ראייה אנושית גישה חישובית

תרגיל 2

מגישים: רז דרזי ורן שחם

3 במאי 2017

שאלה 5

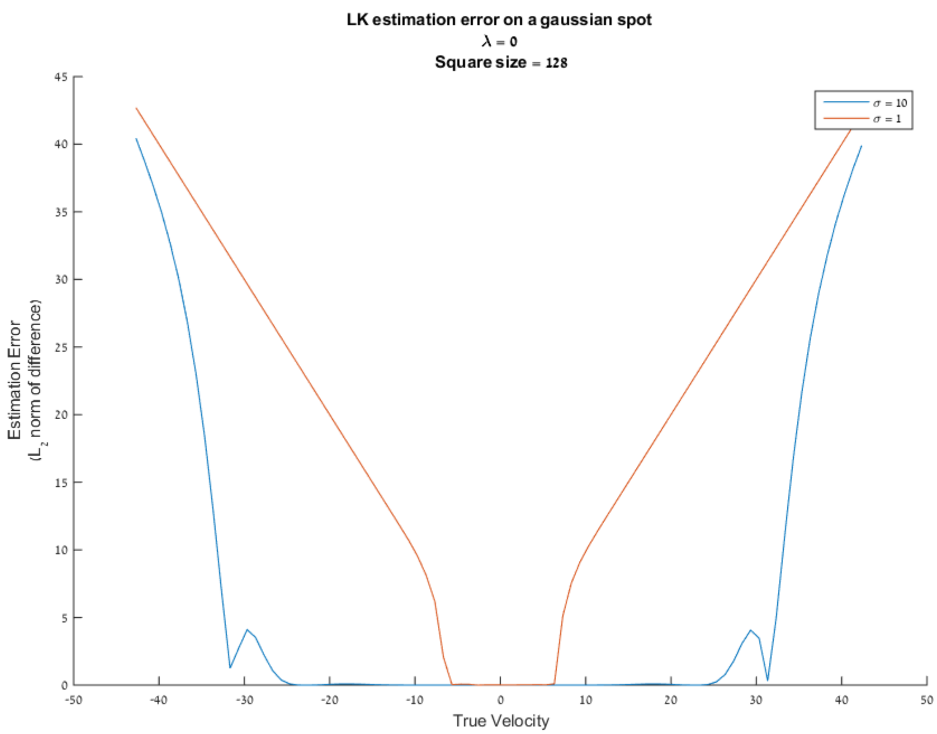
בהרצת mymovie נראה שהעץ זז מהר יותר מהפרחים. כמוכן, לאחר הרצת האלגוריתם על תתי־תמונות של העץ התקבלה מהירות גדולה יותר מאשר זאת שהתקבלה על ידי הרצתו על הפרחים. כמוכן, כצפוי, רכיב המהירות המשמעותי הוא האופקי.

(ממוצעי) פלט האלגוריתם מסוכמים בטבלה הבאה:

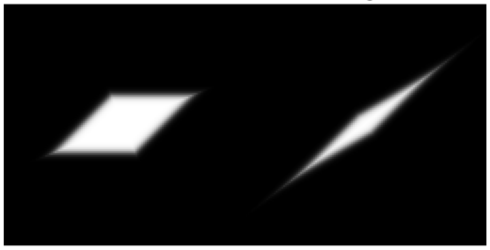
	רכיב אופקי	רכיב אנכי
עץ	-1.8522	-0.2150
פרחים	-1.1541	0.0034

את התוצאות עבור כל תת־תמונה ואת המסכות המגדירות את תתי־התמונה ניתן לראות בנספח הקוד במסמך זה.

