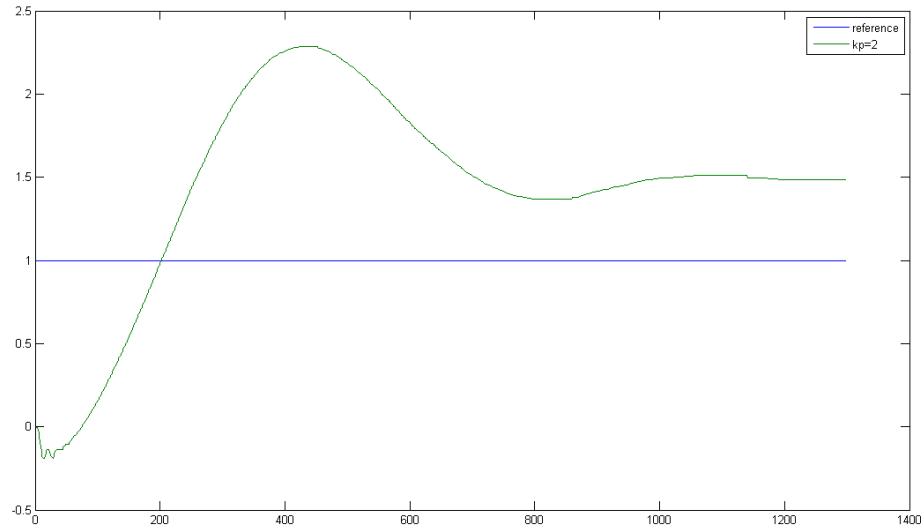
Σχήμα 4.10: απόκριση συσυγκριτικού με $K_P = 0.5$



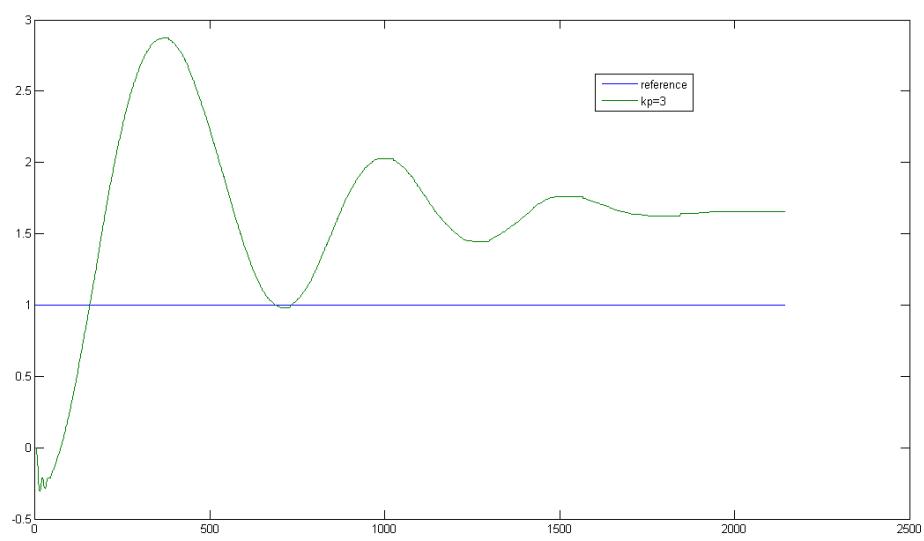
Σχήμα 4.11: απόκριση συσυγκριτικής με $K_P = 1$



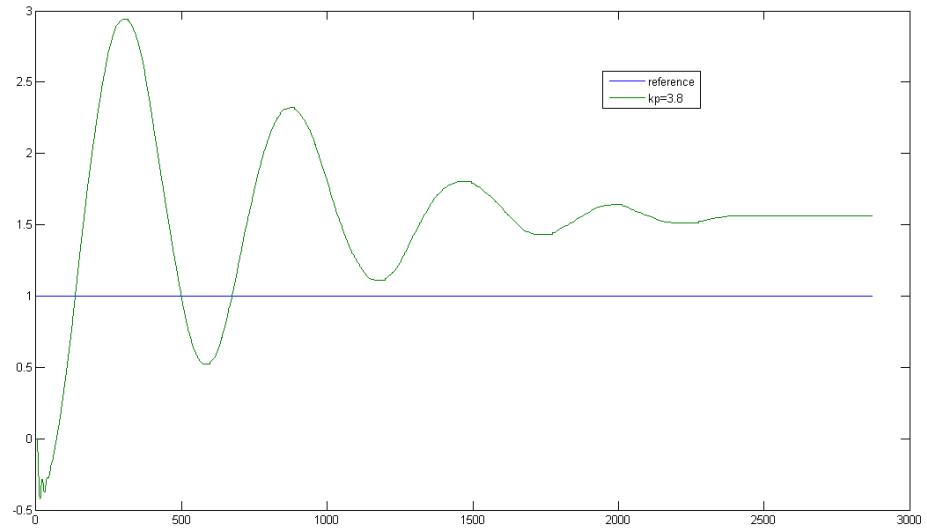
Σχήμα 4.12: απόκριση συσυγκριτικής με $K_P = 1.2$



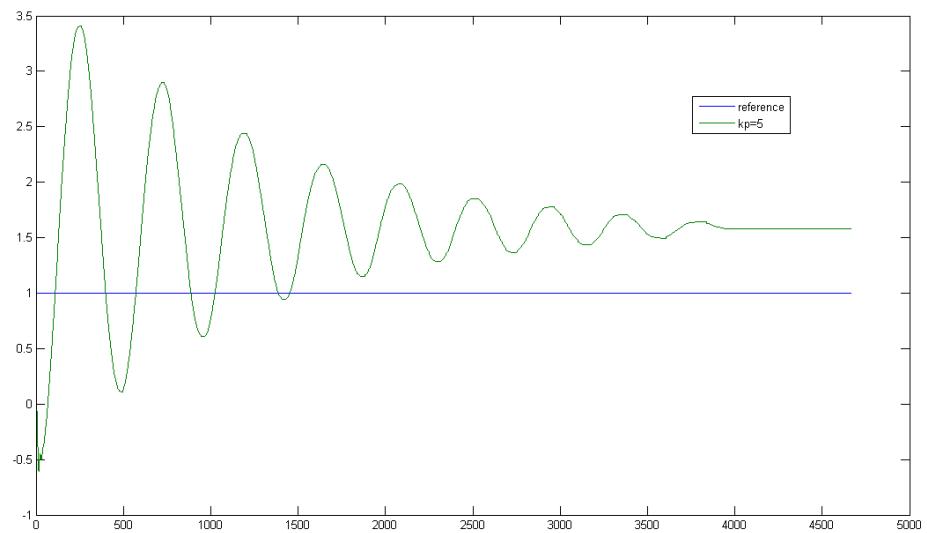
Σχήμα 4.13: απόχριση συσυγκριτικής με $K_P = 2$



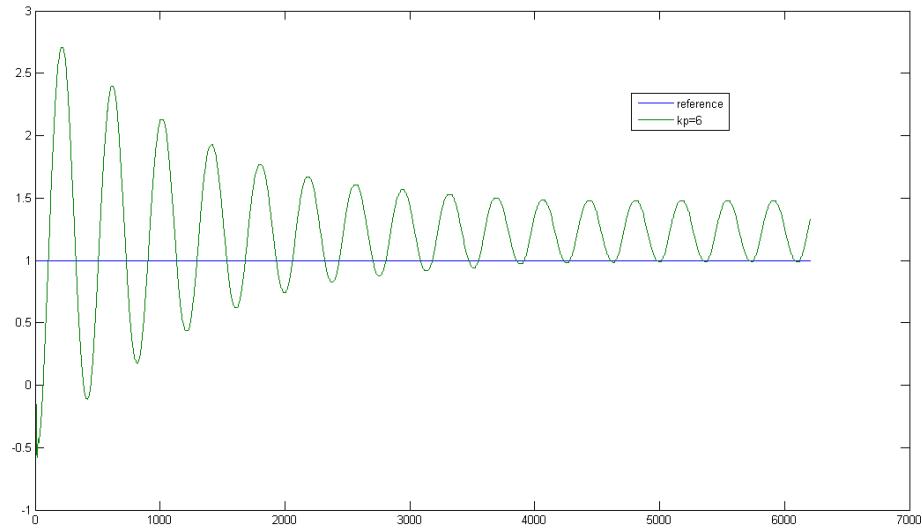
Σχήμα 4.14: απόχριση συσυγκριτικής με $K_P = 3$



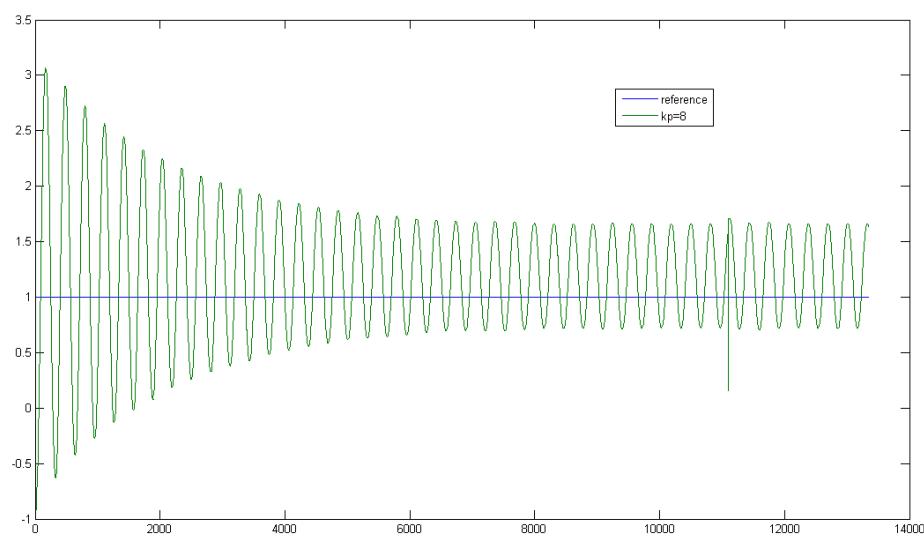
Σχήμα 4.15: απόκριση συσυγκρατος με $K_P = 3.8$



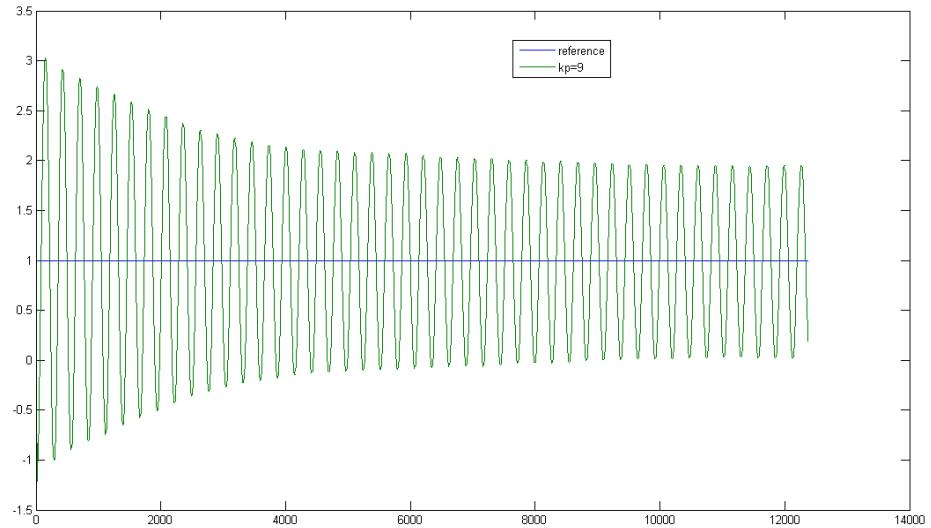
Σχήμα 4.16: απόκριση συσυγκρατος με $K_P = 5$



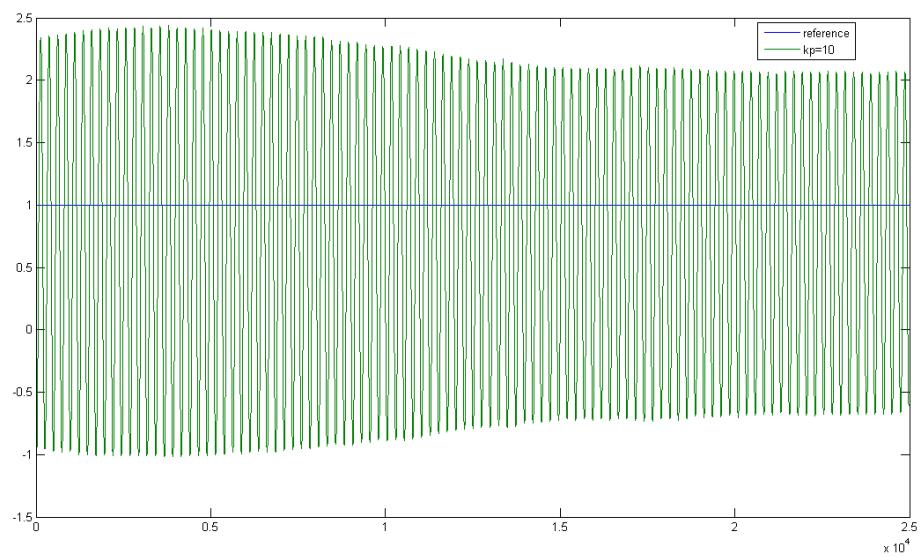
Σχήμα 4.17: απόχριση συσυγκριτικού με $K_P = 6$



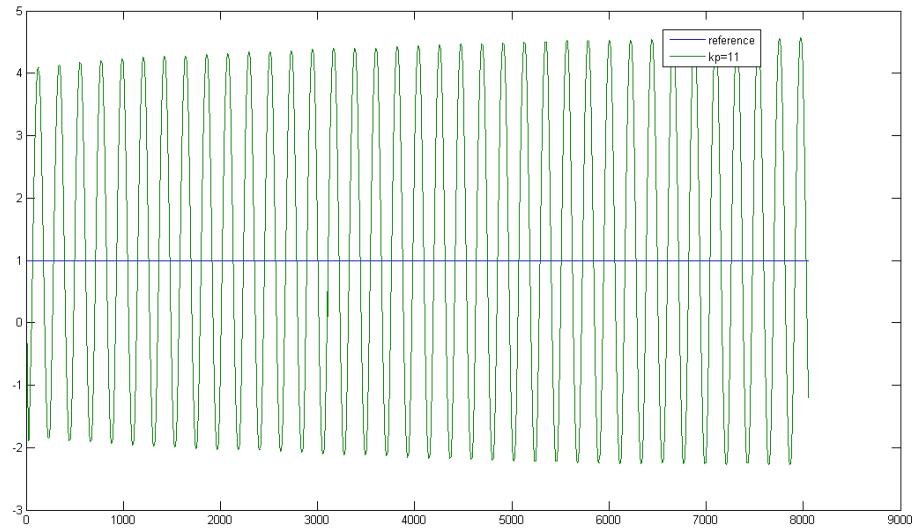
Σχήμα 4.18: απόχριση συσυγκριτικού με $K_P = 8$



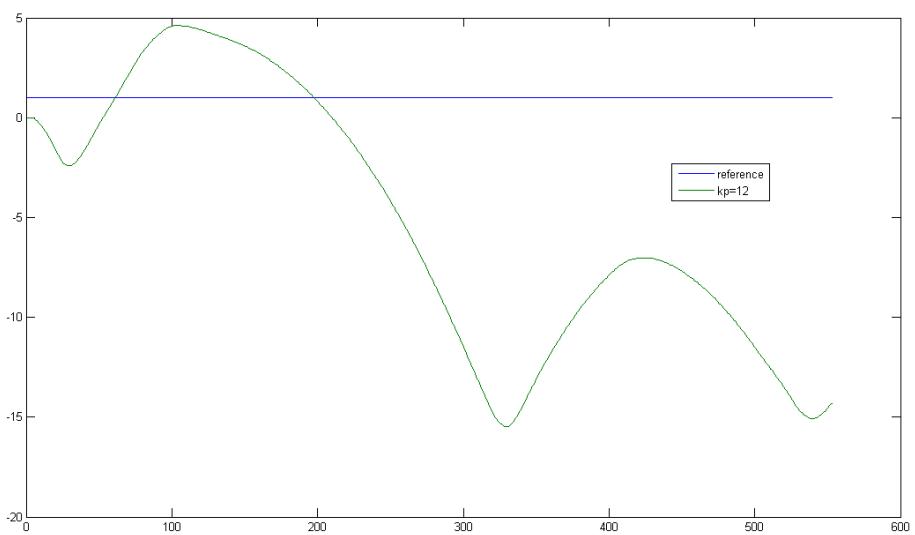
Σχήμα 4.19: απόχριση συσυγκριτικού με $K_P = 9$



Σχήμα 4.20: απόχριση συσυγκριτικού με $K_P = 10$



Σχήμα 4.21: απόχριση συσυγματος με $K_P = 11$



Σχήμα 4.22: απόχριση συσυγματος με $K_P = 12$

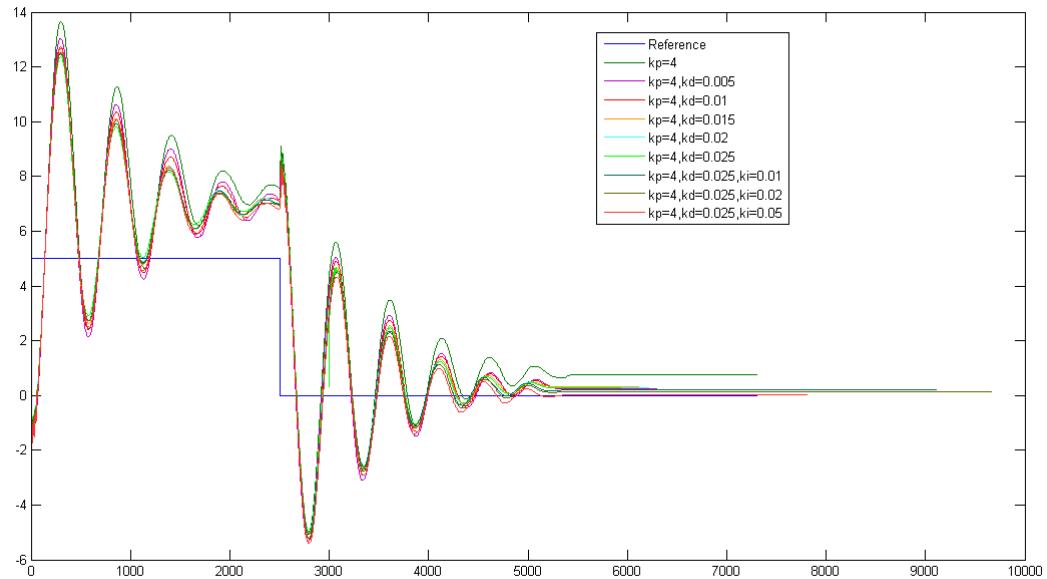
4.3.2 Ελεγκτής PID

Ο σκοπός του πειράματος αυτός είναι να δηχθεί η απόδραση των τριών όρων του ελεγκτή PID στην ευστάθεια και χρονική απόκριση του συστήματος ανεστραμμένου εκκρεμούς. Από το προηγούμενο πείραμα όπως φάνηκε και στα διαγράμματα για περιοχή κερδών K_P 3 έως 4 είχαμε μια ικανοποιητική συμπεριφορά.

Στο πείραμα αυτό με το box “Step” του simulink , αρχικά δίνεται αναφορά στο σύστημα στην θέση των 5 μοιρών, μετά από 10 δευτερόλεπτα δίνεται αναφορά στην γωνία μηδέν (σημείο ισορροπίας του συστήματος), ο σκοπός της πραγματοποίησης της εντολής με την μορφή αυτή είναι ότι στις γωνίες πιο μακριά από το σημείο ισορροπίας του συστήματος έχουμε μεγαλύτερο σφάλμα λόγω της παρουσίασης των μη-γραμμικών όρων. Όποτε για να έχουμε μια καλύτερη εικόνα από τις αντιδράσεις των διαφόρων κερδών διαλέχτηκε να ελέγξουμε το σύστημα πάνω στο σημείο ισορροπίας. Επίσης με αυτό τον τρόπο μπορούμε να βλέπουμε την επίδραση των μη-γραμμικών όρων στην ευστάθεια του συστήματος.

Για πραγματοποίηση του πειράματος χρησιμοποιούμε ένα κέρδος $K_P = 4$ $K_d = 0$ $K_I = 0$ για αρχή, έτσι παρουσιάζεται μια απόκριση με ταλαντώσεις και κάποιο σφάλμα μόνιμης κατάστασης, ανεβάζοντας το κέρδος K_D βελτιώνεται η ταλάντωση στο σύστημα και έτσι έχουμε λιγότερες ταλαντώσεις, και στο τέλος ανεβάζοντας το κέρδος K_I του ολοκληρωτή, βελτιώνεται το σφάλμα μόνιμης κατάστασης. Για πραγματοποίηση του πειράματος χρησιμοποιήθηκε το αρχείο simulink **PIDD.mdl** του παραρτήματος.

Τα αποτελέσματα των μετρήσεων με την διαδικασία αυτή παρουσιάζεται στο παρακάτω:



Σχήμα 4.23: Διαγράμματα αποκρίσεων των πειράματων με ελεγκτή PID

Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα των αποκρίσεων, το κέρδος K_D βελτιώνει τις ταλαντώσεις του συστήματος κλειστού βρόχου και το κέρδος K_i βελτιώνει το σφάλμα μόνιμης κατάστασης του συστήματος.

Κεφάλαιο 5

Πεδίο Χρόνου

Σε αυτό το κεφάλαιο της μεταπτυχιακής εργασίας έγινε μια προσπάθεια με σκοπό τον σχηματισμό δύο εργαστηριακών ασκήσεων στο μάθημα ”Συστήματα Αυτομάτου έλεγχου II” της σχολής “Μηχανολόγων Μηχανικών της ΕΜΠ”.

Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου γίνεται μια περίληψη του συστήματος του ανεστραμμένου εκκρεμούς στην μορφή πολυμεταβλητού συστήματος η οποία θα χρησιμοποιηθεί στην συνέχεια στις εργαστηριακές ασκήσεις. Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου γίνεται πείραμα σε τοποθέτηση πόλων του κλειστού συστήματος, για να συγχριθεί η επίδραση της θέσης των πόλων στην ευστάθεια και στην απόκριση του συστήματος. Στην συνέχεια γίνεται τοποθέτηση των πόλων με επιλογή κέρδους με την βοήθεια του βέλτιστου ελέγχου σε μορφή LQR και συγχρίνεται με την απλή τοποθέτηση των πόλων του συστήματος.

Στο τρίτο μέρος του κεφαλαίου φτιάχνεται παρατηρητής πλήρους τάξης του συστήματος. Τοποθετώντας τους πόλους του παρατηρητή σε διάφορα σημεία συγχρίνεται η σύγκλιση των πραγματικών μετρήσεων και των μετρήσεων με την εκτίμηση του παρατηρητή και επίσης παρατηρείται η έννοια του θορύβου στην εκτίμηση των καταστάσεων με παρατηρητή.

5.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο τρία, μετά από την γραμμικοποίηση του μη-γραμμικού συστήματος οι εξισώσεις χώρο-χαταστάσεις του συστήματος είναι στην μορφή:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + Bu \\ y &= Cz + Du\end{aligned}\tag{5.1}$$

Οπου:

$$\begin{aligned}Z &= \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} & A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{m_2 l_c g}{J^*} & 0 & \frac{m_1 g}{J^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(J^* - m_2 l_o l_c)g}{J^*} & 0 & \frac{-m_1 l_o g}{J^*} & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \frac{1}{J^*} \begin{bmatrix} 0 \\ -l_o \\ 0 \\ \frac{J_{o_e}}{m_1} \end{bmatrix} & C &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Όπου:

$$\begin{aligned}J^* &= [J_{o_e} - m_1 l_o^2] \\ C_i &= 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4)\end{aligned}\tag{5.2}$$

Στην συνέχεια μετά από identification του συστήματος, και έχοντας υπόψη μας τα κέρδη των αισθητήρων οι πινάκες A,B και C των παραπάνω εξισώσεων είναι:

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -16.7709 & 0 & 3.2196 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 323.6897 & 0 & -22.4170 & 0 \end{bmatrix} \\ B &= 10^4 \pm \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1039 \\ 0 \\ 1.6825 \end{bmatrix} & C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Έτσι έχοντας τις εξισώσεις χώρο-χατάστασης του συστήματος ανεστραμμένου εκχρεμούς και με βάση το θεωρητικό μέρος που αναφέρεται στα παρατήματα “Εργαστηριακή άσκηση-Τοποθέτηση των Πόλων” και “Εργαστηριακή άσκηση-Παρατηρητής Κατάστασης” πραγματοποιηθήκαν τα δυο παρακάτω πειράματα:

5.2 Πείραμα Τοποθέτησης Πόλων

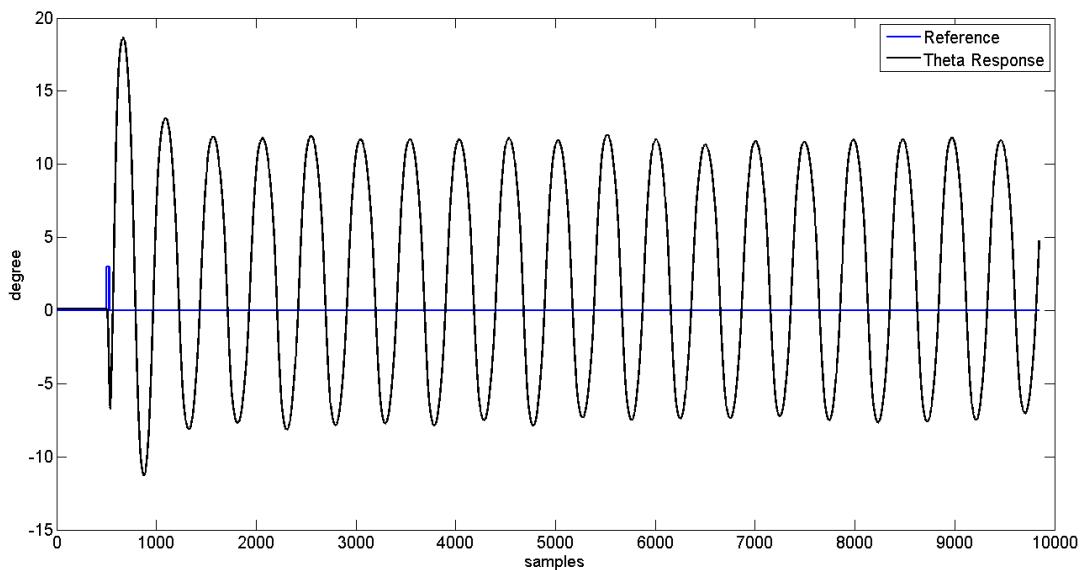
Με βάση το θεωρητικό μέρος που αναφέρεται στο αντίστοιχο εργαστηριακό φυλλαδίο “Τοποθέτηση Πόλων” του παραρτήματος, σχεδιάστηκε το αρχείο simulink “state-feedback.mdl” του παραρτήματος F. Με την χρήση του κώδικα “statefeedback.m” στο οποίο έχει χρησιμοποιηθεί η εντολή “acker”, αναλόγως με το πρότυπο Bessel τοποθετούνται οι πόλοι του κλειστού συστήματος σε διάφορες θέσεις ξεκινώντας από την θέση $[-4.0156 \pm 5.0723i]$,

$-5.5281 \pm 1.6553i]$ και προχωρώντας προς αριστερά παρατηρούμε την απόκριση του συστήματος και προσπαθούμε να βρούμε κάποια “καλή” θέση για την τοποθέτηση των πόλων. Στο τέλος επιλέγεται ο πίνακας F (κέρδος ανατροφοδότησης) με την χρήση του LQR και συγχρίνεται η απόκριση του συστήματος με τις προηγούμενες περιπτώσεις.

Όπως φαίνεται και στο αρχείο “state-feedback.mdl” εισάγεται μια είσοδος im-pulse στην χρονική στιγμή 2 sec στο σύστημα, η οποία έχει πλάτος 3 μοίρες και διάρκεια 0.1 δευτερόλεπτο. Έτσι μπορούμε για κάθε θέση του κλειστού βρόχου να δούμε την απόκριση του συστήματος πάνω στο σημείο ισορροπίας.

1- Θέση πόλων κλειστού βρόχου $[-4.0156 \pm 5.0723i, -5.5281 \pm 1.6553i]$

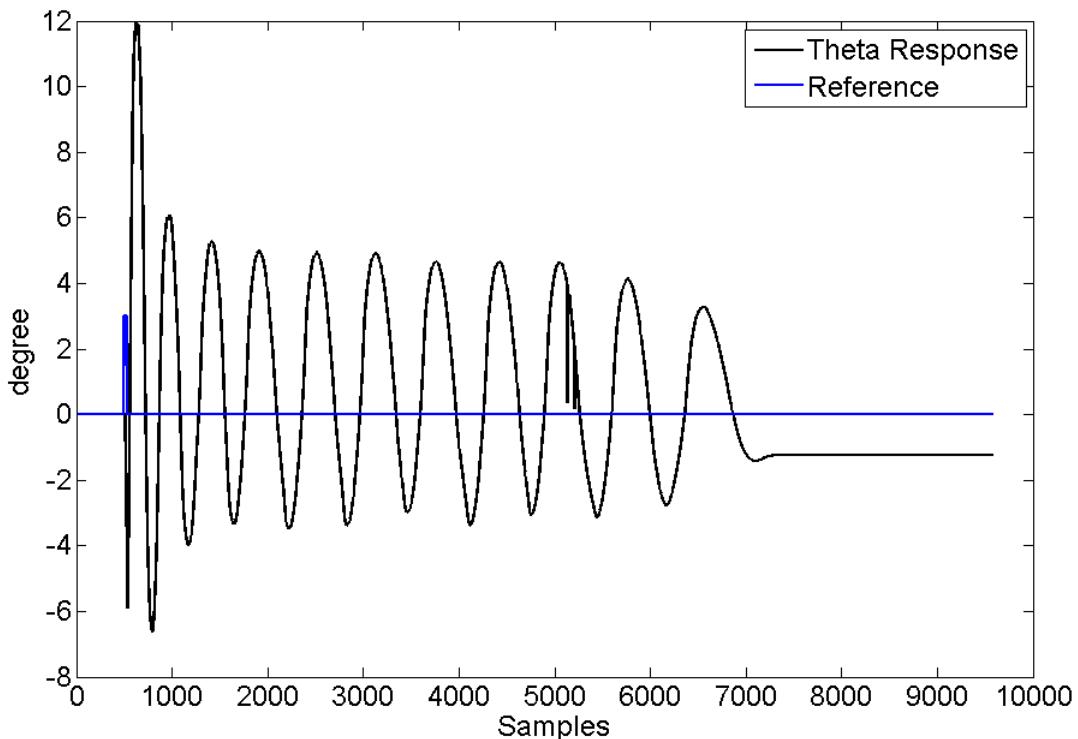
Στην πρώτη φάση, το ποθετούνται οι πόλοι κλειστού συστήματος στην θέση $[-4.0156 \pm 5.0723i, -5.5281 \pm 1.6553i]$. Με την χρήση του κώδικα τα κέρδη του διανύσματος F υπολογίζεται $[0.0894 \quad 0.0288 \quad 0.0129 \quad 0.0029]$. Παρατηρείται ότι το σύστημα παρουσιάζει μια σχετική ευστάθεια, με μόνιμες ταλαντώσεις πάνω στο σημείο ισορροπίας. Έτσι το ποθετώντας τους πόλους πιο αριστερά περιμένουμε να βελτιωθεί η ευστάθεια του συστήματος.



Σχήμα 5.1: απόκριση συστήματος με θέση πόλων κλειστού βρόχου $[-4.0156 \pm 5.0723i, -5.5281 \pm 1.6553i]$

2- Θέση πόλων αλειστού βρόχου $[-4.8187 \pm 6.0868i, -6.6337 \pm 1.9864i]$

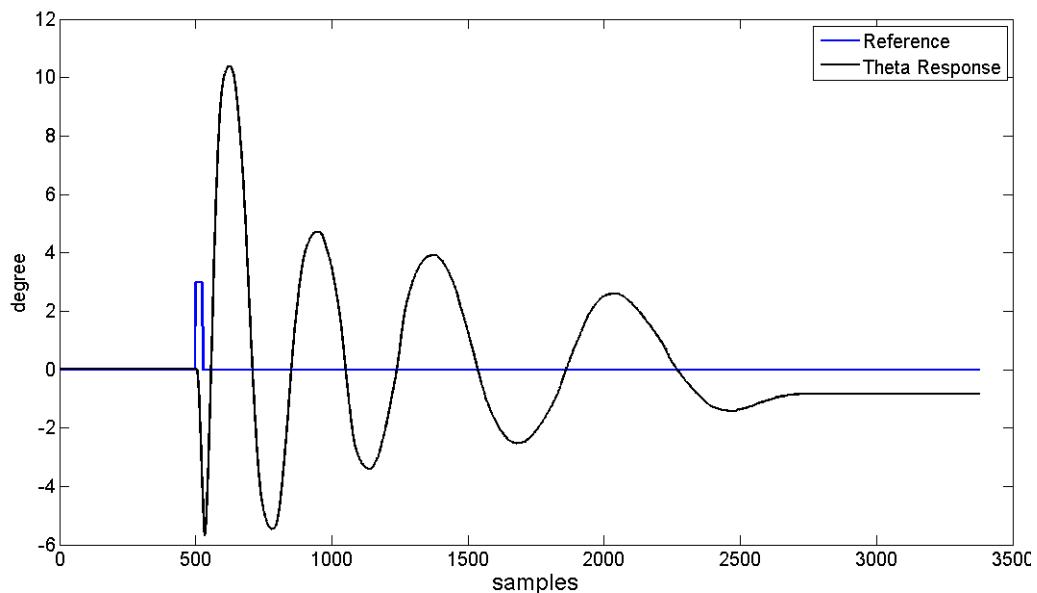
Στην δεύτερη φάση, τοποθετούνται οι πόλοι αλειστού συστήματος στην θέση $[-4.8187 \pm 6.0868i, -6.6337 \pm 1.9864i]$. Με την χρήση του κώδικα τα κέρδη του διανύσματος F υπολογίζεται $[0.1522 \quad 0.0485 \quad 0.0211 \quad 0.0044]$. Παρατηρείται ότι οι ταλαντώσεις στο σύστημα έχουν βελτιωθεί πολύ και το σύστημα με ένα σφάλμα μόνιμης κατάστασης σταθεροποιείται σε γωνία -1.2 μοίρες, αντιθέτως με την προηγούμενη φόρα που παρουσίαζε μόνιμες ταλαντώσεις.



Σχήμα 5.2: απόκριση συστήματος με θέση πόλων αλειστού βρόχου $[-4.8187 \pm 6.0868i, -6.6337 \pm 1.9864i]$

3- Θέση πόλων κλειστού βρόχου $[-5.0195 \pm 6.3404i, -6.9101 \pm 2.069i]$

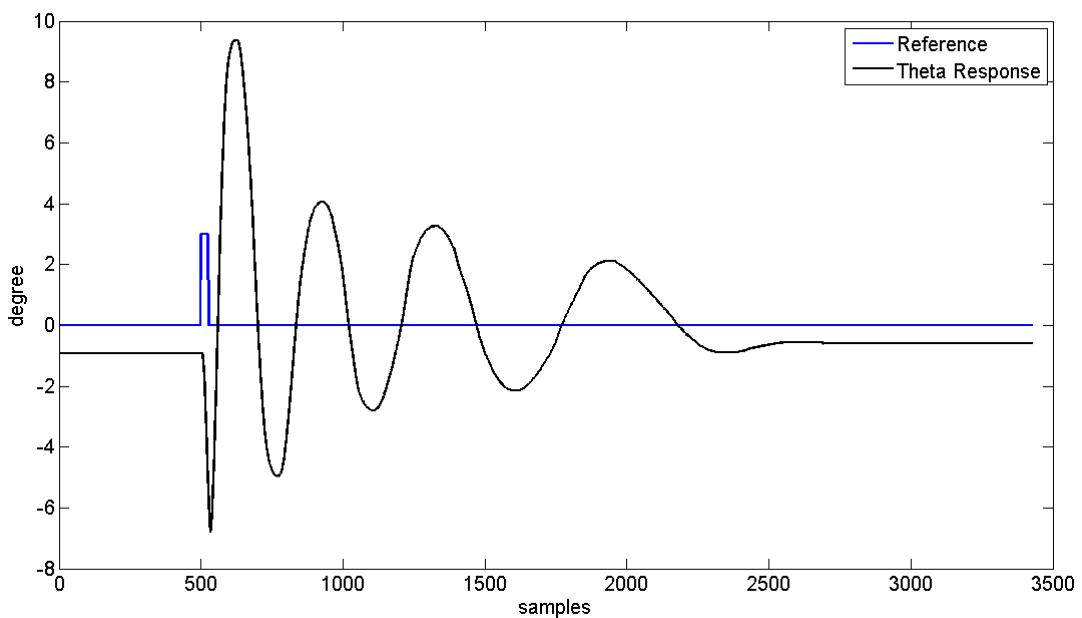
Τώρα τοποθετούνται οι πόλοι στην θέση $[-5.0195 \pm 6.3404i, -6.9101 \pm 2.069i]$ και, με χρήση του κώδικα, τα κέρδη του διανύσματος F υπολογίζονται $[0.1731 \quad 0.0546 \quad 0.0236 \quad 0.0048]$. Παρατηρείται ότι οι ταλαντώσεις στο σύστημα έχουν βελτιωθεί ακόμα πιο πολύ και το σύστημα με ένα σφάλμα μόνυμης κατάσταση σταθεροποιείται σε γωνία -0.84 μοίρες.



Σχήμα 5.3: απόκριση συστήματος με θέση πόλων κλειστού βρόχου $[-5.0195 \pm 6.3404i, -6.9101 \pm 2.069i]$

4- Θέση πόλων κλειστού βρόχου $[-5.2203 \pm 6.5940i, -7.1865 \pm 2.1519i]$

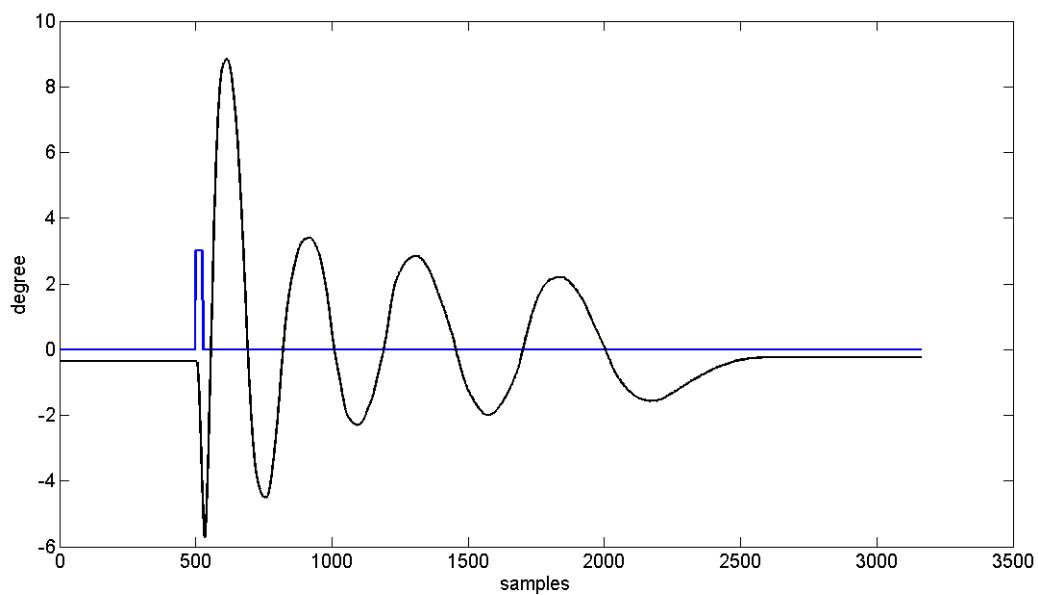
Αυτή την φορά τοποθετούνται οι πόλοι στην θέση $[-5.2203 \pm 6.5940i, -7.1865 \pm 2.1519i]$ και με χρήση του κώδικα τα κέρδη του διανύσματος F είναι $[0.1966 \quad 0.0612 \quad 0.0263 \quad 0.0053]$. Παρατηρείται στο παρακάτω διάγραμμα ότι οι ταλαντώσεις στο σύστημα έχουν βελτιωθεί ακόμα πιο πολύ και το σύστημα με ένα σφάλμα μόνιμης κατάσταση σταθεροποιείται σε γωνία -0.60 μοίρες.



