Inverse of a Matrix by row transformation

Q1/ $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Sol. Let $AA^{-1} = I$

or $A = IA$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$\boxed{R_1 \to R_1 - R_2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$\boxed{R_2 \to R_2 - 4R_1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$\boxed{R_3 \to R_3 + R_2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} A$$

As we know that

$AA^{-1} = I$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sol :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\boxed{R_1 \longleftrightarrow R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\boxed{R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\boxed{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2 \ \& \ R_3 \rightarrow R_3 + 5R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\boxed{R_3 \rightarrow R_3/2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} A$$

$\boxed{\to R_1+R_2 \ \& \ R_2 \to R_2 - 2R_3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -4 & -3 & -1 \\ 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} A$$

$$\therefore \ A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -4 & -3 & -1 \\ 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Q3/ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Sol: $A = IA$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$\boxed{R_2 \longleftrightarrow R_1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$\boxed{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$\boxed{R_2 \rightarrow R_2/-7}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6/7 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/7 & 2/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$\boxed{R_3 \rightarrow R_3/-3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/7 & 2/7 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} A$$

$\boxed{R_2 \rightarrow R_2 - 7/6 R_3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/7 & 2/7 & -7/18 \\ 0 & 0 & 7/18 \end{bmatrix} A$$

$\boxed{R_2 \rightarrow R_2 - R_3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/7 & 2/7 & 0 \\ 0 & 0 & -7/9 \end{bmatrix} A$$

$\boxed{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -7/9 \\ -1/7 & 2/7 & 0 \\ 0 & 0 & -7/9 \end{bmatrix} A$$

$\boxed{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/7 & 3/7 & -7/9 \\ -1/7 & 2/7 & 0 \\ 0 & 0 & -7/9 \end{bmatrix} A$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/7 & 3/7 & -7/9 \\ -1/7 & 2/7 & 0 \\ 0 & 0 & -7/9 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Sol: Let $A = IA$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$\boxed{R_2 \to R_2 - 2R_1 \text{ \& } R_3 \to R_3 - R_1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$\boxed{R_2 \to R_2/4}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5/4 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$\boxed{R_3 \to R_3 - 3R_2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5/4 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/4 & 0 \\ 2/3 & -1 & 4/3 \end{bmatrix} A$$

$\boxed{R_1 \to R_1 - 3R_3 \text{ \& } R_2 \to R_2 + \frac{5}{4} R_3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 1/3 & -1 & 5/3 \\ 2/3 & -1 & 4/3 \end{bmatrix} A$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 1/3 & -1 & 5/3 \\ 2/3 & -1 & 4/3 \end{bmatrix}$$