অনুশীলনী ৩.৪

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি

■ **ভাগশেষ উপপাদ্য *(Remainder Theorem)* :**

আমরা জানি, ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ

যদি আমরা ভাজ্যকে $f(x)$, ভাগফলকে $h(x)$,ভাগশেষকে r ও ভাজককে $(x - a)$ দ্বারা সূচিত করি, তাহলে উপরের সূত্র থেকে পাই,

$f(x) = (x - a).h(x) + r$ এই সূত্রটি a এর সকল মানের জন্য সত্য।

অতএব, $f(x)$ কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $f(a)$· এই সূত্র ভাগশেষ উপপাদ্য *(Remainder theorem)* নামে পরিচিত। অর্থাৎ, ধনাত্মক মাত্রার কোনো বহুপদী $f(x)$ কে $(x - a)$ আকারের বহুপদী দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে তা ভাগ না করে বের করার সূত্রই হলো ভাগশেষ উপপাদ্য। ভাজক বহুপদী $(x - a)$ এর মাত্রা 1।

প্রতিজ্ঞা : যদি $f(x)$ এর মাত্রা ধনাত্মক হয় এবং $a \neq 0$ হয়, তবে $f(x)$ কে $(ax + b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $f\left(-\frac{b}{a}\right)$

অনুসিদ্ধান্ত : $(x - a)$, $f(x)$ এর উৎপাদক হবে, যদি এবং কেবল যদি $f(a) = 0$ হয়।

কোনো বহুপদী $f(x)$, $(x - a)$ দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি এবং কেবল যদি $f(a) = 0$ হয়। এই সূত্র উৎপাদক উপপাদ্য *(Factor theorem)* নামে পরিচিত।

অনুসিদ্ধান্ত : $ax + b$, $a \neq 0$ হলে, রাশিটি কোনো বহুপদী $f(x)$ এর উৎপাদক হবে, যদি এবং কেবল যদি $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ হয়।

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

প্রশ্ন ॥ ১ ॥ $6x^2 - 7x + 1$

সমাধান : ধরি, $f(x) = 6x^2 - 7x + 1$

$\therefore\ f(1) = 6(1)^2 - 71 + 1$

$= 61 - 7 + 1 = 6 - 7 + 1 = 7 - 7 = 0$

$\therefore\ (x - 1)$□ $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $6x^2 - 7x + 1 = 6x^2 - 6x - x + 1$

$= 6x(x - 1) - 1(x - 1) = (x - 1)(6x - 1)$

$= (6x - 1)(x - 1)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ২ ॥ $3a^3 + 2a + 5$

সমাধান : ধরি, $f(a) = 3a^3 + 2a + 5$

$\therefore\ f(-1) = 3(-1)^3 + 2(-1) + 5$

$= -3 - 2 + 5 = -5 + 5 = 0$

$\therefore\ (a + 1)$, $f(a)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $3a^3 + 2a + 5$

$= 3a^3 + 3a^2 - 3a^2 - 3a + 5a + 5$

$= 3a^2(a + 1) - 3a(a + 1) + 5(a + 1)$

$= (a + 1)(3a^2 - 3a + 5)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৩ ॥ $x^3 - 7xy^2 - 6y^3$

সমাধান : এখানে, x কে চলক এবং y কে ধ্রুবক হিসেবে বিবেচনা করি।

প্রদত্ত রাশিকে x–এর বহুপদী বিবেচনা করে

ধরি, $f(x) = x^3 - 7xy^2 - 6y^3$

$\therefore\ f(-y) = (-y)^3 - 7\cdot(-y)y^2 - 6y^3$

$= -y^3 + 7y^3 - 6y^3 = 0$

$\therefore\ x - (-y)$ বা, $(x + y)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 - 7xy^2 - 6y^3$

$= x^3 + x^2y - x^2y - xy^2 - 6xy^2 - 6y^3$

$= x^2(x + y) - xy(x + y) - 6y^2(x + y)$

$= (x + y)(x^2 - xy - 6y^2)$

$= (x + y)(x^2 - 3xy + 2xy - 6y^2)$

$= (x + y)\{x(x - 3y) + 2y(x - 3y)\}$

$= (x + y)(x - 3y)(x + 2y)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৪ ॥ $x^2 - 5x - 6$

সমাধান : ধরি, $f(x) = x^2 - 5x - 6$

$\therefore f(-1) = (-1)^2 - 5(-1) - 6$

$= 1 + 5 - 6 = 6 - 6 = 0$

$\therefore\ x - (-1)$ বা, $(x + 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^2 - 5x - 6$

$= x^2 + x - 6x - 6 = x(x + 1) - 6(x + 1)$

$= (x + 1)(x - 6) = (x - 6)(x + 1)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৫ ॥ $2x^2 - x - 3$