Σχήμα 5.4: απόκριση συστήματος με θέση πόλων κλειστού βρόχου $[-5.2203 \pm 6.5940i, -7.1865 \pm 2.1519i]$

5- Θέση πόλων κλειστού βρόχου $[-5.4211 \pm 6.8476i, -7.4629 \pm 2.2347i]$

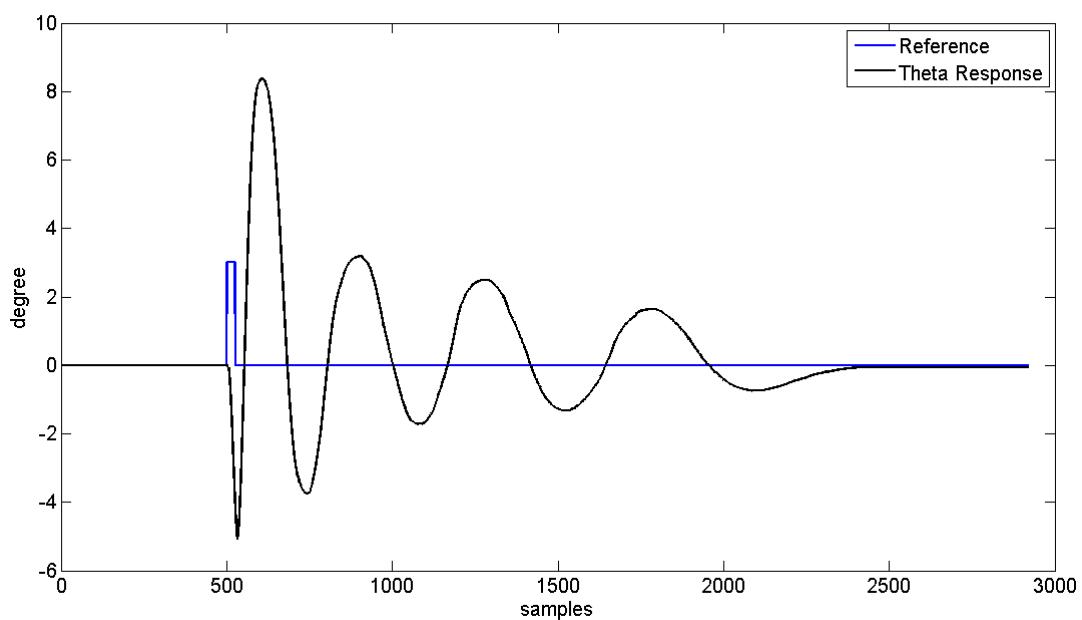
Αυτή την φορά τοποθετούνται οι πόλοι στην θέση $[-5.4211 \pm 6.8476i, -7.4629 \pm 2.2347i]$ και με χρήση του κώδικα τα κέρδη του διανύσματος F είναι $[0.2227 \quad 0.0683 \quad 0.0292 \quad 0.0057]$. Παρατηρείται στο παρακάτω διάγραμμα ότι οι ταλαντώσεις στο σύστημα έχουν βελτιωθεί ακόμα πιο πολύ και το σύστημα με ένα σφάλμα μόνιμης κατάσταση σταθεροποιείται σε γωνία -0.25 μοίρες.



Σχήμα 5.5: απόκριση συστήματος με θέση πόλων κλειστού βρόχου $[-5.4211 \pm 6.8476i, -7.4629 \pm 2.2347i]$

6- Θέση πόλων κλειστού βρόχου $[-5.6218 \pm 7.1012i, -7.7393 \pm 2.3174i]$

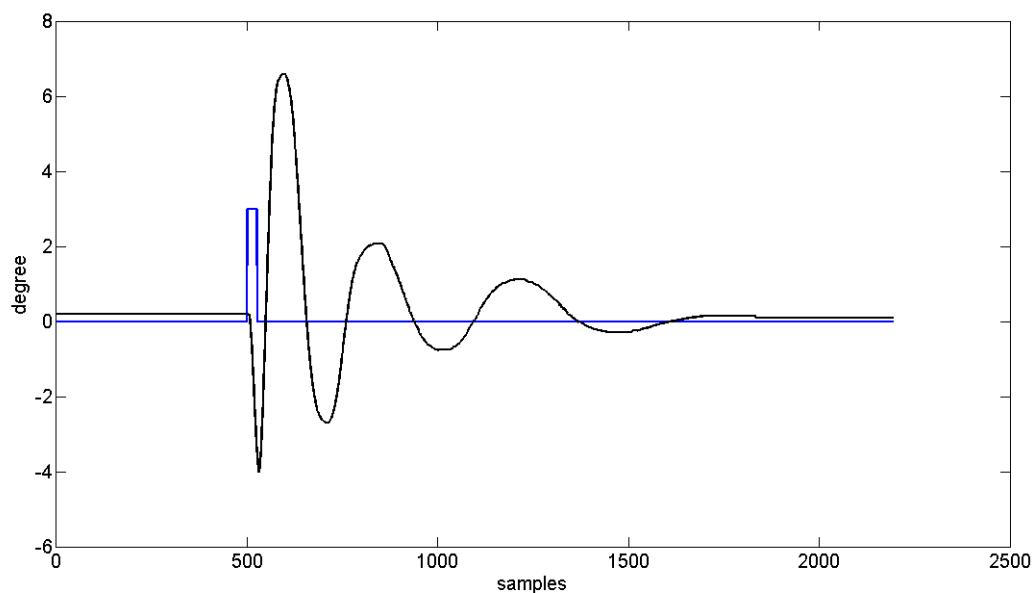
Αυτή την φορά το ποθετούνται οι πόλοι στην θέση $[-5.6218 \pm 7.1012i, -7.7393 \pm 2.3174i]$ και με χρήση του κώδικα τα κέρδη του διανύσματος F είναι $[0.2516 \quad 0.0759 \quad 0.0323 \quad 0.0063]$. Παρατηρείται ότι οι ταλαντώσεις στο σύστημα έχουν βελτιωθεί ακόμα πιο πολύ και το σύστημα με ένα σφάλμα μόνιμης κατάσταση σταθεροποιείται σε γωνία -0.08 μοίρες.



Σχήμα 5.6: απόκριση συστήματος με θέση πόλων κλειστού βρόχου $[-5.6218 \pm 7.1012i, -7.7393 \pm 2.3174i]$

7- Θέση πόλων κλειστού βρόχου $[-6.4250 \pm 8.1157i, -8.845 \pm 2.6485i]$

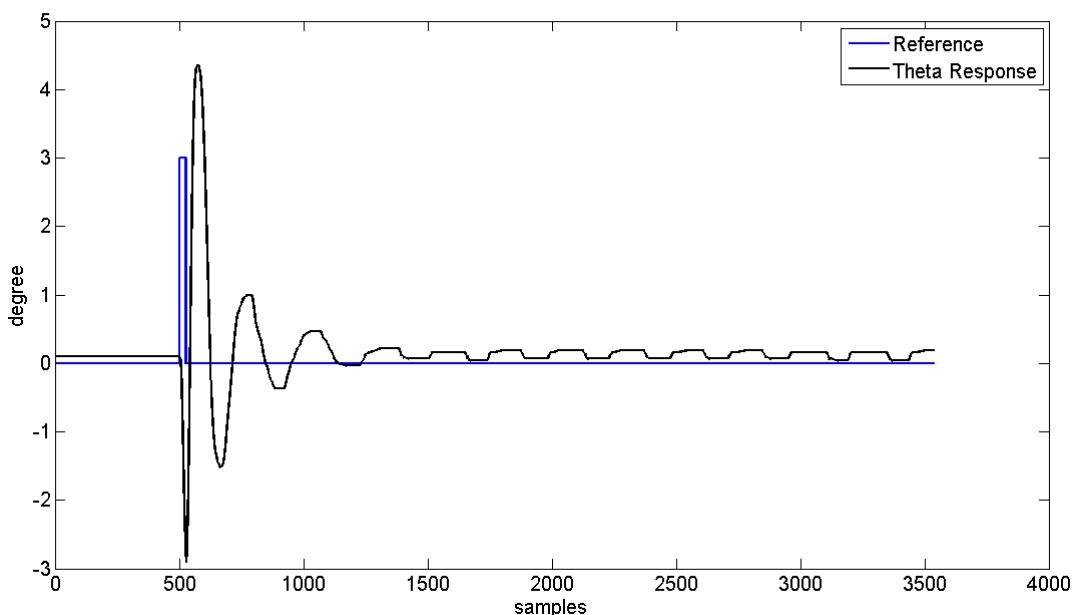
Αυτή την φορά τοποθετούνται οι πόλοι στην θέση $[-6.4250 \pm 8.1157i, -8.845 \pm 2.6485i]$ και με χρήση του κώδικα τα κέρδη του διανύσματος F είναι $[0.4004$
 $0.1122 \quad 0.0473 \quad 0.0087]$. Παρατηρείται ότι οι ταλαντώσεις στο σύστημα έχουν βελτιωθεί ακόμα πιο πολύ και το σύστημα με ένα σφάλμα μόνιμης κατάσταση σταθεροποιείται σε γωνία -0.1 μοίρες.



Σχήμα 5.7: απόκριση συστήματος με θέση πόλων κλειστού βρόχου $[-6.4250 \pm 8.1157i, -8.845 \pm 2.6485i]$

8- Θέση πόλων κλειστού βρόχου $[-8.0312 \pm 10.1446i, -11.0562 \pm 3.3106i]$

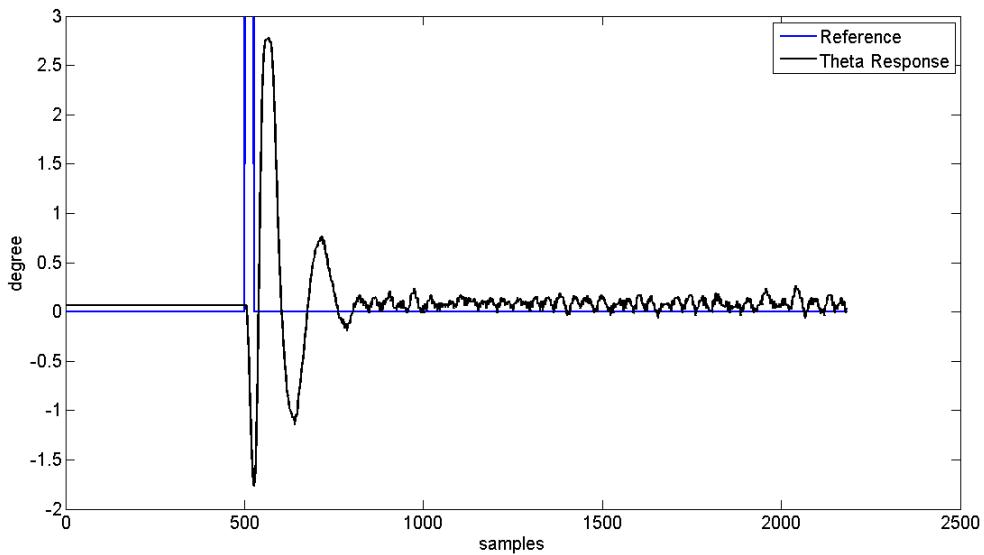
Αυτή την φορά το ποιοθετούνται οι πόλοι στην θέση $[-6.4250 \pm 8.1157i, -8.845 \pm 2.6485i]$ και με χρήση του κώδικα τα κέρδη του διανύσματος F είναι $[0.9062 \quad 0.2166 \quad 0.0926 \quad 0.00156]$. Παρατηρείται στο παραχώτω διάγραμμα ότι οι ταλαντώσεις στο σύστημα έχουν βελτιωθεί ακόμα πιο πολύ, αλλά παρουσιάζεται κάποιος θόρυβος στο σύστημα, ειδικότερα στο άξονα X της συρόμενης ράβδου.



Σχήμα 5.8: απόκριση συστήματος με θέση πόλων κλειστού βρόχου $[-8.0312 \pm 10.1446i, -11.0562 \pm 3.3106i]$

9- Θέση πόλων κλειστού βρόχου $[-10.039 \pm 12.6808i, -13.8203 \pm 4.1383i]$

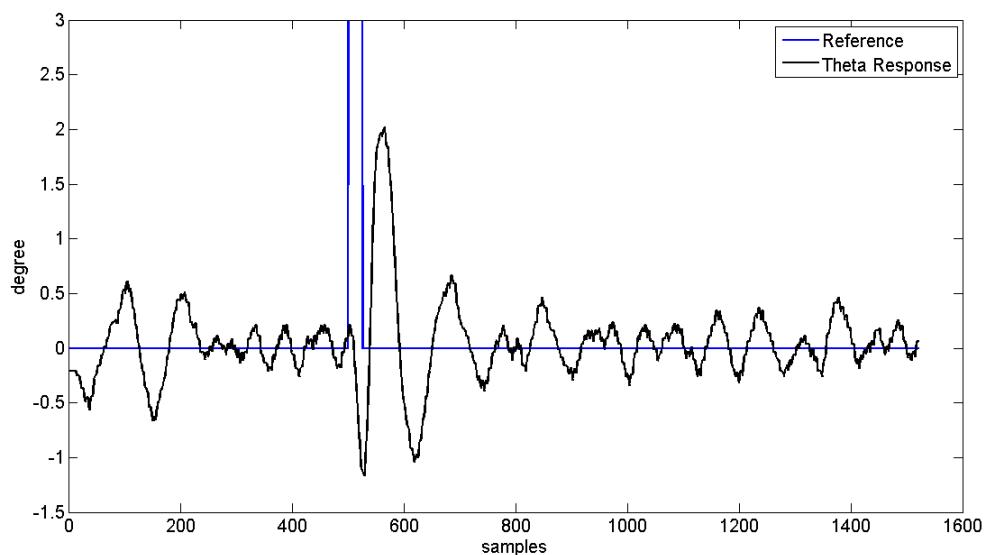
Αυτή την φορά τοποθετούνται οι πόλοι στην θέση $[-10.039 \pm 12.6808i, -13.8203 \pm 4.1383i]$ και με χρήση του κώδικα τα κέρδη του διανύσματος F είναι $[2.1166 \quad 0.4199 \quad 0.1893 \quad 0.0288]$. Παρατηρείται ότι οι ταλαντώσεις έχουν μειώθει αλλά εμφανίζεται ακόμα πιο έντονα ο θόρυβος στο σύστημα.



Σχήμα 5.9: απόχριση συστήματος με θέση πόλων κλειστού βρόχου $[-10.039 \pm 12.6808i, -13.8203 \pm 4.1383i]$

10- Θέση πόλων κλειστού βρόχου $[-12.0468 \pm 15.2169i, -16.5843 \pm 4.9659i]$

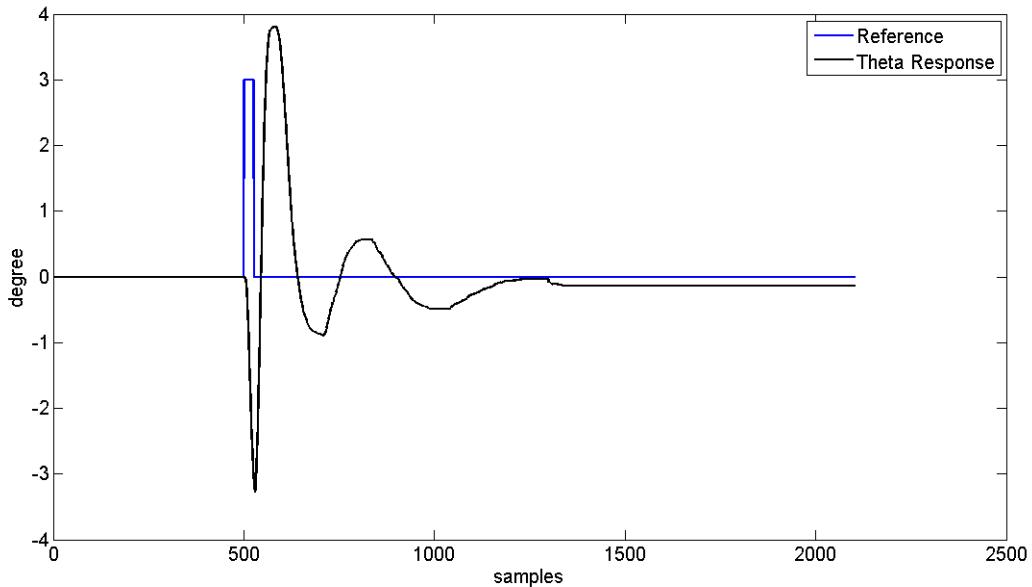
Αυτή την φορά τοποθετούνται οι πόλοι στην θέση $[-12.0468 \pm 15.2169i, -16.5843 \pm 4.9659i]$ και με χρήση του κώδικα τα κέρδη του διανύσματος F είναι $[4.2921 \quad 0.7227 \quad 0.3504 \quad 0.048]$. Παρατηρείται οτι ο θόρυβος στο σύστημα είναι πολύ έντονος. Πράγμα που είναι ανεπιθύμητο. Οπότε συμπεραίνεται ότι έχουμε τοποθετήσει τους πόλους του κλειστού βρόχου αρκετά μακριά ώστε η επιρροή του θορύβου στο σύστημα μας να είναι πλέον πολύ εμφανής και έτσι ο έλεγχος αποτυγχάνει.



Σχήμα 5.10: απόκριση συστήματος με θέση πόλων κλειστού βρόχου $[-12.0468 \pm 15.2169i, -16.5843 \pm 4.9659i]$

5.2.1 Πείραμα LQR

Σε αυτό το σημείο αφού παρατηρήσαμε την επίδραση της θέσης των πόλων στην ευστάθεια, δίνεται ο βέλτιστος πίνακας F που όπως εξηγήθηκε και προηγουμένως ελαχιστοποιεί το κριτήριο κέρδους και επομένως θα έχουμε μια βέλτιστη συμπεριφορά του συστήματος. Επιλέγεται για $R = [8]$ και $Q = C' * C$ όπου $C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$. Ο αλγόριθμος του LQR τοποθετεί τους πόλους του κλειστού βρόχου στα $[-12.4303 \pm 14.9165i, -5.3764 \pm 0.3240i]$ με τον βέλτιστο πίνακα F $[0.4955 \ 0.1776 \ 0.0683 \ 0.0131]$. Παρατηρείται στο παρακάτω διάγραμμα ότι ενώ οι ταλαντώσεις έχουν μειωθεί στα ελάχιστα, δεν έχει εμφανιστεί θόρυβος στο σύστημα και έτσι συνεπάγεται ότι ο αλγόριθμος LQR παράγει την βέλτιστη τιμή για τον πίνακα F .



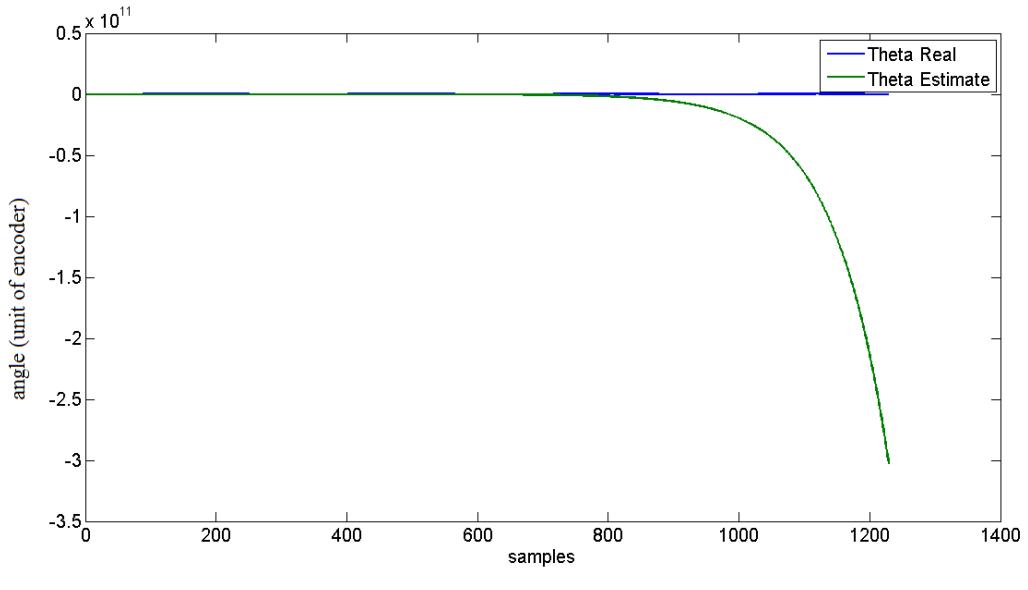
Σχήμα 5.11: απόκριση σύστηματος με την μέθοδο LQR

5.3 Πείραμα Παρατηρητή

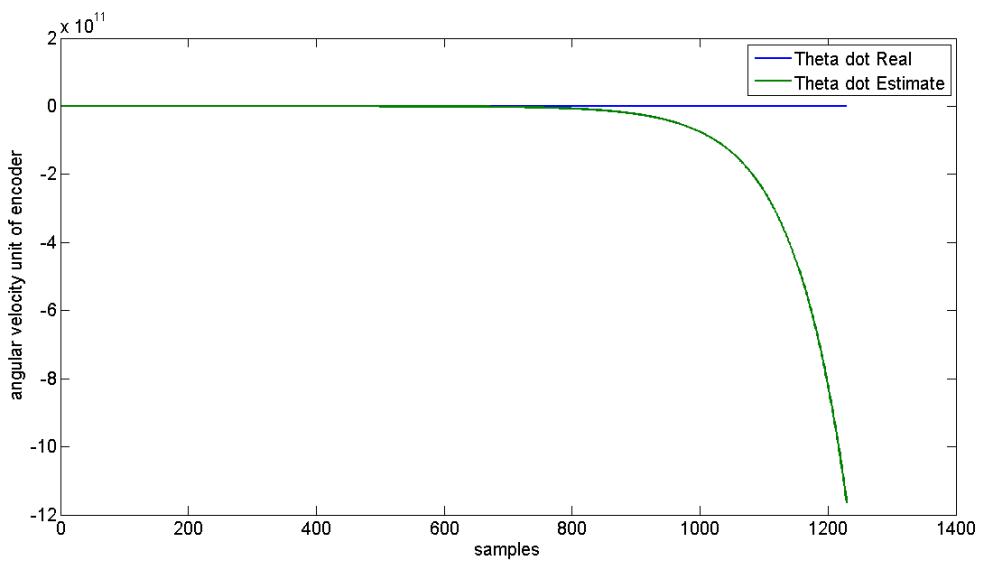
Με βάση το θεωρικό μέρος του προηγούμενου υποκεφαλαίου για παρατηρητές κατάστασης πραγματοποιήθηκε ένα πείραμα με σκοπό να σχεδιαστεί ένας παρατηρητής και να επιλεχτεί με πειραματική μέθοδο η θέση των πόλων του αναλόγως τη συμπεριφορά και την απόχριση του παρατηρητή. Για την πραγματοποίηση του πειράματος χρησιμοποιείται το αρχείο simulink “**Observer.mdl**” του παραρτήματος G και για τοποθέτηση των πόλων του παρατηρητή χρησιμοποιείται ο κώδικας “**observer.m**” του παραρτήματος. Ως είσοδος αναφοράς στο σύστημα επιλέχτηκε μια ημιτονοειδής είσοδος με πλάτος 3 μοιρών και συχνότητα $5 \frac{rad}{sec}$. Στην συνέχεια κάθε φόρα για κάθε θέση των πόλων του παρατηρητή, συγχρίνονται οι πραγματικές μεταβλητές κατάστασης x με τις εκτιμήσεις μεταβλητών κατάστασης \hat{x} οι οποίες εξάγονται από τον παρατηρητή. Για το πρόβλημα του έλεγχου του συστήματος ανεστραμμένου εκκρεμούς χρησιμοποιείται ανατροφοδότησης κατάστασης με κέρδος F από αλγόριθμο LQR του προηγούμενου υποκεφαλαίου. Για αρχικές συνθήκες του παρατηρητή επιλέχτηκε η κατάσταση $[-6000 \quad -50000 \quad 500000 \quad 1000000]^T$. Τονίζεται ότι αυτές οι τιμές είναι στην μονάδα του encoders. (η μετατροπή των μονάδων αυτών σε μονάδες SI έχει αναφερθεί στο κεφάλαιο τρία). Για την πιο εύκολη σύγκριση (αναλυτικά) χρησιμοποιούμε τις μονάδες αυτές.

1-Θέση πόλων παρατηρητή $[\pm 3, 0 \pm 5i]$

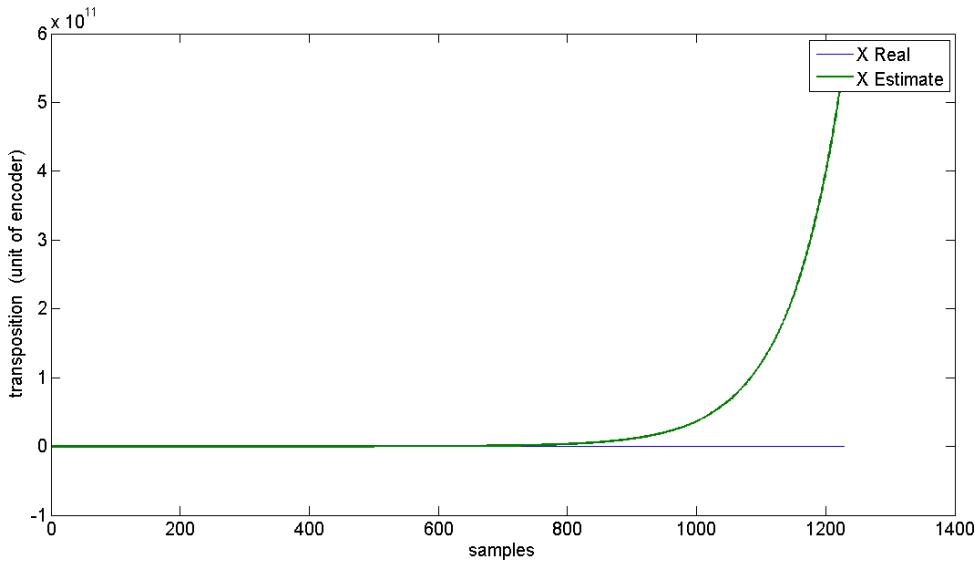
Τονίζεται ότι για τον έλεγχο του συστήματος χρησιμοποιείται ανατροφοδότηση κατάστασης με βέλτιστο κέρδος F από LQR, έτσι οι πόλοι του κλειστού συστήματος του ανεστραμμένου εκκρεμούς είναι $[-12.4303 \pm 14.9165i, -5.3764 \pm 0.3240i]$. Όπως φαίνεται από την θέση των πόλων του παρατηρητή, φαίνεται ότι έχουμε τοποθετήσει τους πόλους έτσι ώστε να έχουμε μια αστάθεια, αυτό παρατηρείται και από το διάγραμμα σύγκρισης για κάθε μεταβλητή κατάστασης που προκύπτει από το πείραμα. Φαίνεται ξεκάθαρα ότι έχουμε ασταθή παρατηρητή.



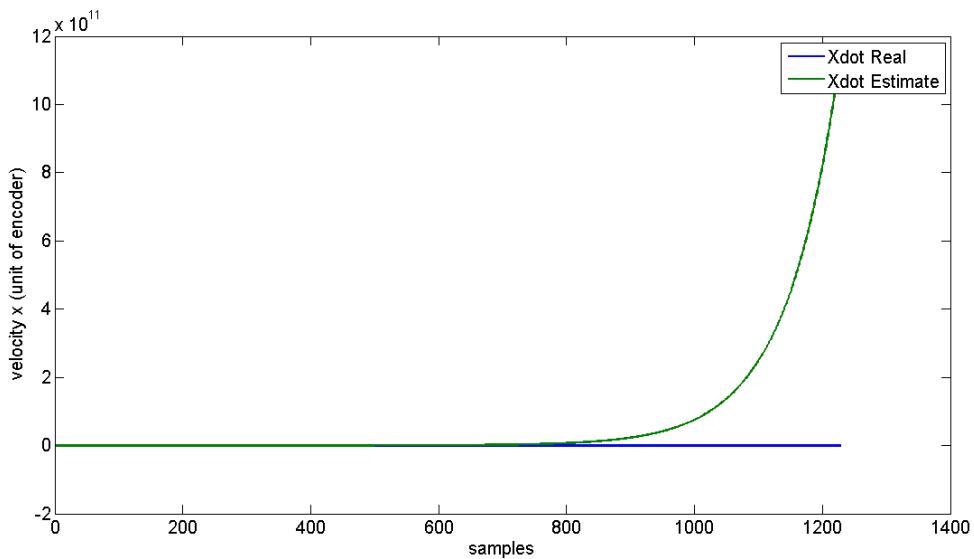
Σύγκριση εκτίμησης της γωνιάς με πραγματική γωνία



Σύγκριση εκτίμησης της γωνιακής ταχύτητας με πραγματική γωνιακή ταχύτητας



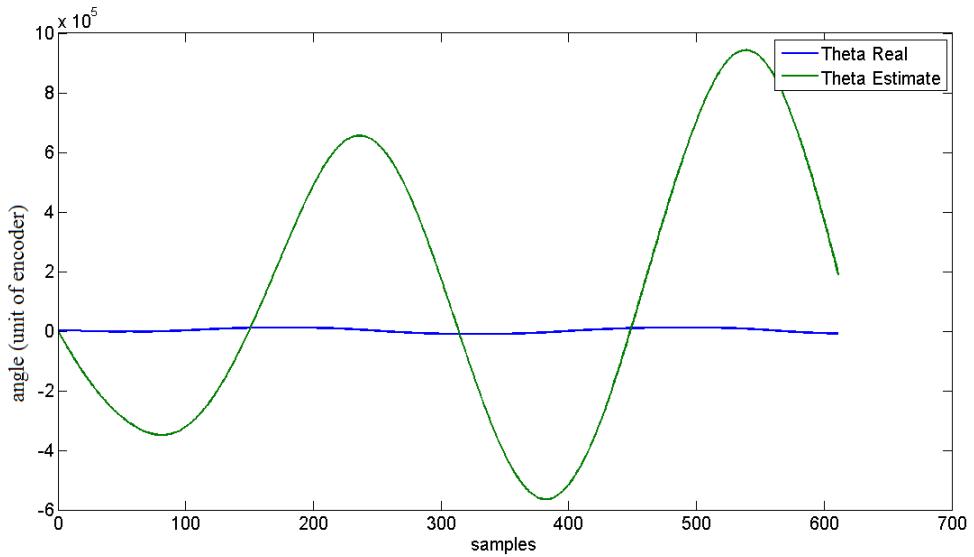
Σύγκριση εκτίμησης της μετατόπισης κατά x με την πραγματική μετατόπιση κατά x



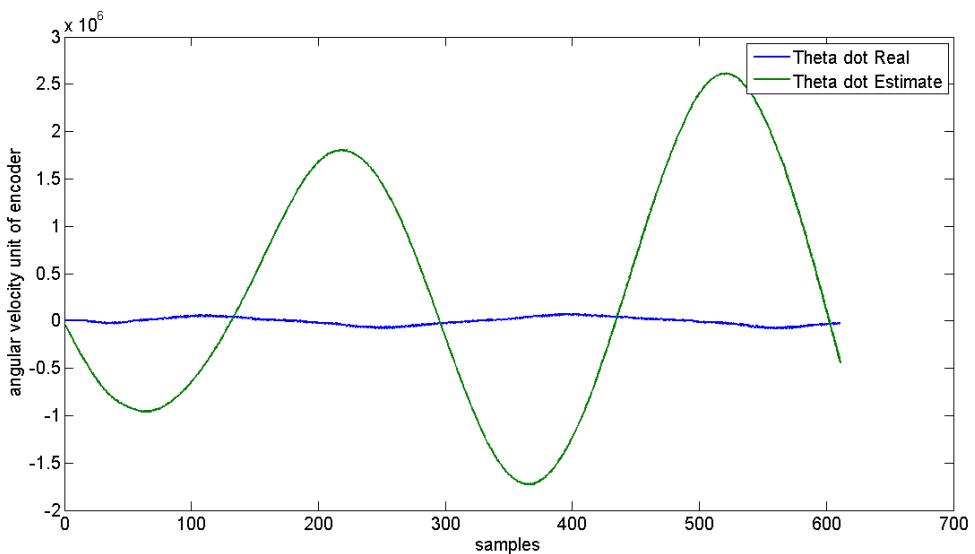
Σύγκριση εκτίμηση της ταχύτητας κατά x με την πραγματική ταχύτητα κατά x

2-Θέση πόλων παρατηρητή $[-3 \pm 1i, -1 \pm 5i]$

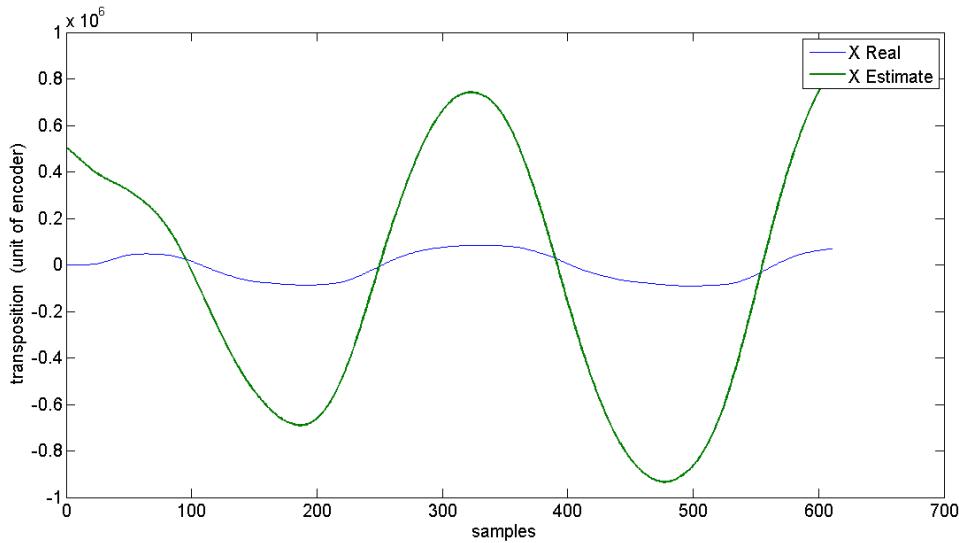
Αυτήν την φόρα τοποθετούμε τους πόλους του παρατηρητή χοντά στο φανταστικό άξονα, αλλά σε αριστερό ημιεπίπεδο, όπως φαίνεται και από τα παρακάτω διαγράμματα, το σύστημα παρατηρητή δείχνει μια σχετική ευστάθεια αλλά τείνει να είναι πολύ πιο μακριά από τις πραγματικές τιμές των μεταβλητών κατάστασης.



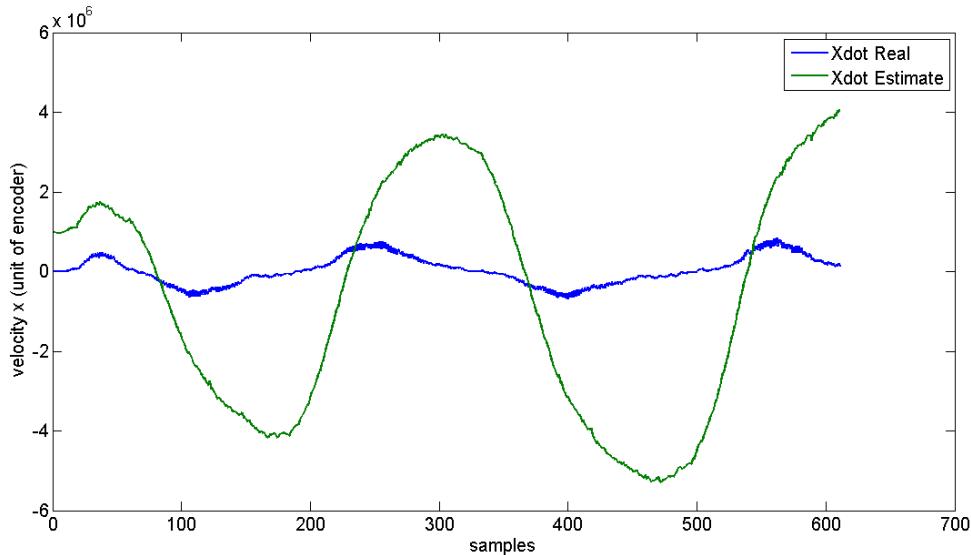
Σύγκριση εκτίμησης της γωνίας με πραγματική γωνία



Σύγκριση εκτίμησης της γωνιακής ταχύτητας με πραγματική γωνιακή ταχύτητας



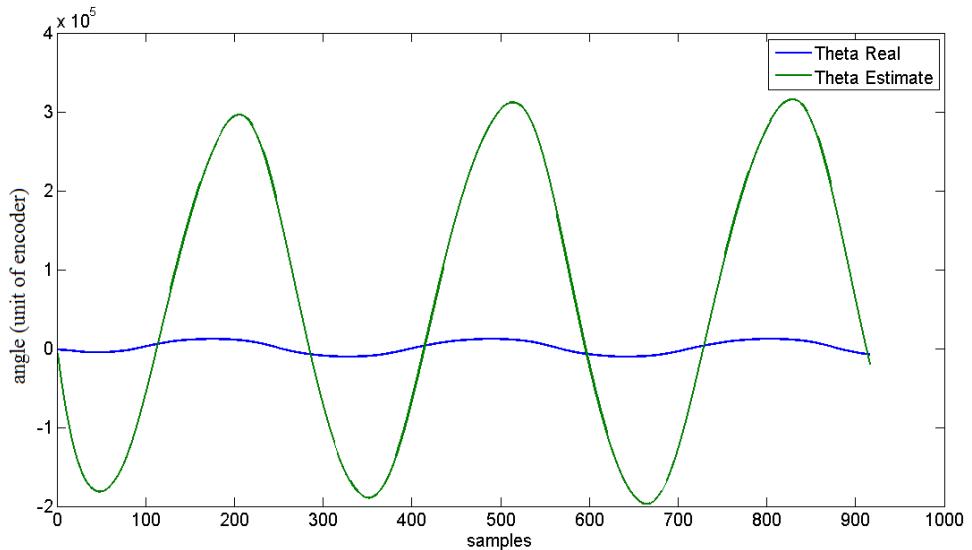
Σύγκριση εκτίμησης της μετατόπισης κατά x με την πραγματική μετατόπιση κατά x



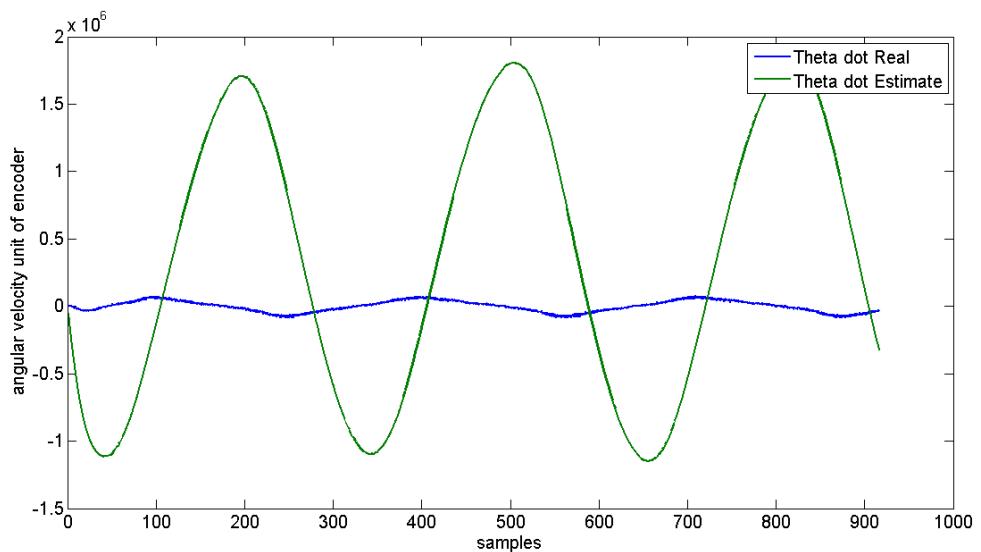
Σύγκριση εκτίμησης της ταχύτητας κατά x με την πραγματική ταχύτητα κατά x

3-Θέση πόλων παρατηρητή $[-6 \pm 1i, -3 \pm 5i]$

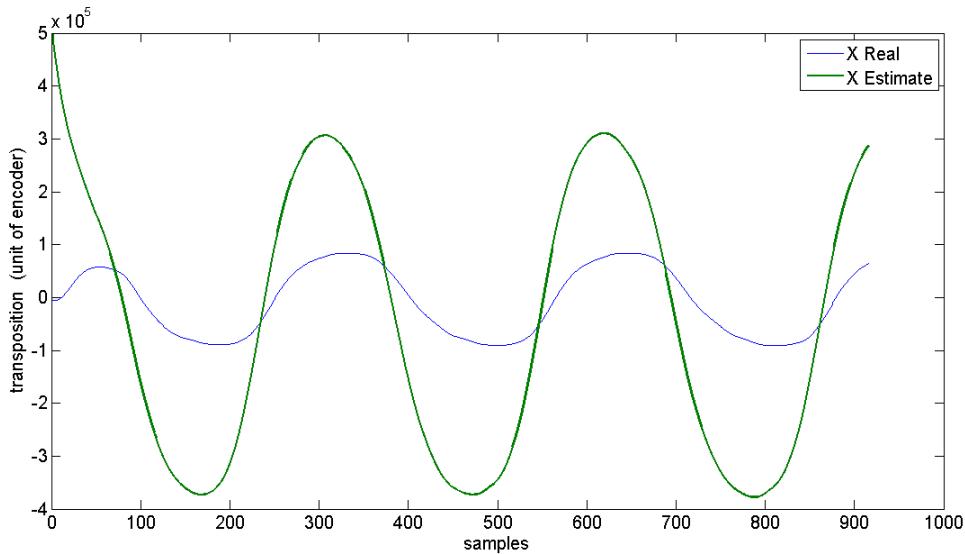
Αυτήν την φόρα τοποθετούμε τους πόλους του παρατηρητή στην θέση $[-6 \pm 1i, -3 \pm 5i]$. Στα παρακάτω διαγράμματα παρατηρείται ότι οι ταλαντώσεις του παρατηρητή έχουν βελτιωθεί αλλά ακόμα είναι πολύ μακριά από τις πραγματικές τιμές των μεταβλητών κατάστασης.



