מבוא לקריפטוגרפיה ואבטחת תוכנה
תרגיל 1

רן שחם - 203781000

5 באפריל 2017

הערה 0.1 לאורך התרגיל אני מסמן ב־U_n איבר מההתפלגות האחידה על $\{0,1\}^n$. למשל:

$$\Pr\left[D\left(U_n\right)=1\right]=\Pr_{s\leftarrow\{0,1\}^n}\left[D\left(s\right)=1\right]$$

שאלה 4

סעיף א'

נניח ש־G_1,G_2 הם PRG כך ש־$G_1=G_2$. אזי G המוגדר כבשאלה אינו PRG.

יהי $\ell\left(n\right)>n$ פולינום כך ש־$\left|G_1\left(s\right)\right|=\ell\left(\left|s\right|\right)$. נראה מבחין (distinguisher) יעיל שמבדיל בין פלט של G לבין פלט אקראי בסיכוי לא זניח. נגדיר את $D\left(c\right)$ להחזיר 0 אם $|c|$ אי־זוגי. אחרת, אם $|c|=2k$ אז D יחזיר 1 אס"ם $c\left[0\ldots k-1\right]=c\left[k\ldots 2k-1\right]$, כלומר אם k הביטים הראשונים ב־c זהים ל־k הביטים האחרונים בו.

אם כך, לכל קלט s בעל n ביטים כך ש־$c=G\left(s\right)=G_1\left(s\right)||G_2\left(s\right)=G_1\left(s\right)||G_1\left(s\right)$ מתקיים ש־$\ell\left(n\right)$ הביטים הראשונים ב־c זהים ל־$\ell\left(n\right)$ הביטים האחרונים, ולכן D על c יחזיר 1 (תמיד). לכן:

$$\left|\Pr_{s\leftarrow\{0,1\}^n}\left[D\left(G\left(s\right)\right)=1\right]-\Pr_{r\leftarrow\{0,1\}^{2\ell(n)}}\left[D\left(r\right)\right]=1\right|=\left|1-\left({}^1\!/\!{}_2\right)^{\ell(n)}\right|=1-\left({}^1\!/\!{}_2\right)^{\ell(n)}$$

כי הסיכוי שהביט ה־i יהיה שווה לביט ה־$i+\ell\left(n\right)$ לכל $0\le i<\ell\left(n\right)$ הוא ${}^1\!/\!{}_2$, והביט ה־i ב"ת בביט ה־j לכל $0\le i<j<\ell\left(n\right)$ (מכיוון שההתפלגות בה נבחר r היא אחידה).

לכן, לפי הגדרה, G אינו PRG כי ברור שהפונקציה $1-\left({}^1\!/\!{}_2\right)^{\ell(n)}$ אינה זניחה (היא גדולה למשל מ־${}^1\!/\!{}_n$ עבור אינסוף n).

סעיף ב'

יהי $\ell\left(n\right)>n$ כך ש־$\left|G_1\left(s\right)\right|=\left|G_2\left(s\right)\right|=\ell\left(n\right)$. נניח בשלילה שקיים מבחין יעיל D (PPT) ופולינום $p\left(n\right)$ כך ש־:

$$\left|\Pr\left[D\left(G\left(U_{2n}\right)\right)=1\right]-\Pr\left[D\left(U_{2\ell(n)}\right)=1\right]\right|>\frac{2}{p\left(n\right)}$$

