Reihen

22

22.1 Aufgaben

22.1 Begründen Sie, warum die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.

22.2 Begründen Sie, warum die allgemeine harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$, $\alpha > 0$, für $\alpha > 1$ konvergiert und für $\alpha \leq 1$ divergiert.

22.3 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz, bestimmen Sie falls möglich den Wert der Reihe.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2+k+7}{(k+2)(k-7)}$,

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$,

(c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+4}{k^2-3k+1}$,

(d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k}$,

(e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k}$,

(f) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{4k}{3k^2+5}$,

(g) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{4k}{4k^2+8}$,

(h) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots$,

(i) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k}$,

(j) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k!}$,

(k) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{100k}$,

(l) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k}$,

(m) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$,

(n) $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{k+1}{k^2-k-2}$,

(o) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{4^k}$,

(p) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-9k-10}{10k}\right)^k$,

(q) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$,

(r) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-54811-0_22

22.4

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+3\cdot(-1)^k}{k+1}$ alternierend ist und dass $\lim_{k\to\infty} \frac{2+3\cdot(-1)^k}{k+1} = 0$ gilt. Warum ist das Leibnizkriterium nicht anwendbar?

(b) Warum konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+2} \cdot \frac{k+1}{k+3}$?

22.5 Berechnen Sie mit MATLAB die folgenden Reihenwerte:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-1)(4k+1)}$.

(b) $\sum_{k=0}^{\infty}(1/2)^k$, $\sum_{k=0}^{\infty}(1/10)^k$, $\sum_{k=m}^{\infty}(1/10)^k$.

(c) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1}$.

22.6 Schreiben Sie ein Programm, das den Wert einer nach Leibniz konvergierenden alternierenden Reihe näherungsweise berechnet.

22.7 Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \sin(\frac{20}{k})$,

(b) $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{2k^2+3k+1}{5k^2+k+3})^k$,

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \cos(\frac{3}{k})$,

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+3}{3k^2+5}$,

(e) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k+5}{3k^3+1}$.

22.8 Begründen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren, und bestimmen Sie den Grenzwert.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}(\cos(\frac{5}{k}) - \cos(\frac{5}{k+1}))$,

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k-3^{2k}}{10^k}$,

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$,

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Sie dürfen für (c),(d) den Reihenwert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ verwenden.

22.2 Lösungen

22.1 Es gilt für die n-te Partialsumme:

$$s_n = \overbrace{1 + \tfrac{1}{2} + \underbrace{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4}} + \underbrace{\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8}} + \cdots + \underbrace{\left(\tfrac{1}{2^k+1} + \ldots + \tfrac{1}{2^{k+1}}\right)}_{\geq 2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}}}^{s_{2^{k+1}}} + \cdots + \tfrac{1}{n}$$

$$\geq 1 + \tfrac{1}{2} + 2\cdot\tfrac{1}{4} + 4\cdot\tfrac{1}{8} + \cdots + 2^k\cdot\tfrac{1}{2^{k+1}} \geq \tfrac{3}{2} + k\,\tfrac{1}{2} = \tfrac{k+3}{2}\,.$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt damit $s_{2^{k+1}} \geq \frac{k+3}{2} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

22.2 Die Divergenz für $\alpha \leq 1$ ist klar, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergente Minorante ist. Ist $\alpha > 1$, so gilt:

$$s_{2^k-1} = 1 + \left(\tfrac{1}{2^\alpha} + \tfrac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\tfrac{1}{4^\alpha} + \tfrac{1}{5^\alpha} + \tfrac{1}{6^\alpha} + \tfrac{1}{7^\alpha}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\left(2^{k-1}\right)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{\left(2^k-1\right)^\alpha}\right)$$

$$\leq 1 + \tfrac{2}{2^\alpha} + \tfrac{4}{4^\alpha} + \ldots + \frac{2^{k-1}}{\left(2^{k-1}\right)^\alpha} = \sum_{n=0}^{k-1} \left(\tfrac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n .$$

Da für $\alpha > 1$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$ konvergiert, konvergiert auch die allgemeine harmonische Reihe für $\alpha > 1$.

22.3 (a) Für die Summanden gilt

$$\frac{2k^2 + k + 7}{(k+2)(k-7)} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \frac{2}{1} = 2 .$$

Sie bilden also keine Nullfolge, und damit divergiert die Reihe nach dem Nullfolgenkriterium.

