

ВОЕННО-КОСМИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ ИМЕНИ А.Ф. МОЖАЙСКОГО

Кафедра Математического обеспечения

несекретно

Экз. № 1

УТВЕРЖДАЮ

Начальник 25 кафедры
полковник _____ С.Петренко

« ____ » _____ 2007 г.

Автор: профессор 25 кафедры
доктор технических наук
профессор А. Хомоненко

Тема: Основы теории нечетких множеств

по дисциплине: Системы искусственного интеллекта

Обсуждено и одобрено на заседании 25 кафедры

« ____ » _____ 2007 г.
протокол № ____

Санкт-Петербург
2007

Содержание занятия и время

Введение.....	7 мин.
Учебные вопросы (основная часть)	
1. Нечеткие лингвистические переменные.....	30 мин.
2. Нечеткие лингвистические высказывания.....	20 мин.
3. Логические операции с нечеткими высказываниями.....	30 мин.
Заключение.....	3 мин.

Литература:

Основная:

1. Борисов В.В., Круглов В.В., Федулов А.С. Нечеткие модели и сети. - М.: Горячая линия-Телеком, 2007. – 284 с.
2. Леоненков А. Нечеткое моделирование в среде Matlab и fuzzyTECH. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 736 с.
3. Конспект лекции.

Дополнительная:

1. _____
(наименование издания, страницы)
2. _____
(наименование издания, страницы)
3. _____
(наименование издания, страницы)

Материально-техническое обеспечение:

1. Наглядные пособия (по данным учета кафедры): -
2. Технические средства обучения: проектор
3. Приложения (диафильмы, слайды): презентация «Работа с нечеткими знаниями»

Организационно-методические указания: Во введении сформулировать тему лекции, цель и название изучаемых вопросов. Задать вопросы обучаемым по материалам предыдущей лекции:

1. Назовите основные формы представления нечетких знаний.
2. Что представляет собой функция принадлежности?

При изложении материала обратить внимание обучаемых на важность вопросов правильного представления нечетких знаний с помощью лингвистической переменной.

Привести примеры научных результатов ученых академии в области применения нечетких знаний в прикладных экспертных системах для диагностики неисправности автоматизированных систем подготовки КА и РН к пуску.

В заключительной части обобщить изложенный материал и сформулировать задание на самостоятельную подготовку.

Цель лекции: Изложить понятие нечеткой лингвистической переменной, рассмотреть операции над нечеткими лингвистическими переменными.

Введение

Учебные вопросы:

1. Нечеткие и лингвистические переменные

Понятия нечеткой и лингвистической переменных используются при задании входных и выходных переменных в системах управления с использованием аппарата нечеткой логики.

Нечеткая переменная задается кортежем $\langle \alpha, X, A \rangle$, где α — имя переменной; X — область определения этой переменной (универсум); $A = \langle x, \mu_A(x) \rangle$ — нечеткое множество на X , описывающее возможные значения нечеткой переменной.

Лингвистическая переменная представляет собой переменную, значение которой определяется набором вербальных (словесных) характеристик некоторого свойства. Например, лингвистическая переменная "давление" определяется через набор {очень низкое, низкое, среднее, высокое, очень высокое}.

Значения лингвистической переменной (ЛП) определяются через нечеткие множества, которые, в свою очередь, определяются на некотором базовом наборе значений или базовой числовой шкале, имеющей размерность. Каждое значение ЛП определяется как нечеткое множество, например, нечеткое множество "высокое давление".

Лингвистической переменной называется набор $\langle \beta, T, X, G, M \rangle$, где:

β — наименование лингвистической переменной;

T — базовое множество (терм-множество) значений (термов) лингвистической переменной, представляющих собой наименования отдельных нечетких переменных α ;

G — синтаксическая процедура, позволяющая оперировать элементами терм-множества T , в частности, генерировать новые термы (значения) $G(T)$. При этом множество $T \cup G(T)$ называется *расширенным терм-множеством* лингвистической переменной;

M – семантическая процедура, позволяющая преобразовать каждое новое значение лингвистической переменной, образуемое процедурой G , в нечеткую переменную, т.е. сформировать соответствующее нечеткое множество.