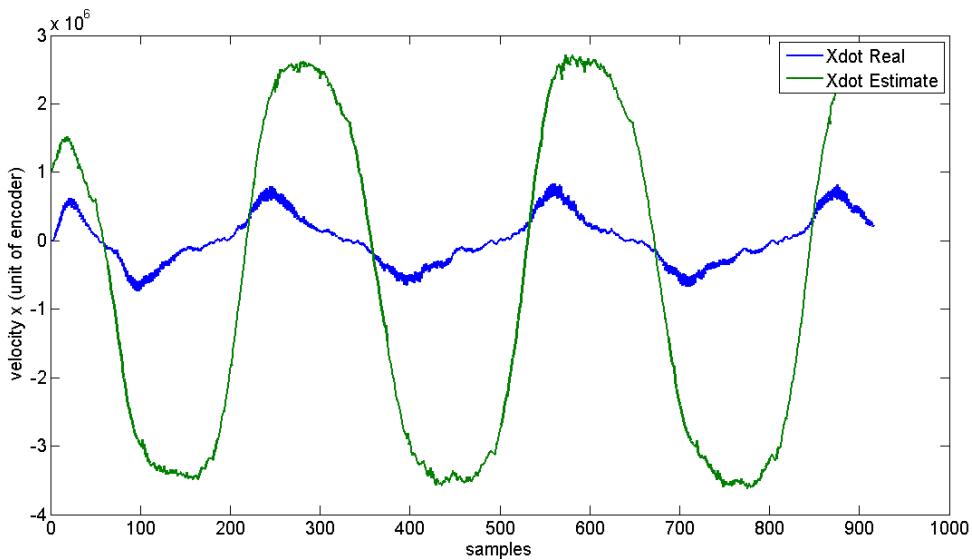
Σύγκριση εκτίμησης της γωνίας με πραγματική γωνία



Σύγκριση εκτίμησης της γωνιακής ταχύτητας με πραγματική γωνιακή ταχύτητας



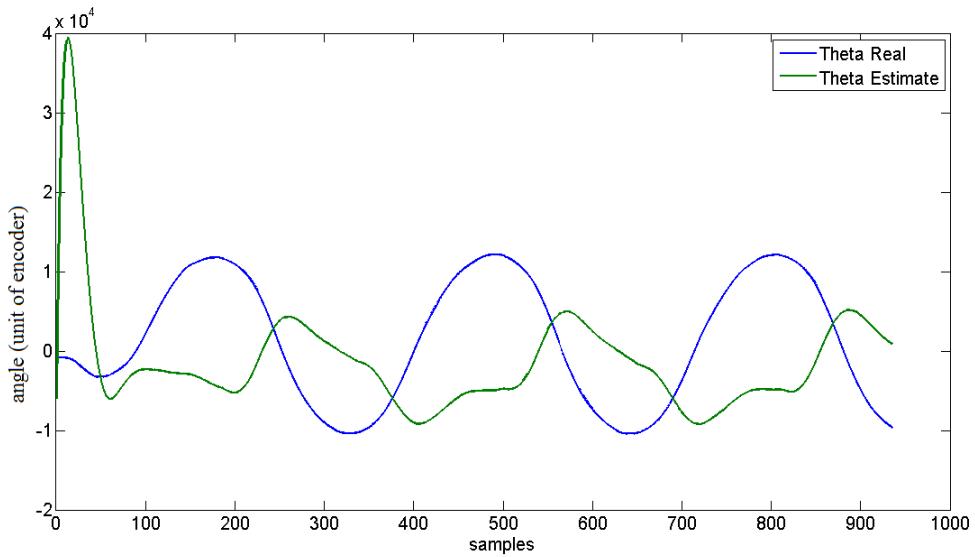
Σύγκριση εκτίμησης της μετατόπισης κατά x με την πραγματική μετατόπιση κατά x



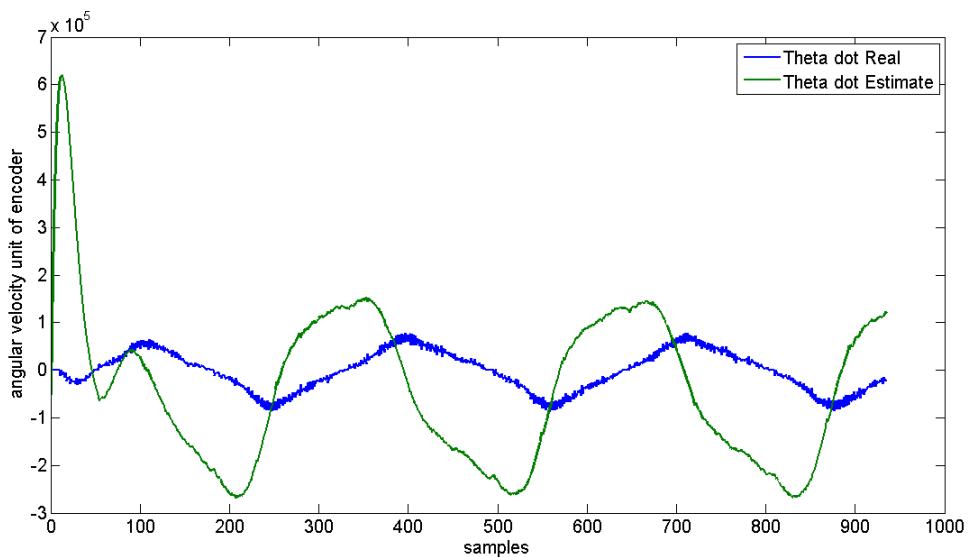
Σύγκριση εκτίμησης της ταχύτητας κατά x με την πραγματική ταχύτητα κατά x

4-Θέση πόλων παρατηρητή $[-15 \pm 1i, -12 \pm 5i]$

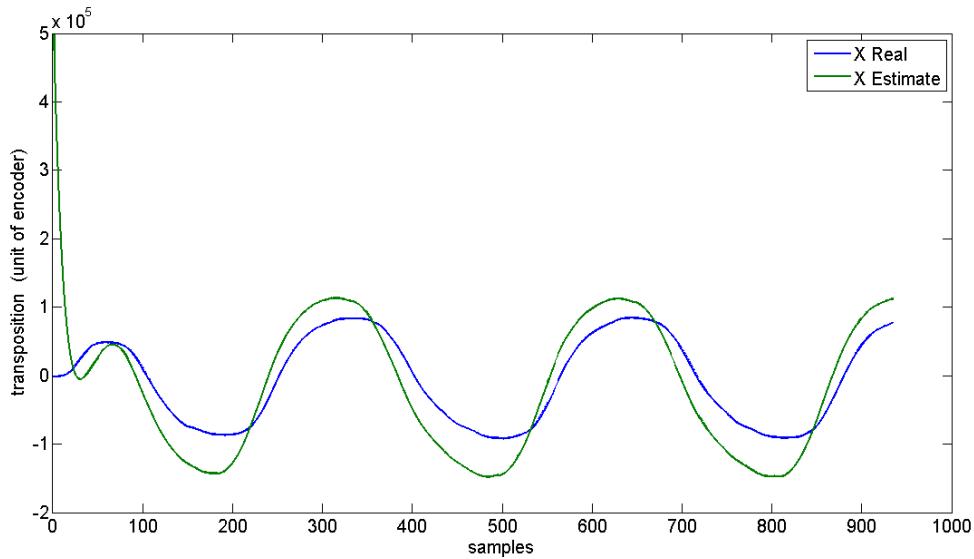
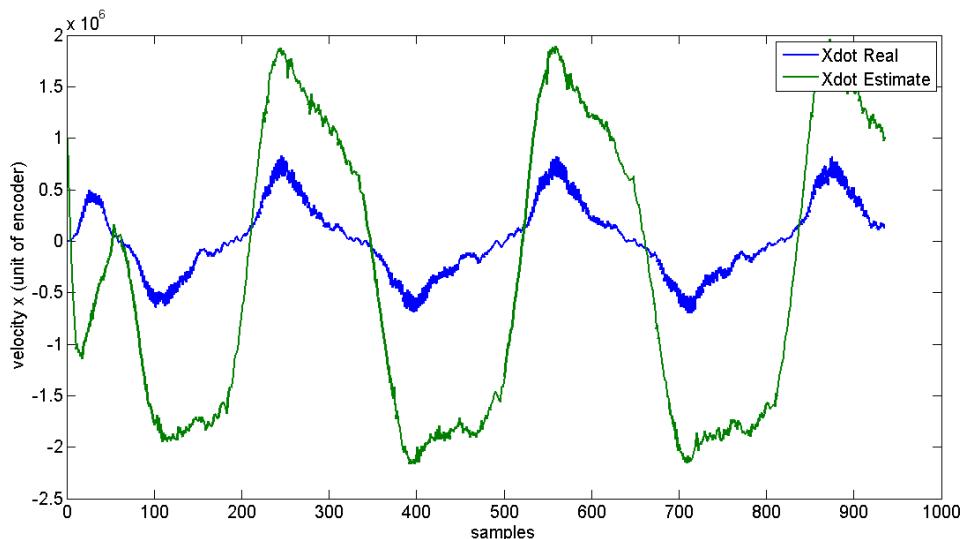
Αυτήν την φόρα τοποθετούμε τους πόλους του παρατηρητή στην θέση $[-15 \pm 1i, -12 \pm 5i]$. Στα παρακάτω διαγράμματα που εξήγησαν παρατηρείται ότι οι ταλαντώσεις του παρατηρητή έχουν βελτιωθεί πολύ περισσότερο σε σχέση με πριν, αλλά δεν έχουν ταυτιστεί με τις πραγματικές τιμές, φαίνεται ότι ο παρατηρητής είναι αργός. Τότε στο επόμενο βήμα τοποθετούνται οι πόλοι του παρατηρητή ακόμα πιο αριστερά.



Σύγκριση εκτίμησης της γωνίας με πραγματική γωνία

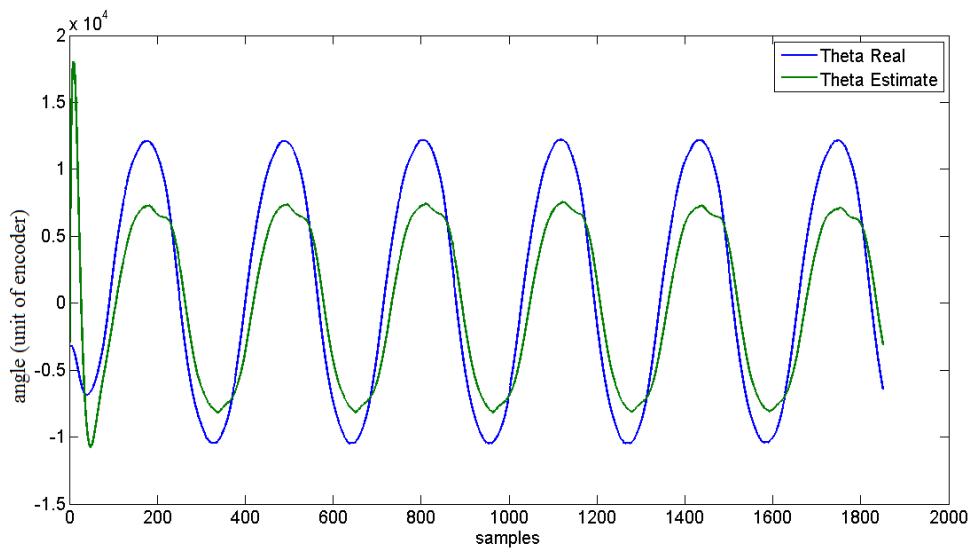


Σύγκριση εκτίμησης της γωνιακής ταχύτητας με πραγματική γωνιακή ταχύτητας

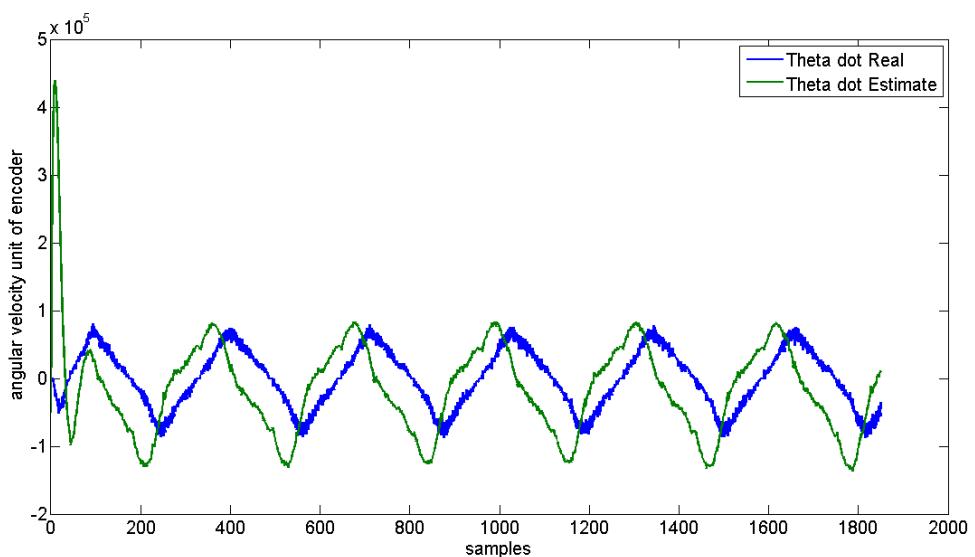
Σύγκριση εκτίμησης της μετατόπισης κατά x με την πραγματική μετατόπιση κατά x Σύγκριση εκτίμηση της ταχύτητας κατά x με την πραγματική ταχύτητα κατά x

5-Θέση πόλων παρατηρητή $[-20 \pm 2i, -16 \pm 5i]$

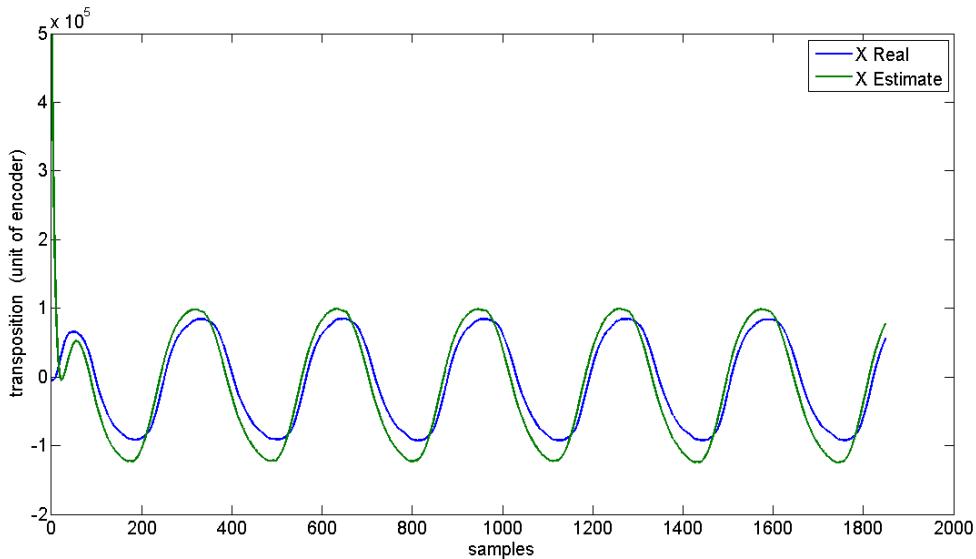
Αυτήν την φόρα τοποθετούμε τους πόλους του παρατηρητή στην θέση $[-20 \pm 2i, -16 \pm 5i]$, από τα παρακάτω διαγράμματα συμπεραίνεται ότι οι ταλαντώσεις του παρατηρητή έχουν βελτιωθεί πολύ περισσότερο σε σχέση με πριν, αλλά ακόμα δεν έχουν ταυτιστεί με τις πραγματικές τιμές, παρατηρείται σαφέστατα ότι ο παρατηρητής είναι ακόμα αργός.



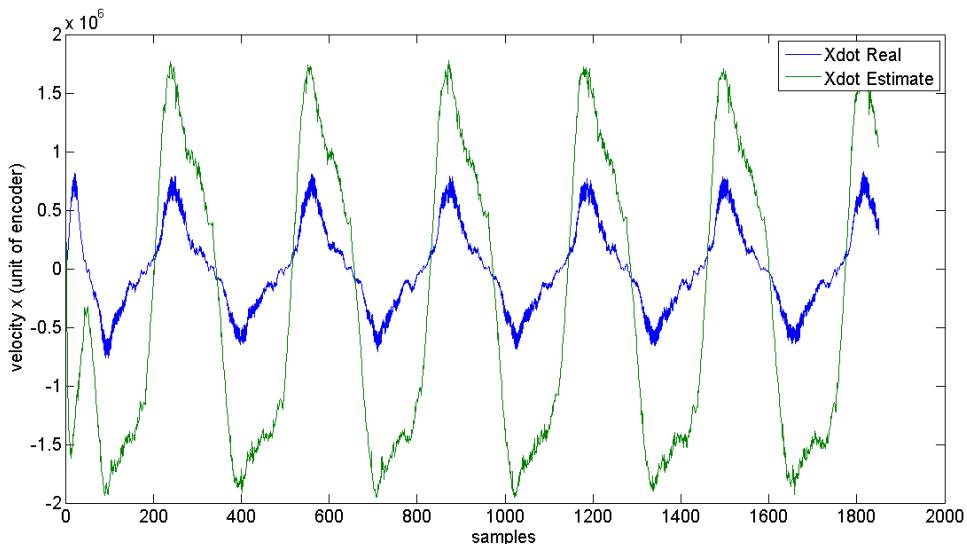
Σύγκριση εκτίμησης της γωνίας με πραγματική γωνία



Σύγκριση εκτίμησης της γωνιακής ταχύτητας με πραγματική γωνιακή ταχύτητας



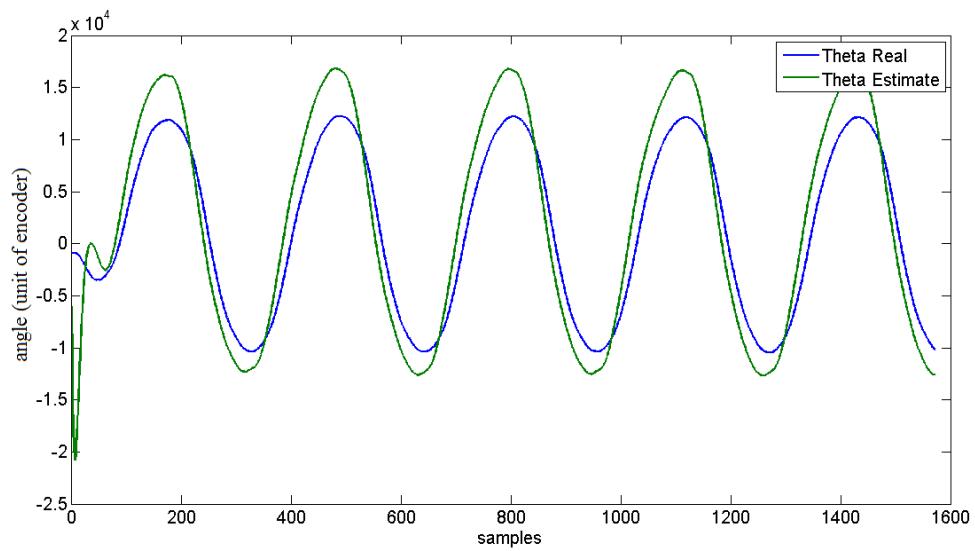
Σύγκριση εκτίμησης της μετατόπισης κατά x με την πραγματική μετατόπιση κατά x



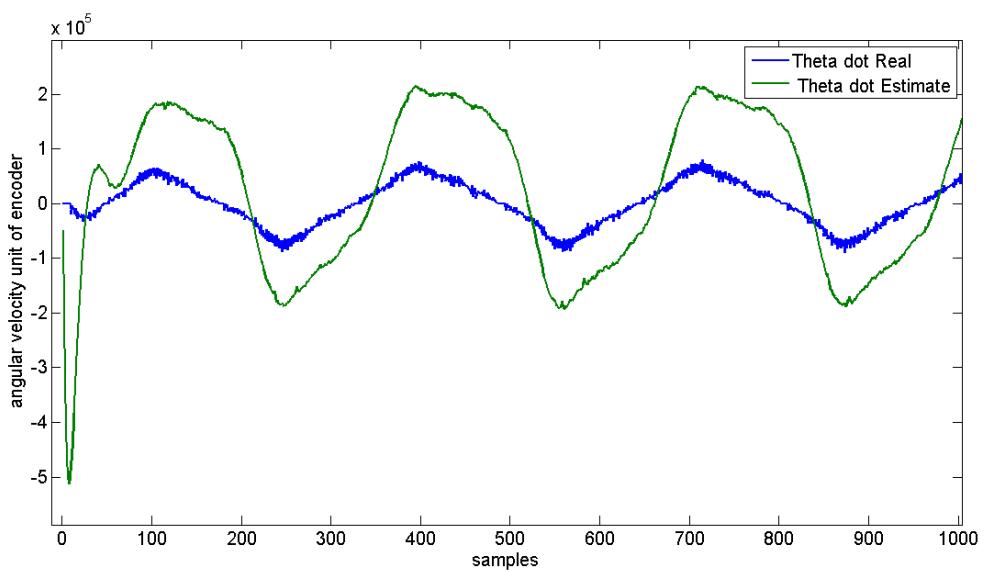
Σύγκριση εκτίμηση της ταχύτητας κατά x με την πραγματική ταχύτητα κατά x

6-Θέση πόλων παρατηρητή $[-25 \pm 2i, -21 \pm 5i]$

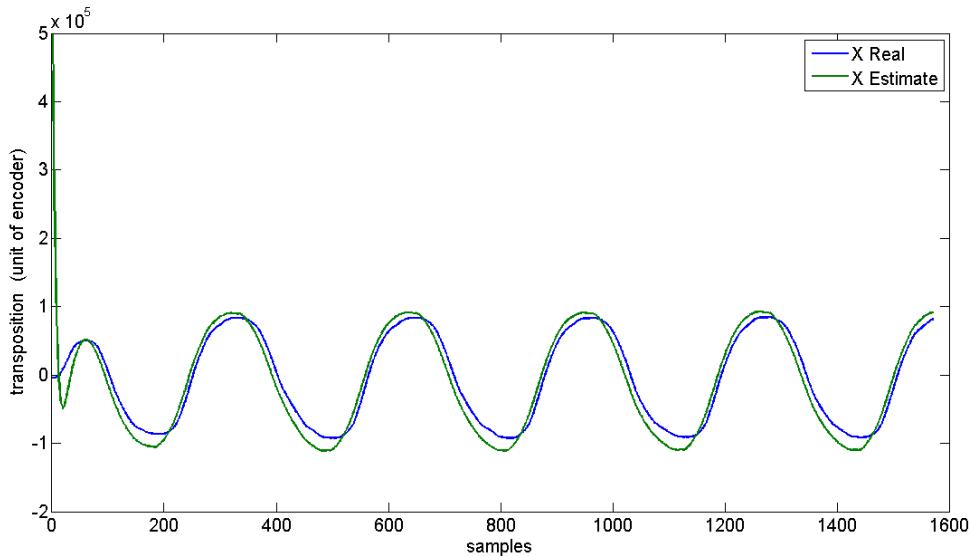
Αυτήν την φόρα τοποθετούμε τους πόλους του παρατηρητή στην θέση $[-25 \pm 2i, -21 \pm 5i]$, από παρακάτω διαγράμματα παρατηρείται ότι οι ταλαντώσεις του παρατηρητή έχουν βελτιωθεί αλλά και ο παρατηρητής έχει γίνει πιο γρήγορος σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση. Άλλα ακόμα δεν παρουσιάζει μια ικανοποιητική συμπεριφορά.



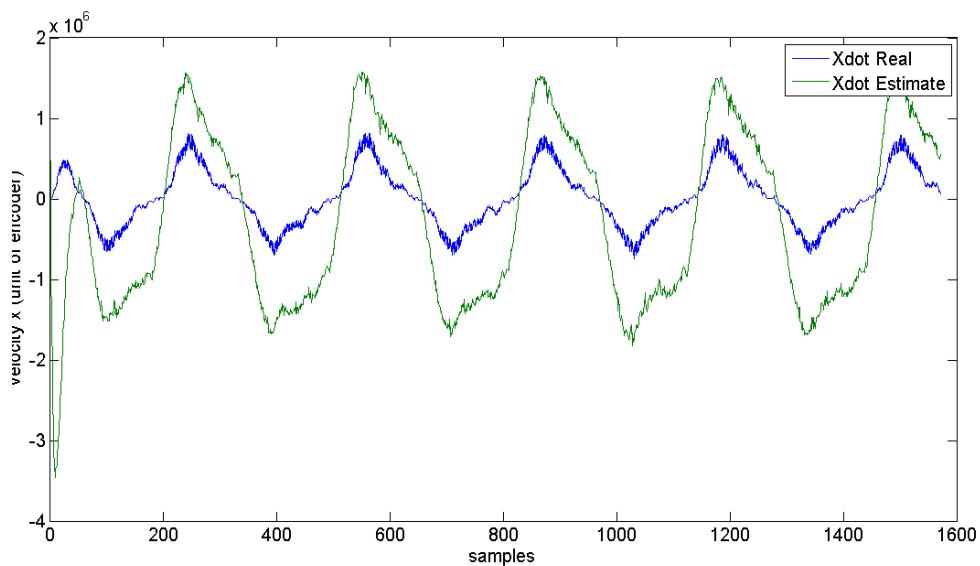
Σύγκριση εκτίμησης της γωνιάς με πραγματική γωνία



Σύγκριση εκτίμησης της γωνιακής ταχύτητας με πραγματική γωνιακή ταχύτητας



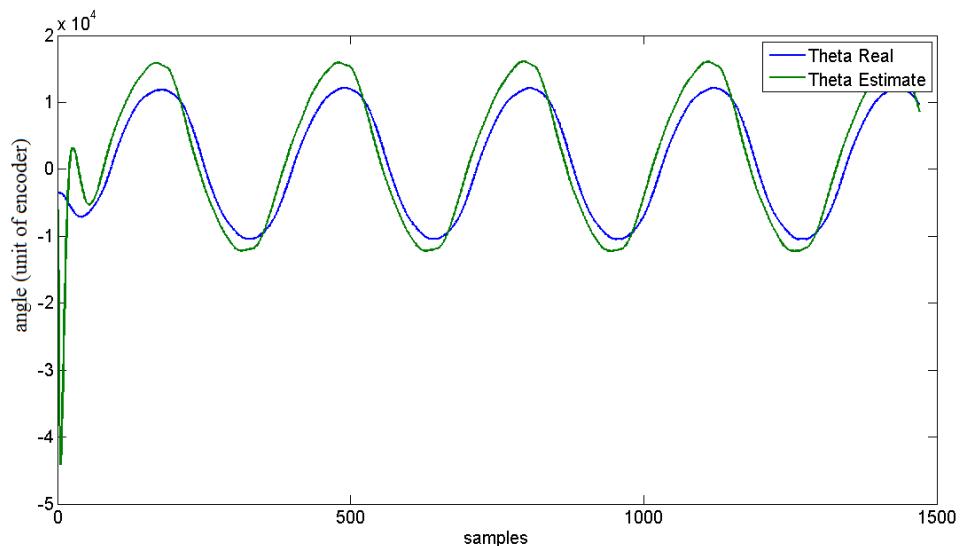
Σύγκριση εκτίμησης της μετατόπισης κατά x με την πραγματική μετατόπιση κατά x



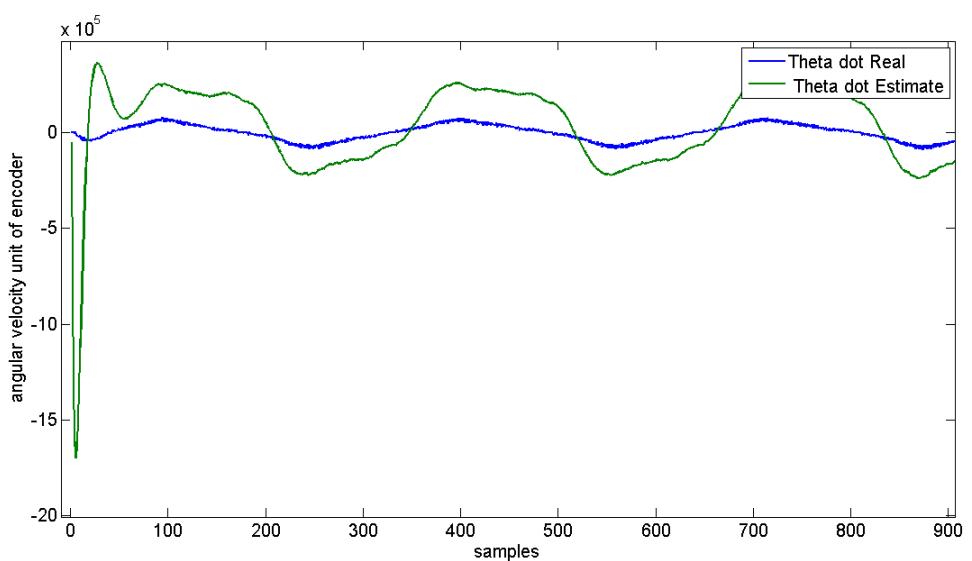
Σύγκριση εκτίμηση της ταχύτητας κατά x με την πραγματική ταχύτητα κατά x

7-Θέση πόλων παρατηρητή $[-40 \pm 2i, -28 \pm 5i]$

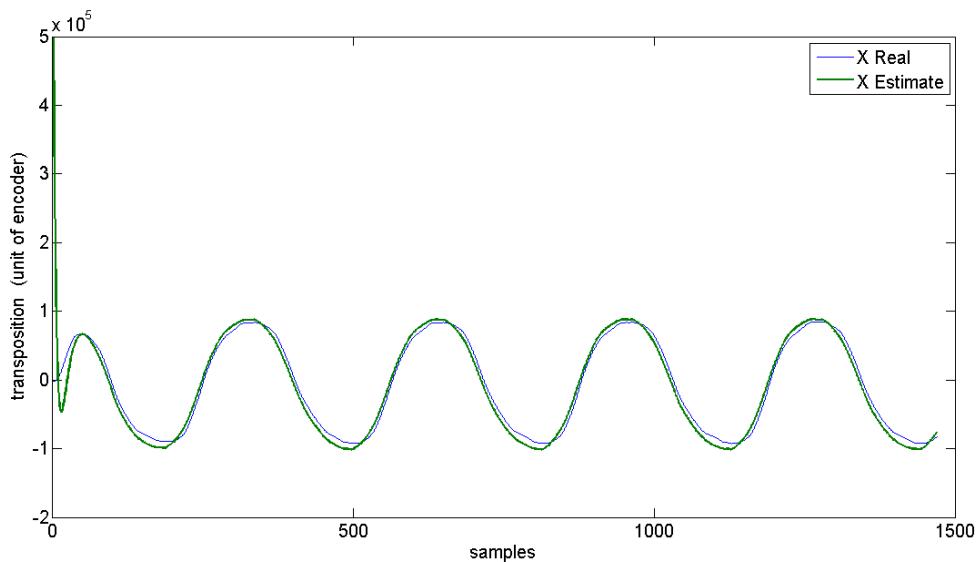
Αυτήν την φόρα τοποθετούμε τους πόλους του παρατηρητή στην $[-40 \pm 2i, -28 \pm 5i]$. Στα παρακάτω διαγράμματα παρατηρείται ότι οι ταλαντώσεις του παρατηρητή έχουν βελτιωθεί αλλά και ο παρατηρητής έχει γίνει πιο γρήγορος σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση. Ακόμα όμως δεν παρουσιάζει μια ικανοποιητική συμπεριφορά.



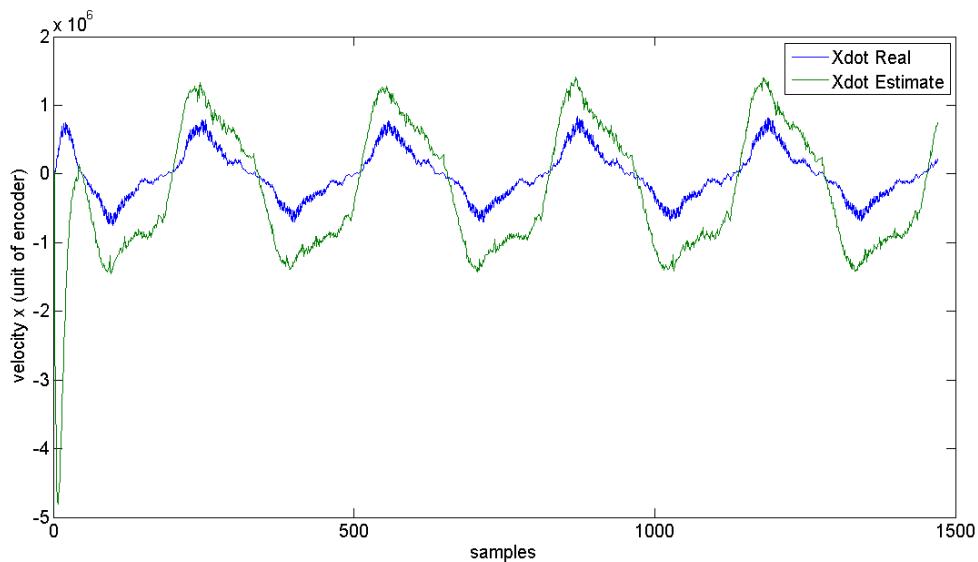
Σύγκριση εκτίμησης της γωνιάς με πραγματική γωνία



Σύγκριση εκτίμησης της γωνιακής ταχύτητας με πραγματική γωνιακή ταχύτητας



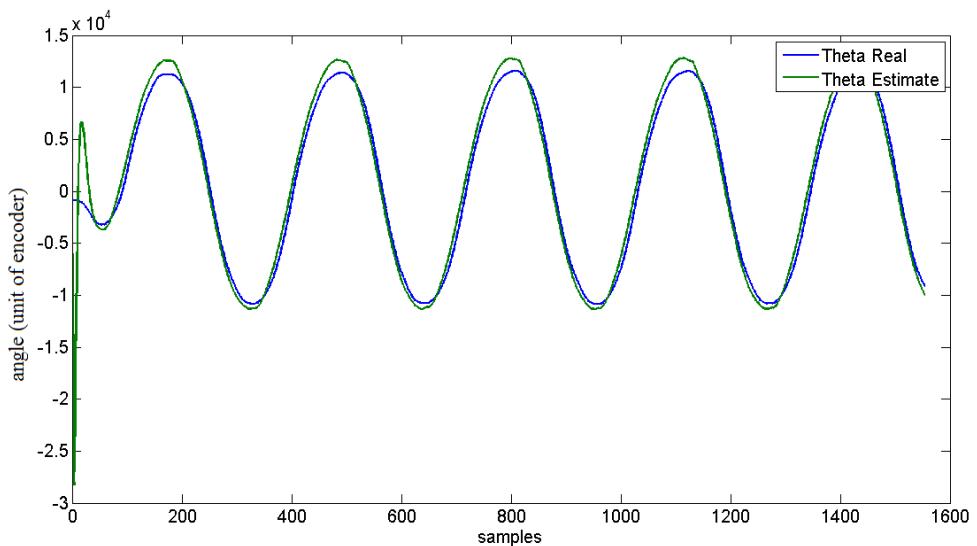
Σύγκριση εκτίμησης της μετατόπισης κατά x με την πραγματική μετατόπιση κατά x



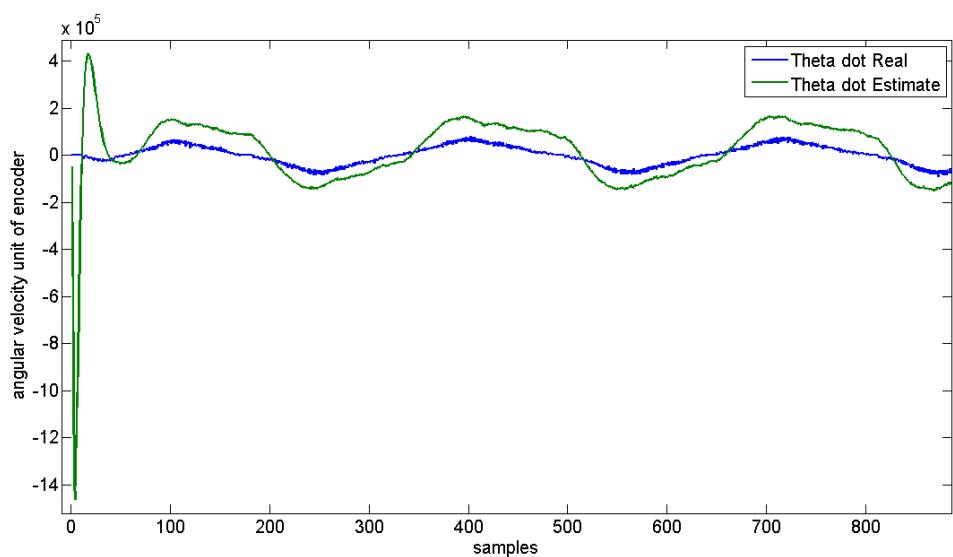
Σύγκριση εκτίμηση της ταχύτητας κατά x με την πραγματική ταχύτητα κατά x

8-Θέση πόλων παρατηρητή $[-60 \pm 2i, -40 \pm 5i]$

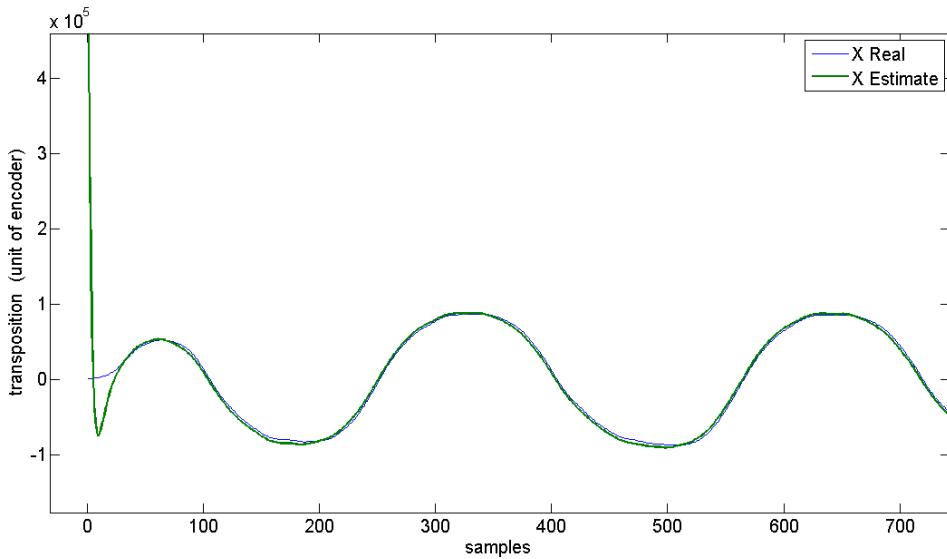
Αυτήν την φόρα τοποθετούμε τους πόλους του παρατηρητή στην $[-60 \pm 2i, -40 \pm 5i]$. Στα διαγράμματα που εξήχθησαν ότι οι τιμές εκτιμήσης του παρατηρητή τείνουν να ταυτιστούν με τις πραγματικές τιμές, αλλά ακόμα ο παρατηρητής είναι αργός.



