

তৃতীয় অধ্যায় বীজগাণিতিক রাশি

Algebraic Expressions



Diophantus

ডায়োফ্যান্টাসকে ২০০-২৮৪ বীজগণিতের জনক বলা হয়। তিনি প্রথম বীজগণিতের সংখ্যার তালিকা তৈরি করেন।

● ○ ○ ○ অনুশীলনী ৩.১ ○ ○ ○ ○



পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি



- **বীজগাণিতিক রাশি** : প্রক্রিয়া চিহ্ন এবং সংখ্যানির্দেশক অক্ষর প্রতীক এর অর্থবোধক বিন্যাসকে বীজগাণিতিক রাশি বলা হয়।

যেমন, $2a + 3b - 4c$ একটি বীজগাণিতিক রাশি। বীজগাণিতিক রাশিতে $a, b, c, p, q, r, m, n, x, y, z, \dots$ ইত্যাদি বর্ণমালার মাধ্যমে বিভিন্ন তথ্য প্রকাশ করা হয়। বীজগাণিতিক রাশি সংবলিত বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে এই সমস্ত বর্ণমালাকে ব্যবহার করা হয়। পাটিগণিতে শুধু ধনাত্মক সংখ্যা ব্যবহৃত হয়, অন্যদিকে বীজগণিতে শূন্যসহ ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সকল সংখ্যা ব্যবহার করা হয়। বীজগণিতকে পাটিগণিতের সর্বাঙ্গীনকৃত রূপ বলা হয়। বীজগাণিতিক রাশিতে ব্যবহৃত সংখ্যাগুলো ধ্রুবক (constant), এদের মান নির্দিষ্ট।

বীজগাণিতিক রাশিতে ব্যবহৃত অক্ষর প্রতীকগুলো চলক (variables), এদের মান নির্দিষ্ট নয়, এরা বিভিন্ন মান ধারণ করতে পারে।

- **বীজগাণিতিক সূত্রাবলি** : বীজগাণিতিক প্রতীক দ্বারা প্রকাশিত যেকোনো সাধারণ নিয়ম বা সিদ্ধান্তকে বীজগাণিতিক সূত্র বলা হয়।

সূত্র ১। $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

সূত্র ২। $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

সূত্র ৩। $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

সূত্র ৪। $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

সূত্র ৫। $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

অনুসিদ্ধান্ত ১। $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

অনুসিদ্ধান্ত ২। $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$

অনুসিদ্ধান্ত ৩। $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$

অনুসিদ্ধান্ত ৪। $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

অনুসিদ্ধান্ত ৫। $a^2 + b^2 = \frac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{2}$

অনুসিদ্ধান্ত ৬। $ab = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2$

অনুসিদ্ধান্ত ৭। $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac)$

অনুসিদ্ধান্ত ৮। $2(ab + bc + ac) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$



অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান



প্রশ্ন ১১ সূত্রের সাহায্যে বর্গ নির্ণয় কর :

(ক) $2a + 3b$

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } 2a + 3b \text{ এর বর্গ} &= (2a + 3b)^2 \\ &= (2a)^2 + 2 \times 2a \times 3b + (3b)^2 \\ &= 4a^2 + 12ab + 9b^2\end{aligned}$$

(Ans.)

(খ) $2ab + 3bc$

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } 2ab + 3bc \text{ এর বর্গ} &= (2ab + 3bc)^2 \\ &= (2ab)^2 + 2 \times 2ab \times 3bc + (3bc)^2 \\ &= 4a^2b^2 + 12ab^2c + 9b^2c^2 \text{ (Ans.)}\end{aligned}$$

(গ) $x^2 + \frac{2}{y^2}$

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } x^2 + \frac{2}{y^2} \text{ এর বর্গ} &= \left(x^2 + \frac{2}{y^2}\right)^2 \\ &= (x^2)^2 + 2 \times x^2 \times \frac{2}{y^2} + \left(\frac{2}{y^2}\right)^2 \\ &= x^4 + \frac{4x^2}{y^2} + \frac{4}{y^4} \text{ (Ans.)}\end{aligned}$$

(ঘ) $a + \frac{1}{a}$

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } a + \frac{1}{a} \text{ এর বর্গ} &= \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 \\ &+ 2 \times a \times \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a}\right)^2 \\ &= a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} \text{ (Ans.)}\end{aligned}$$

(ঙ) $4y - 5x$

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } 4y - 5x \text{ এর বর্গ} &= (4y - 5x)^2 \\ &= (4y)^2 - 2 \times 4y \times 5x \\ &+ (5x)^2\end{aligned}$$

$$= 16y^2 - 40xy + 25x^2$$

(Ans.)

(চ) $ab - c$

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } ab - c \text{ এর বর্গ} &= (ab - c)^2 = \\ &= (ab)^2 - 2 \times ab \times c + (c)^2 \\ &= a^2b^2 - 2abc + c^2\end{aligned}$$

(Ans.)

(ছ) $5x^2 - y$

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } 5x^2 - y \text{ এর বর্গ} &= (5x^2 - y)^2 \\ &= (5x^2)^2 - 2 \times 5x^2 \times y \\ &+ (y)^2 \\ &= 25x^4 - 10x^2y + y^2\end{aligned}$$

(Ans.)

(জ) $x + 2y + 4z$

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } x + 2y + 4z \text{ এর বর্গ} &= (x + 2y + 4z)^2 = \{(x + 2y) + 4z\}^2 \\ &= (x + 2y)^2 + 2 \times (x + 2y) \times 4z + (4z)^2 \\ &= x^2 + 2 \times x \times 2y + (2y)^2 + 8zx + 16yz + 16z^2 \\ &= x^2 + 4xy + 4y^2 + 8zx + 16yz + 16z^2 \\ &= x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8zx \text{ (Ans.)}\end{aligned}$$

(ঝ) $3p + 4q - 5r$

$$\begin{aligned}\text{সমাধান : } 3p + 4q - 5r \text{ এর বর্গ} &= (3p + 4q - 5r)^2 \\ &= \{(3p + 4q) - 5r\}^2 \\ &= (3p + 4q)^2 - 2 \times (3p + 4q) \times 5r \\ &+ (5r)^2 \\ &= (3p)^2 + 2 \times 3p \times 4q + (4q)^2 - 10r(3p + 4q) + 25r^2 \\ &= 9p^2 + 24pq + 16q^2 - 30pr - 40qr + 25r^2\end{aligned}$$

$$= 9p^2 + 16q^2 + 25r^2 + 24pq - 40qr - 30pr \text{ (Ans.)}$$

(ঞ) $3b - 5c - 2a$

সমাধান : $3b - 5c - 2a$ এর বর্গ

$$\begin{aligned} &= (3b - 5c - 2a)^2 \\ &= \{(3b - 5c) - 2a\}^2 \\ &= (3b - 5c)^2 - 2 \times (3b - 5c) \times 2a + (2a)^2 \\ &= (3b)^2 - 2 \times 3b \times 5c + (5c)^2 - (3b - 5c) \times 4a + 4a^2 \\ &= 9b^2 - 30bc + 25c^2 - 12ab + 20ca + 4a^2 \\ &= 4a^2 + 9b^2 + 25c^2 - 12ab - 30bc + 20ca \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