Пример. Пусть эксперт определяет температуру жидкости с помощью понятий «Малая температура», «Средняя температура» и «Большая температура», при этом минимальная температура равна 0 градусов, а максимальная – 100 градусов.

Формализация такого описания может быть проведена с помощью лингвистической переменной $\langle \beta, T, X, G, M \rangle$, где

β – температура жидкости;

$T = \{\text{«Малая температура»}, \text{«Средняя температура»}, \text{«Большая температура»}\};$

$X = [0, 100];$

G – процедура образования новых термов с помощью связок «и», «или» и модификаторов типа «очень», «не», «слегка» и т.п. Например: «Малая или средняя температура», «Очень малая температура» и т.д. ;

M – процедура задания на $X = [0, 100]$ нечетких подмножеств $A_1 = \text{«Малая температура»}$, $A_2 = \text{«Средняя температура»}$, $A_3 = \text{«Большая температура»}$, а также нечетких множеств для термов из $G(T)$ в соответствии с правилами трансляции нечетких связок и модификаторов «и», «или», «не», «очень», «слегка» и других операций над нечеткими множествами вида: $A \cap B$, $A \cup B$, \bar{A} , $CON A = A^2$, $DIL A = A^{0,5}$ и т.п.

Замечание. Наряду с рассмотренными выше базовыми значениями лингвистической переменной «температура» ($T = \{\text{«Низкая температура»}, \text{«Средняя температура»}, \text{«Высокая температура»}\}$) возможны значения, зависящие от области определения X . Так, значения лингвистической переменной «Температура жидкости» можно определить как «около 0 градусов», «около 50 градусов», «около 100 градусов», т.е. в виде нечетких чисел.

Терм-множество и расширенное терм-множество для нашего примера можно характеризовать функциями принадлежности, приведенными на рис. 1.3 и 1.4. На рис. 1.3 приведены функции принадлежности нечетких множеств $A_1 = \text{«Низкая температура»}$, $A_2 = \text{«Средняя температура»}$ и $A_3 = \text{«Высокая температура»}$, которые составляют терм-множество.

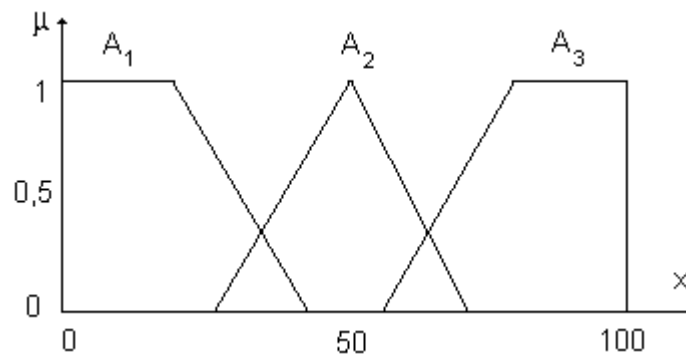


Рис. 1.3. Функции принадлежности терм-множества

На рис. 1.4 приведена функция принадлежности нечеткого множества $A_2 \cup A_3 =$ «Средняя или высокая температура», которое может в составе расширенного терм-множества.