שאלה 6



איור 1: שאלה 6



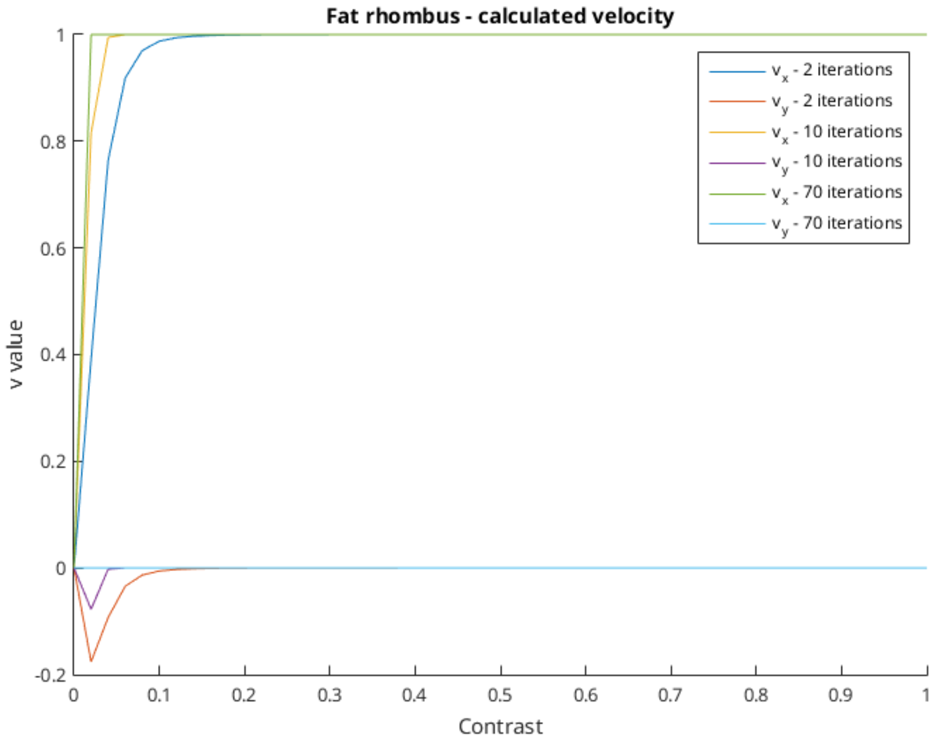
איור 2: המקביליות המתקבלות מ־rhombusMovie

אפשר לראות שעבור מהירויות נמוכות ($|v| < 10$) האלגוריתם מחשב בדיוק את המהירות האופקית. עבור מהירויות גבוהות יותר, השגיאה גדלה ככל שהמהירות (בערך מוחלט) גדלה, וכן השגיאה של הכתם הצר ($\sigma = 1$) גדולה משל הכתם הרחב ($\sigma = 10$).

את האפקט הראשון אפשר להסביר באמצעות הפרת ההנחות של אלגוריתם לוקאס־קנדה: האלגוריתם משתמש בפיתוח טיילור סביב הפריים הראשון בתמונה, כאשר ההנחה היא שהפריים השני הוא הזזה קטנה של הראשון ־ ופיתוח טיילור מדוייק פחות ככל שמתרחקים מהנק' סביבה הוא מוגדר.

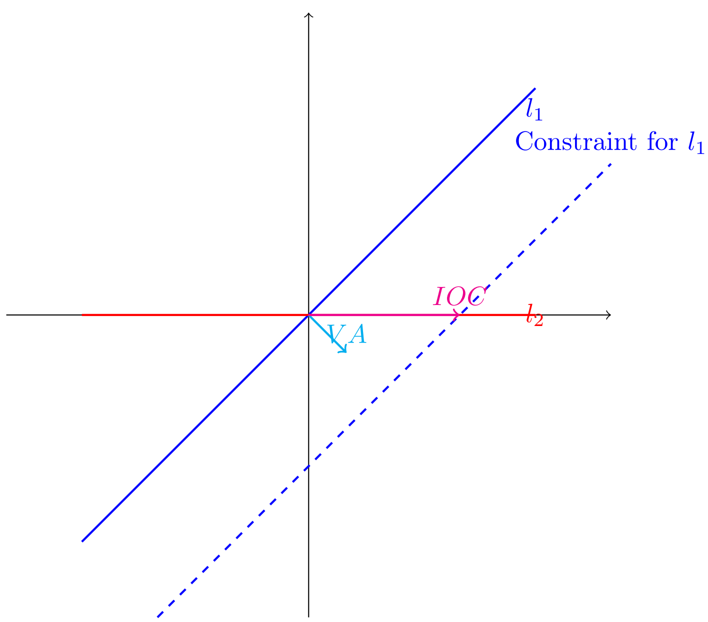
האפקט השני יכול להיות מוסבר על ידי הנחה נוספת באלגוריתם ־ והיא שהתמונה השנייה היא הזזה של הראשונה ־ כלומר שמתקיים $I_2(x,y) = I_1(x+v_x, y+v_y)$. לכן בחישוב v אנחנו סוכמים את הנגזרות על פני כל התמונה. היות והכתם הרחב מהווה חלק משמעותי יותר מהתמונה, ההנחה הזאת מתקיימת בצורה מלאה יותר ולכן שגיאת האלגוריתם קטנה יותר. עבור הכתם הקטן ההנחה מופרת ולכן השגיאה גדלה מהר.

