ВОЕННО-КОСМИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ ИМЕНИ А.Ф. МОЖАЙСКОГО
Кафедра информационно-вычислительных систем и сетей

УТВЕРЖДАЮ
Начальник 24 кафедры
полковник
А. Басыров
«____» _____ 20 года

Автор: старший преподаватель 24 кафедры,
кандидат технических наук, доцент В.Тимофеев

Тема2. Аналитические методы расчета показателей надежности АС

Лекция № 6

Расчет показателей надежности восстанавливаемых систем

по дисциплине

Надежность автоматизированных систем

Обсуждено и одобрено на заседании 24 кафедры
« ___» ____________ 20____ года протокол № ___

Санкт - Петербург

20

Цель занятия: ознакомить слушателей с аналитическим методом расчета показателей надежности восстанавливаемой АС.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ И ВРЕМЯ

Введение

Инженерные методики расчета показателей надежности восстанавливаемых систем существуют в основном для экспоненциальных законов распределения времени безотказной работы и восстановления объектов (элементов составляющих систему);

В случае неэкспоненциальных законов используются численные методы расчета и компьютерные технологии.

1. Метод расчета надежности восстанавливаемых систем

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ

ВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ СИСТЕМ

Дано:

$\boldsymbol{\lambda}_i$ – интенсивность отказа i-го элемента,

μ_i – интенсивность восстановления $\boldsymbol{i}$-го элемента.

Определить:

$К_г$ – коэффициент готовности системы,

T – среднее время между отказами системы,

$Т_в$ – среднее время восстановления системы.

МЕТОД РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ, ОСНОВАННЫЙ НА ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Случайный процесс $\boldsymbol{X(t)}$ называется марковским или процессом без последействия, если для любых двух моментов времени $\boldsymbol{t_0}$ и t_1 ($\boldsymbol{t_0} < \boldsymbol{t_1}$),распределение вероятностей $\boldsymbol{X(t_1)}$ при условии, что заданы все значения $\boldsymbol{X(t)}$ *при* $\boldsymbol{t \le t_0}$, зависит только от $\boldsymbol{X(t_0)}$.

Марковский процесс с непрерывным временем и дискретными состояниями (процесс Пуассона) называется однородным, если для любых значений $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{k}$ – дискретные состояния процесса, и произвольного $\boldsymbol{\tau \ge 0}$ вероятность события $\boldsymbol{X(t + \tau) = k}$ при условии, что $\boldsymbol{X(t) = i}$, не зависит от $\boldsymbol{t}$, т.е. справедливы следующие соотношения:

.

$$p_{ik}(\tau) \geq 0, \ \sum_k p_{ik}(\tau) = 1, \ p_{ik}(\tau_1 + \tau_2) = \sum_j p_{ij}(\tau_1) p_{jk}(\tau_2).$$

где

$$p_{ik}(\tau) = P\left(X(t+\tau) = k / X(t) = i\right)$$

– условная вероятность перехода из состояния i в состояние k за время τ.

Однородный марковский процесс определяется постоянными интенсивностями перехода

$$\lambda_{i,j} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(X(t+\Delta t) = j / X(t) = i)}{\Delta t}$$

и начальным вектором вероятностей состояний $p_i(t)$

$$p_i(0) = P(X(0) = i), \ i = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Вероятности $p_i(t)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова

$$p_i'(t) = -\sum_j \lambda_{i,j} p_i(t) + \sum_j \lambda_{i,j} p_j(t), \ i = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Система уравнений составляется из графа состояний по следующему правилу:

1. Для каждого состояния S_iсоставляется отдельное уравнение,
2. В левой части уравнения записывается производная от вероятности этого состояния $p_i(t)$,
3. В правой части уравнения записываются со знаком минус произведения $\lambda_{i,j} p_i(t)$, соответствующие выходам из этого

   состояния во все другие согласно графу состояний, и со знаком плюс –

   произведения $\lambda_{i,j} p_j(t)$, соответствующие входам в это состояние

   из всех других опять же согласно графу состояний.