সমাধান : ধরি, $f(x) = 2x^2 - x - 3$

$\therefore\ f(-1) = 2(-1)^2 - (-1) - 3 = 2 + 1 - 3 = 3 - 3 = 0$

$\therefore \{x - (-1)\}$ বা, $(x + 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $2x^2 - x - 3 = 2x^2 + 2x - 3x - 3$

$= 2x(x + 1) - 3(x + 1) = (x + 1)(2x - 3)$

$= (2x - 3)(x + 1)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৬ ॥ $3x^2 - 7x - 6$

সমাধান : ধরি, $f(x) = 3x^2 - 7x - 6$

$\therefore\ f(3) = 3.(3)^2 - 7.(3) - 6$

$= 3 \times 9 - 21 - 6 = 27 - 27 = 0$

$\therefore$ $(x - 3)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $3x^2 - 7x - 6 = 3x^2 - 9x + 2x - 6$

$= 3x(x - 3) + 2(x - 3) = (x - 3)(3x + 2)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৭ ॥ $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

সমাধান : ধরি, $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

$\therefore f(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6$

$= - 1 + 2 + 5 - 6 = 7 - 7 = 0$

$\therefore$ $x - (-1)$ বা, $(x + 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

$= x^3 + x^2 + x^2 + x - 6x - 6$

$= x^2(x + 1) + x(x + 1) - 6(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 + x - 6)$

$= (x + 1)(x^2 + 3x - 2x - 6)$

$= (x + 1)\{x(x + 3) - 2(x + 3)\}$

$= (x + 1)(x + 3)(x - 2)$

$= (x - 2)(x + 1)(x + 3)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৮ ॥ $x^3 + 4x^2 + x - 6$

সমাধান : মনে করি, $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

$\therefore f(1) = (1)^3 + 4(1)^2 + (1) - 6$

$= 1 + 4 + 1 - 6 = 6 - 6 = 0$

$\therefore$ $(x - 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 + 4x^2 + x - 6$

$= x^3 - x^2 + 5x^2 - 5x + 6x - 6$

$= x^2(x - 1) + 5x(x - 1) + 6(x - 1)$

$= (x - 1)(x^2 + 5x + 6)$

$= (x - 1)(x^2 + 3x + 2x + 6)$

$= (x - 1)\{x(x + 3) + 2(x + 3)\}$

$= (x - 1)(x + 3)(x + 2)$

$= (x - 1)(x + 2)(x + 3)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৯ ॥ $a^3 + 3a + 36$

সমাধান : মনে করি, $f(a) = a^3 + 3a + 36$

$f(- 3) = (- 3)^3 + 3 (- 3) + 36$

$= - 27 - 9 + 36 = 36 - 36 = 0$

$\therefore$ $a - (- 3)$ বা, $(a + 3)$, $f(a)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $a^3 + 3a + 36$

$= a^3 + 3a^2 - 3a^2 - 9a + 12a + 36$

$= a^2(a + 3) - 3a(a + 3) + 12(a + 3)$

$= (a + 3) (a^2 - 3a + 12)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১০ ॥ $a^4 - 4a + 3$

সমাধান : মনে করি, $f(a) = a^4 - 4a + 3$

$\therefore f(1) = (1)^4 - 4.1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 4 - 4 = 0$

$\therefore$ $(a - 1)$, $f(a)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $a^4 - 4a + 3$

$= a^4 - a^3 + a^3 - a^2 + a^2 - a - 3a + 3$

$= a^3(a - 1) + a^2(a - 1) + a(a - 1) - 3 (a - 1)$

$= (a - 1) (a^3 + a^2 + a - 3)$

$= (a - 1) (a^3 - a^2 + 2a^2 - 2a + 3a - 3)$

$= (a - 1) \{a^2(a - 1) + 2a (a - 1) + 3 (a - 1)\}$

$= (a - 1) (a - 1) (a^2 + 2a + 3)$

$= (a - 1)^2 (a^2 + 2a + 3)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১১ ॥ $a^3 - a^2 - 10a - 8$

সমাধান : মনে করি, $f(a) = a^3 - a^2 - 10a - 8$

$f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 10(-1) - 8$

$= -1 - 1 + 10 - 8$

$= -10 + 10 = 0$

$\therefore$ $a - (-1)$ বা, $(a + 1)$, $f(a)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $a^3 - a^2 - 10a - 8$

$= a^3 + a^2 - 2a^2 - 2a - 8a - 8$

$= a^2(a + 1) - 2a(a + 1) - 8(a + 1)$

$= (a + 1)(a^2 - 2a - 8)$

$= (a + 1)(a^2 - 4a + 2a - 8)$

$= (a + 1)\{a(a - 4) + 2(a - 4)\}$

$= (a + 1)(a - 4)(a + 2)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১২ ॥ $x^3 - 3x^2 + 4x - 4$