(ট) $ax - by - cz$

সমাধান : $ax - by - cz$ এর বর্গ

$$\begin{aligned} &= (ax - by - cz)^2 \\ &= \{(ax - by) - cz\}^2 \\ &= (ax - by)^2 - 2 \times (ax - by) \times cz + (cz)^2 \\ &= (ax)^2 - 2 \times ax \times by + (by)^2 - (ax - by) \times 2cz + c^2z^2 \\ &= a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 - 2cazx + 2bcyz + c^2z^2 \\ &= a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 2abxy + 2bcyz - 2cazx \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

(ঠ) $a - b + c - d$

সমাধান : $a - b + c - d$ এর বর্গ

$$\begin{aligned} &= (a - b + c - d)^2 \\ &= \{(a - b) + (c - d)\}^2 \\ &= (a - b)^2 + 2 \times (a - b) \times (c - d) + (c - d)^2 \\ &= a^2 - 2 \times a \times b + b^2 + 2(a - b)(c - d) + c^2 - 2 \times c \times d + d^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd + c^2 - 2cd + d^2 \end{aligned}$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd - 2cd \text{ (Ans.)}$$

(ড) $2a + 3x - 2y - 5z$

সমাধান : $2a + 3x - 2y - 5z$ এর বর্গ

$$\begin{aligned} &= (2a + 3x - 2y - 5z)^2 \\ &= \{(2a + 3x) - (2y + 5z)\}^2 \\ &= (2a + 3x)^2 - 2 \times (2a + 3x) \times (2y + 5z) + (2y + 5z)^2 \\ &= (2a)^2 + 2 \times 2a \times 3x + (3x)^2 - 2(2a + 3x)(2y + 5z) + (2y)^2 + 2 \times 2y \times 5z + (5z)^2 \\ &= 4a^2 + 12ax + 9x^2 - 2(4ay + 10az + 6xy + 15xz) + 4y^2 + 20yz + 25z^2 \\ &= 4a^2 + 12ax + 9x^2 - 8ay - 20az - 12xy - 30xz + 4y^2 + 20yz + 25z^2 \\ &= 4a^2 + 9x^2 + 4y^2 + 25z^2 + 12ax - 8ay - 20az - 12xy - 30xz + 20yz \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

(ঢ) 101

সমাধান : 101 এর বর্গ

$$\begin{aligned} &= (101)^2 \\ &= (100 + 1)^2 \\ &= (100)^2 + 2 \times 100 \times 1 + (1)^2 \\ &= 10000 + 200 + 1 = 10201 \end{aligned}$$

(Ans.)

(ণ) 997

সমাধান : 997 এর বর্গ

$$\begin{aligned} &= (997)^2 \\ &= (1000 - 3)^2 \\ &= (1000)^2 - 2 \times 1000 \times 3 + (3)^2 \\ &= 1000000 - 6000 + 9 = 994009 \end{aligned}$$

(Ans.)

(ত) 1007

সমাধান : 1007 এর বর্গ

$$= (1007)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= (1000 + 7)^2 \\
 &= (1000)^2 + 2 \times 1000 \times 7 + (7)^2 \\
 &= 1000000 + 14000 + 49 = \\
 &1014049 \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

প্রশ্ন ১২ ৥ সরল কর :

$$(ক) (2a + 7)^2 + 2(2a + 7)(2a - 7) + (2a - 7)^2$$

সমাধান : ধরি, $2a + 7 = x$ এবং $2a - 7 = y$
 \therefore প্রদত্ত রাশি $= x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$
 $= x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$

$$= \{(2a + 7) + (2a - 7)\}^2$$

[মান বসিয়ে]

$$= (2a + 7 + 2a - 7)^2 = (4a)^2 = 16a^2 \text{ (Ans.)}$$

$$(খ) (3x + 2y)^2 + 2(3x + 2y)(3x - 2y) + (3x - 2y)^2$$

সমাধান : ধরি, $3x + 2y = a$ এবং $3x - 2y = b$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$= \{(3x + 2y) + (3x - 2y)\}^2 \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= (3x + 2y + 3x - 2y)^2 = (6x)^2 = 36x^2 \text{ (Ans.)}$$

$$(গ) (7p + 3r - 5x)^2 - 2(7p + 3r - 5x)(8p - 4r - 5x) + (8p - 4r - 5x)^2$$

সমাধান : ধরি, $7p + 3r - 5x = a$ এবং $8p - 4r - 5x = b$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$= \{(7p + 3r - 5x) - (8p - 4r - 5x)\}^2$$

[a ও b এর মান বসিয়ে]

$$= (7p + 3r - 5x - 8p + 4r + 5x)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= (-p + 7r)^2 \\
 &= (-p)^2 + 2 \times (-p) \times (7r) + (7r)^2 \\
 &= p^2 - 14pr + 49r^2 \\
 &= p^2 + 49r^2 - 14pr
 \end{aligned}$$

(Ans.)

$$(ঘ) (2m + 3n - p)^2 + (2m - 3n + p)^2 - 2(2m + 3n - p)(2m - 3n + p)$$

সমাধান : ধরি, $2m + 3n - p = a$ এবং $2m - 3n + p = b$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b = (a - b)^2$$

$$= \{(2m + 3n - p) - (2m - 3n + p)\}^2$$

[a ও b এর মান বসিয়ে]

$$= (2m + 3n - p - 2m + 3n - p)^2$$

$$= (6n - 2p)^2 = (6n)^2 - 2 \times 6n \times 2p + (2p)^2$$

$$= 36n^2 - 24np + 4p^2$$

(Ans.)

$$(ঙ) 6.35 \times 6.35 + 2 \times 6.35 \times 3.65 + 3.65 \times 3.65$$

সমাধান : ধরি, $6.35 = a$ এবং $3.65 = b$
 \therefore প্রদত্ত রাশি $= a \times a + 2 \times a \times b + b \times b$

$$= a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$= (6.35 + 3.65)^2 \text{ [a ও b এর মান বসিয়ে]}$$

$$= (10)^2 = 100 \text{ (Ans.)}$$

$$(চ) 5874 \times 5874 + 3774 \times 3774 - 7548 \times 5874$$

সমাধান : $5874 \times 5874 + 3774 \times 3774 - 7548 \times 5874$

$$= (5874)^2 + (3774)^2 - 2 \times 5874 \times 3774$$

ধরি, $5874 = a$ এবং $3774 = b$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$$

$$= (5874 - 3774)^2 [a \text{ ও } b \text{ এর মান বসিয়ে}]$$

$$= (2100)^2 = 4410000$$

(Ans.)