עבור אינסוף ערכי n. לכן, לאינסוף n:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{p(n)} &< \left|\Pr_{s\leftarrow\{0,1\}^{2n}}\left[D\left(G\left(s\right)\right)=1\right]-\Pr_{r\leftarrow\{0,1\}^{2\ell(n)}}\left[D\left(r\right)=1\right]\right| \\
&= \left|\Pr_{s_1,s_2\leftarrow\{0,1\}^{n}}\left[D\left(G\left(s_1||s_2\right)\right)=1\right]-\Pr_{r_1,r_2\leftarrow\{0,1\}^{\ell(n)}}\left[D\left(r_1||r_2\right)=1\right]\right| \\
&\stackrel{1}{=} \left|\Pr_{s_1,s_2\leftarrow\{0,1\}^{n}}\left[D\left(G_1\left(s_1\right)||G_2\left(s_2\right)\right)=1\right]-\Pr_{r_1,r_2\leftarrow\{0,1\}^{\ell(n)}}\left[D\left(r_1||r_2\right)=1\right]\right| \\
&= \left|\Pr_{s_1,s_2\leftarrow\{0,1\}^{n}}\left[D\left(G_1\left(s_1\right)||G_2\left(s_2\right)\right)=1\right]-\Pr_{s_1\leftarrow\{0,1\}^{n},r_2\leftarrow\{0,1\}^{\ell(n)}}\left[D\left(G_1\left(s_1\right)||r_2\right)=1\right]\right. \\
&\quad \left.+\Pr_{s_1\leftarrow\{0,1\}^{n},r_2\leftarrow\{0,1\}^{\ell(n)}}\left[D\left(G_1\left(s_1\right)||r_2\right)=1\right]-\Pr_{r_1,r_2\leftarrow\{0,1\}^{\ell(n)}}\left[D\left(r_1||r_2\right)=1\right]\right| \\
&\stackrel{2}{\leq} \underbrace{\left|\Pr_{s_1,s_2\leftarrow\{0,1\}^{n}}\left[D\left(G_1\left(s_1\right)||G_2\left(s_2\right)\right)=1\right]-\Pr_{s_1\leftarrow\{0,1\}^{n},r_2\leftarrow\{0,1\}^{\ell(n)}}\left[D\left(G_1\left(s_1\right)||r_2\right)=1\right]\right|}_{A} \\
&\quad +\underbrace{\left|\Pr_{s_1\leftarrow\{0,1\}^{n},r_2\leftarrow\{0,1\}^{\ell(n)}}\left[D\left(G_1\left(s_1\right)||r_2\right)=1\right]-\Pr_{r_1,r_2\leftarrow\{0,1\}^{\ell(n)}}\left[D\left(r_1||r_2\right)=1\right]\right|}_{B}
\end{aligned}$$

כאשר:

1. לפי הגדרת G
2. אי שוויון המשולש

ולכן, מתקיים $A > \frac{2}{2p(n)} = \frac{1}{p(n)}$ או ש־$B > \frac{1}{p(n)}$ לאינסוף ערכי n.

נניח שהראשון מתקיים. נגדיר את D_2 להיות מבחין יעיל ל־G_2 באופן הבא: עבור קלט s, D_2 ידגום $s_1 \leftarrow \{0,1\}^{|s|}$ ויחזיר $D\left(G_1\left(s_1\right)||s\right)$. מכיוון ש־$D$ מבחין יעיל גם D_2 יעיל. נשים לב שעבור אינסוף n מתקיים:

$$\begin{aligned}
&\left|\Pr_{s_2\leftarrow\{0,1\}^{n}}\left[D_2\left(G_2\left(s_2\right)\right)=1\right]-\Pr_{r_2\leftarrow\{0,1\}^{\ell(n)}}\left[D_2\left(r_2\right)=1\right]\right| \\
=&\left|\Pr_{s_1,s_2\leftarrow\{0,1\}^{n}}\left[D\left(G_1\left(s_1\right)||G_2\left(s_2\right)\right)=1\right]-\Pr_{s_1\leftarrow\{0,1\}^{n},r_2\leftarrow\{0,1\}^{\ell(n)}}\left[D\left(G_1\left(s_1\right)||r_2\right)=1\right]\right| \\
>&\frac{1}{p(n)}
\end{aligned}$$

מההנחה ש־$A > \frac{1}{p(n)}$, ובסתירה לכך ש־G_2 הוא PRG.

באופן דומה, אם $B > \frac{1}{p(n)}$ אז נבנה מבחין D_1 שעבור קלט s דוגם $s_2 \leftarrow \{0,1\}^{|s|}$ ומחזיר $D\left(s||G_2\left(s_2\right)\right)$. מחישוב דומה מתקבל:

$$\left|\Pr_{s_1\leftarrow\{0,1\}^{n}}\left[D_1\left(G_1\left(s_1\right)\right)=1\right]-\Pr_{r_1\leftarrow\{0,1\}^{\ell(n)}}\left[D_1\left(r_1\right)=1\right]\right| > \frac{1}{p(n)}$$

עבור אינסוף n, בסתירה ל־PRGיות של G_1.