সমাধান : ধরি, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 4$

$\therefore f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 4.2 - 4$

$= 8 - 12 + 8 - 4 = 16 - 16 = 0$

$\therefore$ $(x - 2)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 - 3x^2 + 4x - 4$

$= x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x + 2x - 4$

$= x^2(x - 2) - x(x - 2) + 2(x - 2)$

$= (x - 2)(x^2 - x + 2)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৩ ॥ $a^3 - 7a^2b + 7ab^2 - b^3$

সমাধান : ধরি, $f(a) = a^3 - 7a^2b + 7ab^2 - b^3$

$\therefore f(b) = (b)^3 - 7(b)^2.b + 7(b)b^2 - b^3$

$= b^3 - 7b^3 + 7b^3 - b^3 = 0$

$\therefore$ $(a - b)$, $f(a)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $a^3 - 7a^2b + 7ab^2 - b^3$

$= a^3 - a^2b - 6a^2b + 6ab^2 + ab^2 - b^3$

$= a^2(a - b) - 6ab(a - b) + b^2(a - b)$

$= (a - b)(a^2 - 6ab + b^2)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৪ ॥ $x^3 - x - 24$

সমাধান : ধরি, $f(x) = x^3 - x - 24$

$\therefore f(3) = (3)^3 - 3 - 24 = 27 - 27 = 0$

$\therefore$ $(x - 3)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 - x - 24 = x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x + 8x - 24$

$= x^2(x - 3) + 3x(x - 3) + 8(x - 3)$

$= (x - 3)(x^2 + 3x + 8)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৫ ॥ $x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$

সমাধান : ধরি, $f(x) = x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$

$\therefore f(-y) = (-y)^3 + 6(-y)^2.y + 11(-y).y^2 + 6y^3$

$= -y^3 + 6y^3 - 11y^3 + 6y^3$

$= 12y^3 - 12y^3 = 0$

$\therefore$ $x - (-y)$ বা, $(x + y)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

তাহলে, $x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$

$= x^3 + x^2y + 5x^2y + 5xy^2 + 6xy^2 + 6y^3$

$= x^2(x + y) + 5xy(x + y) + 6y^2(x + y)$

$= (x + y)(x^2 + 5xy + 6y^2)$

$= (x + y)(x^2 + 3xy + 2xy + 6y^2)$

$= (x + y)\{x(x + 3y) + 2y(x + 3y)\}$

$= (x + y)(x + 2y)(x + 3y)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৬ ॥ $2x^4 - 3x^3 - 3x - 2$

সমাধান : ধরি $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 3x - 2$

$\therefore f(2) = 2.(2)^4 - 3.(2)^3 - 3.2 - 2$

$= 32 - 24 - 6 - 2 = 32 - 32 = 0$

$\therefore (x - 2), f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $2x^4 - 3x^3 - 3x - 2$

$= 2x^4 - 4x^3 + x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + x - 2$

$= 2x^3 (x - 2) + x^2 (x - 2) + 2x (x - 2) + 1 (x - 2)$

$= (x - 2) (2x^3 + 2x + x^2 + 1)$

$= (x - 2) \{2x (x^2 + 1) + 1 (x^2 + 1)\}$

$= (x - 2) (x^2 + 1) (2x + 1)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৭ ॥ $4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

সমাধান : ধরি, $f(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

$\therefore f(-1) = 4(-1)^4 + 12(-1)^3 + 7 (-1)^2 - 3(-1) - 2$

$= 4 - 12 + 7 + 3 - 2 = 14 - 14 = 0$

$\therefore x - (-1)$ বা, $(x + 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

$= 4x^4 + 4x^3 + 8x^3 + 8x^2 - x^2 - x - 2x - 2$

$= 4x^3(x + 1) + 8x^2(x + 1) - x(x + 1) - 2(x + 1)$

$= (x + 1)(4x^3 + 8x^2 - x - 2)$

$= (x + 1)\{4x^2(x + 2) - 1(x + 2)\}$

$= (x + 1)(x + 2)(4x^2 - 1)$

$= (x + 1)(x + 2)(2x + 1)(2x - 1)$

$= (2x - 1)(x + 1)(x + 2)(2x + 1)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৮ ॥ $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x$