(ছ)
$$\frac{7529 \times 7529 - 7519 \times 7519}{7529 + 7519}$$

সমাধান : ধরি, $7529 = a$ এবং $7519 = b$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{a \times a - b \times b}{a + b} =$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b}$$

$$= \frac{(a + b)(a - b)}{(a + b)} = (a - b)$$

b)

$$= (7529 - 7519) [a \text{ ও } b$$

এর মান বসিয়ে]

$$= 10 \text{ (Ans.)}$$

(জ)
$$\frac{2345 \times 2345 - 759 \times 759}{2345 - 759}$$

সমাধান :

ধরি, $2345 = a$ এবং $759 = b$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{a \times a - b \times b}{a - b} =$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b}$$

$$= \frac{(a + b)(a - b)}{(a - b)} = (a + b)$$

b)

$$= (2345 + 759) [a \text{ ও } b$$

এর মান বসিয়ে]

$$= 3104 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ১৩ ১ $a - b = 4$ এবং $ab = 60$ হলে, $a + b$ এর মান কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, $a - b = 4$ এবং $ab = 60$

আমরা জানি, $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$

$$= (4)^2 + 4 \times 60$$

[মান বসিয়ে]

$$= 16 + 240 = 256$$

$$\therefore a + b = \pm \sqrt{256} =$$

$$\pm 16$$

নির্ণেয় মান ± 16

প্রশ্ন ১৪ ১ $a + b = 7$ এবং $ab = 12$ হলে $a - b$ এর মান কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, $a + b = 7$ এবং $ab = 12$

আমরা জানি, $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

$$= (7)^2 - 4 \times 12$$

[মান বসিয়ে]

$$= 49 - 48$$

$$= 1$$

$$\therefore a - b = \pm \sqrt{1} = \pm 1$$

নির্ণেয় মান ± 1

প্রশ্ন ১৫ ১ $a + b = 9m$ এবং $ab = 18m^2$ হলে, $a - b$ এর মান কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, $a + b = 9m$ এবং $ab = 18m^2$

আমরা জানি, $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

$$= (9m)^2 - 4 \times 18m^2$$

[মান বসিয়ে]

$$= 81m^2 - 72m^2 = 9m^2$$

$$\therefore a - b = \pm \sqrt{9m^2} = \pm$$

$$3m$$

$$\text{নির্ণেয় মান } \pm 3m$$

প্রশ্ন ১৬ ৷ $x - y = 2$ এবং $xy = 63$ হলে, $x^2 + y^2$ এর মান কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, $x - y = 2$ এবং

$$xy = 63$$

$$\text{আমরা জানি, } x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$$

$$= (2)^2 + 2 \times 63 \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$= 4 + 126 = 130$$

প্রশ্ন ১৭ ৷ $x - \frac{1}{x} = 4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 322$

সমাধান : দেওয়া আছে, $x - \frac{1}{x} = 4$

$$\text{বামপক্ষ} = x^4 + \frac{1}{x^4} = (x^2)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2$$

$$= \left\{ \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \right\}^2 -$$

$$2$$

$$= \{(4)^2 + 2\}^2 - 2 \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$= (16 + 2)^2 - 2 = (18)^2 -$$

$$2 = 324 - 2$$

$$= 322 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\text{অর্থাৎ, } x^4 + \frac{1}{x^4} = 322 \quad (\text{প্রমাণিত})$$

প্রশ্ন ১৮ ৷ $2x + \frac{2}{x} = 3$ হলে, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ এর মান কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, $2x + \frac{2}{x} = 3$

$$\text{বা, } 2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি, } x^2 + \frac{1}{x^2} =$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \times x \times \frac{1}{x} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$= \frac{9}{4} - 2 = \frac{9 - 8}{4} =$$

$$\frac{1}{4}$$

প্রশ্ন ১৯ ৷ $a + \frac{1}{a} = 2$ হলে, দেখাও যে, $a^2 + \frac{1}{a^2} = a^4 + \frac{1}{a^4}$

সমাধান : দেওয়া আছে, $a + \frac{1}{a} = 2$

$$\text{বামপক্ষ} = a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a}$$

$$= (2)^2 - 2 \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$= 4 - 2 = 2$$

$$\text{ডানপক্ষ} = a^4 + \frac{1}{a^4} = (a^2)^2 + \left(\frac{1}{a^2}\right)^2$$

$$= \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - 2a^2 \cdot \frac{1}{a^2} =$$

$$\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - 2$$

$$= \left\{ \left(a + \frac{1}{a} \right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} \right\}^2 - 2$$

[মান বসিয়ে]

$$= \{ (2)^2 - 2 \}^2 - 2 = (4 - 2)^2 - 2$$

$$= (2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$\therefore a^2 + \frac{1}{a^2} = a^4 + \frac{1}{a^4} \quad (\text{দেখানো হলো})$$

প্রশ্ন ১০ ৥ $a + b = \sqrt{7}$ এবং $a - b = \sqrt{5}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $8ab(a^2 + b^2) = 24$

সমাধান : দেওয়া আছে, $a + b = \sqrt{7}$ এবং $a - b = \sqrt{5}$

$$\text{বামপক্ষ} = 8ab(a^2 + b^2)$$

$$= 4ab \times 2(a^2 + b^2) = 4ab(2a^2 + 2b^2)$$

$$= \{ (a + b)^2 - (a - b)^2 \}$$

$$\{ (a + b)^2 + (a - b)^2 \}$$

$$= \{ (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2 \}$$

$$\{ (\sqrt{7})^2 + (\sqrt{5})^2 \} \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$= (7 - 5)(7 + 5)$$

$$= 2 \times 12 = 24$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\text{অর্থাৎ, } 8ab(a^2 + b^2) = 24 \quad (\text{প্রমাণিত})$$

প্রশ্ন ১১ ৥ $a + b + c = 9$ এবং $ab + bc + ca = 31$ হলে, $a^2 + b^2 + c^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $a + b + c = 9$ এবং $ab + bc + ca = 31$

আমরা জানি, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

বা, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

বা, $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

বা, $a^2 + b^2 + c^2 = (9)^2 - 2 \times 31$ [মান বসিয়ে]

$$\text{বা, } a^2 + b^2 + c^2 = 81 - 62$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 19 \quad (\text{Ans.})$$

প্রশ্ন ১২ ৥ $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ এবং $ab + bc + ca = 8$ হলে, $(a + b + c)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $a^2 + b^2 + c^2 = 9$

এবং $ab + bc + ca = 8$

আমরা জানি, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$= 9 + 2 \times 8 \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$= 9 + 16 = 25 \quad (\text{Ans.})$$

প্রশ্ন ১৩ ৥ $a + b + c = 6$ এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 14$ হলে, $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $a + b + c = 6$ এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 14$