Для условия длительной эксплуатации системы, когда $\boldsymbol{t} \to \infty$, $\boldsymbol{p_i(t)} \to \boldsymbol{p_i}$, $p_i'(t) \to 0$,

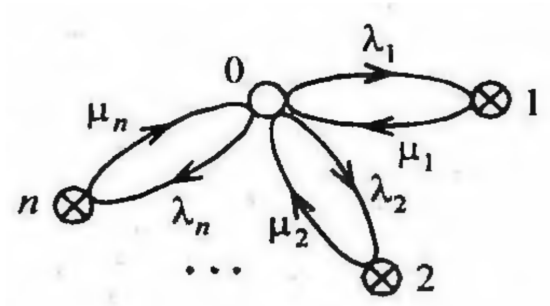
система дифференциальных уравнений принимает вид системы алгебраических уравнений:

$$-\sum_j \lambda_{i,j} p_i + \sum_j \lambda_{i,j} p_j = 0, \ i = 0, 1, 2, \dots, m,$$

которая должна решаться вместе с условием:

$$\sum_{i=0}^{m} p_i = 1.$$

2. Расчет надежности нерезервированной системы



ГРАФ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ

Состояние 0 – исправное состояние системы.

Состояния 1, 2, … n – состояния восстановления элементов.

Система дифференциальных уравнений, описывающая граф состояний нерезервированной системы с основным соединением элементов :

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_c p_0(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i p_i(t); \\ \dfrac{dp_i(t)}{dt} = \lambda_i p_0(t) - \mu_i p_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

где $\lambda_c = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$ $\qquad p_0(0) = 1,\ p_1(0) = p_2(0) = \dots = p_n(0) = 0.$

Для условия длительной эксплуатации (стационарный режим), когда $\boldsymbol{t \to \infty}$, $\boldsymbol{p_i(t) \to p_i}$, $p_i'(t) \to 0$,

система дифференциальных уравнений примет вид системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda_c p_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i p_i \\ 0 = \lambda_i p_0 - \mu_i p_i \qquad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

Решая систему алгебраических уравнений при условии, что $\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{p_i} = \boldsymbol{1}$, получим выражение для $\boldsymbol{p_0}$ и $К_Г$:

$$К_Г = \boldsymbol{p_0} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\gamma_i}},$$

где $\boldsymbol{\gamma_i} = \frac{\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{i}}}{\mu_{\mathrm{i}}}$.

Среднее время восстановления $Т_в$ определяется из выражений для $К_Г$ и $\boldsymbol{T}$:

Так как $К_г = \frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}_В}$ и $К_п = 1 - К_г$,

то $\boldsymbol{T}_В = T\frac{К_п}{К_г}$.

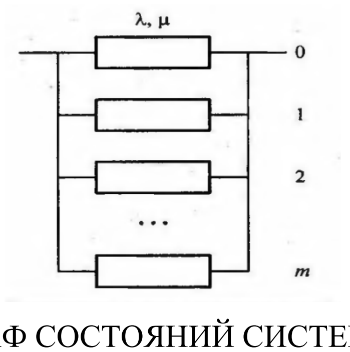
Поскольку $К_г = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n} \gamma_i}$, то $\boldsymbol{T}_В = T\sum_{i=1}^{n} \gamma_i$.

Так как $\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \frac{1}{\lambda_с}$, то $\boldsymbol{T}_В = \frac{1}{\lambda_с} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i$.

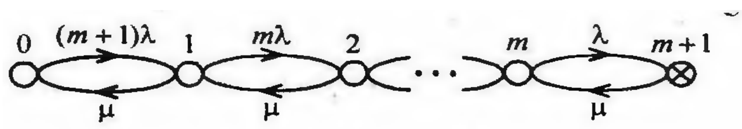
3. Расчет надежности резервированной системы

РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМЫ

С ОБЩИМ ПОСТОЯННЫМ РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ



ГРАФ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ



Система алгебраических уравнений, соответствующая графу состояний, для стационарного режима будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \mu p_1 - (m+1)\lambda p_0 = 0 \\ \sum_{i=1}^{m}(\mu p_{i+1} + (m+2-i)\lambda p_{i-1} - ((m+1-i)\lambda+\mu)p_i) = 0 \\ \lambda\, p_m - \mu p_{m+1} = 0 \end{cases}$$