সমাধান : ধরি, $f(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x$

$\therefore f(1) = (1)^6 - (1)^5 + (1)^4 - (1)^3 + (1)^2 - 1$

$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 = 3 - 3 = 0$

$\therefore (x - 1), f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x$

$= x(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$

$= x\{x^4 (x - 1) + x^2 (x - 1) + 1(x - 1)\}$

$= x(x - 1) (x^4 + x^2 + 1)$

$= x(x - 1) \{(x^2)^2 + 2.x^2.1 + (1)^2 - x^2\}$

$= x(x - 1) \{(x^2 + 1)^2 - (x)^2\}$

$= x(x - 1) (x^2 + 1 + x) (x^2 + 1 - x)$

$= x(x - 1) (x^2 + x + 1) (x^2 - x + 1)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৯ ॥ $4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$

সমাধান : ধরি, $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$

$\therefore f\left(\frac{1}{4}\right) = 4\left(\frac{1}{4}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{4}\right) - 1$

$= 4 \times \frac{1}{64} - 5.\frac{1}{16} + \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{16} - \frac{5}{16} + \frac{5}{4} - 1$

$= \frac{1 - 5 + 20 - 16}{16} = \frac{21 - 21}{16} = \frac{0}{16} = 0$

$\therefore \left(x - \frac{1}{4}\right)$ বা, $(4x - 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$

$= 4x^3 - x^2 - 4x^2 + x + 4x - 1$

$= x^2(4x - 1) - x(4x - 1) + 1(4x - 1)$

$= (4x - 1)(x^2 - x + 1)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ২০ ॥ $18x^3 + 15x^2 - x - 2$

সমাধান : ধরি, $f(x) = 18x^3 + 15x^2 - x - 2$

$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right) = 18\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 15\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 2$

$= 18 \times \left(-\frac{1}{8}\right) + 15 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2$

$= -\frac{9}{4} + \frac{15}{4} + \frac{1}{2} - 2$

$= \frac{-9 + 15 + 2 - 8}{4} = \frac{-17 + 17}{4} = \frac{0}{4} = 0$

$\therefore x - \left(-\frac{1}{2}\right)$ বা, $(2x + 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $18x^3 + 15x^2 - x - 2$

$= 18x^3 + 9x^2 + 6x^2 + 3x - 4x - 2$

$= 9x^2(2x + 1) + 3x(2x + 1) - 2(2x + 1)$

$= (2x + 1)(9x^2 + 3x - 2)$

$= (2x + 1)(9x^2 - 3x + 6x - 2)$

$= (2x + 1)\{3x(3x - 1) + 2(3x - 1)\}$

$= (2x + 1)(3x - 1)(3x + 2)$ **(Ans.)**

অনুশীলনমূলক কাজের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–১ ▶ $x^3 - 21x - 20$ ও $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ দুইটি রাশি।

ক. $(x + 2)$ দ্বারা প্রথম রাশিটি বিভাজ্য কি না? ২

খ. প্রথম রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. দ্বিতীয় রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ধরি, $f(x) = x^3 - 21x - 20$

$\therefore f(x)$, $f(x + 2)$ দ্বারা বিভাজ্য হলে, $f(-2) = 0$ হবে।

এখন, $f(-2) = (-2)^3 - 21(-2) - 20$

$= -8 + 42 - 20 = -28 + 42 = 14$

$\therefore f(-2) \neq 0$

$\therefore (x + 2)$ দ্বারা প্রথম রাশিটি বিভাজ্য নয়।

খ. প্রদত্ত রাশি $= x^3 - 21x - 20$

মনে করি, $f(x) = x^3 - 21x - 20$

এখানে, $f(-1) = (-1)^3 - 21(-1) - 20$

$= -1 + 21 - 20 = 21 - 21 = 0$

$\therefore x - (-1)$ বা, $(x + 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 - 21x - 20$

$= x^3 + x^2 - x^2 - x - 20x - 20$

$= x^2(x + 1) - x\,(x + 1) - 20(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 - x - 20)$

$= (x + 1)(x^2 - 5x + 4x - 20)$

$= (x + 1)\{x(x - 5) + 4(x - 5)\}$

$= (x + 1)(x - 5)(x + 4)$ **(Ans.)**

গ. প্রদত্ত রাশি $= 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

মনে করি, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

এখানে, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2.\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3.\left(\frac{1}{2}\right) - 1$

$= \frac{2}{8} - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} - 1$

$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} - 1 = \frac{1 - 3 + 6 - 4}{4} = \frac{7 - 7}{4} = 0$

$\therefore\ x - \left(\frac{1}{2}\right) = x - \frac{1}{2}$

অর্থাৎ $(2x - 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 2x^3 - x^2 - 2x^2 + x + 2x - 1$

$= x^2(2x - 1) - x(2x - 1) + 1(2x - 1)$

$= (2x - 1)(x^2 - x + 1)$ **(Ans.)**

অতিরিক্ত সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–২ ▶ $f(x) = x^3 + 3x + 36$ একটি বহুপদী।