প্রদত্ত রাশি $= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$

$$= a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2$$

$$= 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$$

$$= 2(a^2 + b^2 + c^2) - \{ (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \}$$

$$= 2 \times 14 - \{ (6)^2 - 14 \}$$

[মান বসিয়ে]

$$= 28 - (36 - 14) = 28 - 22 = 6 \quad (\text{Ans.})$$

প্রশ্ন ১৪ ৥ $x + y + z = 10$ এবং $xy + yz + zx = 31$ হলে, $(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2$ এর মান কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, $x + y + z = 10$

এবং $xy + yz + zx = 31$

প্রদত্ত রাশি $= (x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2$

$$\begin{aligned}
 &= x^2 + 2xy + y^2 + y^2 + 2yz + z^2 + z^2 + 2zx + x^2 \\
 &= (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) + (x^2 + y^2 + z^2) \\
 &= (x + y + z)^2 + \{(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)\} \\
 &= (10)^2 + \{(10)^2 - 2 \times 31\} \quad [\text{মান বসিয়ে}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 100 + (100 - 62) = 100 + 38 = 138 \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

প্রশ্ন ১৫ ৥ $x = 3$, $y = 4$ এবং $z = 5$ হলে, $9x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 24xy - 16yz + 12zx$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $x = 3$, $y = 4$ এবং $z = 5$

$$\begin{aligned}
 \text{প্রদত্ত রাশি} &= 9x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 24xy - 16yz + 12zx \\
 &= (3x)^2 + (-4y)^2 + (2z)^2 + 2 \times 3x \times (-4y) + 2 \times (-4y) \times 2z + 2 \times 2z \times 3x \\
 &= (3x - 4y + 2z)^2 \\
 &= (3 \times 3 - 4 \times 4 + 2 \times 5)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &[\text{মান বসিয়ে}] \\
 &= (9 - 16 + 10)^2 = (19 - 16)^2 = (3)^2 = 9 \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

প্রশ্ন ১৬ ৥ প্রমাণ কর যে, $\left\{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right\}^2 = \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^2$

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান : বামপক্ষ} &= \left\{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right\}^2 \\
 &= \left(\frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} - \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4}\right)^2 \\
 &= \left(\frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{4}\right)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{4xy}{4}\right)^2 = x^2y^2 \\
 \text{ডানপক্ষ} &= \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right)^2 \\
 &= \frac{(x^2)^2 + 2 \times x^2 \times y^2 + (y^2)^2}{4} - \frac{(x^2)^2 - 2 \times x^2 \times y^2 + (y^2)^2}{4} \\
 &= \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^4 + 2x^2y^2 - y^4}{4} \\
 &= \frac{4x^2y^2}{4} = x^2y^2
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \text{ডানপক্ষ}$$

(প্রমাণিত)

প্রশ্ন ১৭ ৥ $(a + 2b)(3a + 2c)$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান : আমরা জানি, $ab =$

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \\
 \therefore (a + 2b)(3a + 2c) &= \left\{\frac{(a + 2b) + (3a + 2c)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{(a + 2b) - (3a + 2c)}{2}\right\}^2 \\
 &= \left\{\frac{a + 2b + 3a + 2c}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{a + 2b - 3a - 2c}{2}\right\}^2 \\
 &= \left\{\frac{4a + 2b + 2c}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{2b - 2a - 2c}{2}\right\}^2 \\
 &= \left\{\frac{2(2a + b + c)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{2(b - a - c)}{2}\right\}^2
 \end{aligned}$$

$$= (2a + b + c)^2 - (b - a - c)^2$$

(Ans.)

প্রশ্ন ১৮ ৷ $(x + 7)(x - 9)$ কে দুইটি বর্গের
বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান : আমরা জানি, $ab =$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$\therefore \frac{(x+7)(x-9)}{2} = \left\{\frac{(x+7) + (x-9)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{(x+7) - (x-9)}{2}\right\}^2$$

$$= \left\{\frac{x+7+x-9}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{x+7-x+9}{2}\right\}^2$$

$$= \left\{\frac{2x-2}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{16}{2}\right\}^2$$

$$= \left\{\frac{2(x-1)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{2 \times 8}{2}\right\}^2 = (x-1)^2 - 8^2 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ১৯ ৷ $x^2 + 10x + 24$ কে দুইটি বর্গের
বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= x^2 + 10x + 24$

$$= x^2 + 10x + 25 - 1$$

$$= (x)^2 + 2 \times x \times 5 + (5)^2 - (1)^2$$

$$= (x + 5)^2 - 1^2 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ২০ ৷ $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 8$ এবং $a^2 + ab + b^2 = 4$ হলে,

(i) $a^2 + b^2$, (ii) ab -এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 8$ এবং $a^2 + ab + b^2 = 4$

(i) এখানে, $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2 - a^2b^2$

$$(ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 -$$

$$(a^2 + b^2 - ab)$$

$$(a^2 - ab + b^2)$$

$$\therefore 8 = 4(a^2 - ab + b^2) \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$\text{বা, } a^2 - ab + b^2 = \frac{8}{4} = 2$$

এখন, $a^2 + ab + b^2 = 4$ এবং $a^2 - ab + b^2 = 2$ যোগ করে পাই,

$$a^2 + ab + b^2 = 4$$

$$a^2 - ab + b^2 = 2$$

$$2a^2 + 2b^2 = 6$$

$$\text{বা, } 2(a^2 + b^2) = 6$$

$$\text{বা, } a^2 + b^2 = \frac{6}{2} \therefore a^2 + b^2 = 3$$

(Ans.)

(ii) এখানে, $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 8$

$$\text{বা, } (a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2 - a^2b^2 = 8$$

$$\text{বা, } (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = 8$$

$$\text{বা, } (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab) = 8$$

$$\text{বা, } 4(a^2 + b^2 - ab) = 8$$

$$\text{বা, } a^2 + b^2 - ab = \frac{8}{4} = 2$$

$$\text{বা, } a^2 + b^2 - ab = 2$$

$$\text{বা, } (a^2 + b^2) - ab = 2$$

$$\text{বা, } 3 - ab = 2$$

$$\text{বা, } -ab = 2 - 3$$

$$\text{বা, } -ab = -1 \therefore ab = 1$$

(Ans.)





গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান



প্রশ্ন-১ ▶ $p^2 - 1 = 4p$ হলে-

ক. $\left(p + \frac{1}{p}\right)^2$ এর মান নির্ণয় কর। ২

? খ. $\frac{p^3 + 5p}{p^4 + 4p^2 - 5} \times \sqrt[3]{64}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $p^4 = 322 - \frac{1}{p^4}$ ৪

▶▶ ১নং প্রশ্নের সমাধান ▶▶

ক. দেওয়া আছে, $p^2 - 1 = 4p$

$$\text{বা, } \frac{p^2 - 1}{p} = 4$$

$$\therefore p - \frac{1}{p} = 4$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি, } \left(p + \frac{1}{p}\right)^2 = \left(p - \frac{1}{p}\right)^2 + 4p \cdot \frac{1}{p}$$

$$= (4)^2 + 4 = 16 + 4 =$$

20 (Ans.)