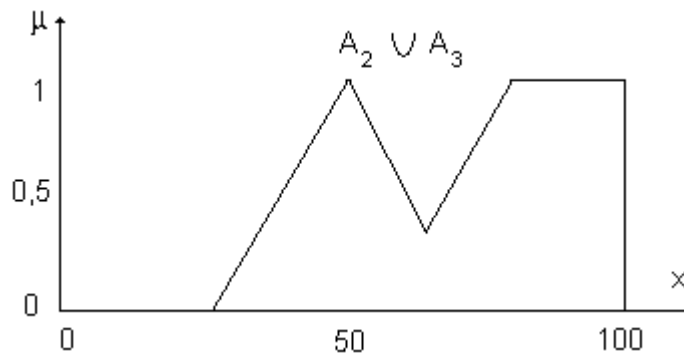


Рис. 1.4. Функция принадлежности нечеткого множества $A_2 \cup A_3$

Отметим, что функция принадлежности отличается от вероятности, которая имеет объективный характер и подчиняется другим математическим зависимостям. Функция принадлежности обычно зависит от мнения экспертов, участвующих в определении нечеткого множества.

Например, для двух экспертов определение нечеткого множества "высокая" для лингвистической переменной "цена автомобиля" может заметно отличаться:

"высокая_цена_автомобиля_1" = $\{50000/1 + 25000/0,8 + 10000/0,6 + 5000/0,4\}$.

"высокая_цена_автомобиля_2" = $\{25000/1 + 10000/0,8 + 5000/0,7 + 3000/0,4\}$.

Пример. Лингвистическая переменная "возраст".

Пусть требуется интерпретация значений лингвистической переменной "возраст", таких как "младенческий" и "детский". Базовый набор значений логической переменной "возраст" может быть определен следующим образом:

$B = \{\text{"младенческий"}, \text{"детский"}, \text{"юный"}, \text{"молодой"}, \text{"зрелый"}, \text{"преклонный"}\}$.

Для логической переменной "возраст" базовую шкалу представляет числовая шкала прожитых лет от 0 до 120, а функция принадлежности определяет степень уверенности в том, что данное количество лет можно отнести к данной категории возраста. На рис. 1.5 показана схема формирования нечетких множеств логической переменной "возраст".

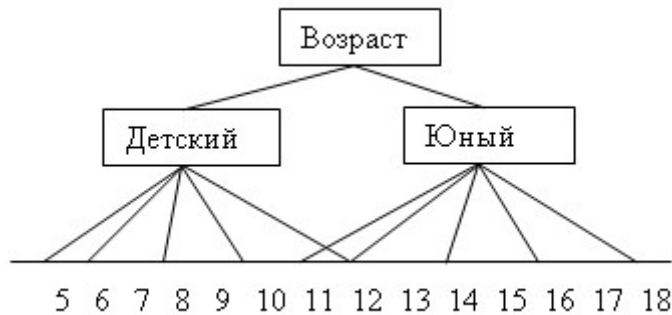


Рис. 1.5. Схема формирования нечетких множеств

Как видим, одни и те же значения базовой шкалы могут участвовать в определении различных нечетких множеств.

2. Нечеткие лингвистические высказывания

В системах нечеткого вывода условия и заключения отдельных правил формулируются в форме нечетких высказываний относительно значений лингвистических переменных.

Нечетким лингвистическим высказыванием (или просто нечетким высказыванием) называют высказывания следующих видов:

1. Высказывание " β есть α ", где β — наименование лингвистической переменной, α — ее значение, которому соответствует отдельный лингвистический терм из базового терм-множества T лингвистической переменной β .
2. Высказывание " β есть $\nabla\alpha$ ", где ∇ — *модификатор*, соответствующий таким словам, как: "ОЧЕНЬ", "БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ", "МНОГО БОЛЬШЕ" и другим, которые могут быть получены с использованием процедур G и M данной лингвистической переменной.
3. Составные высказывания, образованные из высказываний видов 1 и 2 и нечетких логических операций в форме связок: "И", "ИЛИ", "ЕСЛИ-ТО", "НЕ".

Пример. Нечеткое высказывание второго вида "температура жидкости *очень высокая*" означает, что лингвистической переменной "температура жидкости" присваивается значение "*высокая*" с модификатором "ОЧЕНЬ", который изменяет значение соответствующего лингвистического терма "*высокая*" на основе использования расчетной

формулы для операции концентрации $CON(A)$ нечеткого множества A для термина "высокая".