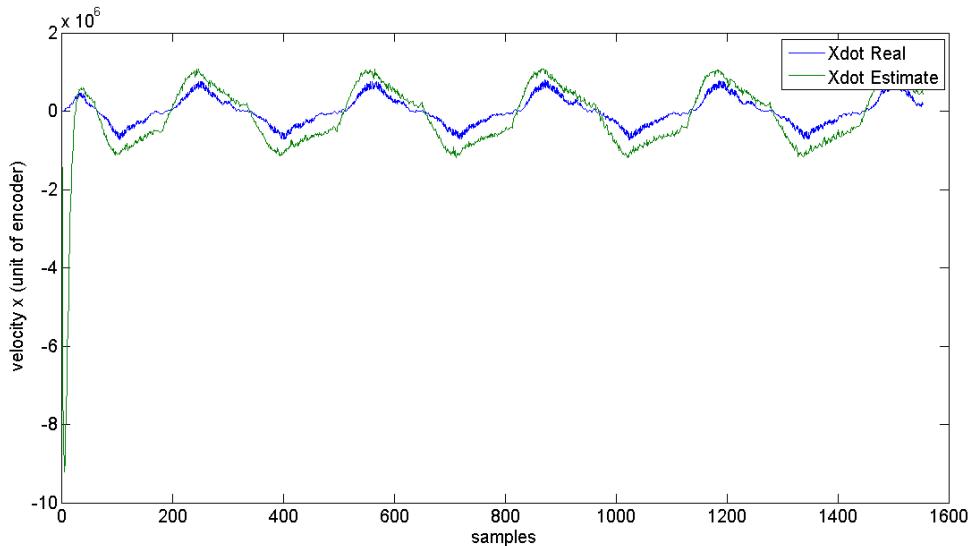
Σύγκριση εκτίμησης της γωνίας με πραγματική γωνία



Σύγκριση εκτίμησης της γωνιακής ταχύτητας με πραγματική γωνιακή ταχύτητας



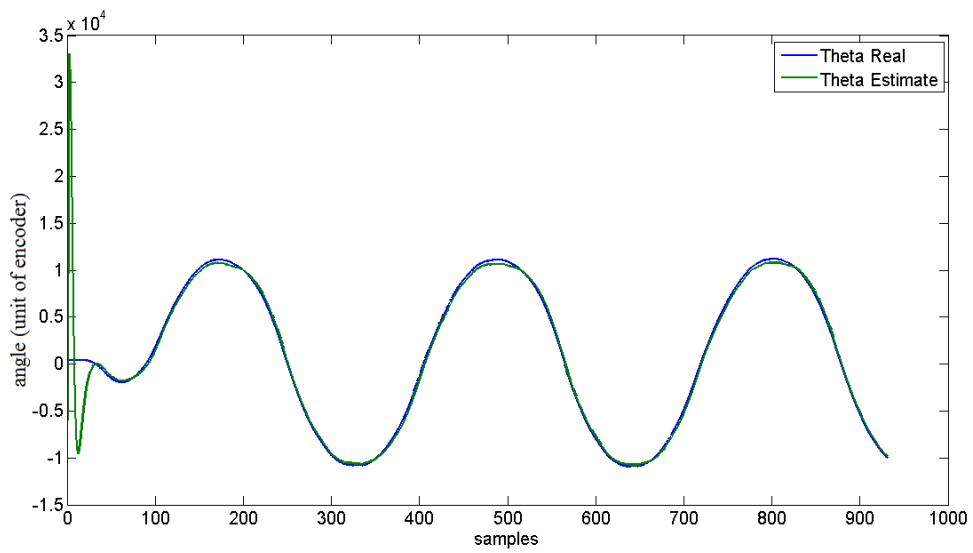
Σύγκριση εκτίμησης της μετατόπισης κατά x με την πραγματική μετατόπιση κατά x



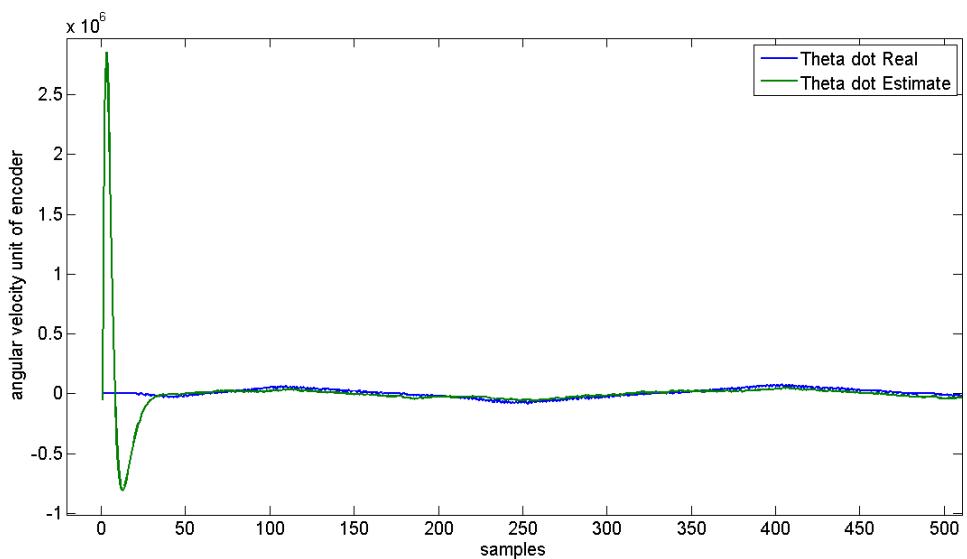
Σύγκριση εκτίμησης της ταχύτητας κατά x με την πραγματική ταχύτητα κατά x

9-Θέση πόλων παρατηρητή $[-80 \pm 2i, -60 \pm 5i]$

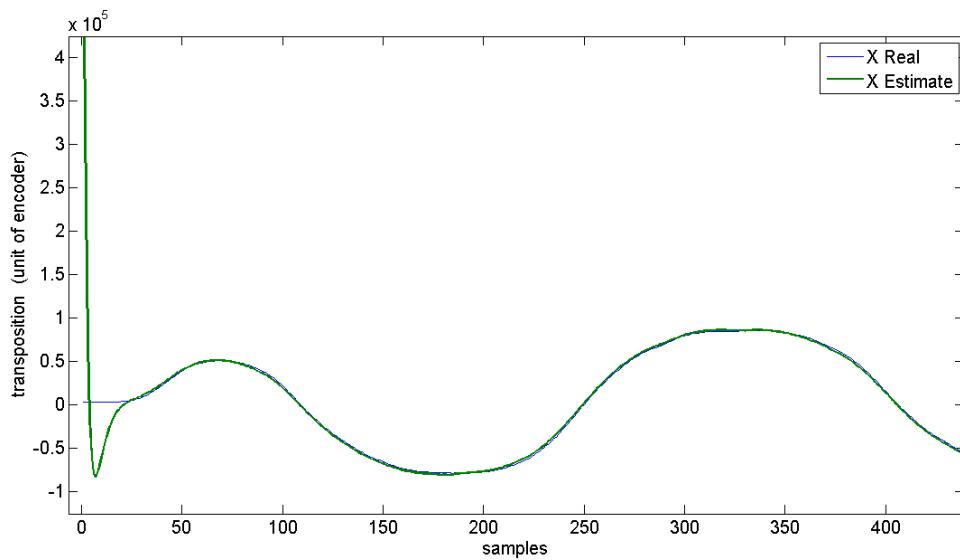
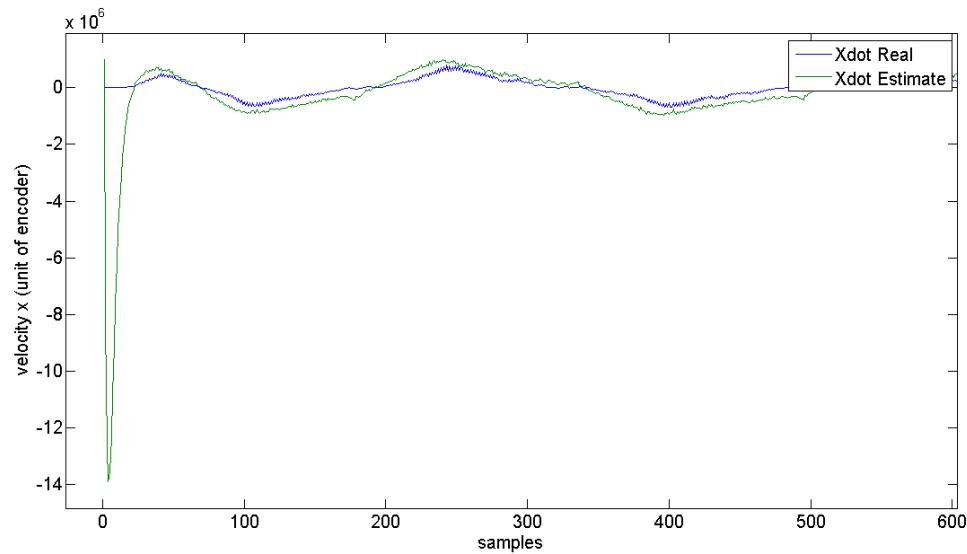
Αυτήν την φόρα τοποθετούμε τους πόλους του παρατηρητή στην $[-80 \pm 2i, -60 \pm 5i]$. Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνεται ότι οι τιμές εκτίμησης του παρατηρητή είναι πολύ κοντά στις πραγματικές τιμές μεταβλητών κατάστασης αλλά ακόμα δεν έχουν ταυτιστεί τελείως.



Σύγκριση εκτίμησης της γωνιάς με πραγματική γωνία

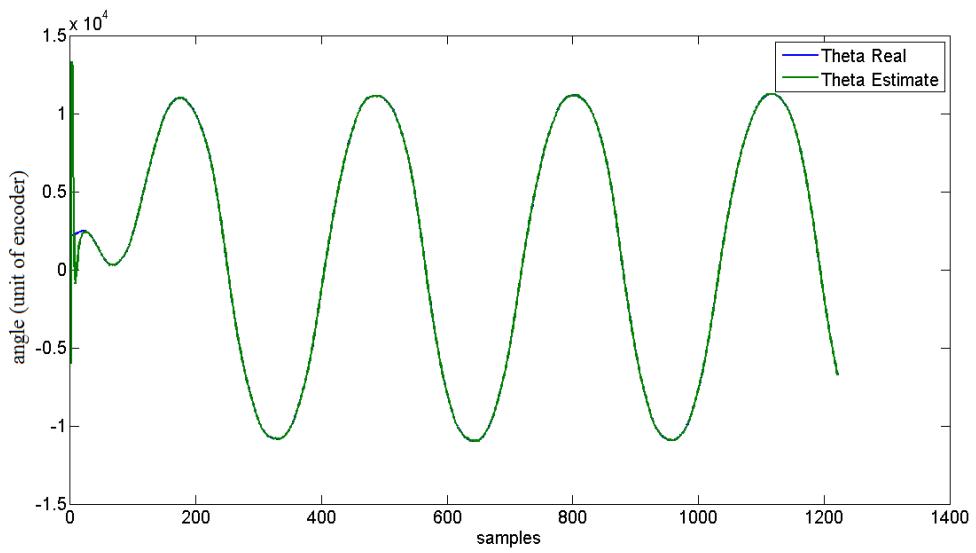


Σύγκριση εκτίμησης της γωνιακής ταχύτητας με πραγματική γωνιακή ταχύτητας

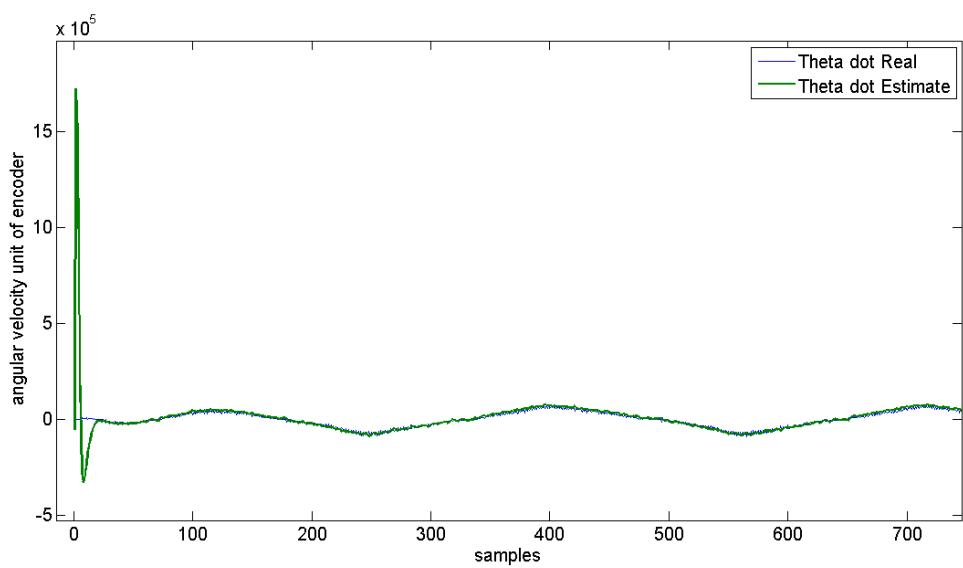
Σύγκριση εκτίμησης της μετατόπισης κατά x με την πραγματική μετατόπιση κατά x Σύγκριση εκτίμησης της ταχύτητας κατά x με την πραγματική ταχύτητα κατά x

10-Θέση πόλων παρατηρητή $[-120 \pm 2i, -90 \pm 5i]$

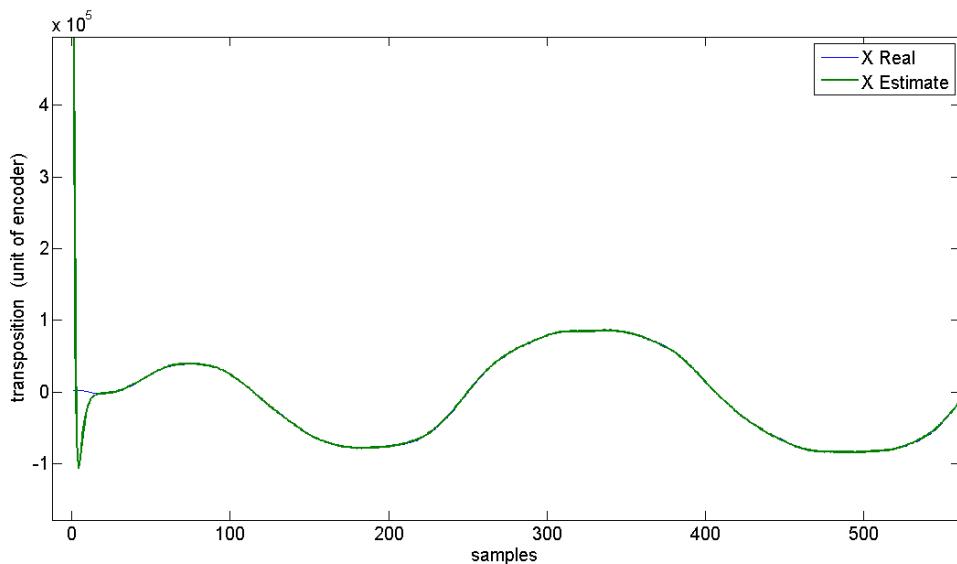
Αυτήν την φόρα τοποθετούμε τους πόλους του παρατηρητή στην $[-120 \pm 2i, -90 \pm 5i]$. Από τα παρακάτω διαγράμματα συμπεραίνεται ότι έχουμε σχεδόν ταύτιση, αλλά ακόμα στους όρους δεύτερων παραγώγων δεν έχουμε τελείως ταύτιση.



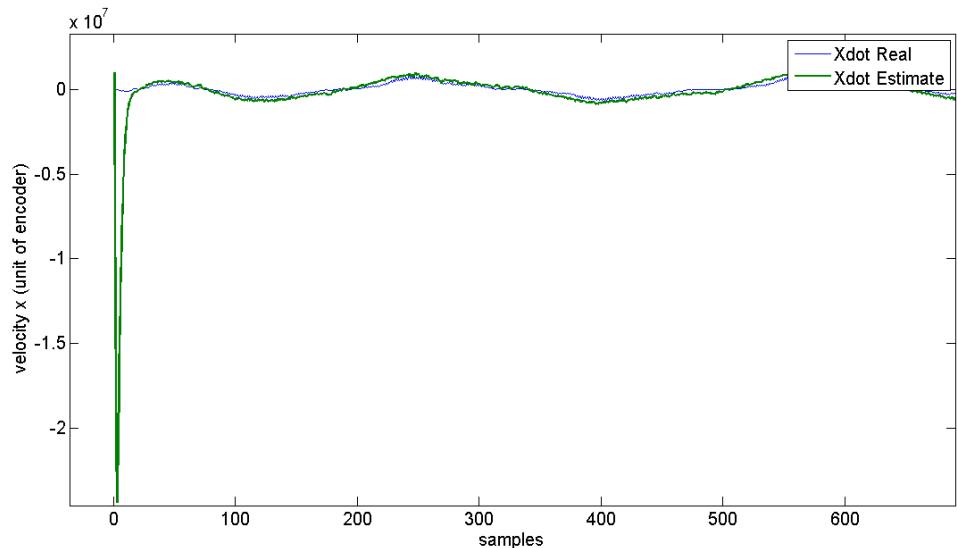
Σύγκριση εκτίμησης της γωνιάς με πραγματική γωνία



Σύγκριση εκτίμησης της γωνιακής ταχύτητας με πραγματική γωνιακή ταχύτητας



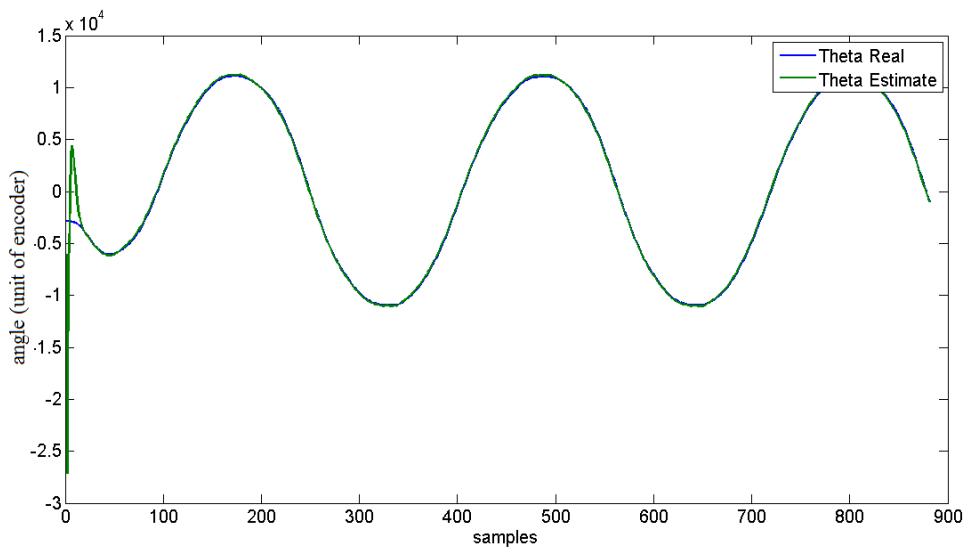
Σύγκριση εκτίμησης της μετατόπισης κατά x με την πραγματική μετατόπιση κατά x



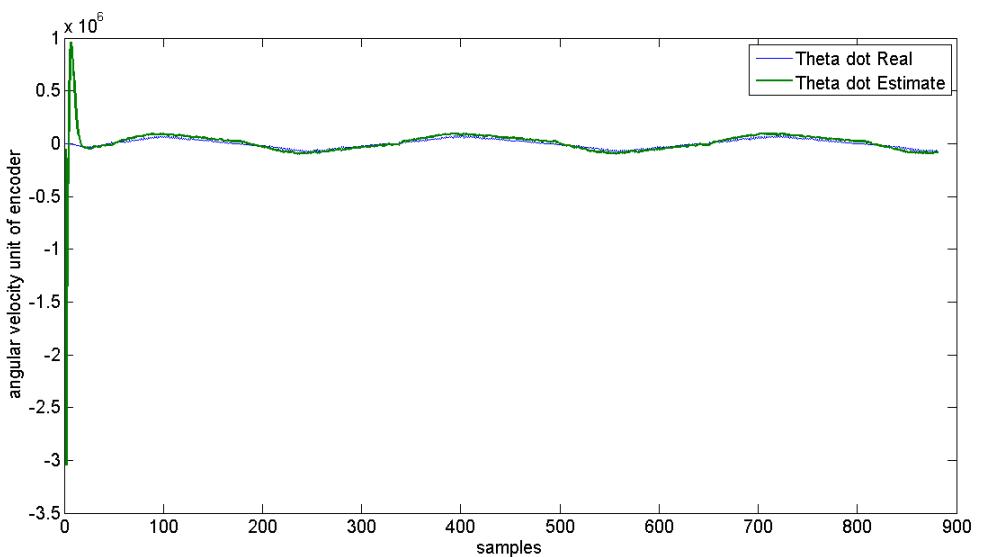
Σύγκριση εκτίμηση της ταχύτητας κατά x με την πραγματική ταχύτητα κατά x

11-Θέση πόλων παρατηρητή $[-130 \pm 2i, -100 \pm 5i]$

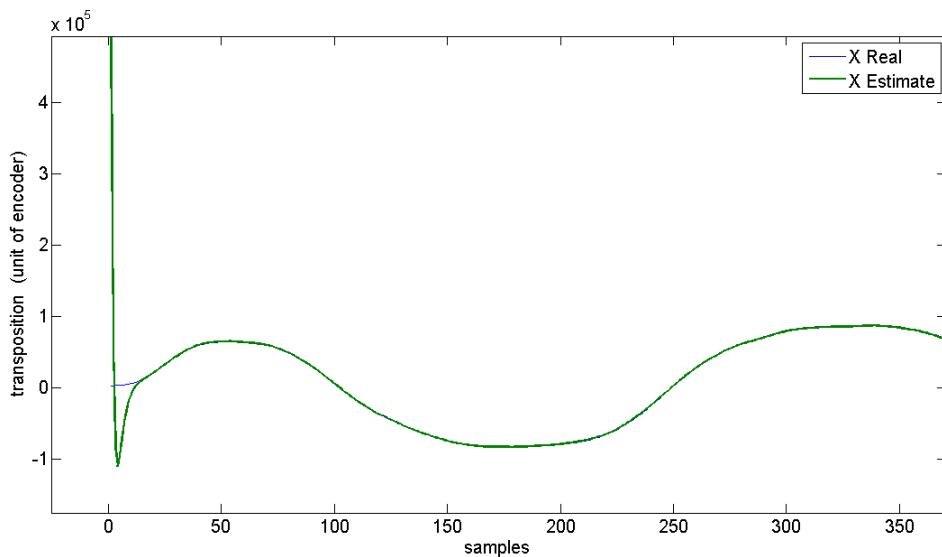
Αυτήν την φόρα τοποθετούμε τους πόλους του παρατηρητή στην $[-130 \pm 2i, -100 \pm 5i]$ από παρακάτω διαγράμματα παρατηρείται ότι έχουμε σχεδόν τάυτιση, επίσης βλέπουμε και στους 'Ορους δεύτερων παραγώγων έχουμε αρκετά καλή ταύτιση.



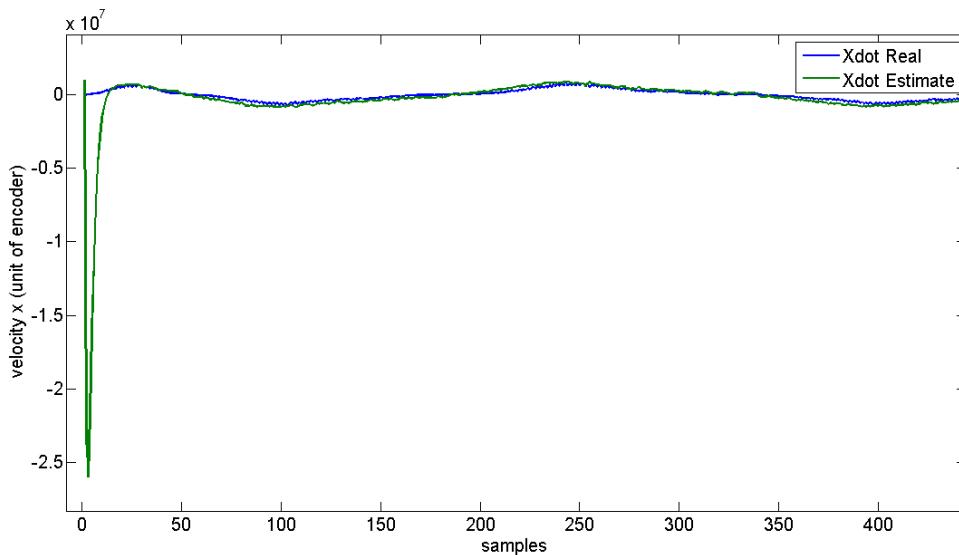
Σύγκριση εκτίμησης της γωνίας με πραγματική γωνία



Σύγκριση εκτίμησης της γωνιακής ταχύτητας με πραγματική γωνιακή ταχύτητας



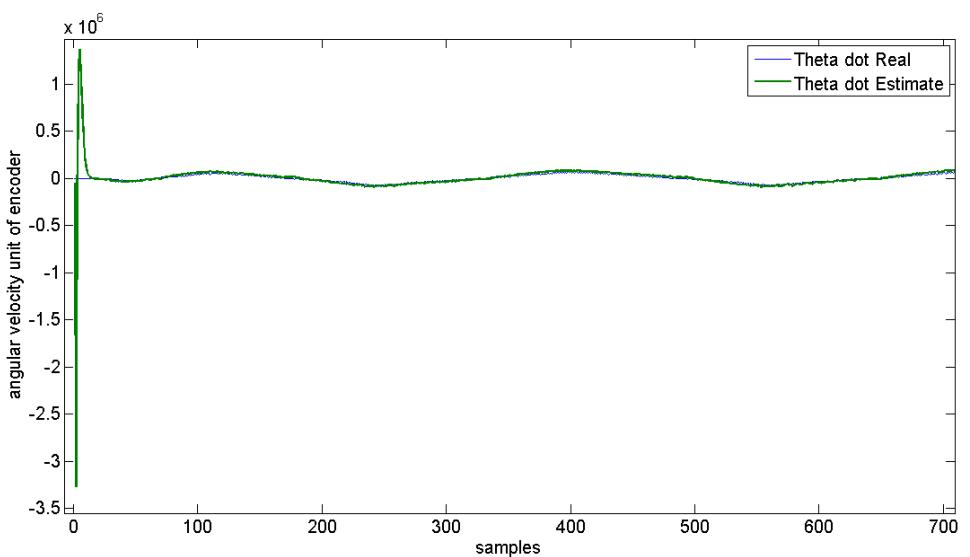
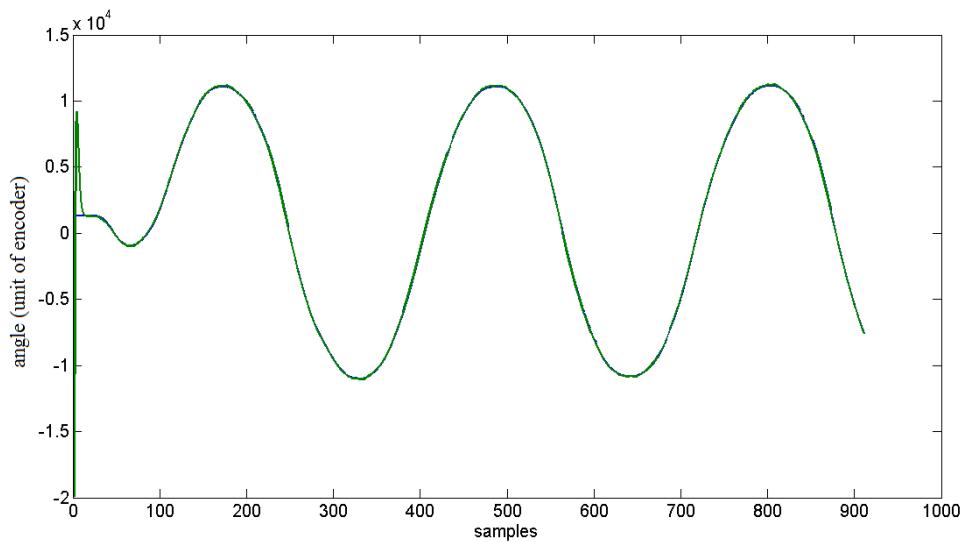
Σύγκριση εκτίμησης της μετατόπισης κατά x με την πραγματική μετατόπιση κατά x

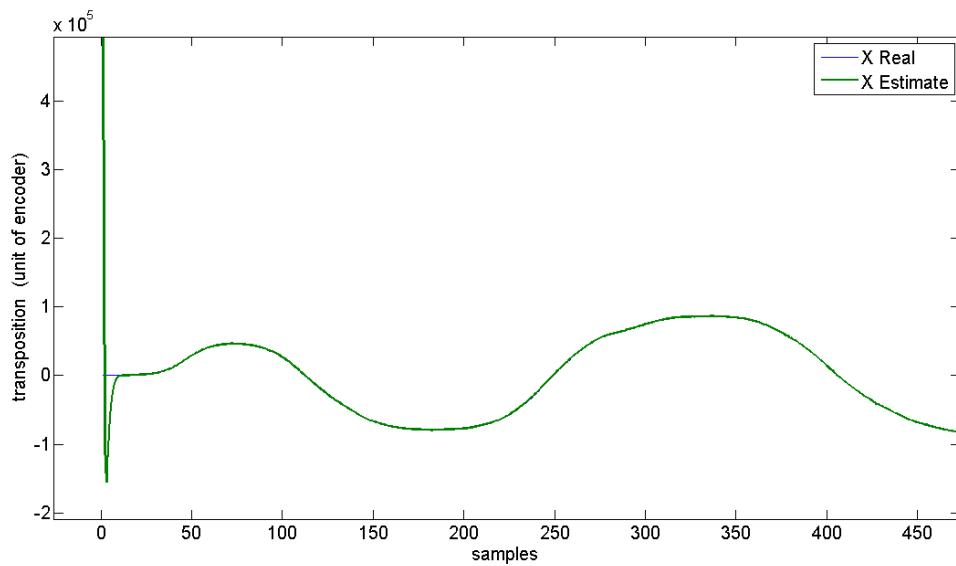


Σύγκριση εκτίμησης της ταχύτητας κατά x με την πραγματική ταχύτητα κατά x

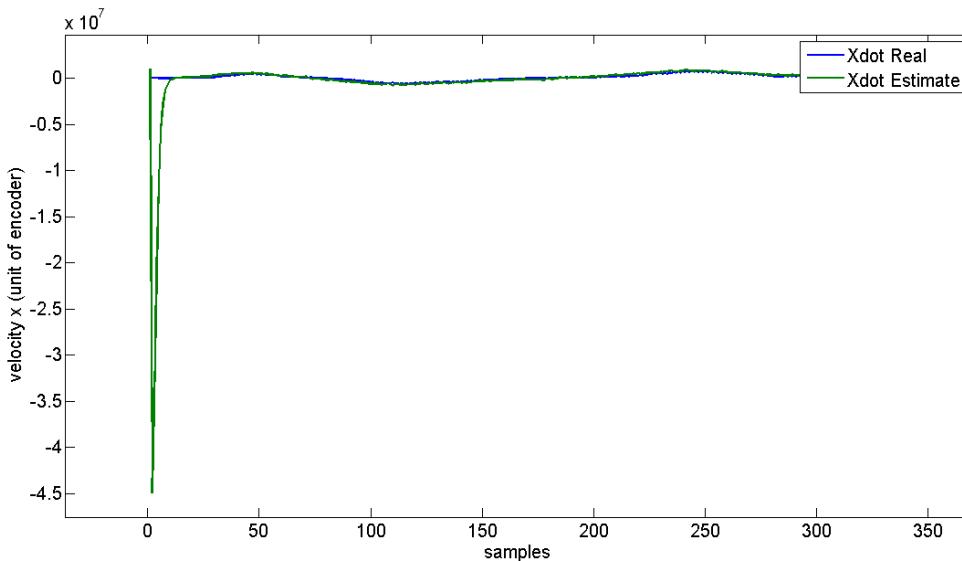
12-Θέση πόλων παρατηρητή $[-170 \pm 2i, -140 \pm 5i]$

Αυτήν την φόρα τοποθετούμε τους πόλους του παρατηρητή στην $[-170 \pm 2i, -140 \pm 5i]$, από τα παρακάτω διαγράμματα παρατηρείται ότι έχουμε σχεδόν πλήρη ταύτιση, και επίσης βλέπουμε και στους Όρους δεύτερων παραγώγων έχουμε αρκετά καλή ταύτιση.





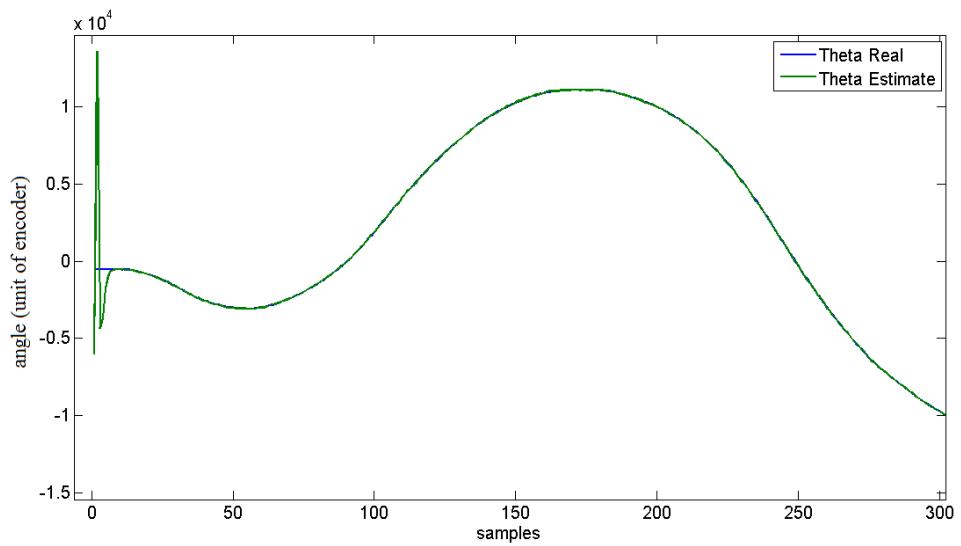
Σύγκριση εκτίμησης της μετατόπισης κατά x με την πραγματική μετατόπιση κατά x



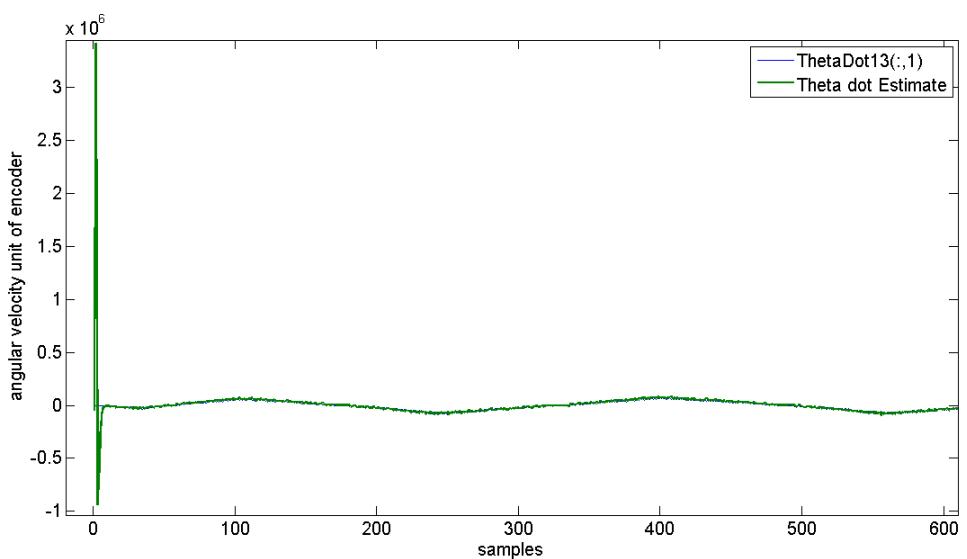
Σύγκριση εκτίμησης της ταχύτητας κατά x με την πραγματική ταχύτητα κατά x

13-Θέση πόλων παρατηρητή $[-230 \pm 2i, -200 \pm 5i]$

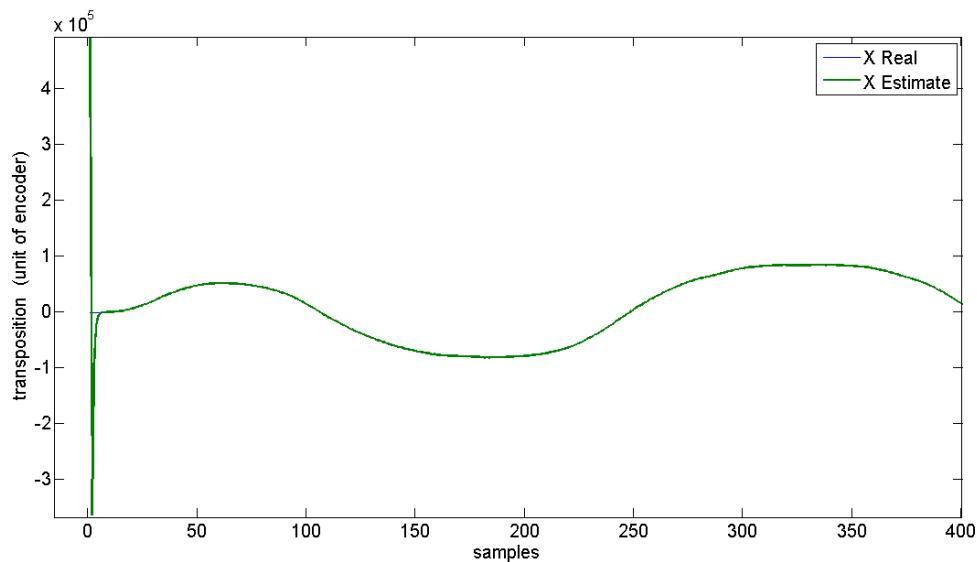
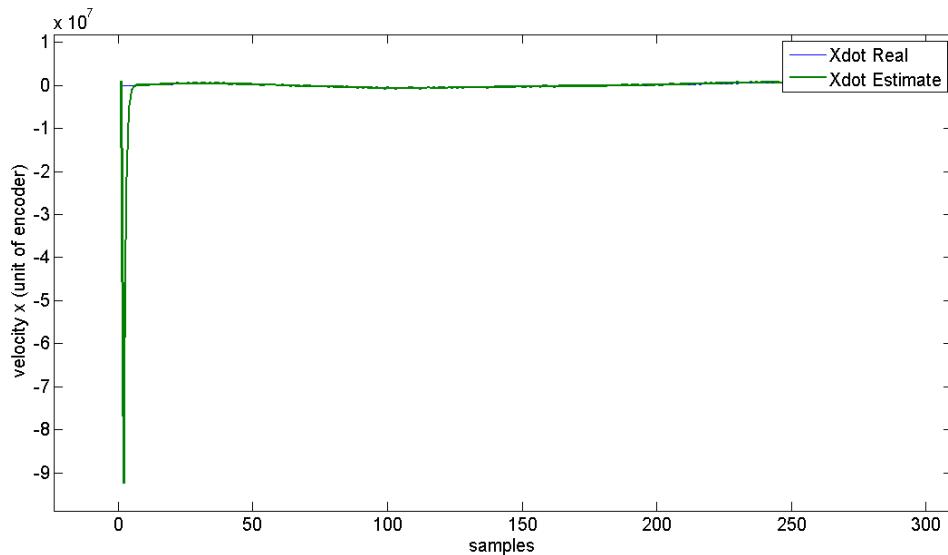
Αυτήν την φόρα τοποθετούμε τους πόλους του παρατηρητή στην $[-230 \pm 2i, -200 \pm 5i]$, από τα παρακάτω διαγράμματα παρατηρείται ότι έχουμε πλήρη ταύτιση, αλλά παρατηρείται ότι η αρχική υπερακοντισή του συστήματος παρατηρητή έχει μεγαλώσει, αυτό είναι η επιδράση του θορύβου.



