

অধ্যায় ৩

বীজগাণিতিক রাশি (Algebraic Expressions)

বীজগণিতে অনেক সমস্যা সমাধানে বীজগাণিতিক সূত্র ব্যবহৃত হয়। আবার অনেক বীজগাণিতিক রাশি বিশ্লেষণ করে উৎপাদকের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হয়ে থাকে। তাই এ অধ্যায়ে বীজগাণিতিক সূত্রের সাহায্যে সমস্যা সমাধান এবং রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ বিষয়ক বিষয়বস্তু শিক্ষার্থীর উপযোগী করে উপস্থাপন করা হয়েছে। অধিকন্তু নানাবিধ গাণিতিক সমস্যা বীজগাণিতিক সূত্রের সাহায্যে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করেও সমাধান করা যায়। পূর্বের শ্রেণিতে বীজগাণিতিক সূত্রাবলি ও এদের সাথে সম্পৃক্ত অনুসিদ্ধান্তগুলো সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। এ অধ্যায়ে ঐগুলো পুনরুল্লেখ করা হলো এবং উদাহরণের মাধ্যমে এদের কতিপয় প্রয়োগ দেখানো হলো। এছাড়াও এ অধ্যায়ে বর্গ ও ঘনের সম্প্রসারণ, ভাগশেষ উপপাদ্য প্রয়োগ করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ এবং বাস্তব সমস্যা সমাধানে বীজগাণিতিক সূত্রের গঠন ও প্রয়োগ সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা ---

- ▶ বীজগাণিতিক সূত্র প্রয়োগ করে বর্গ ও ঘন রাশির সম্প্রসারণ করতে পারবে।
- ▶ ভাগশেষ উপপাদ্য কী ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং তা প্রয়োগ করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- ▶ বাস্তব সমস্যা সমাধানের জন্য বীজগাণিতিক সূত্র গঠন করতে পারবে এবং সূত্র প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

বীজগাণিতিক রাশি

সংখ্যা নির্দেশক প্রতীক এবং প্রক্রিয়া চিহ্ন এর অর্থবোধক বিন্যাসকে বীজগাণিতিক রাশি বলা হয়। যেমন, $2a + 3b - 4c$ একটি বীজগাণিতিক রাশি। বীজগাণিতিক রাশিতে $a, b, c, p, q, r, m, n, x, y, z, \dots$ ইত্যাদি বর্ণের মাধ্যমে বিভিন্ন তথ্য প্রকাশ করা হয়। বীজগাণিতিক রাশি সংবলিত বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে এই সমস্ত বর্ণকে ব্যবহার করা হয়। পাটিগণিতে শুধু ধনাত্মক সংখ্যা ব্যবহৃত হয়, অন্যদিকে বীজগণিতে শূন্যসহ ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সকল সংখ্যা ব্যবহার করা হয়। বীজগণিতকে পাটিগণিতের সর্বাঙ্গীনকৃত (generalized) রূপ বলা হয়।

বীজগাণিতিক রাশিতে ব্যবহৃত সংখ্যাগুলো ধ্রুবক (constant), এদের মান নির্দিষ্ট। আর অক্ষর প্রতীকগুলো চলক (variables), এদের মান নির্দিষ্ট নয়, এরা বিভিন্ন মান ধারণ করতে পারে।

বর্গ সংবলিত সূত্রাবলি

বীজগাণিতিক প্রতীক দ্বারা প্রকাশিত যেকোনো সাধারণ নিয়ম বা সিদ্ধান্তকে বীজগাণিতিক সূত্র বলা হয়। সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণিতে বীজগাণিতিক সূত্রাবলি ও এতদসংক্রান্ত অনুসিদ্ধান্তগুলো সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে। এ অধ্যায়ে ঐগুলো পুনরুল্লেখ করে কতিপয় প্রয়োগ দেখানো হলো।