Решая систему алгебраических уравнений при условии, что $\sum_{i=0}^{m+1} p_i = 1$, получим выражение для $К_п$ и $К_г$:

Так как p_{m+1} = $К_п$ и $K_г = 1 - K_п$, то

$$K_п = \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{1!} + \frac{\gamma^2}{2!} + \ldots + \frac{\gamma^{m+1}}{(m+1)!}}, \qquad K_г = \frac{\sum_{i=1}^{m+1} \frac{\gamma^i}{i!}}{\sum_{i=0}^{m+1} \frac{\gamma^i}{i!}}.$$

Где $\gamma = \frac{\mu}{\lambda}$.

Поскольку все элементы системы равно надежны, то в соответствии с графом состояний среднее время восстановления системы будет равно

$$Т_в = \frac{1}{\mu}.$$

В силу соотношения $T = Т_в \frac{К_г}{К_п}$ и формул для $К_п$, $К_г$, и $Т_в$

получим

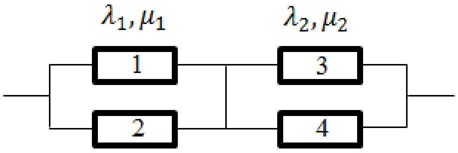
$$T = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\gamma^i}{i!}, \qquad T = Т_0 \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\gamma^i}{i!},$$

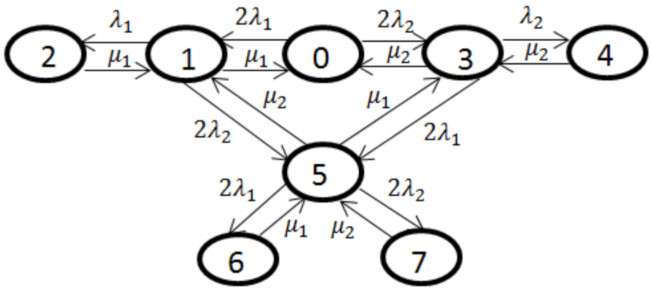
где $Т_0 = \frac{1}{\lambda}$ - наработка на отказ нерезервированной системы.

Последнее выражение устанавливает зависимость наработки на отказ резервированной системы от кратности резервирования.

Пример 1

Система состоит из двух основных элементов. Средняя интенсивность отказа каждого элемента λ_1 и λ_2, а интенсивность восстановления μ_1 и μ_2. Каждый основной элемент зарезервирован постоянно включенным аналогичным элементом.





$$
\begin{cases}
\mu_1 P_1 + \mu_2 P_3 - 2(\lambda_1 + \lambda_2) P_0 = 0 \\
2\lambda_1 P_0 + \mu_1 P_2 + \mu_2 P_5 - (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \mu_1) P_1 = 0 \\
\lambda_1 P_1 - \mu_1 P_2 = 0 \\
2\lambda_2 P_0 + \mu_2 P_4 + \mu_1 P_5 - (\lambda_2 + 2\lambda_1 + \mu_2) P_3 = 0 \\
\lambda_2 P_3 - \mu_2 P_4 = 0 \\
2\lambda_2 P_1 + 2\lambda_1 P_3 + \mu_1 P_6 + \mu_2 P_7 - (2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) P_5 = 0 \\
2\lambda_1 P_5 - \mu_1 P_6 = 0 \\
2\lambda_2 P_5 - \mu_2 P_7 = 0
\end{cases}
$$

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 = 1.$$

$$K_Г = P_0 + P_1 + P_3 + P_5\,; \quad K_п = 1 - K_Г;$$

При $\mu_1 = \mu_2 = \mu$

$$T_B = \frac{1}{\mu}\,. \qquad T = \frac{K_Г}{K_п} T_B\,.$$

Пояснения к графу состояний.