খ. দেওয়া আছে, $p^2 - 1 = 4p$

$$\text{প্রদত্ত রাশি, } = \frac{p^3 + 5p}{p^4 + 4p^2 - 5} \times \sqrt[3]{64} =$$

$$\frac{p(p^2 + 5)}{p^4 + 5p^2 - p^2 - 5} \times 4$$

$$= \frac{p(p^2 + 5)}{p^2(p^2 + 5) - 1(p^2 + 5)} \times 4$$

$$= \frac{p(p^2 + 5)}{(p^2 + 5)(p^2 - 1)} \times 4$$

$$= \frac{4p}{(p^2 - 1)} = \frac{4p}{4p} \quad [\because p^2$$

$$- 1 = 4p]$$

$$= 1 \text{ (Ans.)}$$

গ. 'ক' থেকে পাই,

$$p - \frac{1}{p} = 4$$

$$\text{বা, } \left(p - \frac{1}{p}\right)^2 = 16 \quad [\text{উভয়পক্ষে বর্গ করে}]$$

$$\text{বা, } p^2 + \frac{1}{p^2} - 2 \cdot p \cdot \frac{1}{p} = 16$$

$$\text{বা, } p^2 + \frac{1}{p^2} = 16 + 2$$

$$\text{বা, } p^2 + \frac{1}{p^2} = 18$$

$$\text{বা, } \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)^2 = 18^2 \quad [\text{পুনরায় উভয়পক্ষে বর্গ করে}]$$

$$\text{বা, } p^4 + \frac{1}{p^4} + 2 \cdot p^2 \cdot \frac{1}{p^2} = 324$$

$$\text{বা, } p^4 = 324 - 2 - \frac{1}{p^4} \therefore p^4 = 322 -$$

$$\frac{1}{p^4} \text{ (দেখানো হলো)}$$



অনুশীলনমূলক কাজের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান



প্রশ্ন-২ ▶ $3xy + 2ax, 4x - 3y$ ও $x - 5y + 2z$ তিনটি রাশি।

? ক. সূত্রের সাহায্যে দ্বিতীয় রাশির বর্গ নির্ণয় কর। ২

খ. প্রথম দুইটি রাশির যোগফলের বর্গ নির্ণয়

কর। ৪

গ. মান নির্ণয় কর : $(1\text{ম রাশি})^2 + (2\text{য় রাশি})^2 - (3\text{য় রাশি})^2$ ৪

▶▶ ২নং প্রশ্নের সমাধান ▶▶

ক. প্রদত্ত দ্বিতীয় রাশি = $4x - 3y$

$$\begin{aligned}\therefore (4x - 3y)^2 &= (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3y + (3y)^2 \\ &= 16x^2 - 24xy + 9y^2 \text{ (Ans.)}\end{aligned}$$

খ. ধরি, $a = 3xy + 2ax$ এবং $b = 4x - 3y$

$$\begin{aligned}\therefore (a + b)^2 &= (3xy + 2ax + 4x - 3y)^2 \\ &= \{(3xy + 2ax) + (4x - 3y)\}^2 \\ &= (3xy + 2ax)^2 + 2(3xy + 2ax)(4x - 3y) + (4x - 3y)^2 \\ &= 9x^2y^2 + 4a^2x^2 + 12ax^2y + 2(12x^2y - 9xy^2 \\ &\quad + 8ax^2 - 6axy) + 16x^2 + 9y^2 - 24xy \\ &= 9x^2y^2 + 4a^2x^2 + 12ax^2y + 24x^2y - 18xy^2 + \\ &\quad 16ax^2 - 12axy + 16x^2 + 9y^2 - 24xy \text{ (Ans.)}\end{aligned}$$

গ. $(1ম রাশি)^2 + (2য় রাশি)^2 - (3য় রাশি)^2$

$$\begin{aligned}&= (3xy + 2ax)^2 + (4x - 3y)^2 - (x - 5y + 2z)^2 \\ &= 9x^2y^2 + 12ax^2y + 4a^2x^2 + 16x^2 - 24xy + 9y^2 - (x^2 + 25y^2 \\ &\quad + 4z^2 - 10xy - 20yz + 4zx) \\ &= 9x^2y^2 + 12ax^2y + 4a^2x^2 + 16x^2 - 24xy + 9y^2 - x^2 - 25y^2 \\ &\quad - 4z^2 + 10xy + 20yz - 4zx \\ &= 9x^2y^2 + 12ax^2y + 4a^2x^2 + 15x^2 - 14xy - 16y^2 + 20yz \\ &\quad - 4zx - 4z^2 \text{ (Ans.)}\end{aligned}$$

প্রশ্ন-৩ ▶ $x + y + z = 12$ এবং $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ হলে—

? ক. বীজগাণিতিক রাশি কাকে বলে? ২
খ. $xy + yz + zx$ এর মান কত? 8

গ. $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$ এর মান নির্ণয় কর। 8

▶▶ **এনং প্রশ্নের সমাধান** ▶▶

ক. প্রক্রিয়া চিহ্ন এবং সংখ্যা নির্দেশক অবর প্রতীক এর অর্থবোধক বিন্যাসকে বীজগাণিতিক রাশি বলা হয়।

যেমন, $2a + 3b - 4c$ একটি বীজগাণিতিক রাশি।

খ. দেওয়া আছে, $x + y + z = 12$ এবং $x^2 + y^2 + z^2 = 50$
আমরা জানি,

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$\text{বা, } (12)^2 = 50 + 2(xy + yz + zx)$$

$$\text{বা, } 144 = 50 + 2(xy + yz + zx)$$

$$\text{বা, } 2(xy + yz + zx) = 144 - 50$$

$$\text{বা, } 2(xy + yz + zx) = 94$$

$$\therefore xy + yz + zx = \frac{94}{2} = 47 \text{ (Ans.)}$$

গ. এখানে, $x^2 + y^2 + z^2 = 50$

এবং ‘ক’ হতে প্রাপ্ত, $xy + yz + zx = 47$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$$

$$= x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$$

$$= 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx)$$

$$= 2 \times 50 - 2 \times 47 = 100 - 94 = 6 \text{ (Ans.)}$$



অতিরিক্ত সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান



প্রশ্ন-৪ ▶ $x + \frac{1}{x} = \sqrt{2}$ হলে-

- ক. দেখাও যে, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 0$ ২
 খ. দেখাও যে, $x^8 + 2x^4 + 1 = 0$ ৪
 গ. $\frac{x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

▶▶ ৪নং প্রশ্নের সমাধান ▶▶

ক. দেওয়া আছে,

$$x + \frac{1}{x} = \sqrt{2}$$

বা, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \sqrt{(2)^2}$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

$$\text{বা, } x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 2$$

$$\text{বা, } x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 - 2 \therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 0$$

(দেখানো হলো)