לכן, לא קיים מבחין D כנ"ל ו־G הוא PRG כנדרש.

שאלה 5

למה 0.2 לכל פונ' זניחה $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ולכל פולינום $p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, הפונקציה המוגדרת על ידי $q\left(n\right) = \frac{1}{p(n)} + \nu\left(n\right)$ אינה זניחה

הוכחה: ν זניחה, לכן קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים:

$$\begin{aligned}|\nu(n)|\le\frac{1}{2p(n)} &\iff -\frac{1}{2p(n)}\le\nu(n)\le\frac{1}{2p(n)}\\ &\iff \frac{1}{2p(n)}\le\nu(n)+\frac{1}{p(n)}\le\frac{3}{2p(n)}\end{aligned}$$

ו־$2p(n)$ הוא פולינום, לכן לכל $N>n$ מתקיים ש־$q(n)\ge\frac{1}{2p(n)}$ ולכן q אינה זניחה. ∎

נגדיר את H כך:

$$H(s)=\begin{cases}G(s), & s\ne 0^n\\ 0^{2n}, & s=0^n\end{cases}$$

ונטען ש־H הוא PRG. נניח בשלילה שלא, כלומר שקיים מבחין D כך ש־:

$$|\Pr[D(H(U_n))=1]-\Pr[D(U_{2n})=1]|>\frac{1}{p(n)}$$

עבור אינסוף n ופולינום $p(n)$ כלשהו. מכאן ש־$(*):\ \Pr[D(H(U_n))=1]>\Pr[D(U_{2n})=1]+\frac{1}{p(n)}$ עבור אינסוף n. לכן:

$$\begin{aligned}\Pr[D(H(U_n))=1]&=\Pr[D(H(U_n))=1|U_n=0^n]\Pr[U_n=0^n]\\&+\Pr[D(H(U_n))=1|U_n\ne0^n]\Pr[U_n\ne0^n]\\&=\overbrace{\Pr[D(H(0^n))=1]}^{q}\cdot2^{-n}+\Pr[D(G(U_n))=1]\cdot\left(1-2^{-n}\right)\\&=q\cdot2^{-n}+\Pr[D(G(U_n))=1]-\overbrace{\Pr[D(G(U_n))=1]}^{r}\cdot2^{-n}\\&=(q-r)2^{-n}+\Pr[D(G(U_n))=1]\overset{(*)}{>}\Pr[D(U_{2n})=1]+\frac{1}{p(n)}\end{aligned}$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\begin{aligned}|\Pr[D(G(U_n))=1]-\Pr[D(U_{2n})=1]|&\ge\Pr[D(G(U_n))=1]-\Pr[D(U_{2n})=1]\\&>(r-q)2^{-n}+\frac{1}{p(n)}\end{aligned}$$

כאשר הא"ש הראשון נובע מתכונות הערך המוחלט והא"ש השני נובע מהחישוב לעיל.

נשים לב ש־$(r-q)2^{-n}$ זניחה (כי $r-q$ חסומה ב־±1 ו־2^{-n} זניחה) ולכן לפי lemma 0.2 גם $(r-q)2^{-n}+\frac{1}{p(n)}$ לא זניחה. מכאן ש־D מבחין בסיכוי לא זניח קלטים מ־G, בסתירה לכך ש־G PRG.

שאלה 6

נשים לב ש־G מקיים את תכונת ההרחבה (כלומר, מחזיר פלט עם יותר ביטים מאשר בקלט), כי גם אם הפלט של F הוא באורך ביט אחד, G מוגדר על ידי שרשור של $n+1$ כאלה, עבור קלט באורך n ביטים. נניח שהפלט של F הוא באורך ביט אחד (לשם פשטות. שאר הניתוח לא משתנה מהותית עבור כל ערך אחר).