সূত্র ১. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

সূত্র ২. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

মন্তব্য: সূত্র ১ ও সূত্র ২ হতে দেখা যায় যে, $a^2 + b^2$ এর সাথে $2ab$ অথবা $-2ab$ যোগ করলে একটি পূর্ণবর্গ, অর্থাৎ $(a + b)^2$ অথবা $(a - b)^2$ পাওয়া যায়। সূত্র ১ এ b এর স্থলে $-b$ বসালে সূত্র ২ পাওয়া যায়: $\{a + (-b)\}^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2$ অর্থাৎ, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ।

অনুসিদ্ধান্ত ১. $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

অনুসিদ্ধান্ত ২. $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$

অনুসিদ্ধান্ত ৩. $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$

প্রমাণ: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 4ab = (a - b)^2 + 4ab$

অনুসিদ্ধান্ত ৪. $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

প্রমাণ: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = (a + b)^2 - 4ab$

অনুসিদ্ধান্ত ৫. $a^2 + b^2 = \frac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{2}$

প্রমাণ: সূত্র ১ ও সূত্র ২ হতে,

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

যোগ করে, $2a^2 + 2b^2 = (a + b)^2 + (a - b)^2$

বা, $2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$

সুতরাং, $(a^2 + b^2) = \frac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{2}$ □

অনুসিদ্ধান্ত ৬. $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

প্রমাণ: সূত্র ১ ও সূত্র ২ হতে,

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

বিয়োগ করে, $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$

বা, $ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$

সুতরাং, $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \quad \square$

মন্তব্য: অনুসিদ্ধান্ত ৬ প্রয়োগ করে যেকোনো দুইটি রাশির গুণফলকে ঐ দুইটি রাশির সমষ্টির অর্ধেকের বর্গ হতে ঐ দুইটি রাশির অন্তরের অর্ধেকের বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করা যায়।

সূত্র ৩. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

অর্থাৎ, দুইটি রাশির বর্গের বিয়োগফল = রাশি দুইটির যোগফল \times রাশি দুইটির বিয়োগফল

সূত্র ৪. $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

অর্থাৎ, $(x+a)(x+b) = x^2 + (a \text{ ও } b \text{ এর বীজগাণিতিক যোগফল})x + (a \text{ ও } b \text{ এর গুণফল})$

বর্গসূত্রের সম্প্রসারণ: $a+b+c$ রাশিটিতে তিনটি পদ আছে। একে $(a+b)$ এবং c এ দুইটি পদের সমষ্টিরূপে বিবেচনা করা যায়। অতএব, সূত্র ১ প্রয়োগ করে রাশিটির বর্গ করে পাই,

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= \{(a+b)+c\}^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac\end{aligned}$$

সূত্র ৫. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

অনুসিদ্ধান্ত ৭. $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac)$

অনুসিদ্ধান্ত ৮. $2(ab+bc+ac) = (a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$

দ্রষ্টব্য: সূত্র ৫ প্রয়োগ করে পাই,

ক) $(a+b-c)^2 = \{a+b+(-c)\}^2$
 $= a^2 + b^2 + (-c)^2 + 2ab + 2b(-c) + 2a(-c)$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac$

খ) $(a-b+c)^2 = \{a+(-b)+c\}^2$
 $= a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2(-b)c + 2ac$
 $= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac$

$$\begin{aligned}
 \text{গ) } (a - b - c)^2 &= \{a + (-b) + (-c)\}^2 \\
 &= a^2 + (-b)^2 + (-c)^2 + 2a(-b) + 2(-b)(-c) + 2a(-c) \\
 &= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ac
 \end{aligned}$$

উদাহরণ ১. $(4x + 5y)$ এর বর্গ কত?

$$\text{সমাধান: } (4x + 5y)^2 = (4x)^2 + 2 \times (4x) \times (5y) + (5y)^2 = 16x^2 + 40xy + 25y^2$$

উদাহরণ ২. $(3a - 7b)$ এর বর্গ কত?

$$\text{সমাধান: } (3a - 7b)^2 = (3a)^2 - 2 \times (3a) \times (7b) + (7b)^2 = 9a^2 - 42ab + 49b^2$$

উদাহরণ ৩. বর্গের সূত্র প্রয়োগ করে ৯৯৬ এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান: } (996)^2 &= (1000 - 4)^2 = (1000)^2 - 2 \times 1000 \times 4 + 4^2 \\
 &= 1000000 - 8000 + 16 = 1000016 - 8000 = 992016
 \end{aligned}$$

উদাহরণ ৪. $a + b + c + d$ এর বর্গ কত?