খ. দেওয়া আছে, $x + \frac{1}{x} = \sqrt{2}$

$$\text{বা, } \frac{x^2 + 1}{x} = \sqrt{2}$$

$$\text{বা, } x^2 + 1 = \sqrt{2}x$$

$$\text{বা, } (x^2 + 1)^2 = (\sqrt{2}x)^2$$

[উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

$$\text{বা, } x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2$$

$$\text{বা, } x^4 + 1 = 2x^2 - 2x^2$$

$$\text{বা, } (x^4 + 1)^2 = 0 \therefore x^8 + 2x^4 + 1 = 0 \text{ (দেখানো হলো)}$$

গ. দেওয়া আছে, $x + \frac{1}{x} = \sqrt{2}$

$$\text{বা, } \frac{x^2 + 1}{x} = \sqrt{2} \therefore x^2 + 1 = \sqrt{2}x$$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$$

$$= \frac{x}{x^2 + 1 + \sqrt{2}x}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{2}x + \sqrt{2}x} = \frac{x}{2\sqrt{2}x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(Ans.)

প্রশ্ন-৫ ▶ $a + b = p$, $ab = q$ এবং $a + 3b$ তিনটি বীজগাণিতিক রাশি।

ক. সূত্রের সাহায্যে $a + 3b$ এর বর্গ নির্ণয় কর। ২

খ. $P = 7$, $q = 12$ হলে, $a - b$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $p = 2$, $q = 1$ হলে, $a^4 + b^4$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

▶▶ ৫নং প্রশ্নের সমাধান ▶▶

ক. $a + 3b$ এর বর্গ

$$= (a + 3b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 3b + (3b)^2 = a^2 + 6ab + 9b^2 \text{ (Ans.)}$$

খ. দেওয়া আছে, $p = 7$ বা, $a + b = 7$
 এবং $q = 12$ বা, $ab = 12$

$$\text{আমরা জানি, } (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$$

$$= 7^2 - 4 \cdot 12 \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$= 49 - 48 = 1$$

$$\therefore a - b = \pm 1 \text{ (Ans.)}$$

গ. দেওয়া আছে, $p = 2$ এবং $q = 1$

$$\therefore a^4 + b^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 = (a^2 + b^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot b^2$$

$$= (a^2 + b^2)^2 - 2 \cdot (1)^2 \quad [\because ab = q = 1]$$

$$= \{(a + b)^2 - 2 \cdot ab\}^2 - 2 \cdot 1$$

$$= \{(2)^2 - 2 \cdot 1\}^2 - 2 \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$= (4 - 2)^2 - 2 = (2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন-৬ ▶ $x + y = 12$, $x - y = 2$.

ক. $x^2 + y^2$ এর মান কত? ২

খ. xy এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $x + y = \sqrt{3}$ এবং $x - y = \sqrt{2}$

হলে, প্রমাণ কর যে, $8xy(x^2 + y^2) = 5$.

8

▶◀ ৬নং প্রশ্নের সমাধান ▶◀

ক. দেওয়া আছে, $x + y = 12$ এবং $x - y = 2$

আমরা জানি, $x^2 + y^2 =$

$$\frac{(x + y)^2 + (x - y)^2}{2}$$

$$= \frac{(12)^2 + (2)^2}{2} \quad [\text{মান}$$

বসিয়ে]

$$= \frac{144 + 4}{2} = \frac{148}{2} = 74$$

নির্ণেয় মান 74

খ. দেওয়া আছে, $x + y = 12$ এবং $x - y = 2$

আমরা জানি, $xy = \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x - y}{2}\right)^2$

$$= \left(\frac{12}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 6^2 - 1^2 =$$

$$36 - 1 = 35$$

নির্ণেয় মান 35

গ. দেওয়া আছে, $x + y = \sqrt{3}$ এবং $x - y = \sqrt{2}$

$$\text{বামপর্ব} = 8xy(x^2 + y^2) = 4xy \cdot 2(x^2 + y^2)$$

$$= \{(x + y)^2 - (x - y)^2\} \{(x + y)^2 + (x - y)^2\}$$

$$= \{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2\} \{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2\}$$

$$= (3 - 2)(3 + 2) = 1 \times 5 = 5 =$$

ডানপর্ব

$$\therefore 8xy(x^2 + y^2) = 5 \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন-৭ ▶ $x + y = a$ এবং $x - y = b$

ক. $a = 2\sqrt{3}$ এবং $b = \sqrt{2}$ হলে, $x^2 + y^2$ এর মান নির্ণয় কর। ২

?

খ. $a = \sqrt{3}$ এবং $b = \sqrt{2}$ হলে, $\frac{1}{5} xy$

$(x^2 + y^2)$ এর মান নির্ণয় কর। 8

গ. $a = \sqrt{5}$ এবং $b = \sqrt{3}$ হলে, $xy(x^2 + y^2) =$ কত? 8

▶◀ ৭নং প্রশ্নের সমাধান ▶◀

ক. দেওয়া আছে, $a = 2\sqrt{3}$ বা, $x + y = 2\sqrt{3}$

এবং $b = \sqrt{2}$ বা, $x - y = \sqrt{2}$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = x^2 + y^2 =$$

$$\frac{(x + y)^2 + (x - y)^2}{2}$$

$$= \frac{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2}{2} = \frac{12 + 2}{2}$$

$$= \frac{14}{2} = 7$$

খ. দেওয়া আছে, $a = \sqrt{3}$ বা, $x + y = \sqrt{3}$ এবং $b = \sqrt{2}$ বা, $x - y = \sqrt{2}$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{1}{5} xy(x^2 + y^2)$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x - y}{2}\right)^2 \right\}$$

$$\left\{ \frac{(x + y)^2 + (x - y)^2}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \right\}$$

$$\left\{ \frac{\sqrt{(3)}^2 + \sqrt{(2)}^2}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left\{ \frac{3}{4} - \frac{2}{4} \right\} \left\{ \frac{3 + 2}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{3 - 2}{4} \right) \cdot \frac{5}{2} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{1}{8}$$

(Ans.)