ক. দেখাও যে, $(x - a)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে যদি ও কেবল যদি $f(a) = 0$ হয়। ২

খ. $f(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. $g(x) = x^4 + x^3 - 25x^2 - 37x + 60$ হলে দেখাও যে, $f(x)$ ও $g(x)$ এর সাধারণ উৎপাদক $(x + 3)$ ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ধরি, $f(a) = 0$

অতএব, ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী, $f(x)$ কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ শূন্য হবে। অর্থাৎ $(x - a), f(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে।

বিপরীতক্রমে, ধরি, $(x - a)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

অতএব, $f(x) = (x - a).\ h(x)$, যেখানে $h(x)$ বহুপদী।

উভয়পক্ষে $x = a$ বসিয়ে পাই,

$f(a) = (a - a).\ h(a) = 0$

$\therefore\ f(a) = 0$

সুতরাং, কোনো বহুপদী $f(x)$, $(x - a)$ দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি এবং কেবল যদি $f(a) = 0$ হয়। **(দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 + 3x + 36$

এখন, $f(-3) = (-3)^3 + 3(-3) + 36$

$= -27 - 9 + 36 = -36 + 36 = 0$

$\therefore\ x - (-3) = x + 3$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 + 3x + 36$

$= x^3 + 3x^2 - 3x^2 - 9x + 12x + 36$

$= x^2(x + 3) - 3x(x + 3) + 12(x + 3)$

$= (x + 3)\,(x^2 - 3x + 12)$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $g(x) = x^4 + x^3 - 25x^2 - 37x + 60$

এখন, $g(-3) = (-3)^4 + (-3)^3 - 25(-3)^2 - 37.\,(-3) + 60$

$= 81 - 27 - 25.9 + 37.3 + 60$

$= 81 - 27 - 225 + 111 + 60$

$= 252 - 252 = 0$

$\therefore$ $x - (-3)$ বা, $(x + 3)$, $g(x)$ এর একটি উৎপাদক।

আবার, 'খ' থেকে পাই,

$f(x) = (x + 3)(x^2 - 3x + 12)$

$\therefore$ $f(x)$ ও $g(x)$ এর সাধারণ উৎপাদক $(x + 3)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৩ $f(x)$ কে $(ax + b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $f\left(-\frac{b}{a}\right)$ ।

যেখানে, $f(x) = x^2 + 4x - 12$

ক. ভাগশেষ উপপাদ্যটি বীজগাণিতিক সমীকরণে প্রকাশ কর। ২

খ. 'ক' থেকে প্রাপ্ত সমীকরণে $a = 1$, $b = -2$ বসিয়ে ভাগফল নির্ণয় কর। ৪

গ. $(2x + 7)$ দ্বারা $f(x)$ কে ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ধরি, $f(x)$ কে $(ax + b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল $h(x)$। ভাগশেষ $f\left(-\frac{b}{a}\right)$ হলে ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে, বীজগাণিতিক সমীকরণ দাঁড়ায়, $f(x) = (ax + b)\cdot h(x) + f\left(-\frac{b}{a}\right)$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + 4x - 12$

$\therefore$ $f(x) = (x - 2).h(x) + f(-2)$

[ক' থেকে $\because a = 1, b = -2$]

বা, $x^2 + 4x - 12 = (x - 2).h(x) + (2^2 + 4 \times 2 - 12)$

বা, $x^2 + 4x - 12 = (x - 2).h(x) - 0$

বা, $h(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{(x - 2)} = \frac{x^2 + 6x - 2x - 12}{(x - 2)}$

$= \frac{x(x + 6) - 2(x + 6)}{(x - 2)} = \frac{(x + 6)(x - 2)}{(x - 2)} = x + 6$

ভাগফল $= x + 6$ **(Ans.)**

গ. ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে, $f(x)$ কে $(2x + 7)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f\left(\frac{7}{2}\right)$, যেখানে

$f(x) = x^2 + 4x - 12$

$\therefore$ ভাগশেষ $= f\left(\frac{-7}{2}\right) = \left(\frac{-7}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{-7}{2}\right) - 12$

$= \frac{49}{4} - \frac{28}{2} - 12$

$= \frac{49 - 56 - 48}{4} = \frac{-55}{4}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৪ $f(x) = x^3 - 3xy^2 + 2y^3$ একটি বহুপদী। এখানে x কে চলক এবং y কে ধ্রুবক হিসেবে বিবেচনা কর।

ক. $f(y)$ নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $(x + 2y)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক। ৪

গ. $f(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 3xy^2 + 2y^3$

$\therefore$ $f(y) = y^3 - 3 \times y \times y^2 + 2y^3 = 3y^3 - 3y^3 = 0$ **(Ans.)**