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান: } (a + b + c + d)^2 &= \{(a + b) + (c + d)\}^2 \\
 &= (a + b)^2 + 2(a + b)(c + d) + (c + d)^2 \\
 &= a^2 + 2ab + b^2 + 2(ac + ad + bc + bd) + c^2 + 2cd + d^2 \\
 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd
 \end{aligned}$$

কাজ: সূত্রের সাহায্যে বর্গ নির্ণয় কর:

ক) $3xy + 2ax$

খ) $4x - 3y$

গ) $x - 5y + 2z$

উদাহরণ ৫. সরল কর:

$$(5x + 7y + 3z)^2 + 2(7x - 7y - 3z)(5x + 7y + 3z) + (7x - 7y - 3z)^2$$

সমাধান: ধরি, $5x + 7y + 3z = a$ এবং $7x - 7y - 3z = b$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{প্রদত্ত রাশি} &= a^2 + 2 \cdot b \cdot a + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\
 &= (a + b)^2 \\
 &= \{(5x + 7y + 3z) + (7x - 7y - 3z)\}^2 \quad [a \text{ ও } b \text{ এর মান বসিয়ে}] \\
 &= (5x + 7y + 3z + 7x - 7y - 3z)^2 \\
 &= (12x)^2 = 144x^2
 \end{aligned}$$

উদাহরণ ৬. $x - y = 2$ এবং $xy = 24$ হলে, $x + y$ এর মান কত?

সমাধান: $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy = (2)^2 + 4 \times 24 = 4 + 96 = 100$

$$\therefore x + y = \pm\sqrt{100} = \pm 10$$

উদাহরণ ৭. যদি $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 3$ এবং $a^2 + ab + b^2 = 3$ হয়, তবে $a^2 + b^2$ এর মান কত?

সমাধান: $a^4 + a^2b^2 + b^4$

$$= (a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2 - a^2b^2$$

$$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$$

$$= (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$$

$$= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\therefore 3 = 3(a^2 - ab + b^2) \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$\text{বা, } a^2 - ab + b^2 = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{এখন, } a^2 + ab + b^2 = 3 \text{ এবং } a^2 - ab + b^2 = 1$$

$$\text{যোগ করে পাই, } 2(a^2 + b^2) = 4$$

$$\text{বা, } a^2 + b^2 = \frac{4}{2} = 2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 2$$

উদাহরণ ৮. প্রমাণ কর যে, $(a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$

সমাধান: $(a + b)^4 - (a - b)^4$

$$= \{(a + b)^2\}^2 - \{(a - b)^2\}^2$$

$$= \{(a + b)^2 + (a - b)^2\}\{(a + b)^2 - (a - b)^2\}$$

$$= 2(a^2 + b^2) \times 4ab \text{ [অনুসিদ্ধান্ত ৫ এবং অনুসিদ্ধান্ত ৬ ব্যবহার করে]}$$

$$= 8ab(a^2 + b^2)$$

$$\therefore (a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$$

উদাহরণ ৯. $a + b + c = 15$ এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 83$ হলে, $ab + bc + ac$ এর মান কত?

সমাধান: প্রথম পদ্ধতি:

$$2(ab + bc + ac) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = (15)^2 - 83 = 225 - 83 = 142$$

$$\therefore ab + bc + ac = \frac{142}{2} = 71$$

বিকল্প পদ্ধতি:

$$(a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ac)$$

$$\text{বা, } (15)^2 = 83 + 2(ab + bc + ac)$$

$$\text{বা, } 225 - 83 = 2(ab + bc + ac)$$

$$\text{বা, } 2(ab + bc + ac) = 142$$

$$\therefore ab + bc + ac = \frac{142}{2} = 71$$

উদাহরণ ১০. $a + b + c = 2$ এবং $ab + bc + ac = 1$ হলে, $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$ এর মান কত?

