

## ঘন সংবলিত সূত্রাবলি

সূত্র ৬.  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

প্রমাণ:  $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$

$$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

□

অনুসিদ্ধান্ত ৯.  $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

সূত্র ৭.  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

প্রমাণ:  $(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2$

$$= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

□

দ্রষ্টব্য: সূত্র ৬ এ  $b$  এর স্থলে  $-b$  বসালে সূত্র ৭ পাওয়া যায়:

$$\{a + (-b)\}^3 = a^3 + (-b)^3 + 3a(-b)\{a + (-b)\}$$

অর্থাৎ,  $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

অনুসিদ্ধান্ত ১০.  $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

সূত্র ৮.  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

প্রমাণ:  $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

$$= (a + b)\{(a + b)^2 - 3ab\}$$

$$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$$

$$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

□

সূত্র ৯.  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

প্রমাণ:  $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

$$= (a - b)\{(a - b)^2 + 3ab\}$$

$$= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)$$

$$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

□

উদাহরণ ১২.  $2x + 3y$  এর ঘন নির্ণয় কর।

সমাধান:  $(2x + 3y)^3$

$$= (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x(3y)^2 + (3y)^3$$

$$= 8x^3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot 9y^2 + 27y^3$$

$$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$$

উদাহরণ ১৩.  $2x - y$  এর ঘন নির্ণয় কর।

সমাধান:  $(2x - y)^3$

$$= (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot y + 3 \cdot 2x \cdot y^2 - y^3$$

$$= 8x^3 - 3 \cdot 4x^2 \cdot y + 3 \cdot 2x \cdot y^2 - y^3$$

$$= 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$$

কাজ: সূত্রের সাহায্যে ঘন নির্ণয় কর:

ক)  $3x + 2y$

খ)  $3x - 4y$

গ) 397

উদাহরণ ১৪.  $x = 37$  হলে,  $8x^3 + 72x^2 + 216x + 216$  এর মান কত?

সমাধান:  $8x^3 + 72x^2 + 216x + 216$

$$= (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 6 + 3 \cdot 2x \cdot (6)^2 + (6)^3$$

$$= (2x + 6)^3 = (2 \times 37 + 6)^3 \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= (74 + 6)^3 = (80)^3 = 512000$$

উদাহরণ ১৫. যদি  $x - y = 8$  এবং  $xy = 5$  হয়, তবে  $x^3 - y^3 + 8(x + y)^2$  এর মান কত?

সমাধান:  $x^3 - y^3 + 8(x + y)^2$

$$= (x - y)^3 + 3xy(x - y) + 8\{(x - y)^2 + 4xy\}$$

$$= (8)^3 + 3 \times 5 \times 8 + 8(8^2 + 4 \times 5) \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= 8^3 + 15 \times 8 + 8(8^2 + 4 \times 5)$$

$$\begin{aligned}
&= 8^3 + 15 \times 8 + 8 \times 84 \\
&= 8(8^2 + 15 + 84) = 8(64 + 15 + 84) \\
&= 8 \times 163 = 1304
\end{aligned}$$

উদাহরণ ১৬. যদি  $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$  হয়, তবে প্রমাণ কর যে,  $a^3 + \frac{1}{a^3} = 18\sqrt{3}$

সমাধান: দেওয়া আছে,  $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
\therefore \frac{1}{a} &= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \text{ [লব ও হরকে } (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \text{ দ্বারা গুণ করে]} \\
&= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\therefore a + \frac{1}{a} = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
\text{এখন, } a^3 + \frac{1}{a^3} &= \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3 \cdot a \cdot \frac{1}{a} \left(a + \frac{1}{a}\right) \\
&= (2\sqrt{3})^3 - 3(2\sqrt{3}) \left[\because a + \frac{1}{a} = 2\sqrt{3}\right] \\
&= 2^3 \cdot (\sqrt{3})^3 - 3 \times 2\sqrt{3} = 8 \cdot 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \\
&= 24\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \text{ (প্রমাণিত)}
\end{aligned}$$

উদাহরণ ১৭.  $x + y = 5$ ,  $xy = 6$  হলে এবং  $x > y$  হলে

- ক)  $2(x^2 + y^2)$  এর মান নির্ণয় কর।  
 খ)  $x^3 - y^3 - 3(x^2 + y^2)$  এর মান নির্ণয় কর।  
 গ)  $x^5 + y^5$  এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

$$\begin{aligned}
\text{ক) আমরা জানি, } 2(x^2 + y^2) &= 2\{(x + y)^2 - 2xy\} \\
&= 2(5^2 - 2 \cdot 6) = 2 \times 13 = 26 \\
\therefore 2(x^2 + y^2) &= 26
\end{aligned}$$