খ. আমরা জানি, $(x + 2y)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে যদি এবং কেবল যদি $f(-2y) = 0$ হয়।

এখন, $f(-2y) = (-2y)^3 - 3(-2y)y^2 + 2y^3$

$= -8y^3 + 6y^3 + 2y^3 = -8y^3 + 8y^3 = 0$

সুতরাং $(x + 2y)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক। **(দেখানো হলো)**

গ. 'খ' থেকে $(x + 2y)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 - 3xy^2 + 2y^3$

$= x^3 + 2x^2y - 2x^2y - 4xy^2 + xy^2 + 2y^3$

$= x^2(x + 2y) - 2xy\,(x + 2y) + y^2(x + 2y)$

$= (x + 2y)(x^2 - 2xy + y^2)$

$= (x - y)^2\,(x + 2y)$

$\therefore\ x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = (x - y)^2\,(x + 2y)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৫ ▶ x চলকের একটি বহুপদী $7x^3 - 8x^2 + 6x - 36$.

ক. $P(0)$, $P(-2)$ নির্ণয় কর। ২

খ. বহুপদীটিকে $(x - 1)$ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে তা ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $(x - 2)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক। ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. মনে করি, $P(x) = 7x^3 - 8x^2 + 6x - 36$

$\therefore\ P(0) = 7.0 - 8.0 + 6.0 - 36 = -36$ **(Ans.)**

$\therefore P(-2) = 7.(-2)^3 - 8.(-2)^2 + 6.(-2) - 36$

$= 7.(-8) - 8.4 + 6(-2) - 36$

$= -56 - 32 - 12 - 36 = -136$

(Ans.)

খ. আমরা জানি,

ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী কোনো বহুপদী $P(x)$ কে $(x - 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(a)$·

$\therefore P(x)$ কে $(x - 1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(1)$·

$\therefore P(1) = 7.1^3 - 8.1^2 + 6.1 - 36$

$= 7 - 8 + 6 - 36 = 13 - 44 = -31$ **(Ans.)**

গ. $(x - 2)$ প্রদত্ত বহুপদীর একটি উৎপাদক হবে যদি $P(a) = 0$ হয়

$\therefore P(2) = 7(2)^3 - 8(2)^2 + 6.2 - 36$

$= 7.8 - 8.4 + 6.2 - 36$

$= 56 - 32 + 12 - 36 = 68 - 68 = 0$

$\therefore (x - 2)$ উক্ত বহুপদীর একটি উৎপাদক। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৬ ▶ $f(x) = 54x^4 + 27x^3a - 16x - 8a$ এবং $g(x)$ বহুপদীর চলক x হলে–

ক. $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)$ নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $6x^2 - (4 - 3a)x - 2a$ এর উৎপাদক দুইটি $f(x)$ এর একটি উৎপাদক। ৪

গ. $f(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $f(x) = 54x^4 + 27x^3a - 16x - 8a$

উৎেড়ৎ!

$$= \frac{54a^4}{16} - \frac{27a^4}{8} + \frac{16a}{2} - 8a$$

$$= \frac{27a^4}{8} - \frac{27a^4}{8} + 8a - 8a = 0$$

(Ans.)

খ. ধরি, $g(x) = 6x^2 - (4 - 3a)x - 2a = 6x^2 - 4x + 3ax - 2a$

$= 2x(3x - 2) + a(3x - 2)$

$= (3x - 2)\,(2x + a)$

$\therefore\ (3x - 2)$ ও $(2x + a)$, $g(x)$ এর দুইটি উৎপাদক।

এখন,

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 54\left(\frac{2}{3}\right)^4 + 27\left(\frac{2}{3}\right)^3 a - 16\left(\frac{2}{3}\right) - 8a$$

$$= \frac{54 \times 16}{81} + \frac{27 \times 8}{27}a - \frac{16 \times 2}{3} - 8a$$

$$= \frac{2 \times 16}{3} + 8a - \frac{16 \times 2}{3} - 8a = 0$$

এবং 'ক' থেকে $f\left(-\frac{a}{2}\right) = 0$

অর্থাৎ $(3x - 2)$ ও $(2x + a)$ উভয়ে $f(x)$ এর উৎপাদক।

সুতরাং $(3x - 2)(2x + a)$ বা, $6x^2 - (4 - 3a)x - 2a$, $f(x)$-এর উৎপাদক। **(দেখানো হলো)**

গ. $f(x) = 54x^4 + 27x^3a - 16x - 8a$

$= 27x^3 (2x + a) - 8(2x + a)$

[$\because$ $2x + a$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক]