נניח בשלילה ש־D מבחין יעיל ל־G (כלומר G אינו PRG), כלומר מתקיים:

$$\left|\Pr_{s\leftarrow\{0,1\}^n}[D(G(s))=1]-\Pr_{r\leftarrow\{0,1\}^{n+1}}[D(r)=1]\right|>\frac{1}{p(n)}$$

עבור פולינום p כלשהו, לאינסוף n. נבנה מבחין יעיל ל־F. בהינתן קלט 1^n וגישת אורקל לפונקצייה $\mathcal{O}$, המבחין יחשב את:

$$x=\mathcal{O}(1)\,||\mathcal{O}(2)\,||\cdots||\mathcal{O}(n+1)$$

לאחר מכן, יחשב את $D(x)$ ויענה כמוהו. נשים לב:

1. $D^{\mathcal{O}(\cdot)}$ יעיל כי D יעיל וכי יש מספר לינארי ב־n של קריאות לאורקל

2. אם $\mathcal{O} \equiv F_s$ אז $x = G(s)$ לכל s, לפי הגדרה

3. אם $\mathcal{O} \equiv f$ כאשר $f \leftarrow \text{Func}_1$ (כאשר $\text{Func}_1 = \left\{g : \{0,1\}^* \to \{0,1\}\right\}$) אז x שקול לערך הנבחר מהתפלגות אחידה על מחרוזות באורך $n+1$ ביטים - כי כל ביט בו נבחר באקראי

לכן:

$$\begin{aligned} &\left|\Pr_{s\leftarrow\{0,1\}^n}\left[D^{F_s(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]-\Pr_{f\leftarrow\text{Func}_1}\left[D^{f(\cdot)}\left(1^n\right)\right]=1\right| \\ =&\left|\Pr_{s\leftarrow\{0,1\}^n}\left[D\left(G\left(s\right)\right)=1\right]-\Pr_{r\leftarrow\{0,1\}^{n+1}}\left[D\left(r\right)=1\right]\right|>\frac{1}{p\left(n\right)} \end{aligned}$$

עבור אינסוף n, לפי הנחת השלילה. זו סתירה לכך ש־F היא PRF, ולכן D כנ"ל לא קיים - כלומר G הוא PRG כרצוי.

שאלה 7

בשני הסעיפים נניח כמובן ש־F היא PRF כמתואר בשאלה.

סעיף 1

P לא PRF. מבחין יעיל D יפעל באופן הבא: עבור הקלט 1^n וגישת אורקל לפונ' $\mathcal{O}$, D יחשב את $x = \mathcal{O}\left(1^n\right)$. אם $x = 0^n$ יחזיר 1, אחרת יחזיר 0. ברור ש־D רץ בזמן פולינומי ב־n. נשים לב שאם $\mathcal{O} \equiv P_k$ אז $P_k\left(1^n\right) = F_k\left(1^n\right) \oplus F_k\left(1^n\right) = 0^n$ ולכן D יחזיר 1 בהסתברות 1 לכל $k \in \{0,1\}^n$. אם $\mathcal{O} \equiv f$ כאשר $f \leftarrow \text{Func}_n$ אז $f\left(1^n\right) = 0^n$ יקרה בהסתברות 2^{-n} ולכן ההסתברות ש־D יחזיר 1 היא 2^{-n}. אם כך:

$$\begin{aligned} &\left|\Pr_{k\leftarrow\{0,1\}^n}\left[D^{P_k(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]-\Pr_{f\leftarrow\text{Func}_n}\left[D^{f(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]\right| \\ =&\left|1-2^{-n}\right|=1-2^{-n}>\frac{1}{n} \end{aligned}$$

עבור אינסוף n, לכן P אינה PRF.