$$\begin{aligned} \text{সমাধান: } & (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + b^2 + 2bc + c^2 + c^2 + 2ca + a^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) + (a^2 + b^2 + c^2) \\ &= (a + b + c)^2 + (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) \\ &= (2)^2 + (2)^2 - 2 \times 1 = 4 + 4 - 2 = 8 - 2 = 6 \end{aligned}$$

উদাহরণ ১১. $(2x + 3y)(4x - 5y)$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান: ধরি, $2x + 3y = a$ এবং $4x - 5y = b$

$$\begin{aligned} \therefore \text{প্রদত্ত রাশি } ab &= \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2x + 3y + 4x - 5y}{2}\right)^2 - \left(\frac{2x + 3y - 4x + 5y}{2}\right)^2 \quad [a \text{ ও } b \text{ এর মান বসিয়ে}] \\ &= \left(\frac{6x - 2y}{2}\right)^2 - \left(\frac{8y - 2x}{2}\right)^2 = \left\{\frac{2(3x - y)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{2(4y - x)}{2}\right\}^2 \\ &= (3x - y)^2 - (4y - x)^2 \\ \therefore (2x + 3y)(4x - 5y) &= (3x - y)^2 - (4y - x)^2 \end{aligned}$$

কাজ:

ক) সরল কর: $(4x + 3y)^2 + 2(4x + 3y)(4x - 3y) + (4x - 3y)^2$

খ) $x + y + z = 12$ এবং $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ হলে, $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

অনুশীলনী ৩.১

১. সূত্রের সাহায্যে বর্গ নির্ণয় কর:

- ক) $2a + 3b$ খ) $x^2 + \frac{2}{y^2}$ গ) $4y - 5x$
 ঘ) $5x^2 - y$ ঙ) $3b - 5c - 2a$ চ) $ax - by - cz$
 ছ) $2a + 3x - 2y - 5z$ জ) 1007

২. সরল কর:

- ক) $(7p + 3q - 5r)^2 - 2(7p + 3q - 5r)(8p - 4q - 5r) + (8p - 4q - 5r)^2$
 খ) $(2m + 3n - p)^2 + (2m - 3n + p)^2 - 2(2m + 3n - p)(2m - 3n + p)$
 গ) $6.35 \times 6.35 + 2 \times 6.35 \times 3.65 + 3.65 \times 3.65$
 ঘ) $\frac{2345 \times 2345 - 759 \times 759}{2345 - 759}$

৩. $a - b = 4$ এবং $ab = 60$ হলে, $a + b$ এর মান কত?

৪. $a + b = 9m$ এবং $ab = 18m^2$ হলে, $a - b$ এর মান কত?

৫. $x - \frac{1}{x} = 4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 322$ ।

৬. $2x + \frac{2}{x} = 3$ হলে, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ এর মান কত?

৭. $a + \frac{1}{a} = 2$ হলে, দেখাও যে, $a^2 + \frac{1}{a^2} = a^4 + \frac{1}{a^4}$

৮. $a + b = \sqrt{7}$ এবং $a - b = \sqrt{5}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $8ab(a^2 + b^2) = 24$

৯. $a + b + c = 9$ এবং $ab + bc + ca = 31$ হলে, $a^2 + b^2 + c^2$ এর মান নির্ণয় কর।

১০. $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ এবং $ab + bc + ca = 8$ হলে, $(a + b + c)^2$ এর মান কত?

১১. $a + b + c = 6$ এবং $a^2 + b^2 + c^2 = 14$ হলে, $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 =$ কত?

১২. $x = 3$, $y = 4$ এবং $z = 5$ হলে, $9x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 24xy - 16yz + 12zx =$ কত?

১৩. $(a + 2b)(3a + 2c)$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

১৪. $x^2 + 10x + 24$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ কর।

১৫. $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 8$ এবং $a^2 + ab + b^2 = 4$ হলে, ক) $a^2 + b^2$, খ) ab এর মান কত?