(b) Wir zeigen mit vollständiger Induktion über k, dass $\frac{k!}{k^k} \leq \frac{1}{k^2}$ für alle $k \geq 5$ gilt:

Induktionsanfang: $k = 5$: $\frac{5!}{5^5} = \frac{24}{625} \leq \frac{25}{625} = \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2}$ ✓

Induktionsvoraussetzung: Für $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\frac{k!}{k^k} \leq \frac{1}{k^2} \Leftrightarrow k! \leq \frac{k^k}{k^2} = k^{k-2}$.

Induktionsschritt: $\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \leq \frac{1}{(k+1)^2} \Leftrightarrow (k+1)! \leq (k+1)^{k-1}$.

Da die Reihe $\sum \frac{1}{k^2}$ konvergiert, konvergiert auch die betrachtete Reihe nach dem Majorantenkriterium.

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n(n+4) = n^2 + 4n \geq n^2 \geq n^2 - 3n + 1,$$

da $-3n + 1 \leq -2$. Für $n \geq 3$ ist der Ausdruck außerdem positiv. Es folgt also für alle $n \geq 3$:

$$\frac{n(n+4)}{n^2 - 3n + 1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{n+4}{n^2 - 3n + 1} \geq \frac{1}{n} .$$

Es folgt daher $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ und da die harmonische Reihe gegen ∞ divergiert, folgt mit dem Minorantenkriterium die Divergenz der gegebenen Reihe. Die ersten zwei Folgeglieder sind dabei für die Konvergenz unerheblich.

(d) Durch Umformen erhalten wir die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} .$$

Es bietet sich das Leibnizkriterium an, dazu sind die Voraussetzungen zu überprüfen. Zuerst formen wir um:

$$a_n = \frac{1}{n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} .$$

Mit etwas Mühe kann man zeigen, dass die Folge $\left((1+\frac{1}{n})^{n-1}\right)$ konvergiert (hierzu begründet man die Monotonie und Beschränktheit der Folge). Wir drücken uns vor dieser Arbeit und richten lieber an den Leser die Bitte, zahlreiche Folgenglieder mit MATLAB zu berechnen und diese mit e zu vergleichen. Mit dieser Konvergenz folgt nun

$$a_n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 .$$

Daher ist (a_n) eine Nullfolge. Wir zeigen nun, dass (a_n) monoton fallend ist. Dazu betrachten wir den Quotienten

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^n \cdot n^n}{(n+1)^{n-1} \cdot (n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n \cdot (n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n < 1 .$$

Die Folge ist also monoton. Nun können wir mit dem Leibnizkriterium die Konvergenz der Reihe folgern.

(e) Hier haben wir es (vom *fehlenden* ersten Summanden abgesehen) mit einer geometrischen Reihe zu tun. Daher können wir nicht nur über die Konvergenz entscheiden, wir können sogar den Reihenwert bestimmen, es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = -1 + \left(\frac{1}{5}\right)^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = -1 + \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{5-1} .$$

(f) Wir setzen $a_n = \frac{4n}{3n^2+5}$. Damit gilt

$$a_n = \frac{4n}{3n^2+5} \geq \frac{4n}{3n^2+5n^2} = \frac{4n}{8n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n},$$

weil $n \geq 1$ ist. Wir finden somit in der harmonischen Riehe eine divergente Minorante, die Reihe divergiert somit nach dem Minorantenkriterium:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{3n^2+5} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty .$$

(g) Wie in der vorherigen Aufgabe gilt

$$\frac{4n}{4n^2+8} \le \frac{4n}{4n^2n+8n^2} = \frac{4n}{12n^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n},$$

also $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{4n^2+8} = \infty$ nach dem Minorantenkriterium.

(h) Schreibt man die gegebene Summe als Reihe, so erhält man

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\,.$$

Die Folge $\frac{n}{n+1}$ konvergiert dabei gegen 1, ist also insbesondere keine Nullfolge und somit divergiert die Reihe nach dem Nullfolgenkriterium.

(i) Wir haben es wieder (etwas *versteckt*) mit einer geometrischen Reihe zu tun, von der wir wieder mal den Reihenwert bestimmen können:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2\left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 2\left(-1 + \frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = 1\,.$$

(j) Unter Kenntnis der Exponentialreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n!} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = 2 \cdot \mathrm{e}^1 = 2\,\mathrm{e}\,.$$

Kennt man die Exponentialreihe nicht, lässt sich immerhin mit dem Quotienkriterium die Konvergenz zeigen:

$$\left|\frac{\frac{2(n+1)}{(n+1)!}}{\frac{2n}{n!}}\right| = \left|\frac{(2n+2)n!}{2n(n+1)!}\right| = \left|\frac{2 \cdot (n+1) \cdot n!}{2 \cdot n \cdot (n+1) \cdot n!}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < 1 \quad \text{für } n \ge 2\,.$$

(k) Hier spielt die divergente harmonische Reihe wieder eine Schlüsselrolle:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n} = \frac{1}{100} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty\,.$$

(l) Uups! – Hier haben wir die Teilaufgabe (d) erneut gestellt.