סעיף 2

H אכן PRF. נניח בשלילה שלא. יהי B מבחין יעיל ל־H, כלומר קיים פולינום p כך ש:

$$\left|\Pr_{k\leftarrow\{0,1\}^n}\left[B^{H_k(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]-\Pr_{f\leftarrow\text{Func}_n}\left[B^{f(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]\right|>\frac{1}{p\left(n\right)}$$

עבור אינסוף ערכי n. נבנה מבחין יעיל D ל־F. בהינתן גישת אורקל ל־$\mathcal{O}$, D יריץ את B עם גישת אורקל ל־$\mathcal{O} \oplus 1^n$. כלומר, כאשר B יבקש את הפלט עבור הערך x, D יחשב את $y = \mathcal{O}\left(x\right) \oplus 1^n$ על ידי גישת האורקל שלו ויחזיר ל־B את y. D יחזיר פלט זהה לשל B.

D יעיל כי B יעיל ולכן מבצע מס' פולינומיאלי של קריאות לאורקל, שכל אחת מהן מתבצעת בזמן פולינומיאלי (גישת אורקל ופעולת XOR). כמוכן, אם $\mathcal{O} \equiv F_k$ אז $y = F_k\left(x\right) \oplus 1^n = H_k\left(x\right)$ לכל $x, k \in \{0,1\}^n$, כלומר B הרץ ב־D מקבל גישת אורקל ל־H_k. אם $\mathcal{O} \equiv f$ אז ה־XOR עם 1^n אינו משנה את ההסתברות לערך y מסויים על פני אחר, עבור x כלשהו, כלומר B מקבל גישת אורקל לפונ' שנבחרת בהתפלגות אחידה מ־Func_n. לכן:

$$\begin{aligned} &\left|\Pr_{k\leftarrow\{0,1\}^n}\left[D^{F_k(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]-\Pr_{f\leftarrow\text{Func}_n}\left[D^{f(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]\right| \\ =&\left|\Pr_{k\leftarrow\{0,1\}^n}\left[B^{H_k(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]-\Pr_{f\leftarrow\text{Func}_n}\left[B^{f\oplus 1^n(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]\right| \\ =&\left|\Pr_{k\leftarrow\{0,1\}^n}\left[B^{H_k(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]-\Pr_{f\leftarrow\text{Func}_n}\left[B^{f(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]\right|>\frac{1}{p\left(n\right)} \end{aligned}$$

לאינסוף n, לפי ההנחה - ובסתירה לכך ש־F היא PRF. לכן H היא PRF כנדרש.

שאלה 8

בשני הסעיפים נניח ש־F היא כבתיאור השאלה.

סעיף 1

H היא PRF. אחרת, יהיו B מבחין ל־H ו־p פולינום כך ש:

$$\left|\Pr_{k\leftarrow\{0,1\}^n}\left[B^{H_k(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]-\Pr_{f\leftarrow\mathrm{Func}_{n,2n}}\left[B^{f(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]\right|>\frac{1}{p\left(n\right)}$$

לאינסוף n. נבנה מבחין D ל־F הפועל כך: בהינתן 1^n וגישת אורקל ל־$\mathcal{O}$, D יריץ את B עם הפרמטר 1^n. לכל בקשה של B לגישת אורקל לערך $x\in\{0,1\}^n$, D יחשב[1] את $F_{1^n}\left(x\right)$ ויחזיר ל־B את $\mathcal{O}\left(x\right)\oplus F_{1^n}\left(x\right)$. D יחזיר 1 אם"ם B החזיר 1.

נשים לב שלכל $n\in\mathbb{N}$, עבור $k\in\{0,1\}^n$ ועבור $\mathcal{O}=F_k$, D מדמה את ריצת B עם אורקל H_k ־ לכן:

$$\Pr_{k\leftarrow\{0,1\}^n}\left[D^{F_k(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]=\Pr_{k\leftarrow\{0,1\}^n}\left[B^{H_k(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]$$

כמוכן אם $\mathcal{O}=f$ עבור $f\leftarrow\mathrm{Func}_{n,2n}$ אז הערך $f\left(x\right)\oplus F_{1^n}\left(x\right)$ הוא ערך המפולג באופן אחיד ב־$\{0,1\}^{2n}$ ובלתי תלוי ב־$f\left(x'\right)\oplus F_{1^n}\left(x'\right)$ עבור $x'\neq x\in\{0,1\}^n$. לכן:

$$\begin{aligned}&\left|\Pr_{k\leftarrow\{0,1\}^n}\left[D^{F_k(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]-\Pr_{f\leftarrow\mathrm{Func}_{n,2n}}\left[D^{f(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]\right|\\ =&\left|\Pr_{k\leftarrow\{0,1\}^n}\left[B^{H_k(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]-\Pr_{f\leftarrow\mathrm{Func}_{n,2n}}\left[B^{f(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]\right|>\frac{1}{p\left(n\right)}\end{aligned}$$

לאינסוף n בסתירה לכך ש־F פסאודו רנדומית.