গ. দেওয়া আছে, $a = \sqrt{5}$ বা, $x + y = \sqrt{5}$

এবং $b = \sqrt{3}$ বা, $x - y = \sqrt{3}$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = xy(x^2 + y^2)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 - \left(\frac{x-y}{2} \right)^2 \right\} \\
 &= \left\{ \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{2} \right\} \\
 &= \left\{ \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right\} \\
 &= \left\{ \frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{3})^2}{2} \right\} \\
 &= \left\{ \frac{5}{4} - \frac{3}{4} \right\} \left\{ \frac{5+3}{2} \right\} = \frac{5-3}{4} \cdot \frac{8}{2} \\
 &= \frac{2}{4} \cdot \frac{8}{2} = 2 \text{ (Ans.)}
 \end{aligned}$$

প্রশ্ন-৮ ▶ $x - \frac{1}{x}$ একটি বীজগাণিতিক রাশি।

ক. $x - \frac{1}{x} = a$ হলে, $x^2 + \frac{1}{x^2} =$ কত? ২

খ. $x - \frac{1}{x} = p$ হলে, $\frac{c}{x(x-p)}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $x - \frac{1}{x} = 3$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^4 = 119 - \frac{1}{x^4}$ ৪

▶◀ চনং প্রশ্নের সমাধান ▶◀

ক. দেওয়া আছে, $x - \frac{1}{x} = a$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 -$$

$$2x \cdot \frac{1}{x} = a^2 - 2 \text{ (Ans.)}$$

খ. দেওয়া আছে, $x - \frac{1}{x} = p$

$$\text{বা, } \frac{x^2 - 1}{x} = p$$

$$\text{বা, } x^2 - 1 = px$$

$$\text{বা, } x^2 - px = 1$$

$$\therefore x(x-p) = 1$$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{c}{x(x-p)} = \frac{c}{1}$$

[মান বসিয়ে]

$$= c \text{ (Ans.)}$$

গ. দেওয়া আছে, $x - \frac{1}{x} = 3$

বা, $\left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = 3^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

$$\text{বা, } x^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 9$$

$$\text{বা, } x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 9$$

$$\text{বা, } x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 9$$

$$\text{বা, } x^2 + \frac{1}{x^2} = 9 + 2 = 11$$

বা, $\left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2 = (11)^2$ [পুনরায় উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

$$\text{বা, } (x^2)^2 + 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} + \left(\frac{1}{x^2} \right)^2 = 121$$

$$\text{বা, } x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} = 121$$

$$\text{বা, } x^4 = 121 - 2 - \frac{1}{x^4}$$

[পক্ষান্তর করে]

$$\therefore x^4 = 119 - \frac{1}{x^4} \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন-৯ ▶ $a + b + c = 2$ এবং $ab + bc + ca = 1$ হলে

ক. $a^2 + b^2 + c^2$ এর মান কত? ২

খ. $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. 'ক' এর মান ব্যবহার করে $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ এর মান নির্ণয়

কর।	8
▶◀ ৯নং প্রশ্নের সমাধান ▶◀	
ক. দেওয়া আছে, $a + b + c = 2$ এবং $ab + bc + ca = 1$ আমরা জানি, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ বা, $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$ $= 2^2 - 2.1 = 4 - 2 =$ 2 (Ans.)	
খ. প্রদত্ত রাশি $= (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$ $= a^2 + 2ab + b^2 + b^2 + 2bc + c^2 + c^2 + 2ca + a^2$ $= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ $= 2(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)$ $= 2.2 + 2.1$ ['ক' নং থেকে] = 6 (Ans.)	
গ. প্রদত্ত রাশি $= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ $= a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2$ $+ c^2 - 2ca + a^2$ $= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$ $= 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$ $= 2.2 - 2.1$ ['ক' নং ব্যবহার করে] = 4 - 2 = 2 (Ans.)	
প্রশ্ন-১০ ▶ $3a + 2c, a + 2b, a - b + c$ তিনটি বীজগাণিতিক রাশি।	
ক. $a - b + c$ এর বর্গ নির্ণয় কর।	২
খ. $(a + 2b)$ ও $(3a + 2c)$ কে দুটি পূর্ববর্গের অন্তরুপে প্রকাশ কর।	8

গ. $a - b + c = 4$ হলে, $(3a + 2c)^2 - 2(3a + 2c)(a + 2b) + (a + 2b)^2$ এর মান নির্ণয় কর।	8
▶◀ ১০নং প্রশ্নের সমাধান ▶◀	
ক. $a - b + c$ এর বর্গ $= (a - b + c)^2$ $= (a - b)^2 + 2(a - b)c + (c)^2$ $= a^2 - 2ab + b^2 + 2ac - 2bc + c^2$ $= a^2 + b^2 + c^2 + 2ac - 2ab - 2bc$ $= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac$ (Ans.)	
খ. $(a + 2b)(3a + 2c) =$ $\left(\frac{a + 2b + 3a + 2c}{2}\right)^2 -$ $\left(\frac{a + 2b - 3a - 2c}{2}\right)^2$ $= \left(\frac{4a + 2b + 2c}{2}\right)^2 -$ $\left(\frac{-2a + 2b - 2c}{2}\right)^2$ $= \left\{\frac{2(2a + b + c)}{2}\right\}^2 -$ $\left\{\frac{2(b - a - c)}{2}\right\}^2$ $= (2a + b + c)^2 - (b - a - c)^2$ (Ans.)	
গ. দেওয়া আছে, $a - b + c = 4$ ধরি, $3a + 2c = x$ এবং $a + 2b = y$ প্রদত্ত রাশিমালা $= x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$ $= (3a + 2c - a - 2b)^2 =$ $(2a - 2b + 2c)^2$ $= \{2(a - b + c)\}^2 = 4(a - b + c)^2$ $= 4.4^2$ [মান বসিয়ে]	

$$= 4.16 = 64 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন-১১ ▶ $p = 3 + \frac{1}{p}$ হলে—

ক. $p + \frac{1}{p}$ এর মান নির্ণয় কর।

২

খ. $p^4 - \frac{1}{p^4}$ এর মান নির্ণয় কর।

৪

গ. দেখাও যে, $p^4 = 119 - \frac{1}{p^4}$

৪

▶◀ ১১নং প্রশ্নের সমাধান ▶◀

ক. দেওয়া আছে, $p = 3 + \frac{1}{p}$

$$\therefore p - \frac{1}{p} = 3$$

আমরা জানি, $\left(p + \frac{1}{p}\right)^2 = \left(p - \frac{1}{p}\right)^2 +$

$$4.p \cdot \frac{1}{p}$$

$$= (3)^2 + 4 = 9 + 4 = 13$$

$$\therefore p + \frac{1}{p} = \sqrt{13} \text{ (Ans.)}$$

খ. ‘ক’ থেকে পাই, $p - \frac{1}{p} = 3$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = p^4 - \frac{1}{p^4} = (p^2)^2 - \left(\frac{1}{p^2}\right)^2 =$$

$$\left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)\left(p^2 - \frac{1}{p^2}\right)$$

$$= \left\{\left(p + \frac{1}{p}\right)^2 - 2.p \cdot \frac{1}{p}\right\}$$

$$\left(p + \frac{1}{p}\right)\left(p - \frac{1}{p}\right)$$

$$= \{(\sqrt{13})^2 - 2\} \times \sqrt{13} \times 3$$

[‘ক’ থেকে]

$$= \{13 - 2\} \times \sqrt{13} \times 3 = 11\sqrt{13} \times 3 = 33\sqrt{13}$$

(Ans.)