খ) দেওয়া আছে  $x + y = 5$  এবং  $xy = 6$ ,  $x > y$

$$\therefore x - y = \sqrt{(x + y)^2 - 4xy} \text{ (প্রদত্ত শর্ত মোতাবেক ঋণাত্মক মান গ্রহণযোগ্য নয়)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6} = \sqrt{25 - 24} = \sqrt{1} = 1 \\
 x^3 - y^3 - 3(x^2 + y^2) \\
 &= (x - y)^3 + 3xy(x - y) - \frac{3}{2} \cdot 2(x^2 + y^2) \\
 &= 1^3 + 3 \cdot 6 \cdot 1 - \frac{3}{2} \cdot 26 \\
 &= 1 + 18 - 39 \\
 &= -20
 \end{aligned}$$

$$\therefore x^3 - y^3 - 3(x^2 + y^2) = -20$$

গ)  $x + y = 5$  এবং  $x - y = 1$

যোগ করে,  $2x = 6 \quad \therefore x = \frac{6}{2} = 3$

বিয়োগ করে,  $2y = 4 \quad \therefore y = \frac{4}{2} = 2$

$$\therefore x^5 + y^5 = 3^5 + 2^5 = 243 + 32 = 275$$

কাজ:

ক)  $x = -2$  হলে,  $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$  এর মান কত?

খ)  $a + b = 5$  এবং  $ab = 6$  হলে,  $a^3 + b^3 + 4(a - b)^2$  এর মান নির্ণয় কর।

গ)  $x = \sqrt{5} + \sqrt{3}$  হলে,  $x^3 + \frac{8}{x^3}$  এর মান নির্ণয় কর।

## অনুশীলনী ৩.২

১. সূত্রের সাহায্যে ঘন নির্ণয় কর:

ক)  $2x^2 + 3y^2$

খ)  $7m^2 - 2n$

গ)  $2a - b - 3c$

২. সরল কর:

ক)  $(7x + 3b)^3 - (5x + 3b)^3 - 6x(7x + 3b)(5x + 3b)$

খ)  $(a + b + c)^3 - (a - b - c)^3 - 6(b + c)\{a^2 - (b + c)^2\}$

গ)  $(m + n)^6 - (m - n)^6 - 12mn(m^2 - n^2)^2$

ঘ)  $(x + y)(x^2 - xy + y^2) + (y + z)(y^2 - yz + z^2) + (z + x)(z^2 - zx + x^2)$

ঙ)  $(2x + 3y - 4z)^3 + (2x - 3y + 4z)^3 + 12x\{4x^2 - (3y - 4z)^2\}$

৩.  $a - b = 5$  এবং  $ab = 36$  হলে,  $a^3 - b^3$  এর মান কত?
৪. যদি  $a^3 - b^3 = 513$  এবং  $a - b = 3$  হয়, তবে  $ab$  এর মান কত?
৫.  $x = 19$  এবং  $y = -12$  হলে,  $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$  এর মান নির্ণয় কর।
৬. যদি  $a = 15$  হয়, তবে  $8a^3 + 60a^2 + 150a + 130$  এর মান কত?
৭. যদি  $a + b = m$ ,  $a^2 + b^2 = n$  এবং  $a^3 + b^3 = p^3$  হয়, তবে দেখাও যে,  $m^3 + 2p^3 = 3mn$ ।
৮.  $a + b = 3$  এবং  $ab = 2$  হলে, (ক)  $a^2 - ab + b^2$  এবং (খ)  $a^3 + b^3$  এর মান নির্ণয় কর।
৯.  $a - b = 5$  এবং  $ab = 36$  হলে, (ক)  $a^2 + ab + b^2$  এবং (খ)  $a^3 - b^3$  এর মান নির্ণয় কর।
১০.  $m + \frac{1}{m} = a$  হলে,  $m^3 + \frac{1}{m^3}$  এর মান নির্ণয় কর।
১১.  $x - \frac{1}{x} = p$  হলে,  $x^3 - \frac{1}{x^3}$  এর মান নির্ণয় কর।
১২. যদি  $a - \frac{1}{a} = 1$  হয়, তবে দেখাও যে,  $a^3 - \frac{1}{a^3} = 4$ ।
১৩. যদি  $a + b + c = 0$  হয়, তবে দেখাও যে,
- ক)  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ ।
- খ)  $\frac{(b+c)^2}{3bc} + \frac{(c+a)^2}{3ca} + \frac{(a+b)^2}{3ab} = 1$ ।
১৪.  $p - q = r$  হলে, দেখাও যে,  $p^3 - q^3 - r^3 = 3pqr$ ।
১৫.  $2x - \frac{2}{x} = 3$  হলে, দেখাও যে,  $8\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) = 63$ ।
১৬.  $a = \sqrt{6} + \sqrt{5}$  হলে,  $\frac{a^6 - 1}{a^3}$  এর মান নির্ণয় কর।
১৭.  $x - \frac{1}{x} = \sqrt{3}$  যেখানে  $x \neq 0$
- ক) প্রমাণ কর যে,  $x^2 - \sqrt{3}x = 1$ ।
- খ) প্রমাণ কর যে,  $23\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 5\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)$ ।
- গ)  $x^6 + \frac{1}{x^6}$  এর মান নির্ণয় কর।