סעיף 2

G אינו בהכרח PRG.

נגדיר פונ' F' באופן הבא:

$$F'_k\left(x\right)=\begin{cases}F_k\left(x\right), & k\neq 0^n\\ 0^{2n}, & k=0^n\end{cases}$$

לכל $k,x\in\{0,1\}^n$. נטען ש־F' היא PRF. אחרת, נניח ש־B מבחין יעיל ל־F' המקיים:

$$\left|\Pr_{k\leftarrow\{0,1\}^n}\left[B^{F'_k(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]-\Pr_{f\leftarrow\mathrm{Func}_{n,2n}}\left[B^{f(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]\right|>\frac{1}{p\left(n\right)}$$

עבור p פולינום ואינסוף ערכי $n\in\mathbb{N}$. לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\Pr_{k\leftarrow\{0,1\}^n}\left[B^{F'_k(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]&=\Pr\left[B^{F'_k(\cdot)}\left(1^n\right)=1\middle|k\neq 0^n\right]\Pr\left[k\neq 0^n\right]\\&+\overbrace{\Pr\left[B^{F'_k(\cdot)}\left(1^n\right)=1\middle|k=0^n\right]}^{q_n}\Pr\left[k=0^n\right]\\&=\overbrace{\Pr\left[B^{F_k(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]}^{r_n}\cdot\left(1-2^{-n}\right)+q_n\cdot 2^{-n}\\&=\Pr\left[B^{F_k(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]+2^{-n}\cdot\left(q_n-r_n\right)\end{aligned}$$

לכן, לאינסוף n:

$$\begin{aligned}\frac{1}{p\left(n\right)}&<\left|\Pr_{k\leftarrow\{0,1\}^n}\left[B^{F'_k(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]-\Pr_{f\leftarrow\mathrm{Func}_{n,2n}}\left[B^{f(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]\right|\\&=\left|\Pr\left[B^{F_k(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]+2^{-n}\cdot\left(q_n-r_n\right)-\Pr_{f\leftarrow\mathrm{Func}_{n,2n}}\left[B^{f(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]\right|\\&\leq\left|\Pr\left[B^{F_k(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]-\Pr_{f\leftarrow\mathrm{Func}_{n,2n}}\left[B^{f(\cdot)}\left(1^n\right)=1\right]\right|+\left|\left(q_n-r_n\right)\cdot 2^{-n}\right|\end{aligned}$$

[1] זה אפשרי כי תיאור F הוא פומבי; אנחנו מניחים ש־F ניתנת לחישוב יעיל. כלומר, בהינתן קלט $k,x\in\{0,1\}^n$, אפשר לחשב את $F_k\left(x\right)$ בזמן פולינומיאלי ב־n, לכל $n\in\mathbb{N}$

כאשר המעבר האחרון נובע מאי־שוויון המשולש. באופן דומה לבשאלה 5, $|(q_n - r_n)\cdot 2^{-n}| - \frac{1}{p(n)}$ אינה פונ' זניחה מ־lemma 0.2, וזו סתירה לכך ש־F היא PRF, כי בחישוב הנ"ל אפשר לראות ש־B מבחין יעיל עבורה. לכן F' היא PRF.

נטען עתה ש־G המוגדר על ידי $G(s) = F'_{0^n}(s)$ אינו PRG. נבנה מבחין D ל־G: בהינתן קלט $s \in \{0,1\}^{2n}$, D יחזיר 1 אס"ם $s = 0^{2n}$.