החל ממקום מסויים, השגיאה גדלה באופן לינארי במהירות. אפשר להסביר את זה על ידי כך שהאלגוריתם, החל ממהירות מסויימת בה ההנחות מופרות בצורה משמעותית מספיק, האלגוריתם מחשב איזשהו ערך שגוי קבוע וכך ההפרש בין המהירות האמיתית לערך זה גדל לינארית. אינטואיטיבית, זה קורה בגלל חוסר היכולת לזהות את האובייקט בתמונה השנייה עם האובייקט בראשונה ־ מקרה זה דומה למצב בו עצם נעלם בתמונה הראשונה ועצם מופיע בשנייה ־ ובגלל היותו רחוק ממיקומו בראשונה ניתן להניח שזה עצם אחר, ולא תנועה של עצם אחד.

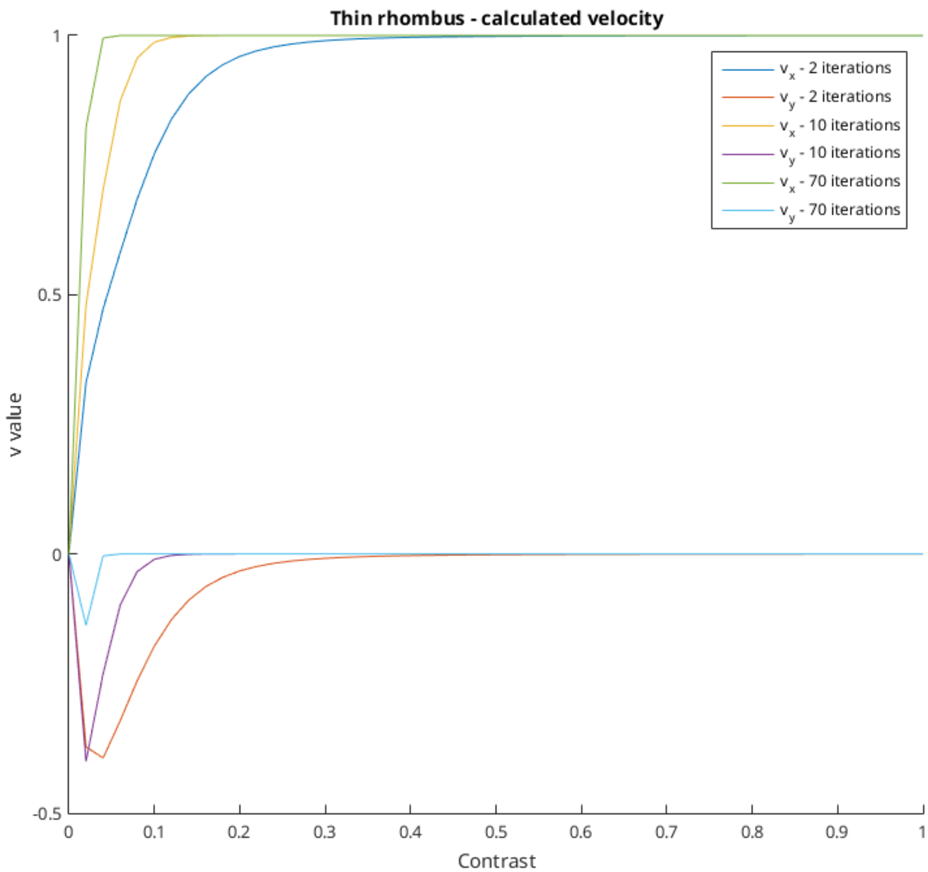


איור 3: גרף המהירות המחושבת כפונקציה של קונטרסט - מקבילית שמנה

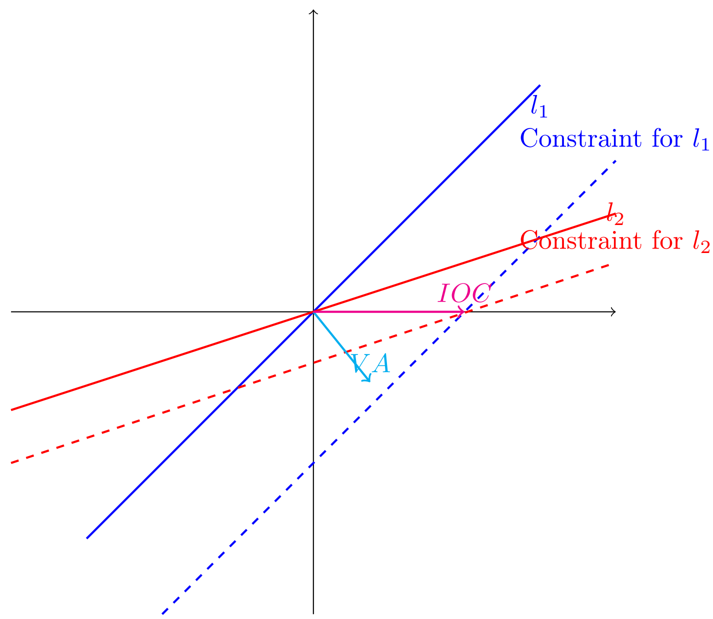
שאלה 7



איור 5: תרשים עבור המקבילית השמנה - קו אחד בזווית $\theta_1 = 45°$ והשני בזווית $\theta_2 = 0°$



איור 4: גרף המהירות המחושבת כפונקציה של קונטרסט - מקבילית רזה



איור 6: תרשים עבור המקבילית הצרה ־ קו אחד בזווית $\theta_1 = 45°$ והשני בזווית $\theta_2 = 30°$

תחילה נבחין שהמהירות המקורית של כל קו נמצאת על ישר האילוץ שלו. אם כך, בשני המקרים (מקבילית שמנה/רזה), חיתוך האילוצים חייב להימצא בנקודה $(1,0)$ ־ כי ישר האילוץ של כל קו עובר בנק' זו. לכן, בשני המקרים $IOC = (1,0)$.

כעת, עבור **המקבילית הרחבה**, ברור שהרכיב הניצב לישר l_2 הוא $v_2^{\perp} = 0$, לכן נותר לחשב את הרכיב $v_1^{\perp}$ ל־l_1 (הישר בזווית 45 מע'). קל לראות שהרכיב הניצב לו הוא בכיוון $45°$ כלפי מטה, כלומר בזווית של $315°$. אורכו הוא אורך של ניצב במשולש ישר זוית ושווה שוקיים שאורך היתר בו הוא 1, לכן אורכו $\frac{1}{\sqrt{2}}$. אם כך:

$$v_1^{\perp} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos 315° \\ \sin 315° \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$VA = \frac{1}{2}\left(v_1^{\perp} + v_2^{\perp}\right) = \frac{1}{2} v_1^{\perp} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

עבור **המקבילית הצרה**, נותר לחשב את הרכיב הניצב לישר l_2 בשיפוע $30°$. שיפועו הוא $60°$ כלפי מטה, כלומר $300°$. המשולש הנוצר על ידי הרכיב הניצב, הרכיב המקביל ווקטור המהירות הוא בעל הזוויות $30, 60, 90$ מע', לכן גודל היתר הקטנה הוא גודל הרכיב הניצב, והוא חצי מאורכה של היתר ־ לכן אורך הרכיב הניצב הוא $\frac{1}{2}$. לכן:

$$v_2^{\perp} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos 300° \\ \sin 300° \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

ונקבל:

$$VA = \frac{1}{2}\left(v_1^{\perp} + v_2^{\perp}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 \\ -2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

נשים לב שגם עבור המעויין השמן וגם עבור הרזה, בקונטרסט גבוה האלגוריתם מחשב את המהירות האמיתית ־ $(1,0)$. כמוכן, בקונטרסט 0 האלגוריתם מחשב מהירות 0 ־ תוצאה הגיונית בהתחשב בכך שהתמונה חלקה ואין תנועה. הבדל בין סוגי המקבילית מתקבל כאשר