Нечеткое высказывание второго вида "температура жидкости *сравнительно высокая*" означает, что лингвистической переменной "температура жидкости" присваивается значение "высокая" с модификатором "СРАВНИТЕЛЬНО", который изменяет значение соответствующего лингвистического термина "высокая" на основе использования расчетной формулы для операции растяжения $DIL(A)$ нечеткого множества A для термина "высокая". Ниже на рис. 1.3. приведен пример функции принадлежности A_c терм-множества "средняя" лингвистической переменной "температура жидкости" и определение значений функций принадлежности $A_{dc} = DIL(A_c)$ этого же терм-множества для модификатора "СРАВНИТЕЛЬНО".

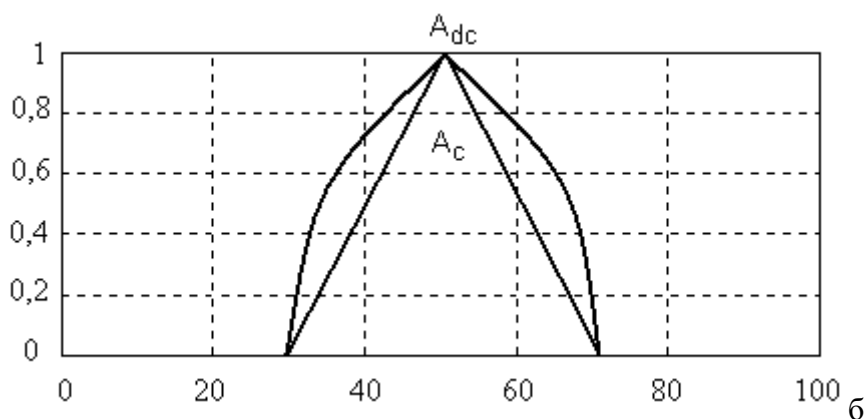


Рис. 1.6. Вид функций принадлежности терм-множества "средняя"

Нечеткое высказывание третьего вида "температура жидкости низкая и *скорость автомобиля высокая*" означает, что одной лингвистической переменной "температура жидкости" присваивается значение "низкая", а лингвистической переменной "скорость автомобиля" присваивается значение "высокая". Эти нечеткие высказывания первого вида соединены логической операцией нечеткая конъюнкция (операцией нечеткое "И").

Логические операции с нечеткими высказываниями

Для рассмотрения логических операций с нечеткими высказываниями обозначим: Y — некоторое множество элементарных нечетких высказываний, а $T : Y \rightarrow [0, 1]$ — отображение истинности высказываний.

Отрицанием (логическим) нечеткого высказывания A (обозначается $\neg A$, читается как "не A ") называется унарная логическая операция, результат которой является нечетким высказыванием, истинность ее есть:

$$T(\neg A) = 1 - T(A). \quad (1.10)$$

Конъюнкцией (логической) нечетких высказываний A и B (обозначается $A \wedge B$, читается как "A и B") называется бинарная логическая операция, результат которой является нечетким высказыванием, истинность которого:

$$T(A \wedge B) = \min\{T(A), T(B)\}. \quad (1.11)$$

Конъюнкцию нечетких высказываний также называют *нечетким логическим "И"*, *нечеткой конъюнкцией* или *min-конъюнкцией* и записывают в форме $A \text{ AND } B$. Формулу (1.11) принимают основной для определения степени истинности конъюнкции.

Для определения степени истинности *конъюнкции* нечетких высказываний могут быть использованы следующие *альтернативные формулы*.