Σύγκριση εκτίμησης της γωνίας με πραγματική γωνία

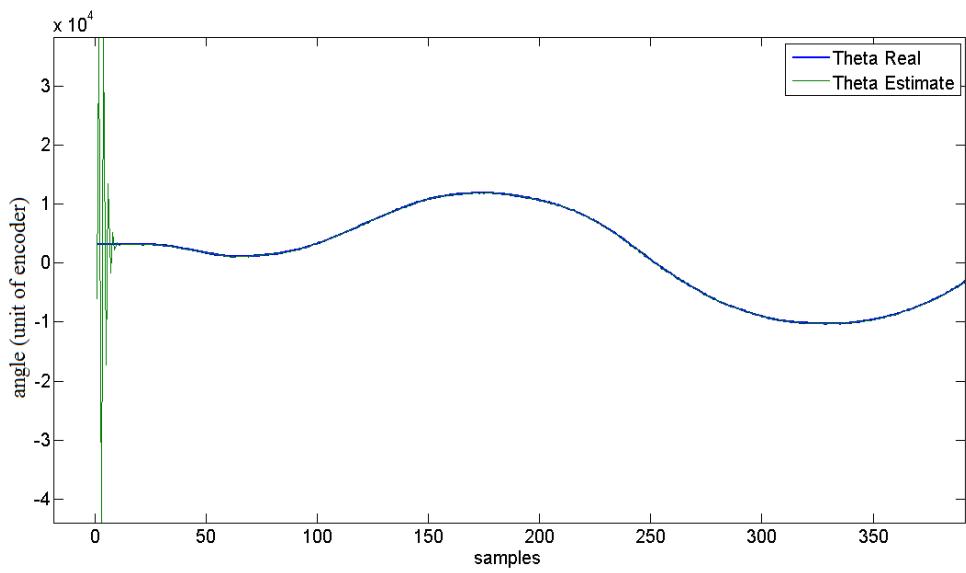


Σύγκριση εκτίμησης της γωνιακής ταχύτητας με πραγματική γωνιακή ταχύτητας

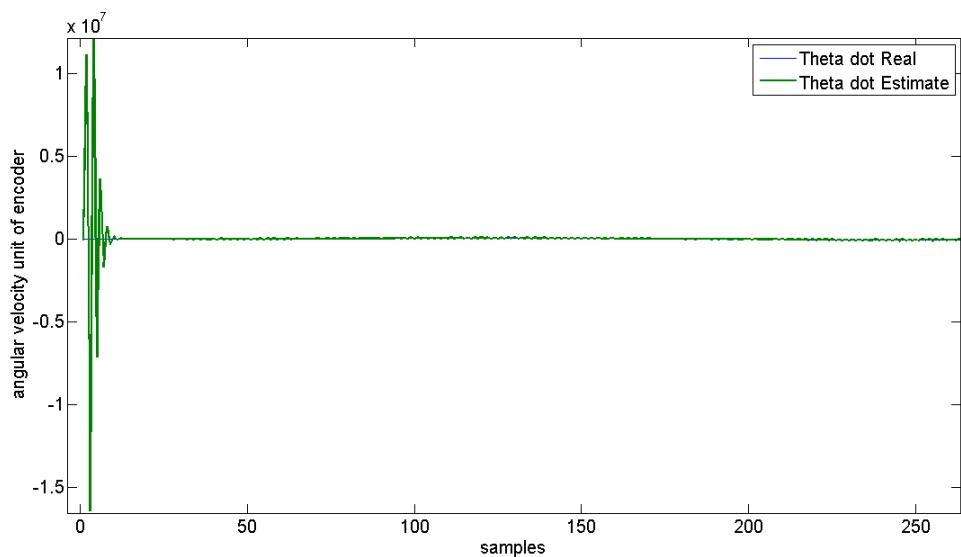
Σύγκριση εκτίμησης της μετατόπισης κατά x με την πραγματική μετατόπιση κατά x Σύγκριση εκτίμηση της ταχύτητας κατά x με την πραγματική ταχύτητα κατά x

14-Θέση πόλων παρατηρητή $[-350 \pm 2i, -320 \pm 5i]$

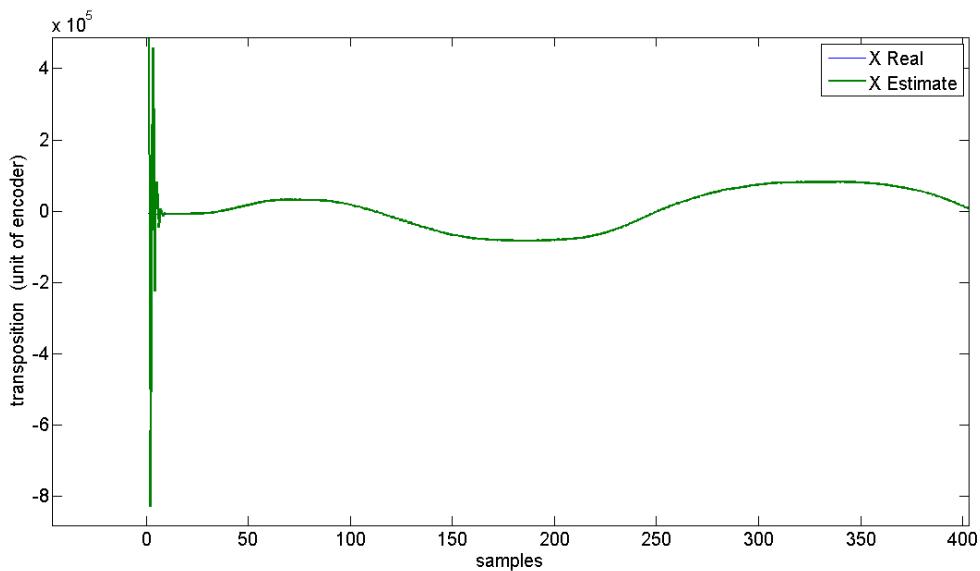
Αυτήν την φόρα τοποθετούμε τους πόλους του παρατηρητή στην $[-350 \pm 2i, -320 \pm 5i]$, οι οποίοι είναι αρκετά μακριά από τους πόλους του κλειστού συστήματος. Είναι προφανές από τα διαγράμματα η επίδραση του θορυβού στην απόκριση του συστήματος παρατηρητή.



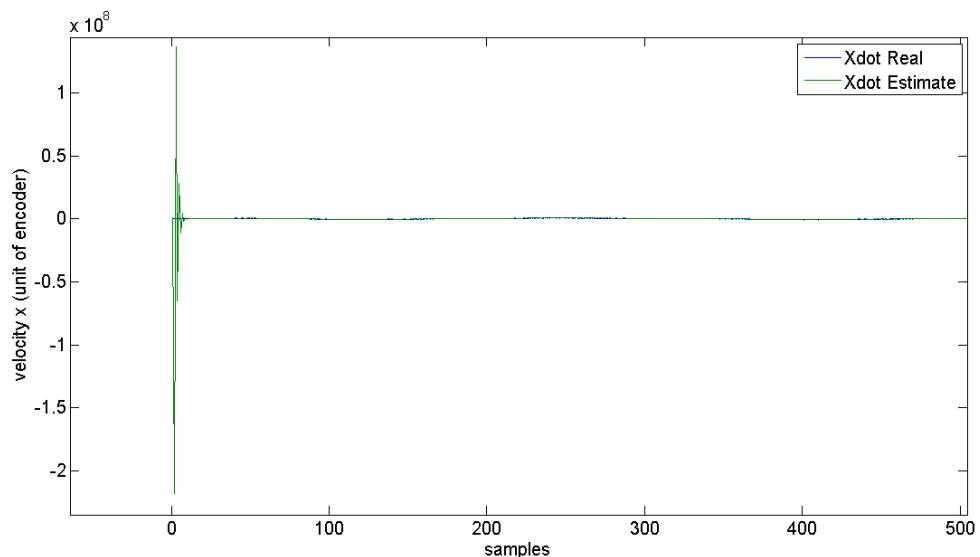
Σύγκριση εκτίμησης της γωνίας με πραγματική γωνία



Σύγκριση εκτίμησης της γωνιακής ταχύτητας με πραγματική γωνιακή ταχύτητας



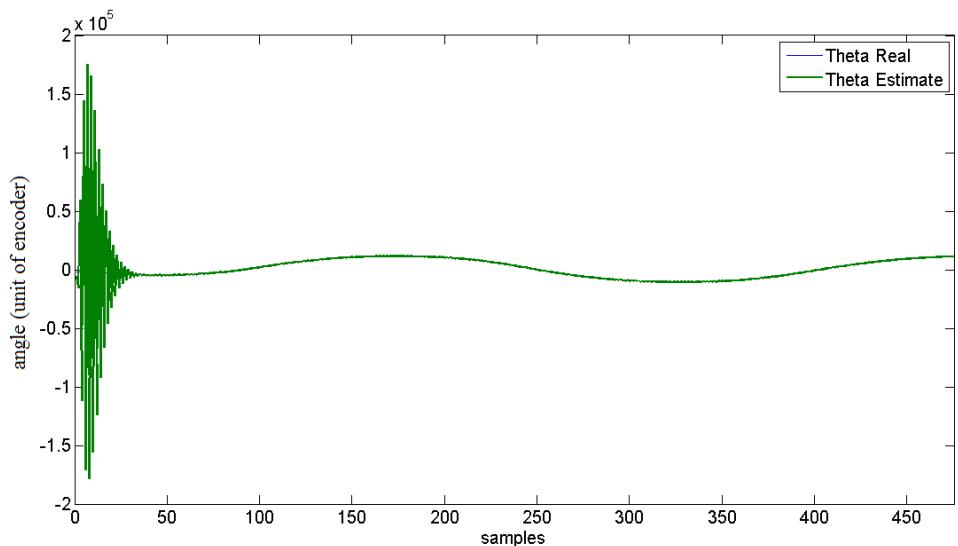
Σύγκριση εκτίμησης της μετατόπισης κατά x με την πραγματική μετατόπιση κατά x



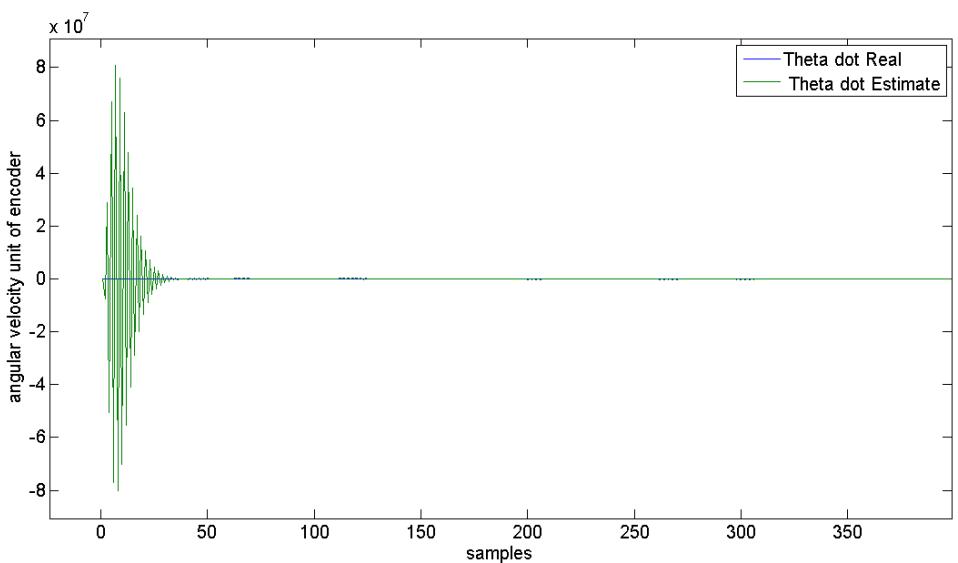
Σύγκριση εκτίμησης της ταχύτητας κατά x με την πραγματική ταχύτητα κατά x

15-Θέση πόλων παρατηρητή $[-450 \pm 2i, -420 \pm 5i]$

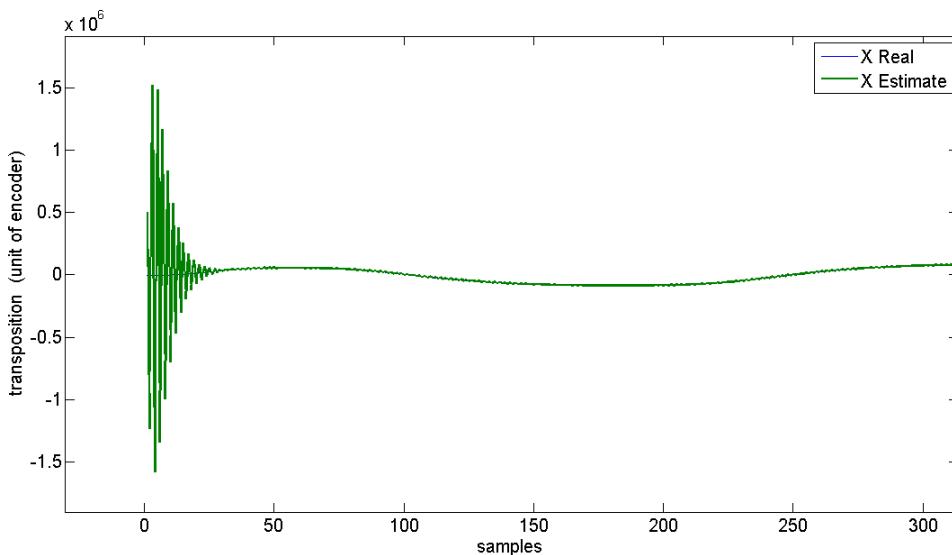
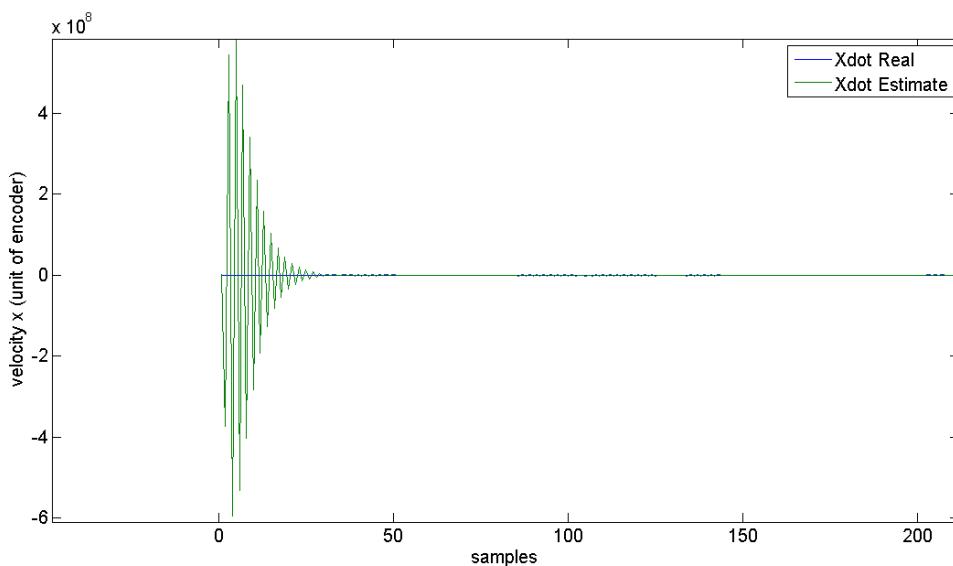
Αυτήν την φόρα τοποθετούμε τους πόλους του παρατηρητή στην $[-450 \pm 2i, -420 \pm 5i]$, οι οποίοι είναι πολύ μακριά από τους πόλους του κλειστού συστήματος ανεστραμμένου εκκρεμούς. παρατηρείται η επίδραση του θορύβου πλέον είναι πολύ εμφανής.



Σύγκριση εκτίμησης της γωνιάς με πραγματική γωνία



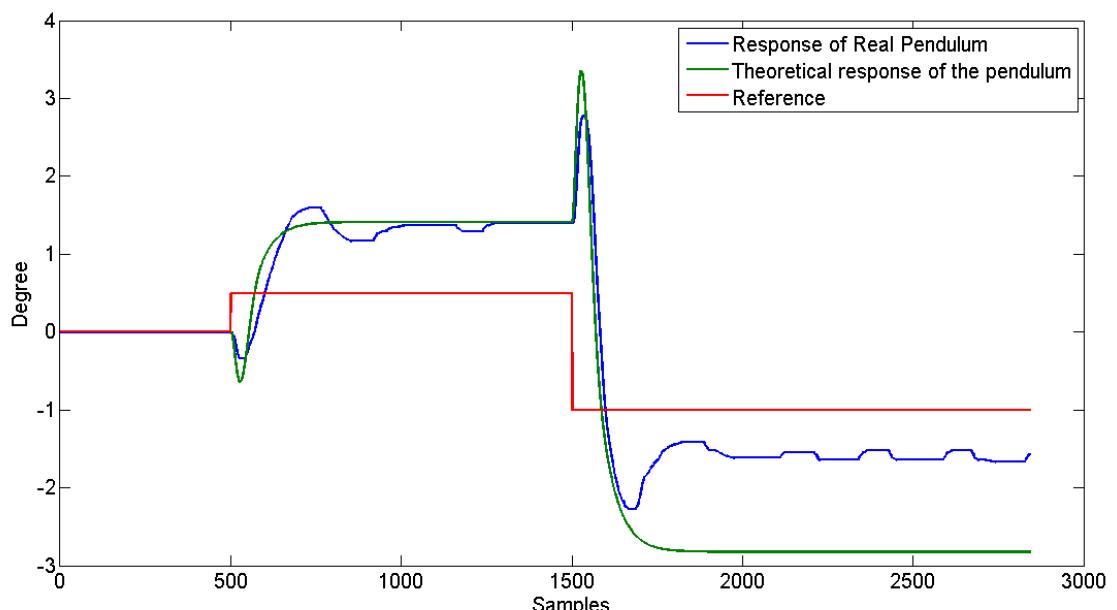
Σύγκριση εκτίμησης της γωνιακής ταχύτητας με πραγματική γωνιακή ταχύτητας

Σύγκριση εκτίμησης της μετατόπισης κατά x με την πραγματική μετατόπιση κατά x Σύγκριση εκτίμηση της ταχύτητας κατά x με την πραγματική ταχύτητα κατά x

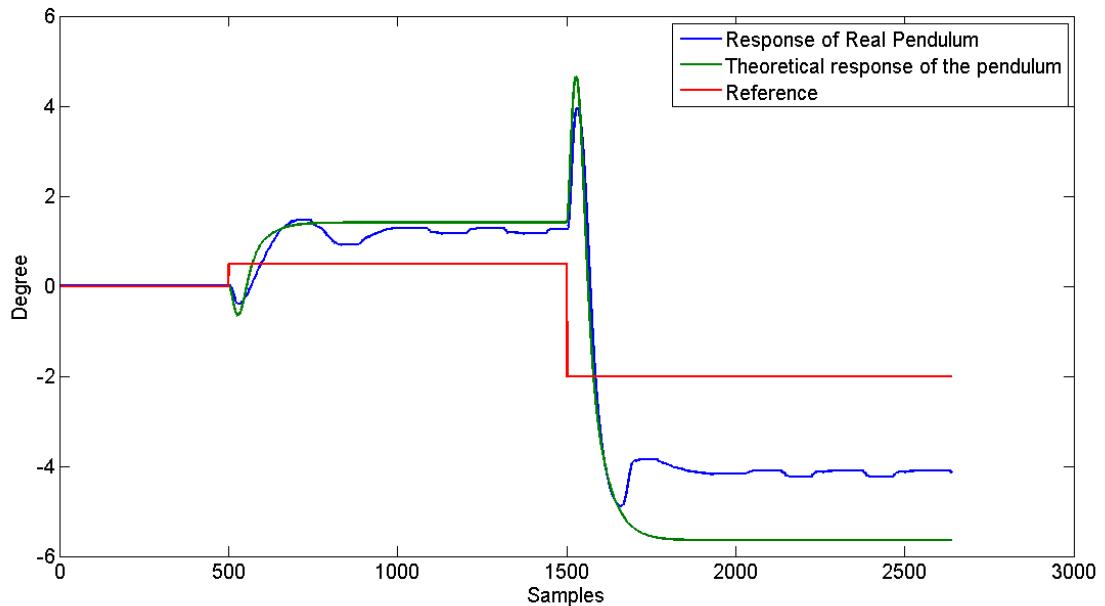
Συμπεραίνεται γενικά ότι η εύρεση μιας καλής θέσης για πόλους του παρατηρητή είναι ένα ενδιαφέρον θέμα, από την μια πρέπει η θέση αυτή να είναι αρκετά μακριά από την θέση του συστήματος, έτσι ώστε το σύστημα παρατηρητή να είναι γρήγορο και το διάνυσμα εκτίμησης κατάστασης (από παρατηρητή) να συγκλίνει και να ταυτιστεί με το πραγματικό διάνυσμα κατάστασης του συστήματος, από την άλλη αυτή η θέση δεν πρέπει να είναι πάρα πολύ μακριά από τους πόλους του συστήματος κλειστού βρόχου, για να αποφύγουμε την εμφάνιση του θορύβου στο σύστημα παρατηρητή.

5.4 Σύγκριση του Γραμμικοποιημένο Συστήματος με Πραγματικό Σύστημα

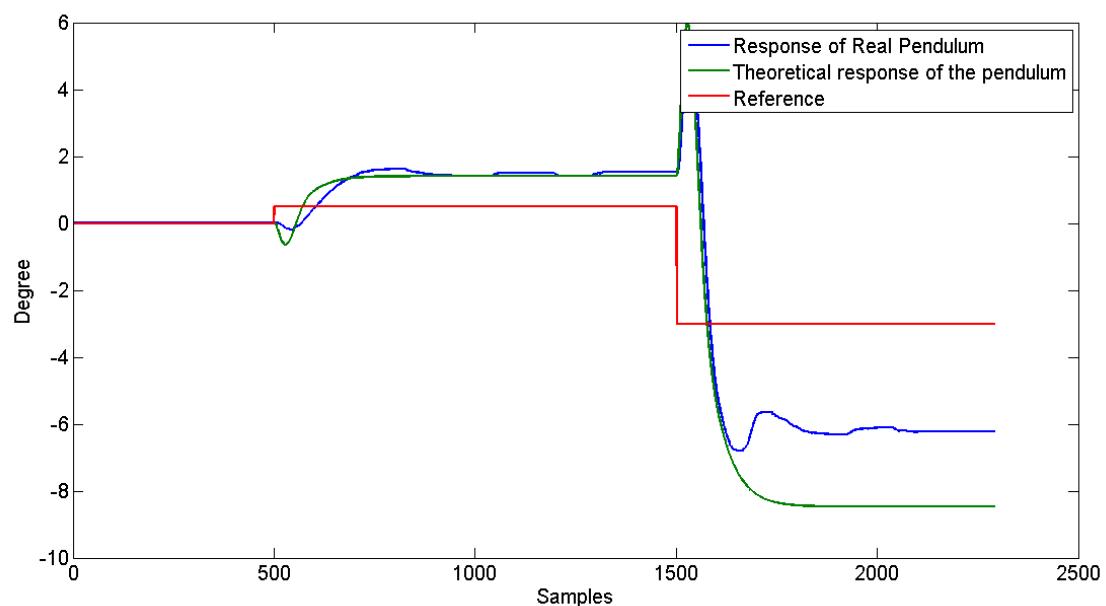
Με σκοπό την σύγκριση το γραμμικοποιημένο μοντέλο συστήματος μας με το πραγματικό ανεστραμμένο εκκρεμές, πραγματοποιήθηκε το παρακάτω πείραμα, στο όποιο χρησιμοποιήθηκε το αρχείο “linearcompare.mdl”. Στο αρχείο “linearcompare.mdl” τοποθετήθηκε το γραμμικοποιημένο θεωρητικό μοντέλο του συστήματος ανεστραμμένου εκκρεμούς το όποιο έχει αναφερθεί στο κεφάλαιο τρία. Επίσης στο θεωρητικό μοντέλο τοποθετήθηκαν και τα κέρδη των encoders. Στο αρχείο “linearcompare.mdl” επίσης υπάρχει block σύνδεσης με το πραγματικό ανεστραμμένο εκκρεμές. Στην συνεχεία για έλεγχο του συστήματος (θεωρητικού και πραγματικού) χρησιμοποιήθηκε ανατροφοδότηση κατάστασης με τα κέρδη από μέθοδο LQR, όπου έχουν αναφερθεί στα προηγούμενα υποκεφάλαια. Στο σύστημα κλειστό βρόχου (θεωρητικού και πραγματικού) εισάγεται μια βηματικής μορφής με δύο ξεχωριστά βήματα, το πρώτο βήμα έχει πλάτος 0.5 μοίρες (χοντά στο σημείο ισορροπίας) με διάρκεια 6 δευτερόλεπτα, στην συνέχεια κάθε φόρα ρυθμίζεται το δεύτερο βήμα με ένα πλάτος, ξεχινώντας από 1.5 μοίρες έως 6 μοίρες. Τα αντίστοιχα διαγράμματα παρουσιάζονται στο παρακάτω:



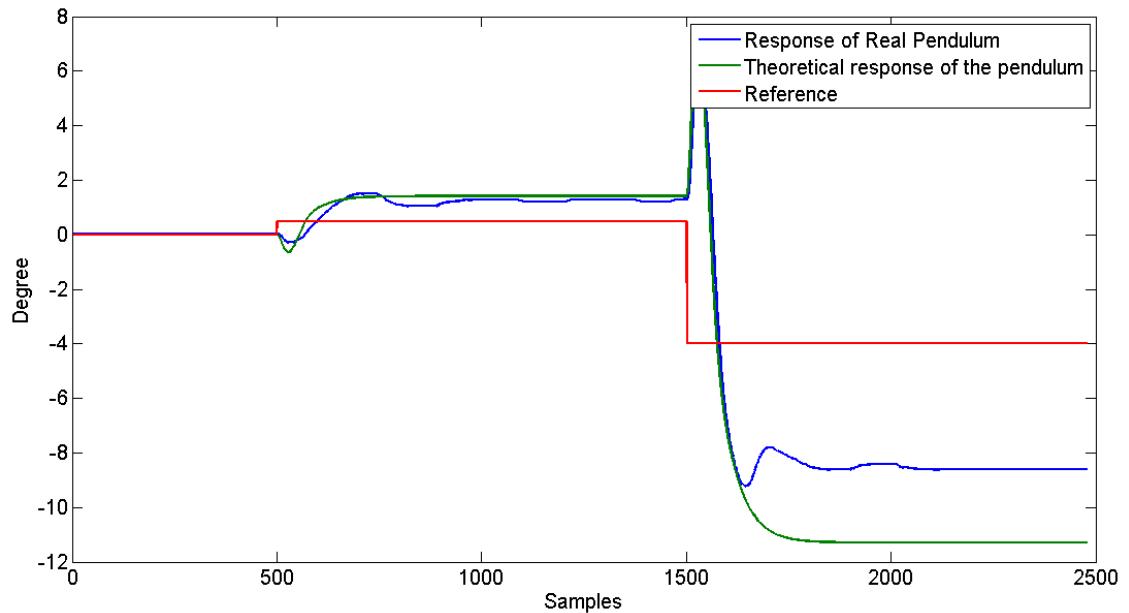
Βηματική είσοδος με πλάτος 0.5 και 1 μοιρών



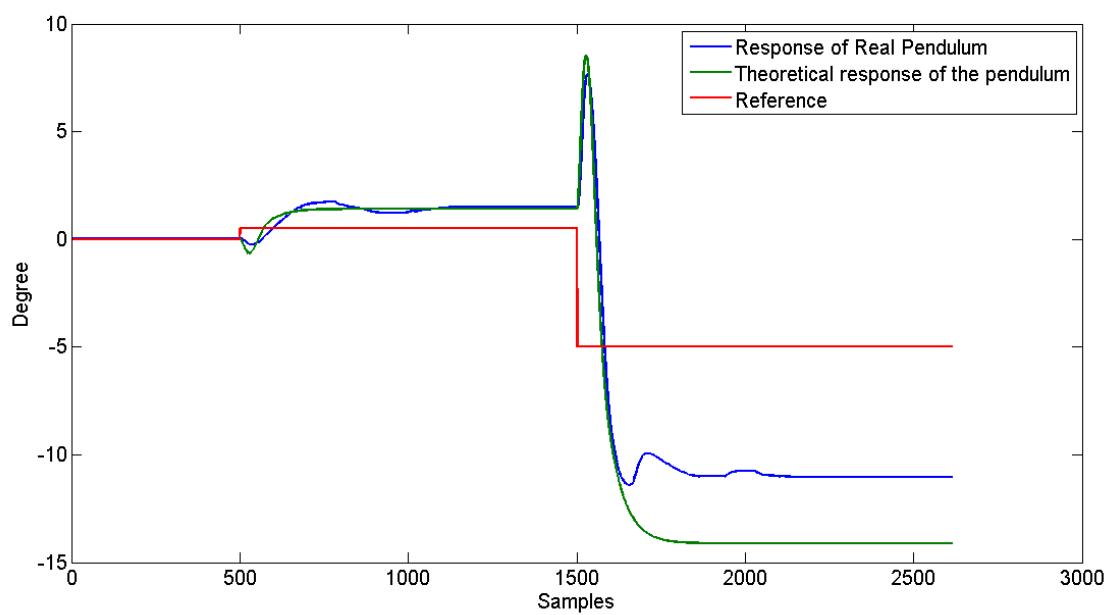
Βηματική είσοδος με πλάτος 0.5 και 2 μοιρών



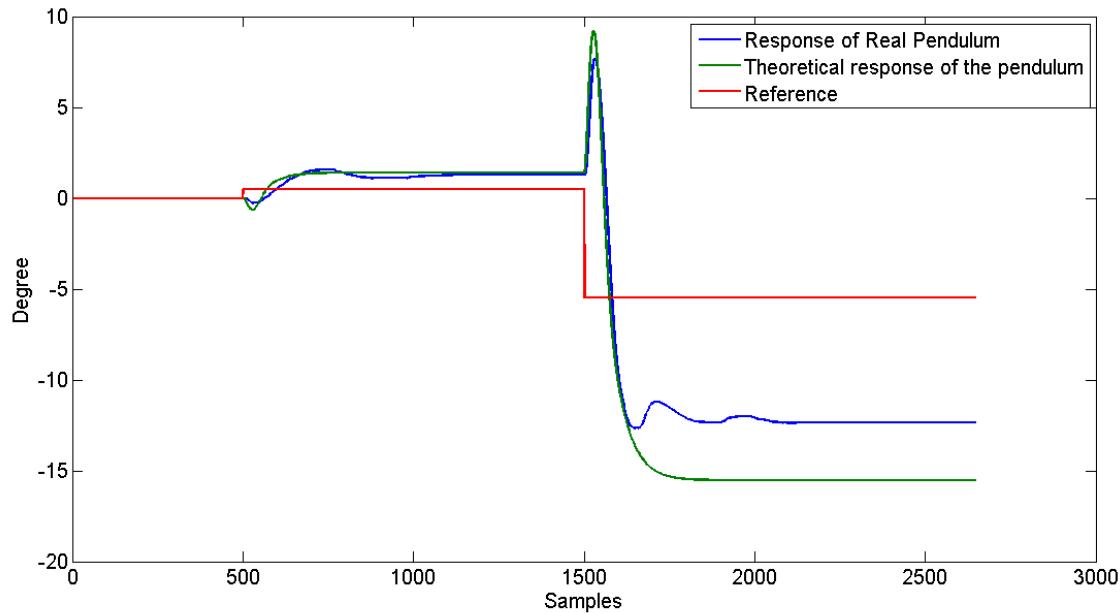
Βηματική είσοδος με πλάτος 0.5 και 3 μοιρών



Βηματική είσοδος με πλάτος 0.5 και 4 μοιρών



Βηματική είσοδος με πλάτος 0.5 και 5 μοιρών



Βηματική είσοδος με πλάτος 0.5 και 6 μοιρών

Παρατηρείται στο σημείο 0.5 (κοντά στο σημείο ισορροπίας) το σφάλμα απόκρισης μεταξύ θεωρητικού μοντέλου και το πραγματικού είναι ελάχιστα, ενώ όσο απομακρυνόμαστε από το σημείο ισορροπίας αυτό το σφάλμα αυξάνεται το όποιο προφανώς είναι η επίδραση των μη-γραμμικών όρων του συστήματος ανεστραμμένου εκκρεμούς. Επίσης παρατηρείται ότι το σφάλμα μόνιμης κατάστασης (πραγματικού και θεωρητικού) όσο απομακρυνόμαστε από το σημείο ισορροπίας αυξάνεται, η αύξηση αυτή είναι λόγο του ότι έχουμε σχεδιάσει ένα γραμμικό ελεγκτή για ένα μη-γραμμικό σύστημα, έτσι προφανώς όσο απομακρυνόμαστε από σημείο ισορροπίας το σφάλμα του ελεγκτή μας αυξάνεται.

Παράρτημα A

plant.m

```
%plant.m

%% INITIALIZE
% The following user-specified values vary with plant configuration
mw1=.110; % Mass of Donut weights, set = zero if weights not used (kg)
mw2=1.00; % Balance mass (kg)
lw=-0.1084; % Signed distance from pivot to c.g. of balance mass (m)
% Misc data required for other scripts ∨ Change As Appropriate
ts=0.00442; % Sampling time (s)
R=[8]; % control weighting for lqr design used in lq function
C=[1,0,0,0]; % C vector in state-space model (output is angle)
Q=C'*C; % Q matrix for lqr design used in lq function
% Fixed values:
g=9.807; %(m/s^2)
lo=0.330; %pendulum rod length (m)
lco= 0.0711; %lc when mw2=0 (m)
m1o=.103; % Mass of sliding rod without donut weights (kg)
m2o=0.785; % Mass of pendulum assembly minus m1 and minus balance mass (kg)
Jos=.0246; %Polar moment of inertia
% about the pivot of pend ass'y minus
%sliding rod and balance weight (kg-m^2)
% Scale factors of hardware (sensors and actuator and digital controller)
kx=1571418.5; % Sliding rod scale factor (encoder counts/m)
ka=74477; % Angle encoder scale factor (encoder counts/radian)
kf=0.0013; % Combined DAC amplifier scale factor (N/increment of DAC)
ks=32; % Controller card firmware scale factor (increments/increments)
% Derived values
m1=m1o+mw1; m2=m2o+mw2;
lc=(m2o*lco+mw2*lw)/m2; %cg of the pendulum
%assembly minus the sliding rod(m)
```

```

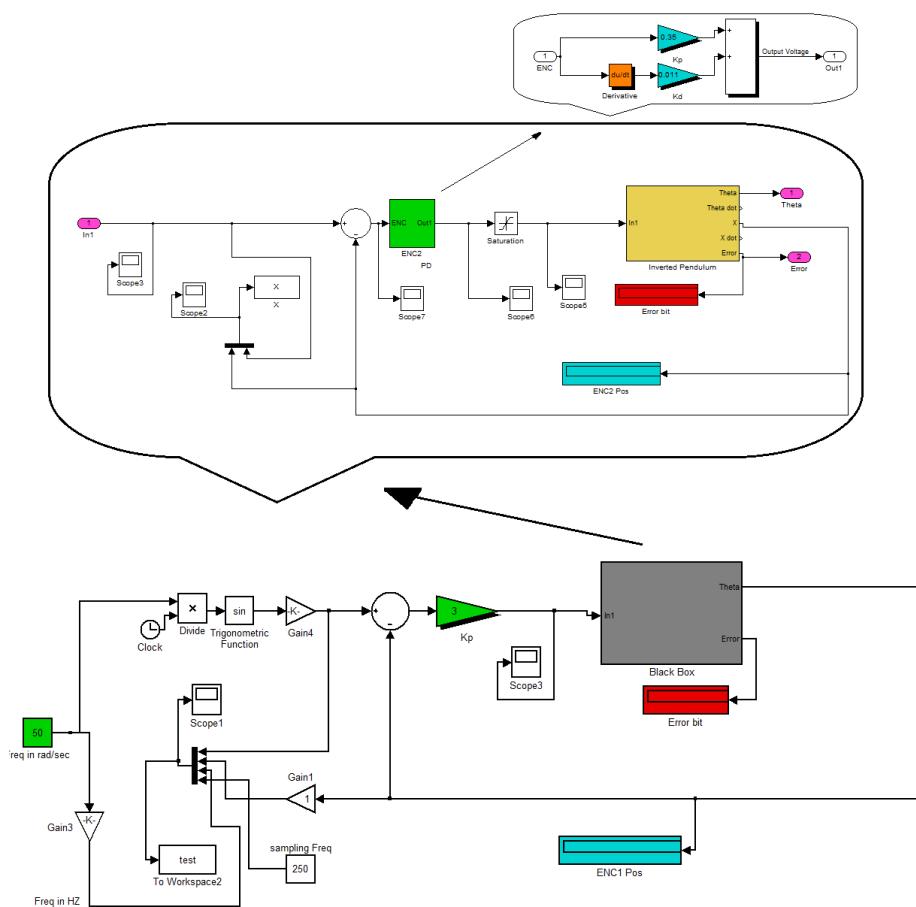
Joe=Jos+m1*lo^2+mw2*lw^2; %Polar moment of
%inertia of complete pend ass'y about the pivot (kg-m^2)
Js=Jos+mw2*lw^2; %This is J*(=Joe-m1*lo^2)
%in the theory section (kg m^2)
%% BUILD PLANTS
% Use The Following For Plant in The State Space Form:
% x = [angle; angular velocity; position; velocity]
% xdot = Ax + Bu;
% y = Cx
% For system in SI units use the following:
%a1=[0,1,0,0];
%a2=[m2*lc*g/Js,0,m1*g/Js,0];
%a3=[0,0,0,1];
%a4=[(Js-m2*lc*lo)*g/Js,0,-m1*lo*g/Js,0];
%B=[0;-lo;0;(Js+m1*lo^2)/m1]/Js;
%For prefilter gain, kpf, in lqr synthesis
%kpf1=-(m1*g);
%kpf2=-(m1*lo+m2*lc)/m1;
% For system in units of controller counts use...
a1=[0,1,0,0];
a2=[m2*lc*g/Js,0,m1*g/Js*ka/kx,0];
a3=[0,0,0,1];
a4=[(Js-m2*lc*lo)*g/Js*kx/ka,0,-m1*lo*g/Js,0];
B=[0;-lo*ka;0;(Js+m1*lo^2)/m1*kx]*ks*kf/Js;
%For kpf in lqr synthesis
kpf1=-(m1*g)/ka/kf/ks; kpf2=-kx*(m1*lo+m2*lc)/m1/ka;
% The following are common to both forms
A=[a1;a2;a3;a4];
C=eye(4);
% For The Transfer Function theta(s)/F(s) = Na(s)/D(s), Use:
% For Na in SI units use...
%Na =(lo/Js)*[-1 0 g/lo];
% For Na in units of controller counts use...
Na = ka*ks*kf*(lo/Js)*[-1 0 g/lo]; D = [1 0 (m1*lo-m2*lc)*g/Js 0
-m1*g^2/Js];
% For The Transfer Function x(s)/F(s) = Nx(s)/D(s), Use:
% For Nx in SI units use...
%Nx =(1/m1/Js)*[Joe 0 -(m1*lo+m2*lc)*g];
% For Nx in units of controller counts use...
Nx = kx*ks*kf*(1/m1/Js)*[Joe 0 -(m1*lo+m2*lc)*g]; D = [1 0
(m1*lo-m2*lc)*g/Js 0 -m1*g^2/Js];
% For The Transfer Function theta(s)/x(s) = Nax(s)/Dax(s), Use:
% For Nax in SI units use...