הקונטרסט נמוך - במקרה זה האלגוריתם מחשב עבור המקבילית הצרה מהירות תנועה שקרובה יותר ל-VA מאשר ל-IOC. עבור המקבילית הרחבה באותו קונטרסט התוצאה קרובה יותר ל-IOC. תוצאה זו קרובה מאוד לחוויה מהתבוננות ב-rhombus demo - כאשר המקבילית רחבה יחסית קל לזהות שכיוון התנועה הוא אופקי גם בקונטרסט נמוך; כאשר המקבילית צרה אנחנו (והאלגוריתם) נוטים לייחס לה תנועה בכיוון ה-VA - וזו תוצאה מעניינת לגבי האלגוריתם (או לגבי מערכת תפישת הראייה האנושית).

שאלה 8

נגדיר מ"מ $x \sim N\left(\mu_p, \sigma_p^2\right)$ ונתונה מדידה רועשת y כך ש-$y|x \sim N\left(x, \sigma_y^2\right)$. נראה:

$$\hat{x} = \arg\max_x p\left(x|y\right) = \frac{\frac{1}{\sigma_p^2}\mu_p + \frac{1}{\sigma_y^2}y}{\frac{1}{\sigma_p^2} + \frac{1}{\sigma_y^2}}$$

מנוסחת בייס מתקיים:

$$p\left(x|y\right) = \frac{p\left(y|x\right)p\left(x\right)}{p\left(y\right)}$$

לכן:

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= \arg\max_x p\left(x|y\right) = \arg\max_x \frac{p\left(y|x\right)p\left(x\right)}{p\left(y\right)} \stackrel{1}{=} \arg\max_x p\left(y|x\right)p\left(x\right) \\
&\stackrel{2}{=} \arg\max_x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\exp\left(\frac{-\left(y-x\right)^2}{2\sigma_y^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_p}\exp\left(\frac{-\left(x-\mu_p\right)^2}{2\sigma_p^2}\right) \\
&\stackrel{3}{=} \arg\max_x \exp\left(-\frac{\left(y-x\right)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{\left(x-\mu_p\right)^2}{2\sigma_p^2}\right) \stackrel{4}{=} \arg\max_x \log\exp\left(-\frac{\left(y-x\right)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{\left(x-\mu_p\right)^2}{2\sigma_p^2}\right) \\
&= \arg\max_x -\frac{\left(y-x\right)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{\left(x-\mu_p\right)^2}{2\sigma_p^2} =: \arg\max_x f\left(x\right)
\end{aligned}$$

כאשר:

1. ההסתברות $p\left(y\right)$ אינה תלויה ב-x (וכמובן שהיא אי-שלילית), לכן ערך זה אינו משפיע על מקס' הפונקציה
2. לפי הגדרת $y|x$ ו-x (מ"מ נורמליים)
3. הורדת הפקטור הכפלי (שאינו משפיע על ה-x המביא את הפונ' למקסימום) ושימוש בחוקי אקספוננט
4. מונוטוניות של $\log$ - x הממקסם את הפונ' ימקסם גם את $\log$הפונ'

אם כך נמצא x הממקסם את הפונקצייה f שהתקבלה לעיל. נגזור ונשווה ל-0:

$$\begin{aligned}
0 = f'\left(x\right) &= 2\frac{\left(y-x\right)}{2\sigma_y^2} - 2\frac{\left(x-\mu_p\right)}{2\sigma_p^2} = \frac{y}{\sigma_y^2} + \frac{\mu_p}{\sigma_p^2} - x\left(\frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{1}{\sigma_p^2}\right) \\
\Longleftrightarrow x &= \frac{\frac{1}{\sigma_p^2}\mu_p + \frac{1}{\sigma_y^2}y}{\frac{1}{\sigma_p^2} + \frac{1}{\sigma_y^2}}
\end{aligned}$$

נוודא שזו אכן נק' מקסימום על ידי גזירה נוספת:

$$f''\left(x\right) = -\left(\frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{1}{\sigma_p^2}\right) < 0$$

כי σ_y^2, σ_p^2 קבועים חיוביים - ולכן f מתמקסמת ב-$\hat{x}$ כנ"ל כנדרש.

קוד