Алгебраическое произведение степеней истинности нечетких высказываний (обозначается $A \bullet B$):

$$T(A \bullet B) = T(A) \cdot T(B). \quad (1.12)$$

Граничное произведение степеней истинности нечетких высказываний (обозначается $A \odot B$):

$$T(A \odot B) = \max\{T(A) + T(B) - 1, 0\}. \quad (1.13)$$

Драстическое произведение степеней истинности нечетких высказываний (обозначается $A \Delta B$):

$$T(A \Delta B) = \begin{cases} T(B), & \text{если } T(A) = 1; \\ T(A), & \text{если } T(B) = 1; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.14)$$

Дизъюнкцией (логической) нечетких высказываний A и B (обозначается $A \vee B$ — читается "A или B") называется бинарная логическая операция, результат которой является нечетким высказыванием, истинность которого есть:

$$T(A \vee B) = \max\{T(A), T(B)\}. \quad (1.15)$$

Эту операцию также называют нечетким не исключающим логическим "ИЛИ", нечеткой дизъюнкцией или max-дизъюнкцией и иногда записывают также в форме $A \text{ OR } B$. Формулу (1.15) считают основной для определения степени истинности дизъюнкции нечетких высказываний.

Для определения степени истинности дизъюнкции нечетких высказываний могут быть использованы следующие альтернативные формулы.

Алгебраическая сумма степеней истинности нечетких высказываний (обозначается $A + B$):

$$T(A + B) = T(A) + T(B) - T(A) \cdot T(B) \quad (1.16)$$

Алгебраическую сумму часто называют также вероятностной суммой.

Граничная сумма степеней истинности нечетких высказываний (обозначается $A \oplus B$):

$$T(A \vee B) = \min\{T(A)+T(B), 1\} \quad (1.17)$$

Драстическая сумма степеней истинности нечетких высказываний (обозначается $A \nabla B$):

$$T(A \nabla B) = \begin{cases} T(B), & \text{если } T(A) = 0; \\ T(A), & \text{если } T(B) = 0; \\ 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.18)$$

Замечание.

В общем случае для определения истинности результатов нечеткой конъюнкции и нечеткой дизъюнкции могут использоваться и другие расчетные формулы, основанные на рассмотрении треугольных норм и конорм (произвольных функций 2-х переменных, удовлетворяющих ряду аксиом).

Нечеткой импликацией, или просто импликацией нечетких высказываний A и B (записывается как: $A \supset B$ и читается — "из A следует B ", "ЕСЛИ A , ТО B "), называется бинарная логическая операция, результат которой является нечетким высказыванием, истинность которого определяется по одной из следующих формул.

□ Классическая нечеткая импликация Л. Заде:

$$T(A \supset B) = \max\{\min\{T(A), T(B)\}, 1-T(A)\}.$$

□ Классическая нечеткая импликация для случая $T(A) \geq T(B)$:

$$T(A \supset B) = \max\{T(\neg A), T(B)\} = \max\{1-T(A), T(B)\}.$$

Эту форму нечеткой импликации иногда называют нечеткой импликацией Гёделя.

□ Нечеткая импликация, предложенная Э. Мамдани:

$$T(A \supset B) = \min\{T(A), T(B)\}.$$

Эту форму нечеткой импликации также называют нечеткой импликацией минимума корреляции. Заметим, что в случае $T(A) \geq 0.5$ и $T(B) \geq 0.5$ классическая нечеткая импликация превращается в нечеткую импликацию Мамдани.

Кроме приведенных формул, существуют также варианты нечеткой импликации, предложенные Я.Лукасевичем, Дж.Гогеном, Н.Вади и др. Выбор того или иного варианта нечеткой импликации определяется с учетом характера решаемой прикладной задачи и простоты вычислений.

Заключение:

Обратить внимание обучаемых на актуальность вопросов, связанных с представлением нечетких лингвистических переменных и их смысловой интерпретацией.

На самостоятельной подготовке прочитать материалы из рекомендуемой литературы.

Для заданных двух нечетких высказываний выполнить операции конъюнкции и дизъюнкции.

ДОКТОР ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК ПРОФЕССОР

_____ А. ХОМОНЕНКО

«_____» _____ 200_ г.