```

```
% Nax=m1*lo/Joe*[-1 0 g/lo];  
% For Nax in units of controller counts use...  
Nax=ka/kx*m1*lo/Joe*[-1 0 g/lo]; Dax=[1 0 -(m1*lo+m2*lc)*g/Joe];
```


Παράρτημα Β

bode.mdl



Σχήμα B.1: bode.mdl

Παράρτημα C

findbode.m

```
handles.t = 0:0.05:5; handles.gaincounter = 1;

if (exist('model-new.mat','file') ~= 0)
    load model-new.mat;
    s = tf('s');
    handles.sys = calculatedtf/s;
end

%%%%%%%%%%%%%%%
filelist1 = dir('test*.mat');

Numberofdatafiles = length(filelist1);

for q=1:Numberofdatafiles
    shahab=load(filelist1(q).name);
    NAMES = fieldnames(shahab);
    EXT = '.dat';
    for i = 1:length(NAMES)
        cNAME = NAMES{i};

        DATA = getField(shahab,cNAME);

        FILEname = sprintf('%s%s',cNAME,EXT);
        save(FILEname,'DATA','ascii');
    end
end

filelist = dir('test*.dat');
```

```

Numberofdatafiles = length(filelist); for j=1:Numberofdatafiles
    data=load(filelist(j).name);
    i=str2num(filelist(j).name(5:end-3));
    tests(i).name=filelist(i).name;
    tests(i).inputfreq=data(1,3);
    tests(i).samplefreq=data(1,4);
    tests(i).input=data(2:end,1);
    tests(i).theta=(data(2:end,2));
    tests(i).time=(1:length(tests(i).theta))/tests(i).samplefreq;
    tests(i).angle=tests(i).time*2*pi*tests(i).inputfreq;
end for i = 1:Numberofdatafiles
    ifreq(1,i) = tests(i).inputfreq;
end

minFreq = 2*pi*min(ifreq); maxFreq = 2*pi*max(ifreq); disp('Number
of data files:') disp(num2str(Numberofdatafiles)) disp('Minimum
Input Frequency:') disp(num2str(minFreq)) disp('rad/sec')
disp('Maximum Input Frequency:') disp(num2str(maxFreq))
disp('rad/sec')

%% bode
magnitude=zeros(1,length(tests)); phase=zeros(1,length(tests));
frequency=zeros(1,length(tests));

for i=1:length(tests)
    samples_per_period=(tests(i).samplefreq/tests(i).inputfreq);
    periods=floor(length(tests(i).input)/samples_per_period);
    w_start=min(20,ceil(0.1*periods));
    w_end=max(w_start+5,floor(0.8*periods));
    window=(floor(w_start*samples_per_period)...
        :floor(w_end*samples_per_period));

    tests(i).window=window;
    tests(i).theta_trend=filtfilt(ones(1,round(samples_per_period))...
        /round(samples_per_period),1,tests(i).theta);
    tests(i).filtered_theta=tests(i).theta-tests(i).theta_trend;
    tests(i).filtered_theta=...
        filtfilt(ones(1,10)*1/10,1,tests(i).filtered_theta);
    tests(i).filtered_theta=tests(i).filtered_theta;
    tests(i).input_rms=sqrt(mean(tests(i).input.^2));
    tests(i).filtered_theta_rms=sqrt(mean(tests(i).filtered_theta.^2));
    tests(i).crossprod_rms=mean(tests(i).filtered_theta.*tests(i).input);

```

```
tests(i).cosf=...
tests(i).crossprod_rms/(tests(i).input_rms*tests(i).filtered_theta_rms);
tests(i).magnitude=((tests(i).filtered_theta_rms/tests(i).input_rms));
tests(i).phase=rad2deg(-acos(tests(i).cosf));
magnitude(i)=tests(i).magnitude;
phase(i)=tests(i).phase;
frequency(i)=tests(i).inputfreq;
end magnitudedb = mag2db(magnitude); wfrequency = 2*pi*frequency;

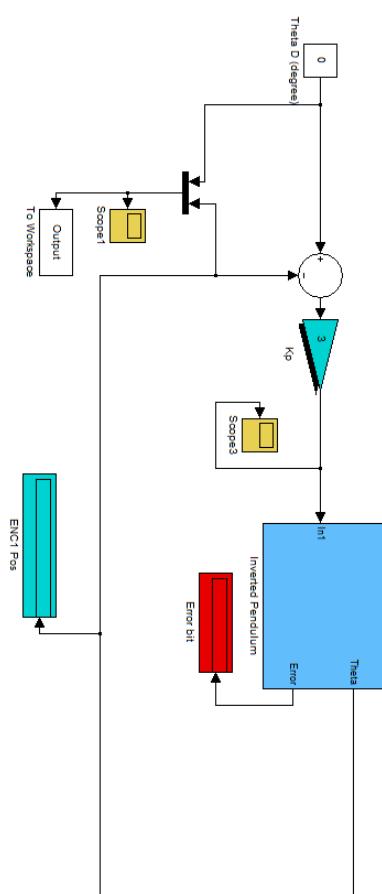
figure(1)
%subplot(2,1,1)
semilogx(wfrequency, magnitudedb, '.b') axis([min(wfrequency)
max(wfrequency)+10 (min(magnitudedb)-30) (max(magnitudedb) + 30)])
grid xlabel('Frequency (rad/sec)') ylabel('Magnitude (dB)')
%
figure(2)
%subplot(2,1,2)
semilogx(2*pi*frequency,phase, '.b') axis([min(wfrequency)
max(wfrequency)+10 -200 200])

hold on plot([min(2*pi*frequency) max(2*pi*frequency)], [180
180], 'g')
plot([min(2*pi*frequency) max(2*pi*frequency)], [-180
-180], 'g')

grid xlabel('Frequency (rad/sec)') ylabel('Phase Angle (degrees)')
```


Παράρτημα D

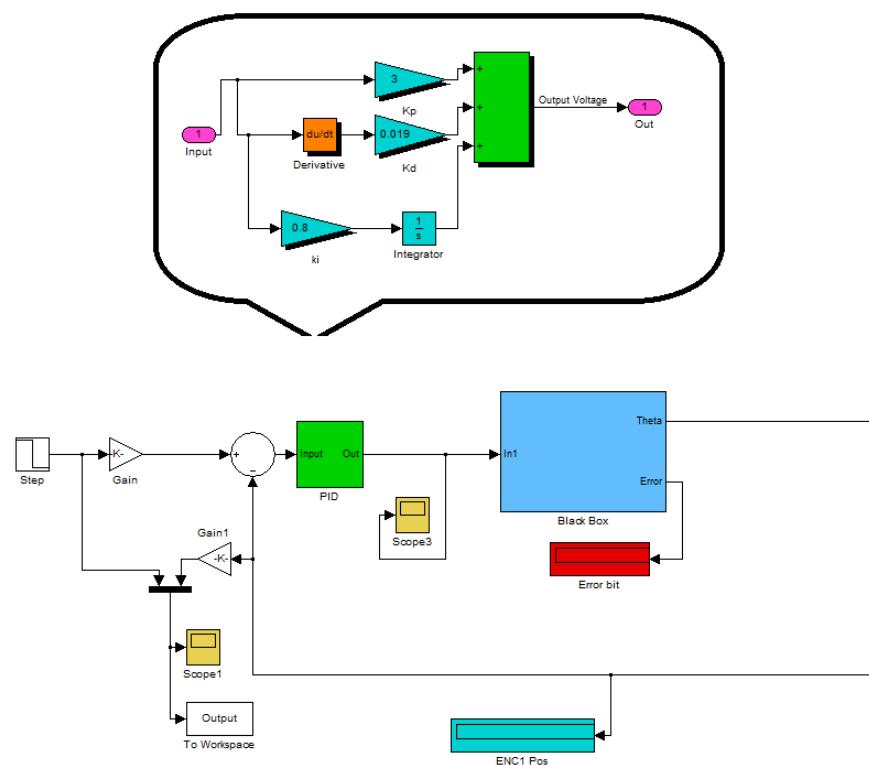
roott.mdl



Σχήμα D.1: roott.mdl

Παράρτημα E

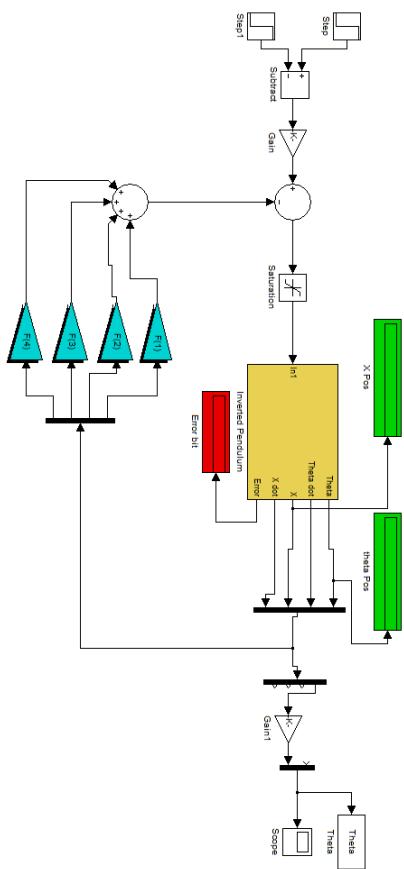
PIDD.mdl



Σχήμα E.1: PIDD.mdl

Παράρτημα F

state-feedback.mdl



Σχήμα F.1: state-feedback.mdl

Παράρτημα G

statefeedback.m

```
mw1=.110;
mw2=1.00;
lw=-0.1084;
g=9.807;
lo=0.330;
lco= 0.0711;
m1o=.103;
m2o=0.785;
Jos=0.019;
m1=m1o+mw1;
m2=m2o+mw2;
lc=(m2o*lco+mw2*lw)/m2;
Joe=Jos+m1*lo^2+mw2*lw^2;
Js=Jos+mw2*lw^2;
kx=49106; ka=2327.4; kf=0.0013; ks=32;
%% BUILD PLANTS
% x = [angle; angular velocity; position; velocity]
% xdot = Ax + Bu;
% y = Cx
a1=[0,1,0,0]; a2=[m2*lc*g/Js,0,m1*g/Js*ka/kx,0]; a3=[0,0,0,1];
a4=[(Js-m2*lc*lo)*g/Js*kx/ka,0,-m1*lo*g/Js,0];
B=[0;-lo*ka;0;(Js+m1*lo^2)/m1*kx]*ks*kf/Js; A=[a1;a2;a3;a4];
C=eye(4); D=[0;0;0;0];
c=[1 0 0 0;0 0 1 0]; %dinei theta kai X
P=[-4.0156-5.0723i,-4.0156+5.0723i,-5.5281-1.6553i,-5.5281+1.6553i];
F=acker(A,B,P);
```


Παράρτημα H

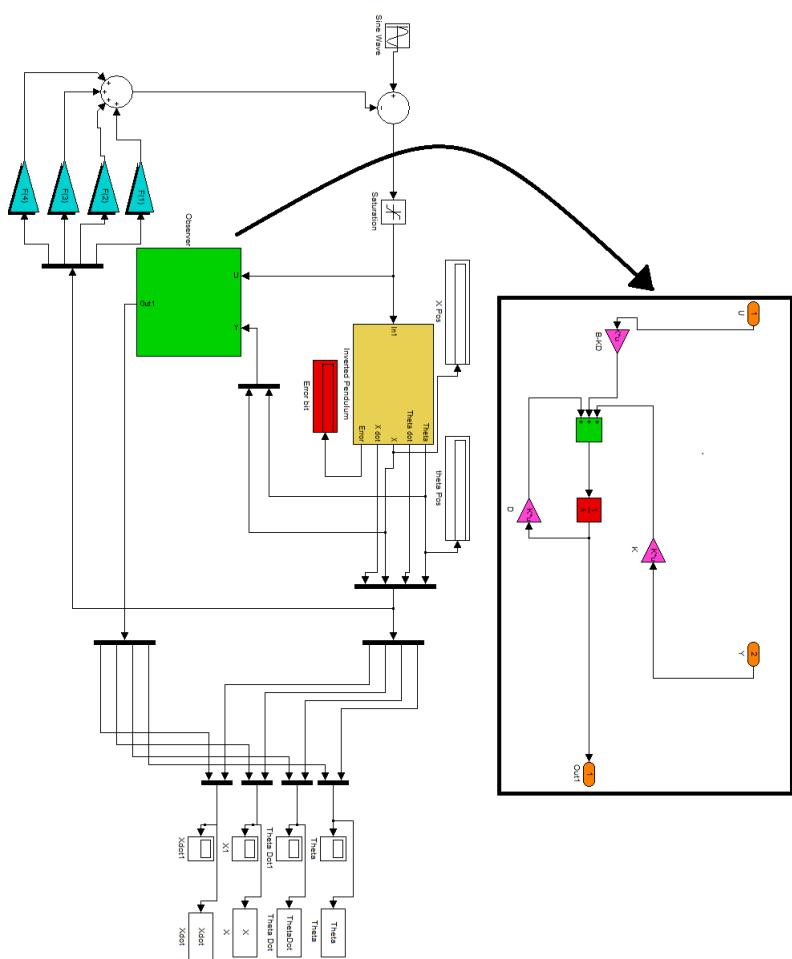
lq.m

```
mw1=.110;
mw2=1.00;
lw=-0.1084;
ts=0.00442;
g=9.807;
lo=0.330;
lco= 0.0711;
m1o=.103;
m2o=0.785;
Jos=0.019;
kx=49106;
ka=2327.4;
kf=0.0013;
ks=32;
m1=m1o+mw1;
m2=m2o+mw2;
lc=(m2o*lco+mw2*lw)/m2;
Joe=Jos+m1*lo^2+mw2*lw^2;
Js=Jos+mw2*lw^2;
a1=[0,1,0,0];
a2=[m2*lc*g/Js,0,m1*g/Js*ka/kx,0];
a3=[0,0,0,1];
a4=[(Js-m2*lc*lo)*g/Js*kx/ka,0,-m1*lo*g/Js,0];
B=[0;-lo*ka;0;(Js+m1*lo^2)/m1*kx]*ks*kf/Js;
kpf1=-(m1*g)/ka/kf/ks;
kpf2=-kx*(m1*lo+m2*lc)/m1/ka;
A=[a1;a2;a3;a4];
R=[8];
CC=[1,0,0,0];
Q=CC'*CC;
```

```
n=length(R);
t=0:.01:2;
for i=1:n,
[k(i,:),s]=lqr(A,B,Q,R(i));
Ac=A-B*k(i,:);
[waux,zaux]=damp(Ac);
w(i,:)=waux';
z(i,:)=zaux';
Pcl(i,:)=eig(Ac)';
kpf(i)=kpf1+k(i,1)+kpf2*k(i,3);
stepcl(:,i)=kpf(i)*step(Ac,B,[1 0
0 0],0,1,t); end;
kd= k;
kd(:,[2,4])=kd(:,[2,4])/ts;
plot(t,stepcl) legend('R=8')
F=k(1,:);
```

Παράρτημα I

Observer.mdl



Σχήμα I.1: Observer.mdl

Παράρτημα J

observer.m

```
mw1=.110;
mw2=1.00;
lw=-0.1084;% gia plant 2
g=9.807;
lo=0.330;
lco= 0.0711;
m1o=.103;
m2o=0.785;
Jos=0.0196043;
m1=m1o+mw1;
m2=m2o+mw2;
lc=(m2o*lco+mw2*lw)/m2;
Joe=Jos+m1*lo^2+mw2*lw^2;
Js=Jos+mw2*lw^2;
kx=49106;
ka=2327.4;
kf=0.0013;
ks=32;
%% BUILD PLANTS
a1=[0,1,0,0];
a2=[m2*lc*g/Js,0,m1*g/Js,0];
a3=[0,0,0,1];
a4=[(Js-m2*lc*lo)*g/Js,0,-m1*lo*g/Js,0];
B=[0;-lo*ka;0;(Js+m1*lo^2)/m1*kx]*ks*kf/Js;
A=[a1;a2;a3;a4];
C=eye(4);
D=[0;0;0;0];
c=[1 0 0 0;0 0 1 0];
%% Design State Feedback Gains with LQR
R=[8];
```

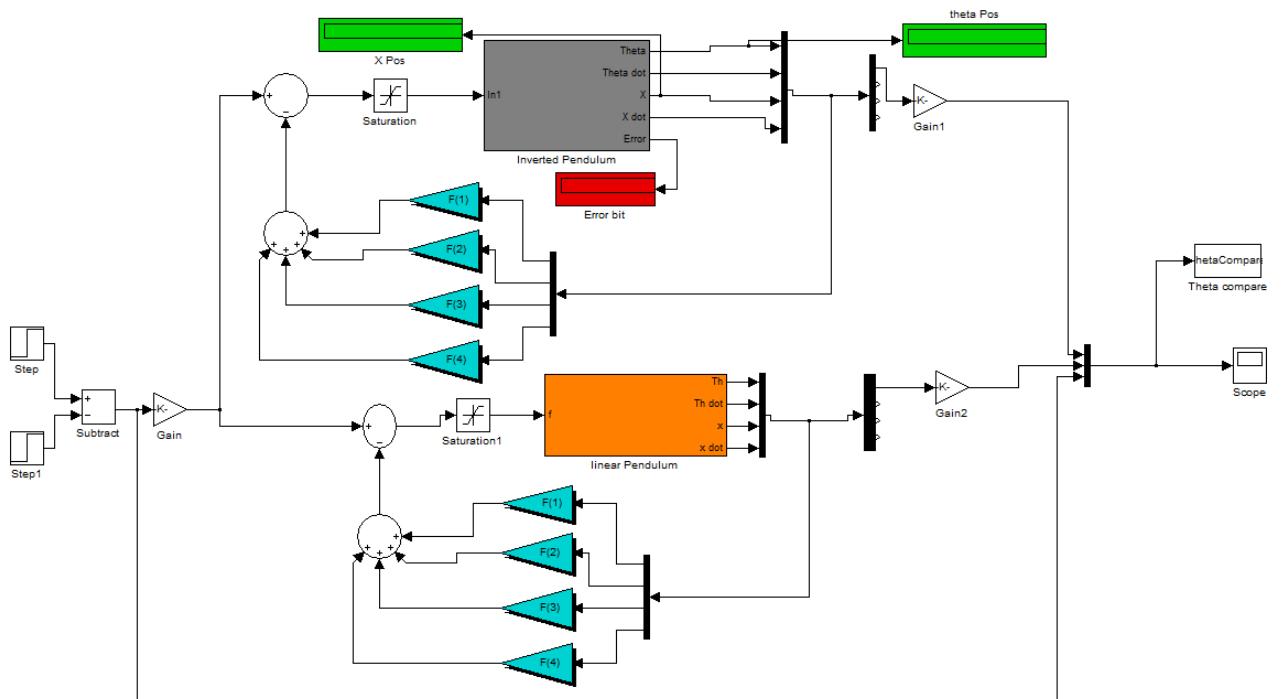
```

CC= [1,0,0,0];
Q=CC'*CC;
n=length(R);
t=0:.01:2;
for i=1:n,
[k(i,:),s]=lqr(A,B,Q,R(i));
Ac=A-B*k(i,:);
[waux,zaux]=damp(Ac);
w(i,:)=waux';
z(i,:)=zaux';
Pcl(i,:)=eig(Ac)';
kpf(i)=kpf1+k(i,1)+kpf2*k(i,3);
stepcl(:,i)=kpf(i)*step(Ac,B,[1 0
0 0],0,1,t);
end;
F=k(1,:);
%% Design Observer Full
PP=[-230-2i,-230+2i,-200-5i,-200+5i];
KP=place(A',c',PP);
kp=KP';
D=A-kp*c;

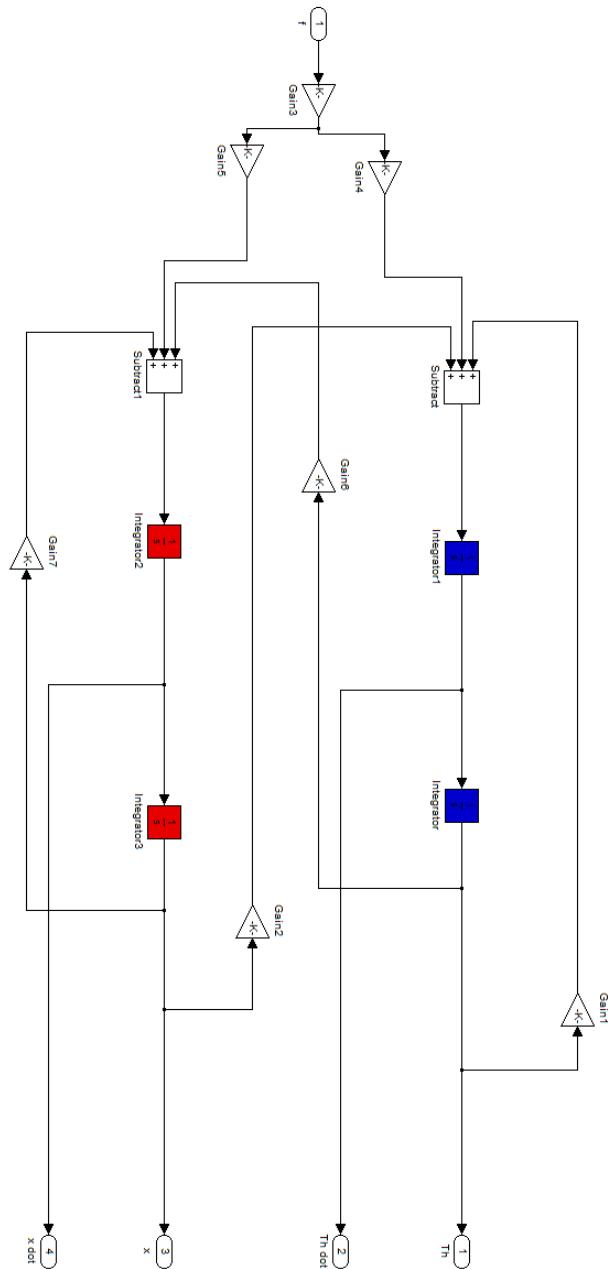
```

Παράρτημα K

Linearcompare.mdl



Σχήμα K.1: Linearcompare.mdl



$\Sigma\chi\nu\alpha$ K.2: linear model inverted pendulum

Παράρτημα L

Εργαστηριακή Ασκηση“
Αντιστροφό Διάγραμμα BODE”

Εργαστηριακή Άσκηση

Αντιστροφό Διάγραμμα BODE

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή	i
1.1 Σκοπός	i
1.2 Πειραματική Διάταξη	i
1.3 Διαδικασία της Εργαστηριακής Άσκησης	i
2 Βασικές έννοιες	ii
2.0.1 Εισαγωγή	ii
2.1 Διαγράμματα απόχρισης συχνότητας	ii
2.2 Αντιστρόφο Διαγράμματος Bode	iii

1. Εισαγωγή

1.1. Σκοπός

Σκοπός της εργαστηριακής άσκησης είναι η εξοικείωση των φοιτητών με την μέθοδο ανάλυσης των συστημάτων στο πεδίο της συχνότητας και ειδικότερα με την μέθοδο “αντίστροφο διαγράμματος bode” :

- τι είναι το “ διάγραμμα απόχρισης συχνότητας ”
- τι είναι το διάγραμμα bode
- πως σχεδίαζεται το αντίστροφο διαγράμματος bode

1.2. Πειραματική Διάταξη

Για το σκοπό της εργαστηριακής αυτής άσκησης θα χρησιμοποιηθεί “ανεστραμμένο εκχρεμές” (Inverted Pendulum Model 505 - ECP). Ο μηχανισμός αυτός διαθέτει δύο βαθμούς ελευθερίας (μια περιστροφική άρθρωση η οποια χαρακτηρίζεται από την γωνία θ και μια πρισματική άρθρωση με μεταβλητή της μετατόπισης x), εκ των οποίων μονό η πρισματική άρθρωση ενεργοποιείται από έναν κινητήρα συνεχούς (DC motor), όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



1. Inverted pendulum model 505-ECP

1.3. Διαδικασία της Εργαστηριακής Άσκησης

Πριν εκτελεστεί το πειραματικό μέρος της εργαστηριακής άσκησης, δίνεται μια σύντομη περιγραφή του συστήματος ανεστραμμένου εκχρεμούς και στην συνεχεία δίνεται μια θεωρητική απάντηση στα παραπάνω ερωτήματα, έτσι δίνεται ένα κάλο υπόβαθρο στους φοιτητές ώστε να γίνει πιο κατανοητό το πειραματικό μέρος του εργαστηριού. Για πραγματοποίηση του πειραματικού μέρους, χρησιμοποιείται το σύστημα ανεστραμμένο εκχρεμές και με την χρήση του λογισμικού Matlab® εισάγεται κάθε φόρα μια ημιτονοειδή είσοδο με μια διαφορική συχνότητα στο σύστημα κλειστού βρόχου του ανεστραμμένου εκχρεμούς, ξεκινώντας από μια χαμηλή συχνότητα έως μια ψήλη συχνότητα. Στην συνεχεία με χρήση του λογισμού Matlab® σχεδιάζονται τα διαγράμματα πλάτους και φάσης, και μετά την ανάλυση των διαγραμμάτων εκτιμείται η συνάρτηση κλειστού βρόχου του συστήματος και με βάση της συνάρτησης αυτής εξάγεται η συνάρτηση ανοιχτού

βρόχου του ανεστραμμένου εκχρεμούς.

Η εργαστηριακή άσκηση εκτελείται στο εργαστήριο αυτομάτου ελέγχου της Σχολής Μηχανολογών Μηχανικών¹.

2. Βασικές έννοιες

2.0.1. Εισαγωγή. Στην παρούσα εργαστηριακή άσκηση θα ασχοληθούμε με την απόκριση ενός συστήματος όταν η είσοδος του διεγείρεται από ένα ημιτονοειδές σήμα δόκιμης. Θα διαπιστώσουμε ότι η χρονική απόκριση ενός γραμμικού συστήματος σε ένα ημιτονοειδές σήμα εισόδου, είναι ένα επίσης ημιτονοειδές σήμα του οποίου η συχνότητα είναι η ίδια με την συχνότητα του σήματος εισόδου. Εντούτοις, το πλάτος και η φάση του σήματος εξόδου διαφέρουν από τα αντίστοιχα μεγέθη του σήματος εισόδου και η διάφορα αυτή αποτελεί μια συνάρτηση της συχνότητας εισόδου.

Ορισμός. Η απόκριση συχνότητας ² ενός συστήματος ορίζεται ως η απόκριση του συστήματος αυτού στην μόνιμη κατάσταση ισορροπίας του όταν η είσοδος του διεγείρεται από ένα ημιτονοειδές σήμα. Τα σήματα που παράγει το σύστημα, καθώς επίσης και διάφορα άλλα ενδιάμεσα σήματα που εμφανίζονται σε τμήματα του ίδιου συστήματος, διατηρούν την ημιτονοειδή μορφή στην μόνιμη κατάσταση ισορροπίας. Η διαφορά των σημάτων αυτών με το αντίστοιχο σήμα εισόδου, εντοπίζεται στο πλάτος και στην φάση.

Έστω ότι η συνάρτηση μεταφοράς του χρονικά-αμετάβλητου γραμμικού συστήματος είναι λόγος δύο πολυώνυμων του s :

$$G(s) = \frac{m(s)}{q(s)} = \frac{m(s)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \quad (1)$$

όπου το p_i αντιστοιχεί στους διακεκριμένους πόλους του συστήματος.

Έστω ότι εισάγεται στο σύστημα ένα ημιτονοηδές σήμα εισόδου της μορφής:

$$r(t) = A \sin(\omega t) \quad (2)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος εισόδου είναι:

$$R(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (3)$$

Έτσι ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου είναι:

$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{m(s)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} R(s) \quad (4)$$

¹<http://www.csl.ntua.gr/>

²frequency response

Υπολογίζοντας το αντίστοιχο ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα έχουμε:

$$Y(s) = \frac{k_1}{s + p_1} + \dots + \frac{k_n}{s + p_n} + \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2} \quad (5)$$

Λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace έχουμε:

$$y(t) = k_1 e^{-P_1 t} + \dots + k_n e^{-P_n t} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2} \right\} \quad (6)$$

Όπου α και β είναι σταθερές οι όποιες προσδιορίζονται από το πρόβλημα. Αν το αντίστοιχο σύστημα είναι ευσταθές, όλοι P_i του συστήματος θα έχουν αρνητικά, μη μηδενικά πραγματικά μέρη και επιπλέον θα ισχύει:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2} \right\} \quad (7)$$

Εφόσον όλοι οι εκθετικοί όροι της μορφής $k_i e^{-P_i t}$ τείνουν στο μηδέν καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο ($t \rightarrow \infty$). Έτσι, η οριακή τιμή της απόκρισης του συστήματος $y(t)$ για $t \rightarrow \infty$ (στην μόνιμη κατάσταση ισορροπίας) θα είναι:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2} \right] \\ &= \frac{1}{\omega} \left| A \omega G(j\omega) \right| \sin(\omega t + \phi) \\ &= A |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (8)$$

Όπου $\phi = \angle G(j\omega)$.

Επομένως το σήμα εξόδου του συστήματος στη μόνιμη κατάσταση ισορροπίας θα εξαρτάται μόνο από το πλάτος και την φάση της συνάρτησης $G(j\omega)$ για μια συγκεκριμένη συχνότητα ω . Σημειώνεται αυστηρά ότι η παραπάνω απόκριση συστήματος (εξ. 8), ισχύει μόνον για ευσταθή συστήματα.

Παρατηρείται ότι όταν ένα ευσταθές γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα υποβληθεί σε μια ημιτονοειδή είσοδο, η έξοδος του σύστηματος στην μόνιμη κατάσταση θα είναι ημιτονοειδής, με την ίδια συχνότητα της είσοδου και με διαφορά στο πλάτος και φάση από τα αντίστοιχα μεγέθη του σήματος εισόδου.

2.1. Διαγράμματα απόκρισης συχνότητας

Η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ ενός συστήματος μπορεί να παρασταθεί στο πεδίο της συχνότητας με την ακόλουθη σχέση:

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = R(\omega) + jX(\omega) \quad (9)$$

Όπου:

$$R(\omega) = \operatorname{Re}[G(j\omega)], \quad \text{και} \quad X(\omega) = \operatorname{Im}[G(j\omega)]$$

Επίσης η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφεί όπως εξής:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi(j\omega)} = |G(\omega)|\angle\phi(\omega) \quad (10)$$

Όπου :

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{X(\omega)}{R(\omega)}, \quad \text{και} \quad |G(\omega)|^2 = [R(\omega)]^2 + [X(\omega)]^2 \quad (11)$$

Αν η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ είναι:

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_k)} \quad (12)$$

Τότε:

$$\begin{aligned} \arg\{G(j\omega)\} &= \operatorname{Arg}\{K\} + \sum_{i=1}^m \operatorname{Arg}\{j\omega + z_i\} \\ &\quad - \sum_{k=1}^n \operatorname{Arg}\{j\omega + p_k\} \end{aligned} \quad (13)$$

με

$$\operatorname{Arg}\{K\} = \begin{cases} -180 & \text{εάν } K < 0 \\ 0 & \text{εάν } K > 0 \end{cases}$$

Παρατήρηση. Εάν είναι γνώστες οι συναρτήσεις $|G(j\omega)|$, $\arg[G(j\omega)]$, η απόκριση του συστήματος σε βηματική διέγερση μπορεί να προσδιοριστεί από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace όπως εξής:

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{R(\omega)}{\omega} \sin(\omega t) d\omega \quad (14)$$

Όπου:

$$R(\omega) = |G(j\omega)| \cdot \cos\{\arg[G(j\omega)]\} \quad (15)$$

Η γραφική απεικόνιση της συμπεριφοράς ενός συστήματος στο πεδίο της συχνότητας με την βοήθεια της συνάρτησης απόκρισης $G(j\omega)$ επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση 10. Έτσι αν η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος στο πεδίο της συχνότητας να δίνεται με την μορφή $G(j\omega) = |G(\omega)|e^{j\phi(\omega)}$, ο λογάριθμος της αντίστοιχης συνάρτησης του μέτρου, ο οποίος λαμβάνεται συνήθως δεκαδικός, μας δίνει:

$$\text{λογαριθμικό κέρδος } (\omega) = 20 \log_{10} |G(\omega)| \quad (16)$$

Όπου οι αντίστοιχες μονάδες είναι σε decibel(dB).

Έτσι για συνάρτηση φάσης έχουμε:

$$\phi(\omega) = \arg[G(j\omega)] \quad (17)$$

Έτσι ένα πλήρες διάγραμμα **Bode** αποτελείται από ένα διάγραμμα του λογάριθμου του μέτρου σε dB συναρτήσει της συχνότητας ω σε ένα ξεχωριστό ζεύγος αξόνων και ένα δεύτερο διάγραμμα, στο οποίο απεικονίζεται η συνάρτηση της φάσης $\Phi(\omega)$ συναρτήσει και πάλι της συχνότητας ω σε ένα άλλο ζεύγος αξόνων.

2.2. Αντιστρόφο Διαγράμματος Bode

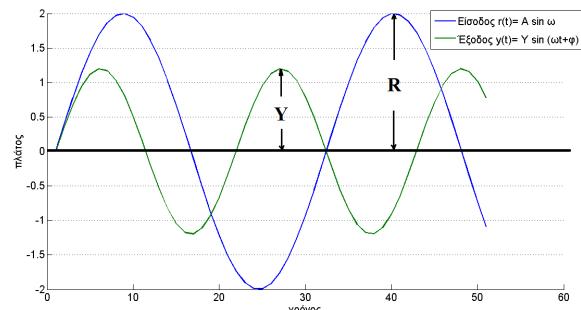
Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως όταν εισάγεται μια ημιτονοειδής είσοδος σε ένα ευσταθές χρονικά αμετάβλητο γραμμικό σύστημα, η έξοδος πάλι θα είναι ένα ημιτονοειδές σήμα με την ίδια συχνότητα αλλά με διάφορα στο πλάτος και φάση. Το εύρος της εξόδου είναι ίσο προς το γινόμενο του εύρους της εισόδου και του μέτρου $|G(j\omega)|$, ενώ η γωνία φάσης διαφέρει κατά $\phi = \angle G(j\omega)$. Έτσι αν εισάγεται σε ένα σύστημα ένα ημιτονοειδές σήμα, το πλάτος και η φάση της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος στο πεδίο συχνότητας για καθε διαφορετική συχνότητα ω υπολογίζεται από παρακάτω:

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} \right| \quad (18)$$

Δηλαδή: Ο λόγος των ευρών της ημιτονοειδούς εξόδου και ημιτονοειδούς είσοδου. και:

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} \quad (19)$$

Δηλαδή: Η αλλαγή φάσης της ημιτονοειδούς εξόδου ως προς την ημιτονοειδή είσοδο. Όπου στις παραπάνω σχέσεις το $Y(j\omega)$ είναι το σήμα εξόδου και $R(j\omega)$ είναι το σήμα εισόδου οπώς φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



2.

Με αυτό το τρόπο δίνοντας κάθε φόρα μια διαφορετική συχνότητα ξεκινώντας από μια χαμηλή

έως μια ψήλη, μπορεί να σχεδιαστεί το διάγραμμα Bode του συστήματος σε αυτήν την περιοχή της συχνότητας. Αυτή είναι διαδικασία του αντίστροφου διαγράμματος Bode.

Το λογισμικό Matlab® διαθέτει την εντολή “`bode(G)`” για απεικόνηση του διαγράμματος `bode` (πλάτος και φάση) σε ημιλογαριθμικό χαρτί.

Παράρτημα Μ

Εργαστηριακή Ασκηση “Τόπος των
Πιζών”

Εργαστηριακή Άσκηση

Τόπος των Ριζών - Ελεγκτής PID

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή	i
1.1 Σκοπός	i
1.2 Πειραματική Διάταξη	i
1.3 Διαδικασία της Εργαστηριακής Άσκησης	i
2 Βασικές έννοιες	ii
2.0.1 Εισαγωγή	ii
2.0.2 Η Εννοια του Γεωμετρικού Τόπου των Ριζών	ii
2.1 Ελεγκτής PID	ii
3 Χρήση του Matlab® Simulink	iv
4 Ζητούμενα	v

1. Εισαγωγή

1.1. Σκοπός

Σκοπός της εργαστηριακής άσκησης είναι η εξοικείωση των φοιτητών με βασική έννοια του τόπου των ριζών και η επίδραση του κέρδους "K" του τόπου των ριζών στην ευστάθεια και συμπεριφορά του αλειστού συστήματος και η εξοικείωση με την πειραματική ρύθμιση ενός ελεγκτή PID για τον έλεγχο γωνίας ανεστραμμένου εκκρεμούς και η κατανόηση της επίδρασης των κερδών του ελεγκτή PID στην επίδοση του ελεγκτή PID.

1.2. Πειραματική Διάταξη

Για το σκοπό της εργαστηριακής αυτής άσκησης θα χρησιμοποιηθεί "ανεστραμμένο εκκρεμές" (Inverted Pendulum Model 505 - ECP). Ο μηχανισμός αυτός διαθέτει δυο βαθμούς ελευθερίας (μια περιστροφική άρθρωση η οποια χαρακτηρίζεται από την γωνία θ και μια πρισματική άρθρωση με

μεταβλητή της μετατόπισης x), εκ των οποίων μονό η πρισματική άρθρωση ενεργοποιείται από έναν κινητήρα συνεχούς (DC motor), όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



1. Inverted pendulum model 505-ECP

1.3. Διαδικασία της Εργαστηριακής Άσκησης

Πριν εκτελεστεί το πειραματικό μέρος της εργαστηριακής άσκησης, δίνεται μια σύντομη περιγραφή του συστήματος ανεστραμμένου εκκρεμούς και στην συνέχεια δίνεται ένα θεωρητικό υπόβαθρο πάνω στους φοιτητές ώστε να γίνει πιο κατανοητό το πειραματικό μέρος του εργαστηρίου. Για πραγματοποίηση του πειραματικού μέρους, χρησιμοποιείται το σύστημα του ανεστραμμένου εκκρεμούς και με την χρήση του λογισμικού Matlab®. Χρησιμοποιείται επίσης η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου του ανεστραμμένου εκκρεμούς που πρόεκυψε από την εργαστηριακή άσκηση "Αντίστροφο διαγράμματος Bode". Στην συνέχεια με την βοήθεια του λογισμικού Matlab® χαράζεται ο τόπος των ριζών της

συνάρτησης αυτής και προβλέπεται η πιθανή συμπεριφορά του συστήματος κλειστού βρόχου με βάση τον τόπου των ριζών. Στην συνέχεια με την βοήθεια του λογισμικού Matlab® μεταβάλλεται το κέρδος “K” του τόπου των ριζών από μια πολύ χαμηλή τιμή έως μια μεγάλη τιμή και κάθε φόρα συζητείται η συμπεριφορά του συστήματος κλειστού βρόχου. Στην συνέχεια σχεδιάζεται πειραματικά ένας ελεγκτής PID, έτσι ώστε να γίνει κατανοητή η επίδραση των διαφόρων κερδών του ελεγκτή PID στην ευστάθεια και συμπεριφορά του συστήματος.

Η εργαστηριακή άσκηση εκτελείται στο εργαστήριο αυτομάτου ελέγχου της Σχολής Μηχανολογίων Μηχανικών¹.

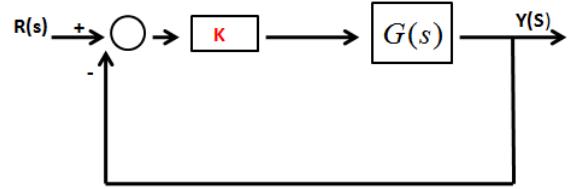
2. Βασικές έννοιες

2.0.1. Εισαγωγή. Όπως γνωρίζουμε από την θεωρία του αυτομάτου ελέγχου, η ευστάθεια ενός συστήματος κλειστού βρόχου εξαρτάται άμεσα από τις θέσεις των πόλων του, έτσι αν οι πόλοι βρίσκονται στο αριστερό ημι-επίπεδο το σύστημα κλειστού βρόχου είναι ευσταθές. Επίσης γνωρίζουμε ότι οι πόλοι ενός συστήματος είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξισωτής της συνάρτησης μεταφοράς του στο μιγαδικό επίπεδο. Είναι συχνά απαραίτητο να προσαρμόζουμε κατάλληλα τις τιμές κάποιων παραμέτρων ενός συστήματος με σκοπό να καταλήξουμε στις σωστές θέσεις των ριζών. Άρα πρέπει με κάποια μέθοδο να προσδιορίσουμε τον τρόπο με τον οποίον κινούνται οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξισωσης ενός συστήματος στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς μεταβάλλονται οι τιμές κάποιων παραμέτρων του. Η τεχνική του γεωμετρικού τόπου των ριζών της χαρακτηριστικής εξισωσης ενός συστήματος αποτελεί μια γραφική μέθοδο με την βοήθεια της οποίας κατασκευάζεται ο αντίστοιχος γεωμετρικός τόπος στο μιγαδικό επίπεδο, πάνω στον οποίον κινούνται οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξισωσης.