Состояние S_0(работоспособное) – все элементы исправны (событие – $a_1a_2a_3a_4$).

Состояние S_1(работоспособное) – один элемент неисправен (события – $\bar{a}_1a_2a_3a_4$ и $a_1\bar{a}_2a_3a_4$).

Состояние S_2(неработоспособное) – два элемента неисправны (событие – $\bar{a}_1\bar{a}_2a_3a_4$).

Состояние S_3(работоспособное) – один элемент неисправен (события – $a_1a_2\bar{a}_3a_4$ и $a_1a_2a_3\bar{a}_4$).

Состояние S_4(неработоспособное) – два элемента неисправны (событие – $a_1a_2\bar{a}_3\bar{a}$).

Состояние S_5(работоспособное) – два элемента неисправны (события – $\bar{a}_1a_2\bar{a}_3a_4$, $\bar{a}_1a_2a_3\bar{a}_4$, $a_1\bar{a}_2\bar{a}_3a_4$ и $a_1\bar{a}_2a_3\bar{a}_4$).

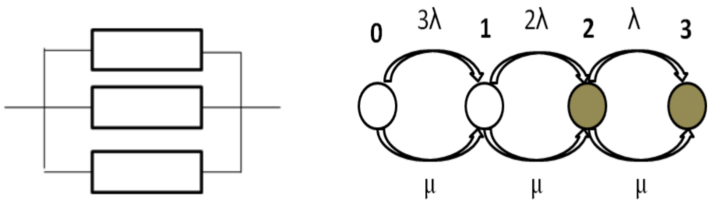
Состояние S_6(неработоспособное) – три элемента неисправны (события – $\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3a_4$ и $\bar{a}_1\bar{a}_2a_3\bar{a}_4$).

Состояние S_7(неработоспособное) – три элемента неисправны (события – $a_1\bar{a}_2\bar{a}_3\bar{a}_4$ и $\bar{a}_1a_2\bar{a}_3\bar{a}_4$).

Всего событий – $2^4 = 16$. Последнее событие $\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3\bar{a}_4$ не указано в графе состояний, так как оно следует из неработоспособных состояний S_6 и S_7. Предполагается, что в неработоспособном состоянии исправные элементы находятся в выключенном состоянии и потому отказать не могут.

Пример 2

Аппаратура зарезервирована по мажоритарному принципу 2 из 3-х.



Пояснения к графу состояний.

Состояние S_0(работоспособное) – все элементы исправны (событие – $a_1a_2a_3$).

Состояние S_1(работоспособное) – один элемент неисправен (события – $\bar{a}_1a_2a_3$, $a_1\bar{a}_2a_3$, $a_1a_2\bar{a}_3$).

Состояние S_2(неработоспособное) – два элемента неисправны (события – $\bar{a}_1\bar{a}_2a_3$, $\bar{a}_1a_2\bar{a}_3$, $a_1\bar{a}_2\bar{a}_3$).

Состояние S_3(неработоспособное) – три элемента неисправны (событие – $\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3$).

В данном случае в графе состояний рассмотрены все $2^3 = 8$ событий.

В системе алгебраических уравнений уравнение для состояния S_3 заменено на условие нормировки.

$$\begin{cases} \mu P_1 - 3\lambda P_0 = 0 \\ 3\lambda P_0 + \mu P_2 - (2\lambda + \mu)P_1 = 0 \\ 2\lambda P_1 + \mu P_3 - (\lambda + \mu)P_2 = 0 \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1 \end{cases}$$

$$K_Г = P_0 + P_1, \quad K_п = 1 - K_Г, \quad \Theta = \frac{K_п}{K_Г} T_B, \quad T_B = \frac{1}{\mu}.$$

Заключение

Таким образом, сегодня был рассмотрен аналитический метод расчета показателей надежности восстанавливаемой АС.

Задание на самостоятельную работу:

1) Отработать учебный материал по конспекту лекций.
2) Изучить материал рекомендуемой литературы.

______________В.Тимофеев_______

(воинское звание, подпись, инициал имени, фамилия автора)

«____» ___________ 20___ г.