$= (2x + a)(27x^3 - 8)$

$= (2x + a)\{(3x)^3 - (2)^3\}$

$= (2x + a)(3x - 2)\cdot\{(3x)^2 + 3x\cdot2 + 2^2\}$

$= (2x + a)(3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৭ ▶ $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ এবং $g(x) = 12 + 4x - 3x^2 - x^3$

ক. x এর কোন মানের জন্য $f(x) = 0$ হয়, নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে $(x + 2)$, $g(x)$ এর একটি উৎপাদক। ৪

গ. $f(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

▶◀ ৭নং প্রশ্নের সমাধান ▶◀

ক. এখানে $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ এর ধ্রুব পদ 6 এর উৎপাদকগুলো হচ্ছে $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$x = -1$ বসিয়ে পাই,

$f(-1) = (-1)^3 + 6.(-1)^2 + 11.(-1) + 6$

$= -1 + 6 - 11 + 6 = 0$

$\therefore$ $x = -1$ হলে, $f(x) = 0$

খ. $(x + 2)$, $g(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে যদি $f(-2) = 0$ হয়

$g(x) = 12 + 4x - 3x^2 - x^3$

$\therefore$ $g(-2) = 12 + 4(-2) - 3(-2)^2 - (-2)^3$

$= 12 - 8 - 12 + 8 = 0$

$\therefore$ $(x + 2)$, $g(x)$ এর একটি উৎপাদক। **(দেখানো হলো)**

গ. 'ক' হতে পাই, $x = -1$ হলে, $f(x) = 0$ হবে

$\therefore$ $(x + 1)$, $(f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

প্রদত্ত রাশি $= x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$= x^2(x + 1) + 5x^2 + 11x + 6$

$= x^2(x + 1) + 5x(x + 1) + 6x + 6$

$= x^2(x + 1) + 5x(x + 1) + 6(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 + 5x + 6)$

$= (x + 1)(x^2 + 3x + 2x + 6)$

$= (x + 1)\{x(x + 3) + 2(x + 3)\}$

$= (x + 1)(x + 3)(x + 2)$

$= (x + 1)(x + 2)(x + 3)$ **(Ans·)**

প্রশ্ন–৮ ▶ $f(a) = a^3 - 3a^2b + 2b^3$

$g(a) = a^3 - 9b^3 + (a + b)^3$

ক. $f(a)$ এর একটি উৎপাদক বের কর। ২

খ. দেখাও যে, $(a - b)$, $g(a)$ এর একটি উৎপাদক। ৪

গ. $g(a)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

▶◀ ৮নং প্রশ্নের সমাধান ▶◀

ক. দেওয়া আছে, $f(a) = a^3 - 3a^2b + 2b^3$

এখানে, a কে অনির্দেশক বা চলক এবং b কে আক্ষরিক সহগ হিসেবে বিবেচনা করি।

এখন, $a = b$ বসিয়ে পাই,

$f(b) = (b)^3 - 3(b)^2b + 2b^3 = b^3 - 3b^3 + 2b^3 = 0$

$\therefore$ $(a - b), f(a)$- এর একটি উৎপাদক **(Ans.)**

খ. $(a - b)$, $g(a)$ এর একটি উৎপাদক হবে যদি $g(b) = 0$ হয়।

এখন, $g(a) = a^3 - 9b^3 + (a + b)^3$

$\therefore g(b) = b^3 - 9b^3 + (2b)^3$

$= b^3 - 9b^3 + 8b^3 = 0$

$\therefore$ $(a - b)$, $g(a)$ এর একটি উৎপাদক **(দেখানো হলো)**

গ. $g(a) = a^3 - 9b^3 + (a + b)^3 = a^3 - b^3 + (a + b)^3 - 8b^3$

$= (a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a + b)^3 - (2b)^3$

$= (a - b)(a^2 + ab + b^2) + \{(a + b) - 2b\}$

$\{(a + b)^2 + (a + b)2b + (2b)^2\}$

$= (a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a - b)$

$(a^2 + 2ab + b^2 + 2ab + 2b^2 + 4b^2)$

$= (a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a - b)(a^2 + 4ab + 7b^2)$

$= (a - b)(a^2 + ab + b^2 + a^2 + 4ab + 7b^2)$

$= (a - b)(2a^2 + 5ab + 8b^2)$ **(Ans.)**

নির্বাচিত সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–৯ $f(x) = x^3 - x - 6$

ক. ভাগশেষ উপপাদ্যটি লেখ। ২

খ. $f(3)$ নির্ণয় কর। ৪

গ. $f(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক. কোনো বহুপদী $f(x)$ কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $f(a)$। এই সূত্র ভাগশেষ উপপাদ্য নামে পরিচিত।

খ. $f(x) = x^3 - x - 6$

$\therefore$ $f(3) = (3)^3 - (3) - 6 = 27 - 3 - 6 = 27 - 9 = 18$ **(Ans.)**

গ. এখানে, $f(x) = x^3 - x - 6$ একটি বহুপদী। এর ধ্রুবপদ -6 এর উৎপাদকগুলো হলো $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ এবং ± 6.