Ορισμός. Ο γεωμετρικός τόπος ριζών αποτελεί μια συγκεκριμένη τροχιά πάνω στην οποία κινούνται οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξισωσης ενός συστήματος συναρτήσει των μεταβολών μιας συγκεκριμένης παραμέτρου του.

2.0.2. Η Εννοια του Γεωμετρικού Τόπου των Ριζών. Έστω ότι έχουμε ένα απλό σύστημα κλειστού βρόχου όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Η δυναμική συμπεριφορά του παραπάνω



Σύστημα Κλειστού βρόχου με μεταβαλλόμενο κέρδος K

συστήματος κλειστού βρόχου περιγράφεται από την αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου του:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)} = \frac{p(s)}{q(s)} \quad (1)$$

Όπου $p(s)$ και $q(s)$ είναι πολυώνυμα της μιγαδικής μεταβλητής s και “K” είναι η μεταβαλλόμενη παράμετρος. Όπως φαίνεται και από παραπάνω σχέση η χαρακτηριστική εξισωσης του συστήματος κλειστού βρόχου αν υποθέσουμε το κέρδος ανάδρασης ($H(s) = 1$) είναι:

$$1 + KG(s) = 0 \quad (2)$$

Γενικά για κάθε τιμή της “K” οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξισωσης του συστήματος πρέπει να ικανοποιήσουν την εξισ.2 στο μιγαδικό επίπεδο. Από την άλλη μεριά αφού η μεταβλητή s είναι μια μιγαδική ποσότητα, εξισωση 2 μπορεί να γραφεί σε πολική μορφή:

$$|KG(s)| \angle KG(s) = -1 + 0j \quad (3)$$

Οπότε είναι απαραίτητο να ισχύει:

$$\begin{aligned} |KG(s)| &= \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1 \\ \angle KG(s) &= 180^\circ \pm r360^\circ \end{aligned} \quad (4)$$

Όπου $r = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

το λογισμικό Matlab® διαθέτει την εντολή “rlocus(G)”, η οποία χαράζει το γεωμετρικό τόπο των ριζών της συναρτήσης μεταφοράς $G(s)$ στο μιγαδικό επίπεδο.

2.1. Ελεγκτής PID

Ο ελεγκτής PID, περιγραφέται από την συναρτήση μεταφοράς :

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (5)$$

¹<http://www.csl.ntua.gr/>

Η οποία αποτελείται από έναν αναλογικό, έναν διαφορικό και έναν ολοκληρωτικό όρο. Η χρονική αποχρισή της θα είναι :

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt} \quad (6)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του διαφορικού όρου είναι:

$$G_D(s) = \frac{K_D s}{\tau_d s + 1} \quad (7)$$

Ισχύει ομώς ότι η σταθερά χρόνου τ_d είναι πολύ μικρότερη σε σχέση με τις σταθερές χρόνου που εμφανίζονται στην ελεγχόμενη διεργασία, έτσι θεωρείται αμελητέα.

Αν θέσουμε $K_d = 0$, Προκύπτει ο λεγόμενος αναλογικός-ολοκληρωματικός ελεγκτής ή ελεγκτής PI.

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} \quad (8)$$

Έπισης όταν είναι $K_I = 0$, τότε έχουμε

$$G_c(s) = K_P + K_D s \quad (9)$$

που αντιστοιχεί στον λεγόμενο αναλογικό διαφορικό ελεγκτή (ελεγκτής PD).

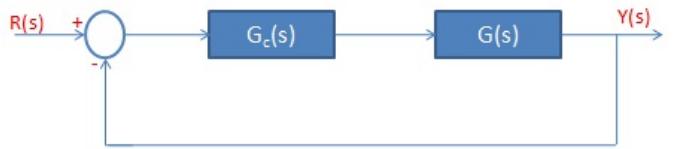
Για να χρησιμοποιηθεί ένας ελέγκτης PID θα πρέπει να καθοριστούν οι τρεις παράμετροι (αναλογικό κέρδος K_P , διαφορικό κέρδος K_D και ολοκληρωτικό κέρδος K_I) για την αντίστοιχη ελεγχόμενη διεργασία. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ελεγκτή PID στην μορφή:

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_P + K_D s + \frac{K_I}{s} = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} \\ &= \frac{K_D(s^2 + as + bs)}{s} = \frac{K_D(s - z_1)(s - z_2)}{s} \end{aligned} \quad (10)$$

όπου προφανώς $a = \frac{K_P}{K_D}$ και $b = \frac{K_I}{K_D}$. Επομένως βλέπουμε ότι ένας ελεγκτής PID παρουσιάζει έναν πόλο της αντίστοιχης συνάρτησης μεταφόρας στην αρχή των αξόνων και δύο μηδενιστές τα οποία είναι δυνατόν να τοποθετηθούν οπουδήποτε στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

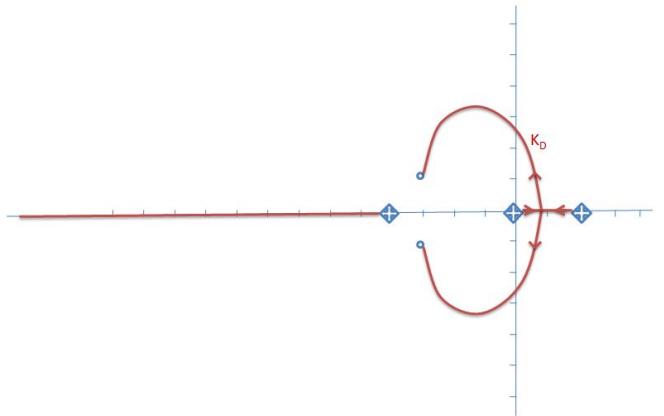
Παράδειγμα. Εστω ότι έχουμε ένα σύστημα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα οπού η προς έλεγχο συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$G(s) = \frac{1}{(s+4)(s-2)}$$



Σύστημα κλειστού βρόχου με μια βαθμίδα ελεγκτή

Χρησιμοποιούμε έναν ελεγκτή PID με σκοπό τον έλεγχο της ασταθούς συνάρτησης μεταφοράς της διεργασίας μας. Εποι έπιλεγουμε έναν ελεγκτή PID που παρουσιάζει δύο μιγαδικούς μηδενιστές z_1 και z_2 , όπου $z_1 = -3 + j1$ και $z_2 = \hat{z}_1$, τότε ο αντίστοιχος γεωμετρικός τόπος των ρίζων είναι αυτός που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Γεωμετρικός τόπος των ρίζων διεργασίας ελεγχόμενης από έναν ελεγκτή PID που παρουσιάζει δύο μιγαδικά μηδενικά

Καθώς το κέρδος K_D του ελεγκτή, αυξάνεται, οι μιγαδικές ρίζες πληζιάζουν προς τα σημεία των μηδενικών. η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου είναι:

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{G(s)G_c(s)}{1 + G(s)G_c(s)} \\ &= \frac{K_D(s - z_1)(s - \hat{z}_1)}{(s + r_2)(s + r_1)(s + \hat{r}_1)} \end{aligned}$$

Η απόκριση του συστήματος αυτού είναι ικανοποιητική. Το αντίστοιχο ποσοστό υπερακόντισης βρηματικής απόκρισης είναι μικρότερο από 4% και το σφάλμα μόνιμης κατάστασης ισούται με μηδέν. Ο χρόνος αποκατάστασης ισούται περίπου με 1 δευτερολεπτό. Αν απαιτείται μικρότερος χρόνος αποκατάστασης, τότε μπορύμε να επιλέξουμε κατάλληλα τους δύο μηδενιστές z_1 και z_2 , έτσι ώστε να βρίσκονται πιο αριστερά στο μιγαδικό επίπεδο και να θέσουμε μια τιμή για το κέρδος K_D τέτοια ώστε να οδηγεί τις ρίζες του συστήματος κοντά στα μιγαδικά μηδενικά.

3. Χρήση του Matlab® Simulink

Σε αυτήν την ενότητα θα επιλύσουμε το προηγούμενο παράδειγμα στο περιβάλλον του Matlab®. Επίσης θα παρουσιαστούν καποιές εντολές και τρόποι χρησιμοποίησης του Matlab® και simulink.

Στο προηγούμενο παράδειγμα χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{1}{(s+4)(s-2)}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς είσαγεται στο MATLAB μέσω της εντολής:

```
Gs=tf([1],[1 2 -8])
```

Μέσω της εντολής pole εντοπίζονται και οι πόλοι του ανοιχτού συστήματος οι οποίοι προφανώς είναι και οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης του συστήματος:

```
pole(Gs)
```

Όπως φαίνεται το συστήμα ανοιχτού βρόχου είναι ασταθές και εμφανίζει δύο πόλους στα σημεία -4 και 2 του μιγαδικού επιπέδου.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, χρησιμοπούμε έναν ελεγκτή PID για έλεγχο του συστήματος ο οποίος εισάγεται με τον παρακάτω τρόπο:

```
PID=tf([1 6 10],[1 0])
```

Φαίνεται ότι ο ελεγκτής PID παρουσιάζει δύο μηδενιστές στα σημεία:

$$\begin{aligned} & -3.0000 + 1.0000i \\ & -3.0000 - 1.0000i \end{aligned}$$

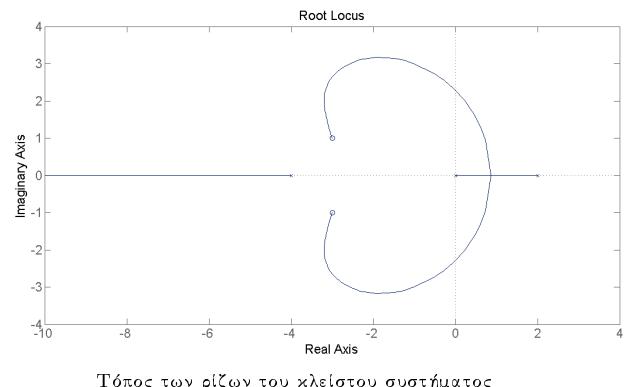
και έναν πόλο στο σημείο μηδέν. Με αυτόν τον τρόπο κρατήσαμε το κερδός K_D ως μεταβλητή για να χαράξούμε τον τόπο των ρίζων. Τώρα φτιάχνουμε την συνολική συνάρτηση ανοιχτού συστήματος, η οποία φτιάχνεται από πολλά πλασιασμό του PID και Gs.

```
G=PID*Gs
```

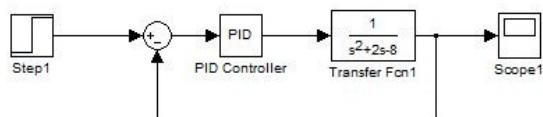
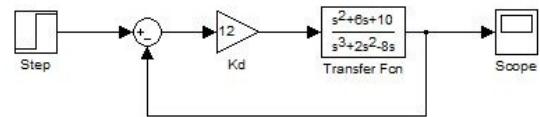
Στη συνέχεια χαράσσεται ο τόπος των ρίζων του συστήματος με την μεταβλητή K_D μέσω της εντόλης :

```
rlocus(G)
```

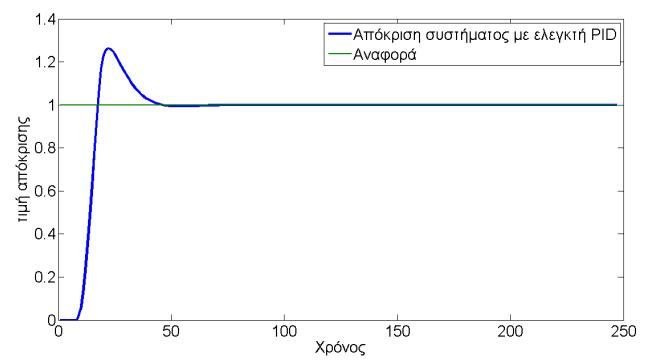
Ο τόπος των ρίζων που δημιουργείται μέσω Matlab® παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα:



Μέσω του simulink φτιάχνουμε το σύστημα κλειστού βρόχου. Από το διάγραμμα του τόπου των ρίζων επιλέγουμε το σημείο με κέρδος 12 (gain=12) που αντιστοιχεί στο $K_D = 12$. Έτσι φτιάχνουμε το διάγραμμα του συστήματος με μια βηματική είδοσο και παίρνουμε την χρονική απόκρισή του συστήματος από το "scope". Το διάγραμμα στο περιβάλλον simulink καθώς και η χρονική απόκριση του κλειστού συστήματος με $K_D = 12$ (ή αλλιώς χρησιμοποιώντας PID controller με $K_P = 72$ $K_D = 12$ $K_I = 120$) παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα:



Το διάγραμμα κλειστού βρόχου με PID ελεγκτή



Χρονική απόκριση του κλειστού συστήματος με PID με κέρδη $K_P = 72$, $K_D = 12$, $K_I = 120$

4. Ζητούμενα

- Να παραδοθεί γραπτή αναφορά, στην οποία να περιγράφονται όλα τα θεωρητικά και πειραματικά βήματα που παρουσιάστηκαν κατά την διάρκεια της εργαστηριακής άσκησης καθώς και τα συμπεράσματα που εξαγάγατε από την εργαστηριακή άσκηση.

Παράρτημα Ν

Εργαστηριακή Ασκηση
“Γραμμικοποίηση”

Εργαστηριακή Άσκηση

Γραμμικοποίηση των Μη-γραμμικών Συστημάτων

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Σκοπός	1
2	Βασικές έννοιες	1
2.1	Σήματα και συστήματα	1
2.2	Το Μοντέλο του συστήματος	2
2.3	Μη-γραμμικά συστήματα - Γραμμικοποίηση	2
3	Χρήση του Matlab®	4
4	Zητούμενα	5

1. Εισαγωγή

1.1. Σκοπός

Σκοπός της εργαστηριακής άσκησης ειναι η εξοικείωση των φοιτητών με την βασική έννοια της γραμμικοποίησης των μη-γραμμικών συστημάτων και αντιμετώπιση των προβλημάτων έλεγχου με την χρησιμοποιηση του προγραμματος Matlab®. Η άσκηση αυτή εκτελείται στο εργαστήριο αυτομάτου ελέγχου της Σχολής Μηχανολογών Μηχανικών¹.

2. Βασικές έννοιες

2.1. Σήματα και συστήματα

Οι δύο βασικές έννοιες στον αυτόματο έλεγχο είναι η έννοια του σήματος και εκείνη του συστήματος.

Ορισμός. Σήμα καλείται μία συνάρτηση μιάς ή περισσοτέρων μεταβλητών, εκ των οποίων μία είναι υποχρεωτικά ο χρόνος.

'Ενα σήμα συνεχούς χρόνου (ή ένα αναλογικό σήμα) είναι μία πραγματική συνάρτηση $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της ανεξάρτητης μεταβλητής t η οποία εκφράζει το συνεχή χρόνο.

Ορισμός. Σύστημα καλείται ένα τμήμα του χώρου το οποίο με μία νοητή επιφάνεια διαχωρίζεται από το περιβάλλον. Το σύστημα αλληλεπιδρά με το περιβάλλον με τη χρήση σημάτων.

'Ένα σύστημα είναι ένα σύνολο από επιμέρους τμήματα, εξαρτήματα, στοιχεία που συνδέονται μεταξύ τους και αλληλεπιδρούν επιτελώντας συγκεκριμένο έργο. Συνήθως τα συστήματα θεωρούμε ότι έχουν κάποιες εισόδους και εξόδους. Οι είσοδοι και οι έξοδοι ενός συστήματος είναι σήματα. Έτσι ένα σύστημα μιας εισόδου και μιας εξόδου μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας

¹<http://www.csl.ntua.gr/>

μετασχηματισμός του σήματος εισόδου u στο σήμα εξόδου y . Έτσι τα σήματα μπορούν να γραφτούν σαν μια συνεχή συνάρτηση του χρόνου ($u(t)$ και $y(t)$) ενώ το σύστημα θα περιγράφεται από το μετασχηματισμό F . Έτσι η σχέση εισόδου και εξόδου ενός συστήματος θα είναι:

$$y(t) = F(u(t)). \quad (1)$$

Ένα σύστημα με σήμα εισόδου $u(t)$ και σήμα εξόδου $y(t)$ περιγράφεται διαγραμματικά από το επόμενο σχήμα. Ένα τέτοιο διάγραμμα ονομάζεται λειτουργικό διάγραμμα (block diagram) του συστήματος.

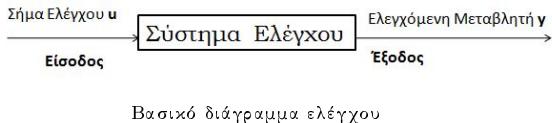


Figure 1.

Ορισμός. Εάν τα διανύσματα $y_1(t)$, $y_2(t)$ είναι οι αποκρίσεις του συστήματος στις εισόδους $u_1(t)$ και $u_2(t)$ αντίστοιχα, το σύστημα καλείται γραμμικό εάν και μόνο εάν:

$$\begin{aligned} F[a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t)] &= \\ a_1 F[u_1(t)] + a_2 F[u_2(t)] &= \\ a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) \end{aligned} \quad (2)$$

για κάθε εκλογή των πραγματικών σταθερών a_1 και a_2 .

Παράδειγμα. Έστω ενα σύστημα που περιγράφεται από την παρακάτω σχέση εισόδου εξόδου:

$$y(t) = (u(t))^2$$

Για δύο σήματα $u_1(t)$ και $u_2(t)$ θα έχουμε:

$$F(au_1 + bu_2) = (au_1 + bu_2)^2 = a^2 u_1^2 + b^2 u_2^2 + 2abu_1 u_2$$

ενώ το δέυτερο μέλος της (2) είναι:

$$aF(u_1) + bF(u_2) = a^2 u_1^2 + b^2 u_2^2$$

τότε συμπεραίνεται ότι το σύστημα δεν είναι γραμμικό.

Ορισμός. Εάν το διάνυσμα $y(t)$ είναι η απόκριση του συστήματος στο διάνυσμα εισόδου $u(t)$, το σύστημα καλείται χρονικά αμετάβλητο εάν και μόνο εάν:

$$F[u(t - \tau)] = y(t - \tau). \quad (3)$$

Ορισμός. Ένα σύστημα είναι γραμμικό αν η σχέση εισόδου εξόδου περιγράφεται από μια γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$\begin{aligned} a_n(t) \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \dots + a_0(t) y(t) = \\ b_m(t) \frac{d^m}{dt^m} u(t) + b_{m-1}(t) \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \dots + b_0(t) u(t) \end{aligned} \quad (4)$$

2.2. Το Μοντέλο του συστήματος

Γενικά ένα φυσικό σύστημα είναι μια πολύπλοκη διαδικασία η οποία προσφέρει διαφορετικές όψεις για την εξέταση της, Συνήθως η όψη του συστήματος που είναι το αντικείμενο ενδιαφέροντος μας είναι η όψη προς έλεγχο. Για παράδειγμα στο σύστημα του αναστροφού εκκρεμούς του εργαστηρίου, η γώνια θ είναι ο στόχος του έλεγχου μας. Για την περιγραφή του φυσικού συστήματος, πρόβλεψη της συμπεριφόρας, την σχεδίαση του ή τον έλεγχό του χρησιμοποιείται ένα μαθηματικό μοντέλο. Η περιγραφή του συστήματος γίνεται με ένα σύνολο μεταβλητών και ένα σύνολο εξισώσεων οι οποίες δηλώνουν τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών αυτών. Οι σχέσεις αυτές είναι δυνατόν να είναι αλγεβρικές (γραμμικές ή μη γραμμικές), δυναμικές (διαφορικές εξισώσεις ή εξισώσεις διαφορών), ντερμινιστικές ή στοχαστικές.² Αξίζει να τονιστεί ότι τα περισσότερα φυσικά μοντελά μετά από την μοντελοποίηση παρουσιάζουν μη-γραμμική μορφή.

2.3. Μη-γραμμικά συστήματα - Γραμμικοποίηση

Οπώς αναφέρθηκε προηγουμένως σχεδόν ολα τα φυσικά συστήματα έχουν μη-γραμμική μορφή. Αν θεωρηθεί το σύστημα το οποίο περιγράφεται από τις μη-γραμμικές εξισώσεις κατάστασης :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t) \end{aligned} \quad (5)$$

Αν ένα μη-γραμμικό σύστημα δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο δηλαδή να είναι στην μορφή $\dot{x} = f(x(t))$ τότε το σύστημα αυτό καλείται Αυτόνομο.

Ορισμός. Αν για ένα σημείο του χώρου καταστάσεων, όταν η αρχική κατάσταση του

²Σε ένα ντερμινιστικό σήμα για κάθε τιμή της μεταβλητής t αντιστοιχεί μία μόνο τιμή του σήματος. Αντίθετα σε ένα στοχαστικό σήμα για κάθε τιμή της μεταβλητής t ορίζεται μία τυχαία μεταβλητή

σύστηματος είναι ίση με x_e , η κατάσταση θα παραμείνει ίση με x_e για κάθε μελλοντικό χρόνο, τότε το σημείο x_e καλείται σημείο ισορροπίας του συστήματος. Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος καθόριζονται από τις λύσεις της εξισώσεως:

$$\dot{x} = f(x(t)) = 0 \quad (6)$$

Παράδειγμα. Σε ένα σύστημα ελεύθερο εκκρεμούς του παρακάτω σχήματος από τους νόμους της μηχανικής έχουμε ότι η σχέση εισόδου-εξόδου θα είναι:

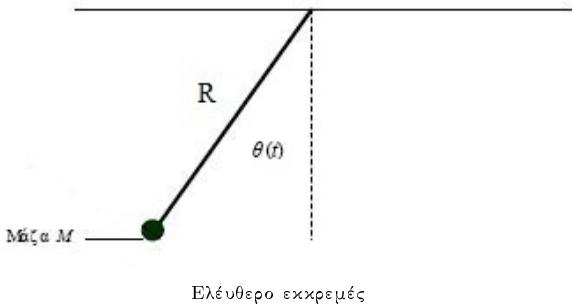


Figure 2.

$$MR^2\ddot{\theta} + KR^2\dot{\theta} + MgR\sin(\theta) = \frac{1}{MR^2}T$$

Οπου το T είναι η ροπή ασκούμενη στο εκκρεμές. Η οποία μπορεί να θεωρηθεί σαν είσοδος στο σύστημα.

Υποθέτουμε σαν μεταβλητές καταστάσεις: $(x_1 = \theta \quad x_2 = \dot{\theta})$. Για μηδενική είσοδο του συστήματος ($T = 0$), προχύπτει :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{K}{M}x_2 - \frac{g}{R}\sin(x_1)$$

σύμφωνα με την θεωρία τα σημεία ισορροπίας προχύπτουν:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

τότε έχουμε: $x_2 = 0$ και $\sin(x_1) = 0$, οπότε τα σημεία ισορροπίας θα είναι:

$$x_e = \begin{pmatrix} \pi k \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Αξίζει να αναφερθεί οτι τα σημεία ισορροπίας χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: Ευσταθή και Ασταθή.

Ορισμός. Το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές κατά Lyapunov έαν:

$$\forall E > 0, \exists \varepsilon > 0, \left\{ \|x(0)\| < \varepsilon \right\} \Rightarrow \left\{ \forall t \geq 0, \|x(t)\| < E \right\} \quad (7)$$

και Ασυμπτοτικά ευσταθές έαν:

$$\exists \varepsilon > 0, \left\{ \|x(0)\| < \varepsilon \right\} \Rightarrow \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0 \right\} \quad (8)$$

Ποιοτικά το ευσταθές σημείο ισορροπίας είναι εκείνο στο οποίο για μια αρχική θέση του σύστηματος κοντά του, οταν ο χρόνος τίνει προς το άπειρο, το σύστημα θα ισορροπίσει πάνω του. Στο προηγούμενο παράδειγμα το κάτω σημείο ισορροπίας ($\theta = 180^\circ$), είναι ευσταθές, ένω το πάνω σημείο ισορροπίας είναι ασταθές και όταν το εκκρεμές βρίσκεται σε αυτό το σημείο με την παραμικρή διαταραχή θα μετακινηθεί προς το ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Γραμμικοποίηση Οπώς αναφέρθηκε προηγούμενως, σχεδόν ολα τα φυσικά συστήματα παρουσιάζουν μη-γραμμική μορφή. Όμως ο έλεγχος των μη-γραμμικών συστήματων είναι μια πολυπλοκή διαδικασία σε σχέση με τα γραμμικά συστήματα. Ενας τρόπος αντιμετώπισης είναι η θεώρηση ενός δεύτερου συστήματος, απλούστερο από το αρχικό, και η εξασφάλιση συνθηκών ώστε τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της λύσης του να αντιστοιχούν σε εκείνα της λύσης του αρχικού. Σαν δεύτερο σύστημα λαμβάνεται συνήθως ένα γραμμικό σύστημα. Αν θεωρηθεί ότι οι εξισώσεις του μη-γραμμικού είναι χρονικά αμεταβλητές, και αν υποτεθεί ότι το σύστημα έχει γενική μορφή $\dot{x} = f(x, u)$ τότε η $f(x, u)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor στην περιοχή ενός σημείου ισορροπίας (x_e, u_e) . Θα είναι:

$$f(x, u) = f(x_e, u_e) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_e, u=u_e} (x - x_e) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=x_e, u=u_e} (u - u_e) + \text{όροι ανώτερης τάξης} \quad (9)$$

Και θεωρούμε $f(x_0, u_0) = 0$ τότε το γραμμικοποιημένο σύστημα του μη-γραμμικού στην περιοχή του σημείου ισορροπίας (x_0, u_0) γράφεται έως:

$$f(x, u) = Ax + Bu \quad (10)$$

Παράδειγμα. Στο προηγούμενο παράδειγμα του ελέυθερου εκκρεμούς:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{K}{M}x_2 - \frac{g}{R} \sin(x_1) + \frac{1}{MR^2}T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{R} \cos(x_1) & \frac{-K}{M} \end{bmatrix}$$

και:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial T} \\ \frac{\partial f_2}{\partial T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{MR^2} \end{bmatrix}$$

οπότε οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις του συστήματος στο σημείο ισορροπίας $x_e = (0,0)^T$ (στο κάτω και ευσταθές σημείο) θα είναι:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{R} & \frac{-K}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{MR^2} \end{bmatrix} \cdot T(t)$$

που είναι στην μορφή:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

Αξίζει να αναφερθεί ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι ρίζες της συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, δηλαδή είναι οι πόλοι του ανοιχτού συστήματος.

3. Χρήση του Matlab®

Η χρήση του Matlab® σαν ένα εργαλείο στα προβλήματα αυτόματου ελέγχου συνηθίζεται πολύ. Σε αυτό το σημείο με επίλυση του προηγούμενου παραδείγματος του ελέυθερου εκχρεμούς στο περιβάλλον του Matlab®, θα παρουσιαστούν καποιές εντόλες και ο τρόπος αντιμετώπισης προβλημάτων στο Matlab®.

Στο προηγούμενο προβλήμα του ελέυθερου εκχρεμούς, το γραμμικοποιημένο σύστημα εισάγεται στο Matlab® εως εξής:

Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω παράμετρους:

$$\begin{aligned} R &= 1 \text{ m} \\ g &= 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ M &= 1 \text{ kg} \\ K &= 0.1 \end{aligned}$$

Η έξοδος του συστήματος περιγράφεται από

$y = Cx + Du$. Έτσι με την εκτίμηση ότι σαν έξοδος του συστήματος θεωρούμε την γωνία θ και τότε για πίνακες C και D έχουμε:
 $C=[1 \ 0] \quad D=[0]$
τότε εισάγονται στο Matlab® έως εξις:

```
R=1;
g=9.8;
M=1;
K=0.1;
A=[0,1;(-g/R),-K/M];
B=[0;1/M*R^2];
C=[1 0];
D=[0];
```

Οπώς αναφέρθηκε προηγούμενως οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι πόλοι του συστήματος και υπολογίζεται με την εντολή:

`eig(A)`

Οπώς φαίνεται οι πόλοι του συστήματος ανοιχτού βρόχου είναι:

```
-0.0500 + 3.1301i
-0.0500 - 3.1301i
```

Φτιάχνουμε το σύστημα στο Matlab χρησιμοποιώντας την εντολή:

`sys=ss(A,B,C,D)`

και βλέπουμε την απόκριση του συστήματος με μια impulse είσοδο :

```
impulse(sys)
%
impulse(A,B,C,D)
```

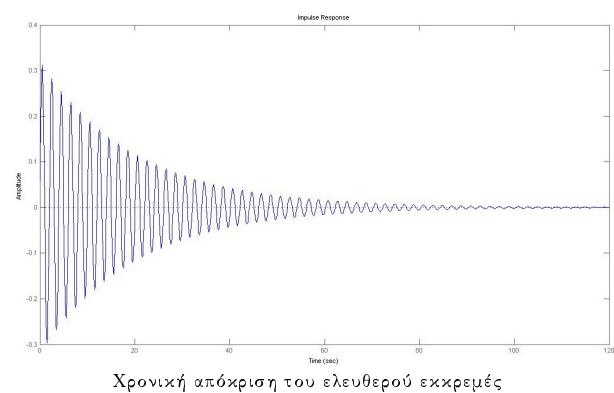


Figure 3.

Οπώς φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, το σύστημα που βρίσκεται στο κάτω και ευσταθές σημείο ισορροπίας, με είσοδο μια διαταραχή (impulse) κάνει ταλαντώσεις και στο τέλος επιστρέφεται και σταθεροποιείται πάλι στο ευσταθές σημείο ισορροπίας. οπώς είναι κατανοητό, το σύστημα σε αυτό το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές.

Ερώτημα. Αν αντί το ευσταθές σημείο ισορροπίας (δηλαδή το κάτω σημείο), κάναμε γραμμικοπόληση στο ασταθές σημείο ισορροπίας (δηλαδή το πάνω σημείο), πως θα περιμένατε να είναι η απόκριση του συστήματος;

4. Ζητούμενα

Παράρτημα Ο

Εργαστηριακή Ασκηση
“Τοποθέτηση Πόλων”

Εργαστηριακή Άσκηση

Τοποθέτηση πόλων

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή	i
1.1 Σκοπός	i
1.2 Πειραματική Διάταξη	i
1.3 Διαδικασία της Εργαστηριακής Άσκησης	i
2 Βασικές έννοιες	ii
2.0.1 Εισαγωγή	ii
2.1 Ανατροφοδότηση κατάστασης γραμμικού Συστήματος	ii
2.2 Αυθαίρετη Τοποθέτηση Πόλων	iii
2.2.1 Ελεγχιμότητα	iii
2.3 Τοποθέτηση πόλων στις επιθυμητές θέσεις	iv
2.3.1 Πρώτος τρόπος: Υπολογισμός της Χαρακτηριστικής εξίσωσης του συστήματος κλειστού βρόχου	iv
2.3.2 Δεύτερος Τρόπος: Μέθοδος Ackermann	iv
2.4 Θέση των Πόλων του Κλειστού Βρόχου	v
2.5 Πρωτότυπος σχεδιασμός (Bessel-ITAE)	v
2.6 LQR (Linear Quadratic Regulator) .	vi

1. Εισαγωγή

1.1. Σκοπός

Σκοπός της εργαστηριακής άσκησης είναι η εξοικείωση των φοιτητών με την έννοια της τοποθέτησης πόλων σε συνεχή και χρονικά αμετάβλητα γραμμικά συστήματα και η επίδραση της θέσης τους σε συμπεριφορά του συστήματος. Στην εργαστηριακή άσκηση θα απαντηθούν τα παρακάτω ερωτήματα:

- τι είναι η “ γραμμική ανατροφοδότηση κατάστασης”
- τι σημαίνει αυθαίρετη τοποθέτηση πόλων του κλειστού συστήματος
- τι χαρακτηριστικά απαιτούνται για αυθαίρετη τοποθέτηση πόλων
- πως τοποθετούνται οι πόλοι κλειστού βρόχου του συστήματος
- που πρέπει να τοποθετηθούν οι πόλοι του κλειστού συστήματος
- ποιά είναι τα βέλτιστα σημεία για την τοποθέτηση των πόλων

1.2. Πειραματική Διάταξη

Για το σκοπό της εργαστηριακής αυτής άσκησης θα χρησιμοποιηθεί “ανεστραμμένο εκκρεμές” (Inverted Pendulum Model 505 - ECP). Ο μηχανισμός αυτός διαθέτει δύο βαθμούς ελευθερίας (μια περιστροφική άρθρωση η οποία χαρακτηρίζεται από την γωνία θ και μια πρισματική άρθρωση με μεταβλητή της μετατόπισης x), εκ των οποίων μονό η πρισματική άρθρωση ενεργοποιείται από έναν κινητήρα συνεχούς (DC motor), όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.

1.3. Διαδικασία της Εργαστηριακής Άσκησης

Για πληρέστερη κατανόηση του πειραματικού μέρους του εργαστηρίου, δίνεται μια σύντομη περιγραφή του συστήματος ανεστραμμένου εκκρεμούς. στην συνεχεία δίνεται μια θεωρητική απάντηση στα ερωτήματα που περιγράφονται στη παράγραφο (1.1). έτσι δίνεται ένα κάλο υπόβαθρο στους φοιτητές ώστε να γίνει πιο κατανοητό το πειραματικό μέρος του εργαστηρίου. Για την πραγματοποίηση του πειραματικού μέρους, χρησιμοποιείται το σύστημα ανεστραμμένου



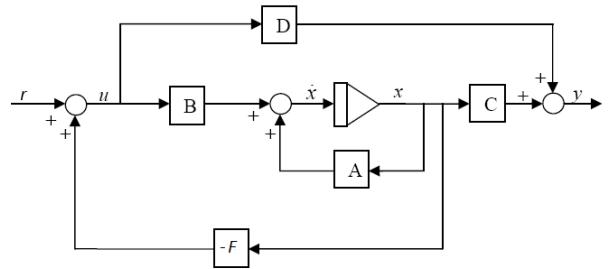
1. Inverted pendulum model 505-ECP

εκχρεμούς και με την χρήση του λογισμικού Matlab® τοποθετούνται οι πόλοι του συστήματος κλειστού βρόχου σε αυθαίρετα σημεία, ξεκινώντας από ένα σημείο στο δεξί ημι-επίπεδο και συνεχίζοντας μέχρι κάποιο μακρινό σημείο στο αριστερό ημι-επίπεδο του φανταστικού άξονα. Κάθε φόρα μετά την εκτέλεση του πειράματος, παρουσιάζεται το διάγραμμα της απόκρισης του συστήματος και συζητείται η συμπεριφορά του συστήματος.

Η άσκηση εκτελείται στο εργαστήριο αυτομάτου ελέγχου της Σχολής Μηχανολογιών Μηχανικών¹.

2. Βασικές έννοιες

2.0.1. Εισαγωγή. Η ανατροφοδότηση είναι μια πολύ συνηθισμένη διαδικασία στην βιομηχανία και ιδιαίτερα σημαντική στον αυτόματο έλεγχο των δυναμικών συστημάτων. Κατά την διαδικασία της ανατροφοδότησης, μετριούνται οι μεταβλητές καταστάσεις και στην συνέχεια ανατροφοδοτούνται και χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο του συστήματος. Κατά συνέπεια, οι νόμοι ελέγχου που βασίζονται στην ανατροφοδότηση των μεταβλητών κατάστασης εξαρτώνται όχι μόνο από μαθηματικό μοντέλο του συστήματος, αλλά και από την πραγματική συμπεριφορά του. Στην Παράγραφο αυτή γίνεται μία εισαγωγή στην έννοια της ανατροφοδότησης και αναλύεται το πρόβλημα της τοποθέτησης των ιδιοτιμών (πόλων) του συστήματος.



2.

2.1. Ανατροφοδότηση κατάστασης γραμμικού Συστήματος

Θεωρήσουμε το συνεχές χρονικά αμετάβλητο γραμμικό σύστημα ανοιχτού βρόχου, που περιγράφεται από παρακάτω σχέσεις:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

$$Y = Cx + Du \quad (2)$$

'Οπου $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{p \times n}$ και $D \in R^{p \times m}$, 'Οπως φαίνεται στο σχήμα (1).

Ορισμός. Ο γραμμικός χρονικά-αμετάβλητος, νόμος έλεγχου με ανατροφοδότηση κατάστασης ορίζεται από:

$$u = r + Fx \quad (3)$$

'Οπου $F \in R^{m \times n}$ είναι ένας πίνακας κερδών και $r \in R^m$ είναι το διάνυσμα του σήματος αναφοράς.

Σημειώνεται πως το διάνυσμα r μπορεί να παραληφθεί, όταν αυτό δεν είναι απαραίτητο [$r(t) = 0$], π.χ όταν μελετάται η ευστάθεια ενός συστήματος κατά Lyapunov. Οι εξισώσεις καταστάσεως του αντισταθμισμένου συστήματος, όπως αυτο προκύπτει με εφαρμογή του νόμου έλεγχου στο ανοιχτό σύστημα όπως (σχήμα 1) είναι:

$$\dot{x} = (A + BF)x + Br \quad (4)$$

$$Y = (C + DF)x + Dr \quad (5)$$

'Οπως φαίνεται, οι εξισώσεις (4) και (5) έχουν την ίδια μορφή με τις εξισώσεις (1) και (2). Κατά συνέπεια, το διάνυσμα κερδών F μπορεί να επέμβει στην συμπεριφορά του κλειστού συστήματος με επίδραση στον πινάκα $A + BF$. Αντιθέτως, με έναν νομό έλεγχου ανοιχτού βρόχου όπου θα πρέπει να γνωρίζουμε ακριβώς τις αρχικές συνθήκες (x_0) και τις παραμέτρους (πινάκες A και B) του συστήματος,

¹<http://www.csl.ntua.gr/>

ο νόμος έλεγχου με ανατροφοδότηση καταστάσης (Εξίσωση (3)) δεν βασίζεται στην γνώση του x_0 , αφού λαμβάνει υπόψιν το διάνυσμα κατάστασης $x(t)$ και προσαρμόζει την είσοδο $u(t)$ ώστε να επηρεάζει τις παραμέτρους του συστήματος. Συνεπώς είναι πολύ πιο εύρωστο (robust) στις μεταβολές των παραμέτρων του συστήματος.

2.2. Αυθαίρετη Τοποθέτηση Πόλων

Παρατηρώντας την εξίσωση (4) μπορούμε να εκτιμήσουμε ότι το πρόβλημα της ευσταθείας του κλειστού συστήματος είναι να βρούμε ένα νομό έλεγχου (3) με ανατροφοδότηση καταστάσεως έτσι ώστε το αντισταθμισμένο σύστημα κλειστού βρόχου να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (κατά Lyapunov) γύρω από το σημείο ισορροπίας x_e .

Από την θεωρία ζέρουμε ότι το συνεχές, χρόνικα αμετάβλητο σύστημα της εξίσωσης (4) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές λ_i του πίνακα $(A+BF)$ ικανοποιούν $Re\lambda_i < 0, i = 1, \dots, n$. Επομένως το πρόβλημα της αυθαίρετης τοποθέτησης των πόλων του συστήματος με ανατροφοδότηση καταστάσεως μπορεί να διατυπωθεί ως έξης:

- Να ευρεθεί η μήτρα $F \in R^{m \times n}$ ώστε οι ιδιοτιμές του πίνακα $(A+BF)$ της εξίσωσης (4) (με $r=0$) να είναι στα επιθυμητά σημεία. Δηλαδή να ικανοποιείται η εξίσωση:

$$\psi_c(s) = \det(sI - A - BF) \quad (6)$$

όπου $\psi_c(s)$ είναι η χαρακτηριστική εξίσωση του κλειστού συστήματος με ανατροφοδότηση κατάστασης.