נשים לב ש־D יחזיר 1 על $G(s)$, לכל $s \in \{0,1\}^n$, כלומר $\Pr[D(G(U_n)) = 1] = 1$. כמוכן עבור ערך $r \leftarrow \{0,1\}^{2n}$, D יחזיר 1 בהסתברות בה $r = 0^{2n}$ שהיא 2^{-2n}. לכן:

$$\begin{aligned}&\left|\Pr_{s\leftarrow\{0,1\}^n}[D(G(s))=1] - \Pr_{r\leftarrow\{0,1\}^{2n}}[D(r)=1]\right|\\ =&\left|1 - \Pr_{r\leftarrow\{0,1\}^{2n}}\left[r = 0^{2n}\right]\right|\\ =&\left|1-2^{-2n}\right| = 1-2^{-2n} > \frac{1}{n}\end{aligned}$$

עבור אינסוף n, כלומר G אינה PRG.

שאלה 9

סעיף 1

המערכת לא בטוחה (לא IND ובפרט לא CPA). נבנה יריב $\mathcal{A}$ המזהה הצפנות בהסתברות 1. בהינתן הפרמטר $n \in \mathbb{N}$, היריב יפלוט שתי הודעות $m_0 = 0^n, m_1 = 1^n$ ויקבל הצפנה $c^* = (r^*, s^*)$ - כאשר r^* הוא n הביטים הראשונים ב־c^* ו־s^* הוא יתר המחרוזת. $\mathcal{A}$ יחשב את $m^* = G(r^*) \oplus s^*$ ויחזיר:

$$b' = \begin{cases} 0, & m^* = 0^n \\ 1, & m^* = 1^n \end{cases}$$

נטען ש־$\Pr[\mathrm{IND}_{\Pi,\mathcal{A}}(n) = 1] = 1$. יהי $b \in \{0,1\}$ כך ש־$c^* = \mathrm{Enc}_k(m_b)$. G ידועה וניתנת לחישוב בזמן יעיל, r^* ידוע ולכן החישוב:

$$m^* = G(r^*) \oplus s^* = G(r^*) \oplus (G(r^*) \oplus m_b) = m_b$$

מתבצע באופן יעיל. מכאן $b' = b$ כנדרש.

סעיף 2

המערכת אינה CPA־בטוחה. נגדיר יריב $\mathcal{A}$ הפועל באופן הבא: מבקש הצפנה להודעה $m \neq 0^n, 1^n$ כלשהי ומקבל צופן c. אח"כ יחשב את $x = c \oplus m$. לבסוף יפלוט $m_0 = 0^n, m_1 = 1^n$ ויקבל צופן c^* - אז $\mathcal{A}$ יחזיר 1 אס"ם $c^* \oplus x = 1^n$.

נטען ש־$x = F_k(0^n)$ ונסיים - כי אז:

$$x \oplus c^* = F_k(0^n) \oplus (m_b \oplus F_k(0^n)) = m_b$$

אכן, $x = c \oplus m = (F_k(0^n) \oplus m) \oplus m = F_k(0^n)$ ולכן המערכת לא בטוחה נגד CPA.

עם זאת, למערכת יש הצפנות בלתי ניתנות להבחנה (IND-Secure). נניח בשלילה שלא, ויהיו F PRF, יריב $\mathcal{A}$ ופולינום p כך שלאינסוף $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\Pr[\mathrm{IND}_{\Pi,\mathcal{A}}(n) = 1] > \frac{1}{2} + \frac{1}{p(n)}$$

נבנה מבחין D שבהינתן הקלט 1^n וגישת אורקל לפונקצייה $\mathcal{O}$, מריץ את $\mathcal{A}$ ומקבל זוג הודעות m_0, m_1, דוגם $b \leftarrow \{0,1\}$ ומחזיר ל־$\mathcal{A}$ את $c^* = \mathcal{O}(0^n) \oplus m_b$. לבסוף D עונה 1 אס"ם $b' = b$ כאשר b' הוא הפלט של $\mathcal{A}$.