এখন, $x = 1$ হলে, $f(1) = 1^3 - 1 - 6 \neq 0$

$x = -1$ হলে, $f(-1) = (-1)^3 - (-1) - 6$

$= -1 + 1 - 6 \neq 0$

$x = 2$ হলে, $f(2) = 2^3 - 2 - 6$

$= 8 - 2 - 6 = 8 - 8 = 0$

সুতরাং $(x - 2)$, $f(x)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক।

$\therefore$ $f(x) = x^3 - x - 6 = x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + 3x - 6$

$= x^2(x - 2) + 2x(x - 2) + 3(x - 2)$

$= (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$ **(Ans.)**

সৃজনশীল প্রশ্নব্যাংক উত্তরসহ

প্রশ্ন–১০ **গণিত শিক্ষক মোশারফ স্যার নবম শ্রেণির গণিত ক্লাসে একজন ছাত্রকে বোর্ডে তিনটি বীজগাণিতিক রাশি লিখতে বললেন। ছাত্রটি লিখল :**

(i) $a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 - 2a + \frac{2}{a}$

(ii) $a^4 - 4a + 3$

(iii) $2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$

ক. (i) নং রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. ভাগশেষ উপপাদ্য প্রয়োগ করে (ii) নং রাশি উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, (iii) নং রাশির একটি উৎপাদক $(a + b - c)$ ৪

উত্তর : ক. $\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a - \frac{1}{a} - 2\right)$; খ. $(a - 1)(a - 1)(a^2 + 2a + 3)$

প্রশ্ন–১১ $\boldsymbol{f(x) = x^3 + 3x + 36}$ **একটি বহুপদী।**

ক. $(x - a)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে, যদি ও কেবল যদি

$f(a) = 0$ হয়; প্রমাণ কর। ২

খ. $f(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. $g(x) = x^4 + x^3 - 25x^2 - 37x + 60$ হলে দেখাও যে,

$f(x)$ ও $g(x)$ এর সাধারণ উৎপাদক $(x + 3)$ ৪

উত্তর : খ. $(x + 3)(x^2 - 3x + 12)$

প্রশ্ন–১২ **কোনো বহুপদী $\boldsymbol{f(x)}$, $\boldsymbol{(x - a)}$ দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি এবং কেবল যদি $\boldsymbol{f(a) = 0}$ হয়। এই সূত্র উৎপাদক উপপাদ্য *(Factor Theorem)* নামে পরিচিত। $\boldsymbol{f(x), x^3 - x - 6}$ একটি বহুপদী হলে–**

ক. $f(1)$ এবং $f(-1)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $f(x)$, $(x + 1)$ ও $(x - 1)$ দ্বারা বিভাজ্য নয় কিন্তু $(x - 2)$ দ্বারা বিভাজ্য। ৪

গ. Factor Theorem ব্যবহার করে $f(x)$ এর একটি উৎপাদক বের কর এবং $f(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

উত্তর : ক. –6, –6; গ. $(x - 2)$, $(x - 2)(x^2 + 2x + 3)$

প্রশ্ন–১৩ $\boldsymbol{f(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2;}$

$\boldsymbol{g(x) = 18x^3 + 15x^2 - x - 2}$ **দুইটি বহুপদী।**

ক. $f(-1)$ নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. দেখাও যে, $g(x)$ ও $f(x)$ এর একটি সাধারণ উৎপাদক $(2x + 1)$ ৪

উত্তর : ক. 0; খ. $(2x - 1)(2x + 1)(x + 1)(x + 2)$

প্রশ্ন–১৪ $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 7x - 6, h(x) = 3x + 2}$

ক. $f(x)$ = ভাজ্য, $h(x)$ = ভাগফল, $(x - a)$ = ভাজক এবং r = ভাগশেষ ধরে পাটিগণিতের ভাজ্য নির্ণয়ের সূত্রটিকে বীজগাণিতিক সমীকরণে প্রকাশ কর। ২

খ. 'ক' থেকে প্রাপ্ত সমীকরণে ভাগশেষ $r = 0$ ব্যবহার করে a এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. ভাজক $(x - 2)$ হলে ভাগফল ও ভাগশেষ নির্ণয় কর। ৪

উত্তর : ক. $f(x) = (x - a)h(x) + r$; খ. $a = 3$; গ. $3x - 1, -8$