Το ερώτημα που προκύπτει είναι το έξης: "Για ποιες συνθήκες είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί η τοποθέτηση των πόλων του συστήματος ?"

Για να δοθεί μια απάντηση στο παραπάνω ερώτημα θωρούμε ξανά την εξίσωση (4) με $r=0$:

$$\dot{x} = (A + BF)x$$

Παρακάτω θα δείξουμε ότι αν οι (A, B) είναι πλήρως ελέγχιμοι, τότε είναι δυνατόν όλες οι ιδιοτιμές του $(A+BF)$ να μετακινηθούν και να τοποθετηθούν σε επιθυμητά σημεία με κατάλληλη επιλογή του διανύσματος F . Καλό είναι να σημειωθεί ότι οι φυσικές ιδιοτιμές του ανοιχτού συστήματος $\dot{x} = Ax + Bu$ δεν αλλάζουν με την χρήση της ανατροφοδότησης καταστάσεως. Αυτές οι ιδιοτιμές παραμένουν ίδιες με πριν. Απλώς ο νόμος έλεγχου

$u = Fx + r$, $r = 0$, παράγει μια είσοδο $u(t)$ η οποία όταν τροφοδοτείται στο σύστημα, το κάνει να συμπεριφέρεται σαν να είχε τις ιδιοτιμές σε άλλα (επιθυμητά) σημεία.

Θεώρημα 1. Δίνεται $A \in R^{n \times n}$ και $B \in R^{n \times m}$, υπάρχει $F \in R^{m \times n}$ έτσι ώστε να τοποθετήσει τις ίδιες ιδιοτιμές του $(A+BF)$ σε αυθαίρετα, πραγματικά ή μιγαδικά συζυγή σημεία αν και μόνο αν (A, B) είναι ελέγχιμοι.

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι οι ιδιοτιμές του $(A+BF)$ έχουν τοποθετηθεί σε αυθαίρετα σημεία, και επίσης οτι (A, B) δεν είναι πλήρως ελέγχιμοι. Θα δείξουμε ότι αυτό οδηγεί σε αντίφαση.

Αφού (A, B) δεν είναι πλήρως ελέγχιμοι, υπάρχει ένας όμοιος μετασχηματισμός ο οποίος διαχωρίζει το ελέγχιμο κομμάτι από το μη-ελέγχιμο κομμάτι στο $\dot{x} = (A+BF)x$.

Δηλαδή υπάρχει ένας πίνακας² Q έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} Q^{-1}(A+BF)Q &= Q^{-1}AQ + (Q^{-1}B)(FQ) \\ &= \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} [F_1, F_2] \\ &= \begin{bmatrix} A_1 + B_1 F_1 & A_{12} + B_1 F_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

'Οπου $[F_1, F_2] \triangleq FQ$ και (A_1, B_1) είναι ελέγχιμοι. Οι ιδιοτιμές του $(A+BF)$ είναι ίδιες με τις ιδιοτιμές του $Q^{-1}(A+BF)Q$, πράγμα που σημαίνει ότι ο $(A+BF)$ έχει ορισμένες σταθερές ιδιοτιμές. Οι ιδιοτιμές του A_2 , που δεν μπορούν να μετατοπιστούν μέσω του F , είναι οι ανεξέλεγκτες ιδιοτιμές του συστήματος.

Οπότε, οι ιδιοτιμές του $(A+BF)$ δεν έχουν προσδιοριστεί αυθαίρετα. Κατά συνέπεια οι (A, B) πρέπει να είναι πλήρως ελέγχιμοι.

2.2.1. Ελεγχιμότητα. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως για να μπορούμε να τοποθετήσουμε αυθαίρετα τους πόλους του κλειστού συστήματος, πρέπει οπωσδήποτε το σύστημα ανοιχτού βρόχου να είναι ελέγχιμο. Έτσι πρέπει με κάποιο μαθηματικό μοντέλο να διερευνήσουμε αν το σύστημα μας είναι ελέγχιμο η όχι. Γενικώς σαν έννοια, ένα σύστημα είναι μη-ελέγχιμο όταν μια είσοδος (input) δεν έχει επίδραση σε μια ή περισσότερες μεταβλητές κατάστασης. Με άλλα λόγια όταν η είσοδος στο σύστημα είναι αποσυνδεόμενη από τουλάχιστον μια μεταβλητή κατάστασης. Για να προσδιοριστεί αν ένα σύστημα είναι ελέγχιμο η όχι, χρησιμοποιείται ο πίνακας ελεγχιμότητας:

²nonsingular

$$M_c = [B \ AB \ A^2B \dots A^{n-1}B]. \quad (8)$$

Αποδείχνεται ότι ένα σύστημα είναι ελέγχιμο αν οι στήλες του πίνακα ελεγχιμότητας του είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Κάθε πίνακας που έχει στήλες γραμμικά ανεξάρτητες λέγεται πλήρους τάξης³. Η τάξη ενός πίνακα αρίζεται από την διάσταση του μέγιστου υποπίνακα με μη-μηδενική ορίζουσα.

Όπως ξέρουμε από την γραμμική άλγεβρα, ένας πίνακας είναι πλήρους τάξης όταν η τάξη του πίνακα δεν είναι μικρότερη από το μέγεθος του. Στο λογισμικό Matlab[®] ο πίνακας ελεγχιμότητας, ορίζεται με την εντόλη `ctrb(A,B)`. Επίσης η τάξη ενός πίνακα υπολογίζεται με την εντόλη `(rank)` και το μέγεθος του με την εντόλη `(length)`.

Δυο βασικά ερωτήματα που μπορεί να προκύψουν είναι:

- Πώς θα τοποθετηθούν οι πόλοι στις επιθυμητές θέσεις;
- Που πρέπει να τοποθετηθούν οι πόλοι κλειστού βρόχου;

2.3. Τοποθέτηση πόλων στις επιθυμητές θέσεις

Δυο τρόποι προτείνονται για την απάντηση του παραπάνω ερωτήματος:

2.3.1. Πρώτος τρόπος: **Υπολογισμός της Χαρακτηριστικής εξίσωσης του συστήματος κλειστού βρόχου.** Με την μέθοδο αυτή βρίσκουμε την επιθυμητή χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος κλειστού βρόχου, δηλαδή $q(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0$ και την χαρακτηριστική εξίσωση που αντιστοιχεί στο σύστημα κλειστού βρόχου εξισ. (4)(5), δηλαδή: $\det(sI - A - BF)$. Στην συνεχεία εξισώνουμε έναν προς έναν τους όρους των δύο πολυωνυμων.

2.3.2. Δεύτερος Τρόπος: **Μέθοδος Ackermann.** Αυτή η μέθοδος βασίζεται στην συντροφική⁴ μορφή των πινάκων (A, B) .

Ορισμός. • To σύστημα με πίνακες (A, B, C, D) σε controller μορφή όταν $m = 1$ ⁵ δίνεται έως (A_c, B_c, C_c, D_c) όπου $A_C \triangleq \hat{A} = PAP^{-1}$ και

³full rank

⁴Controller Forms

⁵Single-Input Case ($m = 1$)

$$B_C \triangleq \hat{B} = PB \text{ και } C_c \triangleq \hat{C} = CP^{-1} \text{ και } D_c = D \\ \muε :$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Όπου οι α_i είναι οι συντελεστές της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\alpha(s)$ του A , δηλαδή:

$$\alpha(s) \triangleq \det(sI - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 \quad (10)$$

Να παρατηρηθεί πως $C_c \triangleq \hat{C} = CP^{-1}$ και $D_c = D$ δεν έχουν κάποια συγκεκριμένη μορφή. Έτσι η έκφραση (A_c, B_c, C_c, D_c) λέγεται controller μορφή του συστήματος.

- *H μήτρα μετασχηματισμού P υπολογίζεται έως έξης:*

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως ο πίνακας $C = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ είναι και $n \times n$ αντιστρέψιμος. Αν πάρουμε το $C^{-1} = \begin{bmatrix} \times \\ q \end{bmatrix}$, όπου q είναι η ποση σειρά του C^{-1} και \times υποδεικνύει τις υπόλοιπες τιμές του C^{-1} . Έτσι:

$$P \triangleq \begin{bmatrix} q \\ qA \\ \dots \\ qA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Όπως φαίνεται από παραπάνω ορισμό, αν έχουμε ένα σύστημα με ελέγχιμους πίνακες (A, B) , υπάρχει ένας πινάκας P έτσι ώστε το σύστημα $(A_c = PAP^{-1}, B_c = PB)$ είναι η controller μορφή του αρχικού συστήματος. Οι πίνακες $A + BF$ και $P(A + BF)P^{-1} = PAP^{-1} + PBFP^{-1} = A_C + B_cF_c$ έχουν ίδιες ιδιοτιμές και έτσι το πρόβλημα καταλήγει στην έυρεση ενός νεού πινάκα F_c , έτσι ώστε $A_c + B_cF_c$ να έχει τις επιθυμητές ιδιοτιμές. Έτσι ο αρχικός πινάκας F δίνεται από:

$$F = F_cP \quad (12)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι οι πίνακες (A, B) έχουν μετατραπεί στην μορφή (A_c, B_c) . Παρακάτω εξηγείται η μέθοδος για τον υπολογισμό του πινάκα F_c για τοποθέτηση των ιδιοτιμών.

Έστω έχουμε μια είσοδο αναφοράς στο σύστημα

κλειστού βρόχου.⁶ Έχουμε:

$$F_c = [f_0, \dots, f_{n-1}] \quad (13)$$

Έτσι αφού οι πίνακες A_c, B_C είναι σε controller μορφή, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} A_{cF} &\stackrel{\Delta}{=} A_c + B_c F_c \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f_0, \dots, f_{n-1}] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(\alpha_0 - f_0) & -(\alpha_1 - f_1) & \cdots & -(\alpha_{n-1} - f_{n-1}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

Όπου α_i είναι οι συντελεστές της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\alpha(s)$ του A_c , δηλαδή:

$$\alpha(s) \stackrel{\Delta}{=} \det(sI - A_c) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0 \quad (15)$$

Επίσης η χαρακτηριστική εξίσωση του A_{cF} μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\det(sI - A_{cF}) = s^n + (\alpha_{n-1} - f_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (\alpha_0 - f_0) \quad (16)$$

Αν οι επιθυμητές ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του πολυώνυμου:

$$\alpha_d(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_0 \quad (17)$$

τότε οι συντελεστές, f_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$, πρέπει

να ικανοποιούν τις $d_i = \alpha_i - f_i$ $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Έτσι προφανώς έχουμε:

$$f_i = \alpha_i - d_i, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (18)$$

Σημειώνεται ότι από τις ρίζες της επιθυμητής χαρακτηριστικής εξίσωσης συμπεραίνεται ότι πρέπει να υπάρχει ένας πίνακας A_d σε συντροφική μορφή, ο οποίος έχει χαρακτηριστική εξίσωση όπως περιγράφεται από την εξισ.(17). Όπως προκύπτει και από την εξίσωση (18), $A_{cF} = A_c + B_c F_c = A_d$, παίρνουμε:

$$F_c = B_m^{-1} [A_{dm} - A_m], \quad (19)$$

Όπου $B_m = 1$, $A_{dm} = [-d_0, \dots, -d_{n-1}]$ και $A_m = [-\alpha_0, \dots, -\alpha_{n-1}]$.⁷ Επομένως B_m , A_{dm} , και A_m

⁶Single-input Case(m=1)

⁷Η απόδειξη του παραπάνω αναφέρεται στην βιβλιογραφία Antsaklis-Michel-“a Linear Systems Primer”

είναι η $n_{στη}$ στήλες των B_c , A_d και A_c . Άρα η εξίσωση (19) είναι μια εναλλακτική μορφή της εξίσωσης (18). Μετά από την εύρεση του πίνακα F_c , για να καθορίσουμε τον F χρησιμοποιείται $F = F_c P$ της εξίσωσης (12). Παρατηρώντας την μορφή του πίνακα P ⁸ της εξίσωσης (11) είναι δυνατόν να ορίσουμε μια εξίσωση για τον υπολογισμό του πίνακα F που αναφέρεται στο αρχικό σύστημα (A, B). Ειδικότερα, ο $1 \times n$ πίνακας F οποίος τοποθετεί τις “n” ιδιοτιμές του $(A + BF)$ σε ρίζες της εξίσωσης $\alpha_d(s)$ δίνεται ως εξής:

$$F = -e_n^T C^{-1} \alpha_d(A) \quad (20)$$

Οπου:

$$e_n^T = [0, \dots, 0, 1] \in R^n$$

$C = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ Ο πίνακας ελεγχιμότητας

και το $\alpha_d(A)$ είναι η χαρακτηριστική εξίσωση για επιθυμητούς πόλους κλειστού βρόχου, θέτοντας $s = A$. Η εξίσωση (20) στην βιβλιογραφία ονομάζεται εώς “εξίσωση Ackermann”.

Στο λογισμικό MATLAB υπάρχουν οι εντολές $F = acker(A, B, P)$, $F = place(A, B, P)$ όπου A, B οι πίνακες εξίσωσεις κατάστασης και P ο πίνακας με τις επιθυμητές θέσεις πόλων.

2.4. Θέση των Πόλων του Κλειστού Βρόχου

Που πρέπει να τοποθετηθούν οι πόλοι κλειστού βρόχου;

Προτείνονται δύο τεχνικές που βοηθούν στην επιλογή επιθυμητών θέσεων για τοποθέτηση πόλων:

- Πρωτότυπος σχεδιασμός (Bessel-ITAE)
- Συμμετρική τοποθέτηση πόλων (LQR-Linear Quadratic Regulator)

2.5. Πρωτότυπος σχεδιασμός (Bessel-ITAE)

Ο σχεδιασμός κατά Bessel ή ITAE προτείνει θέσεις πόλων οι οποίες ελαχιστοποιούν το ολοκλήρωμα του χρόνου πολλαπλασιασμένο με την απολυτή τιμή του σφάλματος. Δηλαδή:

$$L = \int_0^\infty t|e|dt \quad (21)$$

⁸Single-Input Case (m = 1)

Η διαφορά μεταξύ του πρότυπου ITAE και του πρότυπου Bessel είναι ότι το πρότυπο ITAE απλώς ελαχιστοποιεί το παραπάνω ολοκλήρωμα ενώ το Bessel ελαχιστοποιεί το παραπάνω ολοκλήρωμα εξασφαλίζοντας μεγενική υπερακόντηση⁹. Έτσι οι αποκρίσεις με επιλογή του πρότυπου Bessel είναι πιο αργές σε σχέση αυτές του πρότυπου ITAE.

Έστω Κ η τάξη του συστήματος, στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι πόλοι του πολυωνύμου Bessel , στους οποίους έχει γίνει κανονικοποίηση έτσι ώστε ο χρόνος αποκατάστασης να είναι $t_s = 1\text{sec}$. Αν είναι επιθυμητός άλλος χρόνος t_s , τότε οι πόλοι διαιρούνται με t_s .¹⁰

Roots of normalized bessel polynomials corresponding to a settling time of 1 second

k	Pole locations of $B_J(s)$
1	-4.6200
2	-4.0530 \pm j2.3400
3	-5.0093 \pm -3.9668 \pm j3.7845
4	-4.0156 \pm j5.0723, -5.5281 \pm j1.6553
5	-6.4480, -4.1104 \pm j6.3142, -5.9268 \pm j3.0813
6	-4.2169 \pm j7.5300, -6.2613 \pm j4.4018, -7.1205 \pm j1.4540
7	-8.0271, -4.3361 \pm j8.7519, -6.5714 \pm j5.6786, -7.6824 \pm j2.8081
8	-4.4554 \pm j9.9715, -6.8554 \pm j6.9278, -8.1682 \pm j4.1057, -8.7693 \pm j3.3616
9	9.6585, -4.5696 \pm j11.1838, -7.1145 \pm j8.1557, -8.5962 \pm j5.3655, -9.4013 \pm j2.6655
10	-4.6835 \pm j12.4022, -7.3609 \pm j9.3777, -8.9898 \pm j6.6057, -9.9657 \pm j3.9342, -10.4278 \pm j1.3071

3. Bessel, $t_s = 1$

- Πρωτότυπος σχεδιασμός Bessel-Διαδικασία Σχεδιασμού Συστήματος ή Τάξης.
 - Επιλέγεται ο χρόνος αποκατάστασης t_s
 - Βρίσκουμε το πολύωνυμο που αντιστοιχεί στην $k = n$ σειρά του πίνακα πόλων, όπου η τάξη του συστήματος.
 - Διαιρούμε τους πόλους με t_s .
 - Φτιάχνουμε το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\phi_d(s)$ και βρίσκουμε τα κέρδη του ελεγκτή (εντολές MATLAB: acker/place).

2.6. LQR (Linear Quadratic Regulator)

Ένας βέλτιστος γραμμικός νόμος έλεγχου με ανατροφοδότησης της κατάστασης μπορεί να βρεθεί από την επίλυση του προβλήματος βέλτιστοποιήσεως του τετραγωνικού κριτήριου (LQR). Το πρόβλημα LQR έχει μελετηθεί εκτενέστερα, έτσι ο αναγνώστης θα πρέπει να ανατρέξει στην αντιστοιχή βιβλιογραφία για πρόσθετες πληροφορίες

⁹overshoot

¹⁰How, J., Course materials for 16.31 Feedback Control Systems, Fall 2007.MIT Open Course Ware (<http://ocw.mit.edu>), Massachusetts Institute of Technology.Ch. 14.

σχετικά με το θέμα. Σε αυτή την υποπαράγραφο δίνουμε μια σύντομη περιγραφή της μεθόδου LQR. Υπογραμμίζεται ότι η ανατροφοδότηση κατάστασης F μπορεί να καθοριστεί έτσι ώστε να ικανοποιήσει κατά τον καλύτερο τρόπο τις διαφορές απαντήσεις έλεγχου. Το πρόβλημα του LQR έχει μελετηθεί για χρονικά αμετάβλητα και μεταβλητά συστήματα. Σε αυτή την υποπαράγραφο θα ασχοληθούμε μόνο με τα χρονικά αμετάβλητα συστήματα.

Θεωρούμε το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα που περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad z = Mx \quad (22)$$

Όπου το διάνυσμα $z(t)$ αντιπροσωπεύει τις μεταβλητές που πρέπει να ρυθμιστούν και να οδηγηθούν στο μηδέν.

Αν υποθέτουμε ότι $x(0) \neq 0$ ας μελετήσουμε την επαναρροφά του συστήματος στην μηδενική κατάσταση σε χρόνο $t_f = \infty$ ώστε το κριτήριο κέρδους

$$J = \int_0^\infty [z(t)^T Q z(t) + u(t)^T R u(t)] dt \quad (23)$$

ελαχιστοποιείται.

Οι μήτρες Q, R είναι πραγματικές, συμμετρικές και θετικά ορισμένες. Δηλαδή, $Q = Q^T$, $R = R^T$, και $Q > 0$, $R > 0$. Αυτή είναι η πιο κοινή εκδοχή του προβλήματος LQR. Ο όρος $z^T Q z = x^T (M^T Q M) x$ είναι μη-αρνητικό, και ελαχιστοποιεί τον όρο $z(t)$ ώστε να προσεγγίζει στο μηδέν όσο το t πηγαίνει προς το άπειρο. Η μήτρα $M^T Q M$ επιλέγεται θετικά ημιορισμένη και ο όρος $u^T R u$ με $R > 0$ είναι πάντοτε θετικός για $u \neq 0$, και ελαχιστοποιεί το $u(t)$.

Για την επίλυση του ανώτερου προβλήματος βέλτιστοποιήσης ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2. Η βέλτιστη εύσοδος $u(t)$ η οποία ελαχιστοποιεί το κριτήριο κέρδος J της σχέσης (23) δίδεται από την σχέση:

$$u(t) = -F x(t) \quad (24)$$

Όπου:

$$F = R^{-1} B^T P \quad (25)$$

Όπου P είναι η συμμετρική μη-αρνητικά ορισμένη λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Riccati.

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + M^T Q M = 0 \quad (26)$$

Έτσι, η ελάχιστη τιμή του κριτήριου θα είναι :

$$J_{min} = x^T(0)Px(0) \quad \text{για } t \leq t_f \quad (27)$$

Το λογισμικό Matlab διαθέτει την εντολή “lqr(A,B,Q,R)” για την εύρεση του βέλτιστου κέρδος F με την μέθοδο LQR. Σημειώνεται ότι η μήτρα Q σε αυτήν την εντολή αντιπροσωπεύει τον όρο $M^T Q M$. Όπως αναφέρθηκε προηγούμενως η μήτρα Q της εντολής αυτής πρέπει να είναι θετικά ημιορισμένη.

Παράρτημα Ρ

Εργαστηριακή Ασκηση
“Παρατηρητής Κατάστασης”

Εργαστηριακή Άσκηση

Παρατηρητής Καταστάσεως

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή	i
1.1 Σκοπός	i
1.2 Πειραματική Διάταξη	i
1.3 Διαδικασία της Εργαστηριακής Άσκησης	i
2 Βασικές έννοιες	ii
2.1 Παρατηρητής πλήρους Τάξης	ii
2.2 Βέλτιστος Παρατηρητής	iv

1. Εισαγωγή

1.1. Σκοπός

Σκοπός της εργαστηριακής άσκησης είναι η εξοικείωση των φοιτηών με την βασική έννοια της παρατήρησης της κατάστασης του ενός συστήματος και σχεδίαση ενός παρατηρητή για ένα συγκεκριμένο χρονικά αμετάβλητο γραμμικό σύστημα και τοποθέτηση των πόλων του και στην συνέχεια η επίδραση της θέσης των πόλων του στην λειτουργικότητα και ευστάθεια του παρατηρητή. Στην εργαστηριακή άσκηση αυτή θα απαντηθούν τα παρακάτω ερωτήματα:

- τι είναι η “παρατήρηση της κατάστασης ένος συστήματος;”
- τι σημασία έχει η παρατήρηση καταστάσης ένος συστήματος;
- πως σχεδιάζεται ένας παρατηρητής πλήρους τάξης
- που να τοποθετηθούν οι πόλοι του παρατηρητή
- τι είναι ένας βέλτιστος παρατηρητής καταστάσεως

1.2. Πειραματική Διάταξη

Για το σκοπό της εργαστηριακής αυτής άσκησης θα χρησιμοποιηθεί “ανεστραμμένο εκκρεμές” (Inverted Pendulum Model 505 - ECP). Ο μηχανισμός αυτός διαθέτει δυο βαθμούς ελευθερίας (μια περιστροφική άρθρωση η οποία χαρακτηρίζεται από την γωνία θ και μια πρισματική άρθρωση με μεταβλητή της μετατόπισης x), εκ των οποίων μονό η πρισματική άρθρωση ενεργοποιείται από έναν κινητήρα συνεχούς (DC motor), όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



1.1. Inverted pendulum model 505-ECP

1.3. Διαδικασία της Εργαστηριακής Άσκησης

Πριν εκτελεστεί το πειραματικό μέρος της εργαστηριακής άσκησης, δίνεται μια σύντομη περιγραφή του συστήματος ανεστραμμένου εκκρεμούς και στην συνέχεια δίνεται μια θεωρητική απάντηση στα παραπάνω ερωτήματα, έτσι δίνεται ένα κάλο υπόβαθρο στους φοιτητές ώστε να γίνει πιο κατανοητό το πειραματικό μέρος του

εργαστηριού. Για πραγματοποίηση του πειραματικό μέρους, χρησιμοποιείται το σύστημα ανεστραμμένου εκκρεμούς ECP-model 505 και με την χρήση του λογισμικού Matlab®, στην πρώτη φάση σχεδιάζεται ένας παρατηρητής πλήρους τάξης, στην συνέχεια τοποθετούνται πειραματικά οι πόλοι του παρατηρητή σε αυθαίρετα σημεία, ξεκινώντας από ένα σημείο στο δεξί ημι-επίπεδο του φανταστικού άξονα και συνεχίζοντας προς τα αριστερά μέχρι ένα σημείο αρκετά μακριά από το φανταστικό άξονα, κάθε φορά μετά την εκτέλεση του πειράματος συγχρίνεται το πραγματικό διάνυσμα καταστάσεως του συστήματος σε σχέση με την εκτίμηση του διανύσματος καταστάσεως (εξόδου του παρατηρητή).

Η εργαστηριακή άσκηση εκτελείται στο εργαστήριο αυτομάτου ελέγχου της Σχολής Μηχανολογών Μηχανικών¹.

2. Βασικές έννοιες

Δεδομένου ότι το διάνυσμα καταστάσης ενός συστήματος περιέχει πολλές χρήσιμες πληροφορίες, υπάρχουν πολλές εφαρμογές όπου η γνώση του διανύσματος καταστάσης σε κάποιο χρονικό διάστημα είναι επιθυμητή. Το διάνυσμα καταστάσης είναι δυνατό να μετρηθεί από αισθητήρες σε τοποθετημένα σε κατάλληλα σημεία. Στην προηγούμενη ενότητα είχε γίνει παραδοχή ότι όλες οι καταστάσεις του συστήματος είναι μετρήσιμες και έπειτα οι τιμές αυτές πολλαπλασιάζονται με τα κατάλληλα κέρδη και στην συνέχεια τροφοδοτούνται πάλι σε το σύστημα. Αυτή η παραδοχή συχνά δεν μπορεί να είναι δυνατή και γενικώς όπως φαίνεται δεν είναι ρεαλιστική παραδοχή.

Ειδικότερα, ενδέχεται ορισμένες μεταβλητές καταστάσεις να μην είναι διαθέσιμες έως προς μέτρηση (Για παράδειγμα, οι θερμοκρασίες και πιέσεις σε δυσπρόσιτες περιοχές ενός κινητήρα τζετ). επίσης υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες μπορεί να είναι πρακτικά αδύνατο να γίνονται μετρήσεις από διαφορές διαθέσιμες καταστάσεις του συστήματος λόγω οικονομικούς λόγους (π.χ., μερικοί αισθητήρες μπορεί να είναι πάρα πολύ ακριβοί) ή για τεχνικούς λόγους (π.χ., το περιβάλλον μπορεί να είναι πολύ θορυβώδη για κάθε χρήσιμη μέτρηση).

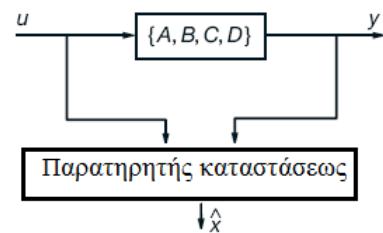
Έτσι, διαπιστώνουμε ότι είναι αναγκαία να μπορούμε να εκτιμήσουμε τις μεταβλητές καταστάσης ενός συστήματος από διαθέσιμες μετρήσεις, συνήθως εισόδους και εξόδους (βλ.

Σχήμα 5.3). έτσι με δεδομένους παραμέτρους A,B,C,D και τιμές εισόδου και εξόδου ενός συστήματος είναι δυνατόν να εκτιμήσουμε το διάνυσμα καταστάσης σε κάθε χρονική στιγμή όταν βεβαία το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

Έτσι αν το δεδομένο σύστημα n-τάξης που περιγράφεται από εξισώσεις :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0 \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\quad (1)$$

'Οπου $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{p \times n}$ και $D \in R^{p \times m}$ έχει έξοδο ένα p-διαστατό διάνυσμα για $p < n$, το όποιο αποτελεί την παρατηρούμενη καταστάση. Ένα καινούργιο σύστημα από την έξοδο του οποίου μπορεί να αναπαραχθεί η καταστάση του αρχικού συστήματος καλείται παρατηρητής² καταστάσεως.



2.

2.1. Παρατηρητής πλήρους Τάξης

Ένας παρατηρητής πλήρους τάξης κατασκευάζεται με παρακάτω τρόπο: Θεωρούμε τον παρατηρητή που περιγράφεται από κάτω σχέση:

$$\hat{x} = A\hat{x} + Bu + K(y - \hat{y}) \quad (2)$$

'Οπου $\hat{y} \triangleq C\hat{x} + Du$. Παρατηρείται ότι η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφτεί με παρακάτω τρόπο:

$$\hat{x} = (A - KC)\hat{x} + [B - KD, K] \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \quad (3)$$

'Οπου παρατηρώντας το σχήμα (5.3) φαίνεται ότι το u είναι η είσοδος στο σύστημα και το y είναι το διάνυσμα έξοδο από το σύστημα.

Το σφάλμα μεταξύ το πραγματικό διάνυσμα καταστάσης $x(t)$ και το διάνυσμα της εκτίμησης καταστάσης $\hat{x}(t)$ (έξοδος από το σύστημα παρατηρητή) είναι:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (4)$$

²Observer

¹<http://www.csl.ntua.gr/>

Ο παραγωγός της παραπάνω εξίσωσης είναι :

$$\dot{e} = \dot{x}(t) - \hat{x} = [Ax + Bu] - [A\hat{x} + Bu + KC(x - \hat{x})] \quad (5)$$

Με αντικατάσταση με προηγούμενη εξίσωση έχουμε:

$$\dot{e} = [A - KC]e(t) \quad (6)$$

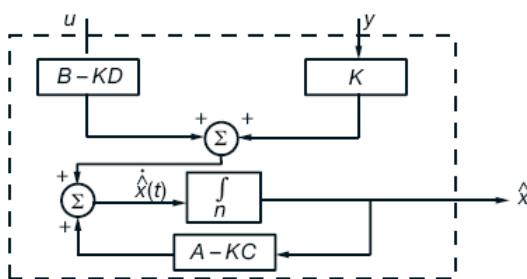
Λύνοντας την παραπάνω έχουμε:

$$e(t) = \exp[(A - KC)t]e(0) \quad (7)$$

Τώρα αν οι ιδιοτιμές της $(A - KC)$ είναι στο αριστερό ημι-επίπεδο τότε $e(t) \rightarrow 0$ όταν $t \rightarrow \infty$, ανεξαρτήτως την αρχική τιμή του σφάλματος ($e(0) = x(0) - \hat{x}(0)$). τότε προφανώς το σύστημα του παρατηρητή μας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και έτσι το σφάλμα εκτίμησης μηδενίζεται. Αυτός ο ασυμπτωτικά παρατηρητής κατάστασης ³ αναγνωρίζεται έως **Παρατηρητής Luenberger**.

Θεώρημα 1. Υπάρχει ένας πίνακας $K \in R^{n \times p}$ έτσι ώστε τοποθετείται τις ιδιοτιμές του $A - KC$ του συστήματος παρατηρητή σε αυθαίρετα πραγματικά ή μιγαδικά σημεία μονό και μονό αν (A, C) είναι παρατηρήσιμο.

Απόδειξη. Οι ιδιοτιμές του $(A - KC)^T = A^T - C^T K^T$ συμφώνα με το θεώρημα 1 του προηγούμενο παράγραφο, τοποθετούνται μέσω διάνυσμα K^T σε αυθαίρετα πραγματικά ή μιγαδικά σημεία μονό και μονό αν (A^T, C^T) είναι ελέγχιμοι. ή με άλλα λόγια μονό και μονό αν (A, C) είναι παρατηρήσιμο.



3.

Το σύστημα παρατηρητή πλήρους τάξης συμφώνα με τα παραπάνω φαίνεται στο σχήμα (5.4).

Αν (A, C) δεν είναι παρατηρήσιμοι, δηλαδή με άλλα λόγια αν (A^T, C^T) δεν είναι ελέγχιμοι, από

³asymptotic state estimator

την έννοια της ελεγχιμότητας έχουμε ότι αυτές οι ιδιοτιμές δεν μετακινούνται μέσω είσοδο του συστήματος, τότε αν αυτές οι ιδιοτιμές βρίσκονται στο αριστερό ημι-επίπεδο τότε πάλι το σύστημα του παρατηρητή είναι ευσταθές και το σφάλμα εκτίμησης θα μηδενίζεται ασυμπτωτικά. Δηλαδή αυτές οι ιδιοτιμές σε αυτήν την περίπτωση εμφανίζονται σαν ιδιοτιμές του $(A - KC)$ και μπορούν να επηρεάσουν την ταχύτητα της αντίδρασης του εκτιμητή σε ανεπιθύμητο τρόπο. Για παράδειγμα αν αυτές οι μη-παρατηρήσιμες ιδιοτιμές βρίσκονται στο αριστερό ημι-επίπεδο αλλά χοντά στον φανταστικό άξονα, τότε αυτό επηρεάζει την ταχύτητα σύγκλισης της εκτίμησης στο πραγματική τιμή του διανύσματος κατάστασης, και έτσι το σύστημα θα είναι πολύ αργό και πιθανότατα να μην έχουμε μια σωστή εκτίμηση του διανύσματος κατάστασης.

Το ερώτημα που προκύπτει είναι το έξης:

- Που πρέπει να τοποθετούνται οι πόλοι του $(A - KC)$ του παρατηρητή;

Αυτό το πρόβλημα μοιάζει πολύ με το πρόβλημα της τοποθέτησης πόλων χλειστού βρόχο μέσω ανατροφοδότησης κατάστασης.

Από μια πλευρά ο παρατηρητής πρέπει να εκτιμήσει το διάνυσμα της κατάστασης πολύ γρήγορα, πράγμα που σημαίνει ότι οι πόλοι του παρατηρητή πρέπει να τοποθετηθούν πολύ μακριά από το φανταστικό άξονα ώστε το σφάλμα $e(t)$ να τείνει στο μηδέν πολύ γρήγορα. Από την άλλη πλευρά όμως αυτή απαίτηση έχει σαν αποτέλεσμα ένα μεγάλο κέρδος K , το οποίο με την σειρά του ενισχύει τους υπάρχοντες θορύβους στο σύστημα, το οποίο οδηγεί στην μείωση της ακρίβεια της εκτίμησης. Έτσι η βέλτιστη τιμή του κέρδους K , το οποίο ισορροπεί την σχέση μεταξύ ταχύτητας απόκρισης συστήματος παρατηρητή και των υπαρχόντων θορύβων στο σύστημα βρίσκεται μέσω διαδικασία προβλήματος “Βέλτιστου παρατηρητή” ⁴.

⁴optimal estimation problem

2.2. Βέλτιστος Παρατηρητής

Στο προηγούμενο παράγραφο η εκλογή της μήτρας K για σχεδίαση του παρατηρητή ήταν αυθαίρετη. Στην παράγραφο αυτή θα περιγράφεται ο τρόπος για την βέλτιστη εκλογή της μήτρας K όταν είναι γνώστες οι διαταραχές και σφάλματα που υπεισέρχονται στις μετρήσεις. Έτσι για να εκτιμήσουμε την βέλτιστη μήτρα K , ο θόρυβος με ορισμένες στατιστικές ιδιότητες εισάγεται στο μοντέλο και στην συνέχεια η καταλληλη συνάρτηση κάστος J δημιουργείται και μειώνεται στο ελάχιστο. στην παράγραφο αυτό εισάγονται κάποιες από τις βασικές εξισώσεις του φίλτρου “Kalman-Bucy” και ταυτίζονται τα δυο προβλήματα του βέλτιστου έλεγχου και βέλτιστη εκτίμησης.

Θεωρούμε το σύστημα που περιγράφεται από παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + \Gamma\omega \\ y &= Cx + v \end{aligned} \quad (8)$$

Όπου ω και v παριστάνουν τους 'Ορους θορύβους της διαδικασίας⁵ και μέτρησης⁶. Επίσης ω και v θεωρούνται ότι είναι διαδικασία λευκού θορύβου με γκαουσιανή στοχαστική κατανομή⁷ με κέντρο της τιμής μηδέν. Επίσης είναι ασυχέτιστες με το χρόνο και έχουν αναμενόμενη τιμή⁸ $E[\omega] = 0$ και $E[v] = 0$ ⁹.

Θεωρούμε :

$$E[\omega\omega^T] = W, \quad E[vv^T] = V \quad (9)$$

Όπου παριστάνουν τις συνδιακύμανσεις τους¹⁰
Όπου W και V είναι πραγματικοί, συμμετρικοί και

⁵Process

⁶measurement

⁷Gaussian stochastic processes

⁸expected values

⁹Στις πιθανότητες η αναμενόμενη τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής ισούνται με το άθροισμα των πολλαπλασιασμών πιθανοτήτων να συμβεί κάθε δυνατή περίπτωση στην τιμή της περίπτωσης αυτής. Για παράδειγμα για την περίπτωση της ζάριας έχουμε ότι:

$$E(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$$

Δήλαδη αν ρίξουμε την ζάρια για άπειρες φορές, ο μέσος όρος τιμών που προκύπτει ισούται με 3.5

¹⁰covariance - στην θεωρία των πιθανοτήτων, covariance είναι ένα μέτρο του πόσο δυο τυχαίες μεταβλητές μπορούν να αλλάζουν μαζί. Αν οι δύο τυχαίες μεταβλητές είναι ίδιες τότε η τιμή του covariance τους ονομάζεται Variance.

Αν για δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y όπου έχουν αναμενόμενη τιμή: $E(Y) = \nu$ $E(X) = \mu$. τότε το covariance τους περιγράφεται :

$$Cov(X, Y) = E((X - \mu)(Y - \nu))$$

Αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους τότε η τιμή του covariance τους θα είναι ίσο με μηδέν

θετικά ορισμένοι πινάκες. Π.χ. $W = W^T$, $W > 0$, και $V = V^T$, $V > 0$. Θεωρούμε επίσης ότι ο θόρυβος της διαδικασίας και μέτρησης είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, τότε : $E[\omega v^T] = 0$. Θεωρούμε επίσης ότι η αρχική συνθήκη $x(0)$ του συστήματος ακλουθεί μια γκαουσιανή κατανομή με γνωστό κέντρο της x_0 δηλαδή: $E[x(0)] = x_0$, και η covariance : $E(x(0) - x_0)(x(0) - x_0)^T = P_{e0}$ είναι γνωστή. Επίσης θεωρείται ότι η αρχική συνθήκη $x(0)$ είναι ασυχέτιστη με τα ω και v .

Θεωρούμε τώρα ότι ο παρατηρητής περιγράφεται από παρακάτω εξισωση:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) = (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky \quad (10)$$

Ο παραπάνω παρατηρητής καλείται βέλτιστος εάν η μήτρα K να εκλέγεται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το κριτήριο:

$$J = E[(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T] \quad (11)$$

Το βέλτιστο κέρδος K^* δίνεται από την σχέση:

$$K^* = P_e C^T V^{-1} \quad (12)$$

Όπου P_e είναι η συμμετρική, θετικά ορισμένη λύση της τετραγωνικής αλγεβρικής εξισωσης Riccati:

$$P_e A^T + AP_e - P_e C^T V^{-1} CP_e + \Gamma W \Gamma^T = 0 \quad (13)$$

Σημειώνεται ότι η παραπάνω αλγεβρική εξισωση Riccati μοιάζει με την εξισωση Riccati (5.26) για βέλτιστη τοποθέτηση πόλων, όπου :

$$A \rightarrow A^T, \quad B \rightarrow C^T, \quad M \rightarrow \Gamma^T \quad \text{και} \quad R \rightarrow V, \quad Q \rightarrow W. \quad (14)$$

Βιβλιογραφία

- [1] Ν.Ι Κρικέλη “Εισαγωγή στον Αυτόματο Ελεγχο” εκδόσεις συμμετρια - Αθήνα 2000
- [2] Ν.Ι Κρικέλη “Μοντελοποίηση & Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων”
- [3] Κ.Ι.Κυριακόπουλος “Μικρουπολογιστές & Ψηφιακός Έλεγχος - Αθήνα 2002
- [4] Hassan K.Khalil “NONLINEAR SYSTEMS”
- [5] Κ.Τζαφέστας “Ρομπτικά Συστήματα Ελέγχου”
- [6] Richard C. Dorf, Robert H. Bishop “MODERN CONTROL SYSTEMS”
- [7] Panos J. Antsaklis, Anthony N. Michel “A Linear Systems Primer”
- [8] Hugh Jack “Dynamic System Modeling and Control by Hugh Jack”
- [9] Τρύφων Κουσιουρής “Μέθοδοι Ανάλυσης και Σχεδίασης στο Πεδίο της Συχνότητας”
- [10] How, J., Course materials for 16.31 Feedback Control Systems, Fall 2007.MIT Open Course Ware (<http://ocw.mit.edu>), Massachusetts Institute of Technology.Ch. 12,13,14.
- [11] Ε.Παπαδόπουλος, Κ.Ι Κυριακόπουλος “Ευφυή Συστήματα Ελέγχου και Ρομπτική”
- [12] Τρύφων Κουσιουρής “Πολυμεταβλητά Συστήματα Ελέγχου”