ראשית, קל לראות ש־D רץ בזמן פולינומיאלי כי $\mathcal{A}$ הוא PPT לפי הנחה (וגישת אורקל ו־XOR מתבצעות באופן יעיל). נשים לב שכאשר $\mathcal{O} \equiv f$ עבור $f \leftarrow \mathrm{Func}_n$ אז $f(0^n)$ שקול לערך המפולג אחיד מ־$\{0,1\}^n$, כלומר הסיכוי של $\mathcal{A}$ לענות נכונה בניסוי IND הוא $\frac{1}{2}$. אם $\mathcal{O} \equiv F_k$ אז $\mathcal{A}$ מקבל בדיוק את ההצפנות של המערכת, כלומר D מדמה את הניסוי בו $\mathcal{A}$ מצליח לפי הנחה. לכן:

$$\begin{aligned}&\left|\Pr_{k\leftarrow\{0,1\}^n}\left[D^{F_k(\cdot)}(1^n) = 1\right] - \Pr_{f\leftarrow\mathrm{Func}_n}\left[D^{f(\cdot)}(1^n)=1\right]\right|\\ =&\left|\Pr[\mathrm{IND}_{\Pi,\mathcal{A}}(n)=1] - \frac{1}{2}\right| > \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{p(n)} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{p(n)}\end{aligned}$$

לאינסוף n, בסתירה לכך ש־F היא PRF. לכן המערכת בעלת הצפנות בלתי ניתנות להבחנה.

סעיף 3

המערכת בטוחה בפני CPA ולכן גם בעלת הצפנות בלתי ניתנות להבחנה.

ראינו בכיתה שהמערכת המחזירה $(r, F_k(r) \oplus m)$ עבור F PRF, $r, k \leftarrow \{0,1\}^n$ והודעה m היא בטוחה בפני CPA. אם נראה שהפונקצייה H המוגדרת על ידי: $H_k(r) = r \oplus F_k(r)$ היא PRF נקבל שהמערכת המתוארת בסעיף היא בדיוק המתוארת בכיתה,[2] ולכן בטוחה כפי שהוכחנו.

נניח בשלילה ש־H אינה PRF. יהי B מבחין ל־H ו־p פולינום כך ש:

$$\left| \Pr_{k \leftarrow \{0,1\}^n} \left[B^{H_k(\cdot)}(1^n) = 1 \right] - \Pr_{f \leftarrow \text{Func}_n} \left[B^{f(\cdot)}(1^n) = 1 \right] \right| > \frac{1}{p(n)}$$

נבנה מבחין D ל־F באופן הבא: בהינתן אורקל $\mathcal{O}$ וקלט 1^n, D יריץ את B. לכל בקשת אורקל של B לערך $r \in \{0,1\}^n$, D יחזיר לו $\mathcal{O}(r) \oplus r$. לבסוף D יענה 1 אם"ם B ענה 1.

נשים לב שאם $\mathcal{O} = F_k$ אז $\mathcal{O}(r) \oplus r = H_k(r)$, כלומר D מדמה את ריצת המבחין B עם אורקל H_k. כמוכן אם $\mathcal{O} = f$ כאשר $f \leftarrow \text{Func}_n$ אז הערך $f(r)$ שקול לערך המפולג אחיד ב־$\{0,1\}^n$, וכך גם $f(r) \oplus r$. לכן:

$$\begin{aligned} &\left| \Pr_{k \leftarrow \{0,1\}^n} \left[D^{F_k(\cdot)}(1^n) = 1 \right] - \Pr_{f \leftarrow \text{Func}_n} \left[D^{f(\cdot)}(1^n) = 1 \right] \right| \\ = &\left| \Pr_{k \leftarrow \{0,1\}^n} \left[B^{H_k(\cdot)}(1^n) = 1 \right] - \Pr_{f \leftarrow \text{Func}_n} \left[B^{f(\cdot)}(1^n) = 1 \right] \right| > \frac{1}{p(n)} \end{aligned}$$

עבור אינסוף n בסתירה לכך ש־F היא PRF.

[2] כי: $(r, H_k(r) \oplus m) = (r, (F_k(r) \oplus r) \oplus m) = (r, r \oplus F_k(r) \oplus m)$