(m) Da $1 - \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ keine Nullfolge ist, kann $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 - \frac{1}{n}$ nicht konvergieren.

(n) Die Reihe divergiert, denn wir erhalten nach Umformung und Indexverschiebung die harmonische Reihe:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-n-2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)(n-2)} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty\,.$$

(o) Mit dem Quotientenkriterium erhält man

$$\left|\frac{\frac{(n+1)^3}{4^{n+1}}}{\frac{n^3}{4^n}}\right| = \left|\frac{(n+1)^3 \cdot 4^n}{n^3 \cdot 4^{n+1}}\right| = \frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\right)^3 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} < 1\,.$$

Die Reihe ist also konvergent.

(p) Dieses Mal benutzen wir das Wurzelkriterium und erhalten

$$\sqrt[n]{\left|\left(\frac{-9n-10}{10n}\right)^n\right|} = \frac{9n+10}{10n} = \frac{9+\frac{10}{n}}{10} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{9}{10} < 1\,.$$

Auch diese Reihe ist demnach konvergent.

(q) Die Reihe konvergiert absolut nach dem Wurzelkriterium, denn es gilt:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^n}\right|} = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1\,.$$

(r) Die Reihe konvergiert absolut nach dem Ouotientenkriterium, denn es gilt:

$$\left|\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}\right| = \left|\frac{n^2+2n+1}{2n^2}\right| = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1\,.$$

22.4 (a) Mit der Umformung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+3\cdot(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\cdot \overbrace{(-1)^{2n}}^{=1} + 3\cdot(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \underbrace{\frac{(-1)^n\cdot 2+3}{n+1}}_{=:a_n>0}$$

gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+3\cdot(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ mit $a_n > 0$. Die Reihe ist also alternierend.

Damit nun das Leibnizkriterium anwendbar wäre, müsste die Folge (a_n) monoton gegen 0 konvergieren. (a_n) ist tatsächlich eine Nullfolge, denn:

$$a_n = \frac{(-1)^n\cdot 2+3}{n+1} = \frac{(-1)^n\cdot\frac{2}{n}+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{0+0}{1+0} = 0\,.$$

Für die Monotonie müsste nun noch gelten:

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} \le a_n &\Leftrightarrow \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2+3}{n+2} \le \frac{(-1)^n\cdot 2+3}{n+1} \\
&\Leftrightarrow \big((-1)^{n+1}\cdot 2+3\big)\,(n+1) \le ((-1)^n\cdot 2+3)\,(n+2) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} n+1 \le 5(n+2) & n \text{ gerade} \\ 5(n+1) \le n+2 & n \text{ ungerade} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 4n+9 \ge 0 & n \text{ gerade} \quad \checkmark \\ -(4n+3) \ge 0 & n \text{ ungerade} \quad \text{ein Widerspruch.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Die Folge (a_n) ist also nicht monoton.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}\cdot\frac{n+1}{n+3}$ ist eine alternierende Reihe über der Folge $a_n = \frac{n+1}{(n+2)(n+3)}$. Diese Folge ist eine Nullfolge, denn

$$a_n = \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{0+0}{(1+0)(1+0)} = 0\,.$$

Außerdem ist (a_n) monoton fallend, denn es gilt

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} \le a_n &\Leftrightarrow \frac{n+2}{(n+3)(n+4)} \le \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} \Leftrightarrow (n+2)(n+2) \le (n+1)(n+4) \\
&\Leftrightarrow n^2+4n+4 \le n^2+5n+4 \Leftrightarrow 0 \le n\,. \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Die Folge ist also nach dem Leibnizkriterium konvergent.

22.5 Wir erklären zuerst alle nötigen Symbole: `syms k m;`

(a) MATLAB berechnet den Wert exakt: `a=symsum(1/((4*k-1)*(4*k+1)), 1, Inf)` liefert `a = 1/2 - pi/8`.

(b) MATLAB berechnet den Wert einer geometrischen Reihe exakt:
`a=symsum(0.5^k, 0, Inf)` liefert `a = 2`.
`a=symsum(0.1^k, 0, Inf)` liefert `a = 10/9`.
`a=symsum(0.1^k, m, Inf)` liefert `a = (10*(1/10)^m)/9`.

(c) MATLAB berechnet den Wert der alternierenden Reihe exakt:
`a=symsum((-1)^k*1/(2*k+1), 0, Inf)` liefert `a = pi/4`.