

تمرین سری چهارم

* کسب ۱۰۰ نمره از ۱۲۰ نمره اجباری است *

مسئله ۱. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. (در صورت درست بودن اثبات و در صورت نادرستی مثال نقض بیاورید)

(۲۸)

a) if $f_1(n) = O(g_1(n)), f_2(n) = O(g_2(n)) \rightarrow f_1(n) + f_2(n) = O(\max(g_1(n), g_2(n)))$

b) $f(n) = O(g(n)) \rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$

c) تابع $[\log n]!$ همانند $\log(n!)$ کران چند جمله‌ای دارد.

d) هیچ دو تابع اکیدا صعودی وجود ندارد بطوری که

$$f, g : N \rightarrow N, f(n) \neq O(g(n)), g(n) \neq O(f(n))$$

مسئله ۲. جواب دقیق معادلات زیر را با استفاده از معادله مشخصه به دست آورید. (در صورت تغییر متغیر حتماً با قضیه-smooth

ness و در صورت امکان شرط مربوطه را حذف کنید) (۳۵)

a) $T(n+2) = 3T(n+1) + 4T(n)$ $T(0) = 0, T(1) = 2$

b) $T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + \theta(\log n)$

c) $T(n) = nT(\sqrt{n}) + n^2 \log \log n$

d) $T(n) = 2T(\sqrt{n-1} + 1) + \log(n-1)$ $T(2) > 0, n \geq 0$

e) $T(n-1) = \sqrt{\frac{T(n-3)}{T(n-2)}}$ $T(0) = 4, T(1) = \sqrt{2}$

مسئله ۳. پیچیدگی زمانی روابط زیر را با روش دلخواه بدست آورید. (۱۵)

$$a) T(n) = \sqrt[n]{T\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n}}\right)} + n^{\sqrt[n]{n}}$$

$$b) T(n) = \sqrt[n]{T\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n}}\right)} + n \log n$$

$$c) T(n) = \sqrt[n]{T\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n}} + \sqrt{n}\right)} + T\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n}}\right) + \theta(1)$$

مسئله ۴. پیچیدگی زمانی قطعه کدهای زیر را محاسبه کنید. (۱۵)

(الف)

```
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
|   for  $j \leftarrow 1$  to  $n$ ;  $j \leftarrow j + i$  do
|   | // O(1) code
|   end
end
```

(ب)

$i \leftarrow n$

while $i > 1$ **do**

$j \leftarrow 1$

while $j \leq i$ **do**

$j \leftarrow j * 2$

$i \leftarrow \lfloor \frac{i}{2} \rfloor$

(ج) برحسب n و d محاسبه کنید.

```
function  $F(n, i)$ 
if  $n \leq 1$  then
|   return 1;
else
|   if  $i \bmod d = 0$  then
|   |   return  $1 + F(\lfloor n/d \rfloor, i + 1)$ ;
|   else
|   |   return  $1 + dF(\lfloor n/d \rfloor, i + 1)$ ;
|   end
end
```

مسئله ۵. با استفاده از درخت بازگشت پیچیدگی زمانی معادلات زیر را محاسبه کنید. (۱۲)

(الف)

$$a) T(n) = T\left(\frac{n}{7}\right) + T\left(\frac{n}{5}\right) + n \log n$$

(ب) معادله بازگشتی الگوریتم مرج سورت

مسئله ۶. ثابت کنید. $T(n) = \theta(n \log n)$ (۱۵)

$$d) T(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} T(i) + \theta(n)$$

نکات:

- تحویل تکلیف در کوئرا و تا زمان مشخص شده خواهد بود.
- فرمت فایل PDF خود را حتماً به صورت زیر رعایت فرمایید.
- در صورت مشاهده هرگونه تقلب، رونویسی و ... با افراد خاطی برخورد خواهد شد.

HW۴ - [Full Name] - [Student ID]