গ. দেওয়া আছে, $p = 3 + \frac{1}{p}$

$$\text{বা, } p - \frac{1}{p} = 3$$

$$\text{বা, } \left(p - \frac{1}{p}\right)^2 = (3)^2$$

[উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

$$\text{বা, } (p)^2 - 2.p \cdot \frac{1}{p} + \left(\frac{1}{p}\right)^2 = 9$$

$$\text{বা, } p^2 - 2 + \frac{1}{p^2} = 9$$

$$\text{বা, } p^2 + \frac{1}{p^2} = 9 + 2$$

$$\text{বা, } \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right) = 11$$

$$\text{বা, } \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)^2 = (11)^2$$

[পুনরায় বর্গ করে]

$$\text{বা, } (p^2)^2 + 2.p^2 \cdot \frac{1}{p^2} + \left(\frac{1}{p^2}\right)^2 =$$

$$121$$

$$\text{বা, } p^4 + 2 + \frac{1}{p^4} = 121$$

$$\text{বা, } p^4 + \frac{1}{p^4} = 121 - 2$$

$$\text{বা, } p^4 + \frac{1}{p^4} = 119$$

$$\therefore p^4 = 119 - \frac{1}{p^4} \text{ (দেখানো হলো)}$$



প্রশ্ন-১২ ▶ $x + y = \sqrt{5}$ এবং $x - y = \sqrt{2}$ হলে,

- ? ক. xy এর মান নির্ণয় কর। ২
খ. দেখাও যে, $24xy(x^2 + y^2) = 63$ ৪
গ. $4xy(x^4 + y^4)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

▶▶ ১২নং প্রশ্নের সমাধান ▶▶

ক. দেওয়া আছে, $x + y = \sqrt{5}$ এবং $x - y = \sqrt{2}$

$$xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} - \frac{2}{4} = \frac{5-2}{4} = \frac{3}{4} \text{ (Ans.)}$$

খ. দেওয়া আছে, $x + y = \sqrt{5}$ এবং $x - y = \sqrt{2}$

‘ক’ হতে প্রাপ্ত, $xy = \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} \text{বামপর্ব} &= 24xy(x^2 + y^2) \\ &= 3.4xy.2(x^2 + y^2) \\ &= 3.4.\frac{3}{4}.\{(x+y)^2 + (x-y)^2\} \\ &= 9\{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{2})^2\} \\ &= 9(5 + 2) = 9.7 = 63 = \text{ডানপর্ব} \\ \therefore 24xy(x^2 + y^2) &= 63 \text{ (দেখানো হলো)} \end{aligned}$$

গ. দেওয়া আছে, $x + y = \sqrt{5}$ এবং $x - y = \sqrt{2}$

‘ক’ হতে প্রাপ্ত, $xy = \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= 4xy(x^4 + y^4) \\ &= 4xy\{(x^2)^2 + (y^2)^2\} \\ &= 4.\frac{3}{4}\{(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2\} \\ &= \left[\left\{\frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{2}\right\}^2 - 2(xy)^2\right] \end{aligned} \quad 3$$

$$= \left[\left\{\frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{2})^2}{2}\right\}^2 - 2.\left(\frac{3}{4}\right)^2\right] \quad \text{[মান বসিয়ে]}$$

$$= 3\left\{\left(\frac{5+2}{2}\right)^2 - 2.\frac{9}{16}\right\}$$

$$= 3\left(\frac{49}{4} - \frac{9}{8}\right) = 3\left(\frac{98-9}{8}\right) =$$

$$3.\frac{89}{8} = \frac{267}{8} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন-১৩ ▶ $a + \frac{1}{a} = 2$, $p + q = \sqrt{5}$ এবং $p - q = \sqrt{3}$

- ? ক. $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2$ এর মান কত? ২
খ. $pq(p^2 + q^2)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

- গ. দেখাও যে, $a^2 + \frac{1}{a^2} = a^4 + \frac{1}{a^4}$. ৪

▶▶ ১৩নং প্রশ্নের সমাধান ▶▶

ক. দেওয়া আছে, $a + \frac{1}{a} = 2$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4.a.\frac{1}{a} = 2^2 - 4 = 4 - 4$$

খ. দেওয়া আছে, $p + q = \sqrt{5}$ এবং $p - q = \sqrt{3}$

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = pq(p^2 + q^2) = \frac{1}{2} pq. 2(p^2 + q^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2\right\}\{(p+q)^2 + (p-q)^2\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}\{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{3})^2\} \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4} \right) (5+3) = \frac{1}{2} \left(\frac{5-3}{4} \right) \cdot 8 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} \cdot 8 = \left\{ \left(\frac{1}{a} \right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} \right\}^2 - 2$$

গ. দেওয়া আছে, $a + \frac{1}{a} = 2$

বামপক্ষ = $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a} \right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a}$

= $(2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$

ডানপক্ষ = $a^4 + \frac{1}{a^4} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2} \right)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{a^2}$

$\frac{1}{a^2}$



সৃজনশীল প্রশ্নব্যাংক উত্তরসহ



প্রশ্ন-১৪ ▶ $x + y + z = 2$, $xy + yz + zx = 1$ হলে,

ক. $x^2 + y^2 + z^2$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $(x + y - z)^2 + 2(x + y - z)(x + y + 3z) + (x + y + 3z)^2$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

উত্তর : ক. ২; খ. ৬; গ. ৪

প্রশ্ন-১৫ ▶ $x + y = 12$, $x - y = 2$ হলে,

ক. x এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $x^2 + y^2$ এবং xy এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $(4x + 7y - 3z)^2 + 2(4x + 7y - 3z)(7y - 4x + 3z) + (7y - 4x + 3z)^2$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

উত্তর : ক. ৭; খ. ৭৪, ৩৫; গ. ১৯৬

প্রশ্ন-১৬ ▶ $a + b + c = 9$, $a^2 + b^2 + c^2 = 29$

ক. $ab + bc + ca$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $(a + b + c)^2 + (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

উত্তর : ক. ২৬; খ. ৬; গ. ১৯১

প্রশ্ন-১৭ ▶ $x + y + z = p$, $xy + yz + zx = q$ হলে,

ক. $x^2 + y^2 + z^2$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2 = 2p^2 - 2q$ ৪

উত্তর : ক. $p^2 - 2q$ খ. $2p^2 - 6q$

প্রশ্ন-১৮ ▶ $a + b + c = 2$ এবং $ab + bc + ca = 1$ হলে,

ক. $a^2 + b^2 + c^2$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$ এর মান কত? ৪

গ. $(a + b - c)^2 + 2(a + b - c)(a + b + 3c) + (a + b + 3c)^2$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

উত্তর : ক. ২; খ. ৬; গ. ১৬

প্রশ্ন-১৯ ▶ $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ হলে

ক. দেখাও যে, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 1$ ২

খ. দেখাও যে, $x^8 + 2x^4 + 1 = 0$ ৪



গ. $\frac{x}{x^2 + \sqrt{3}x + 1}$ এর মান নির্ণয় কর।

৪

উত্তর : গ. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$