ВОЕННО-КОСМИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ ИМЕНИ А.Ф. МОЖАЙСКОГО

Кафедра управления организационно-техническими системами космического назначения
(наименование кафедры)

УТВЕРЖДАЮ

Начальник 23 кафедры

полковник Г.Дудалев
(воинское звание, подпись, инициал имени, фамилия)
«____» ___________ 20__ г.

Автор: доцент кафедры, кандидат технических наук, подполковник
(должность, ученая степень, ученое звание, воинское звание,
И.КОЧАНОВ
инициал имени, фамилия)

Задание на практическое занятие № 9

Тема: Решение одноиндексной общей распределительной задачи линейного программирования, анализ ее на чувствительность
(наименование темы лекции по тематическому плану изучения дисциплины)

по дисциплине: Исследование операций
(наименование дисциплины)

Обсуждено и одобрено на заседании кафедры

(предметно-методической комиссии)
«___» ____________ 20__ г.
протокол № ___

Санкт-Петербург
2020

Содержание занятия и время

Введение	10 мин.
Учебные вопросы (основная часть):	
1. Определение исходных данных.	10 мин.
2. Решение задач ЛП с использованием MS Excel и проведение их анализа	100 мин.
3. Анализ полученных результатов. Защита работы.	50 мин.
Заключение	10 мин.

Общее время проведения занятия – 180 мин.

Место проведения: специализированная аудитория кафедры.
Оснащение: ПЭВМ.

Литература:
Основная:

1. Шафигуллин И.Ш., Тюрин Р.М., Зубачев А.М. Исследование операций: Практикум – СПб.: ВКА имени А.Ф.Можайского, 2015. – 99 с.
2. Уокенбах Д. Microsoft Excel 2010. Библия пользователя, пер. с англ. – М.: Вильямс, 2011. – 912 с.

Введение

Практическое занятие № 9 посвящено решению задач линейного программирования в табличном редакторе Microsoft Excel. *Целью* практического занятия является приобретение навыков построения математических моделей одноиндексных распределительных задач линейного программирования и решения их в Microsoft Excel, а также приобретение навыков анализа чувствительности задач линейного программирования на основе различных типов отчетов, выдаваемых Microsoft Excel, по результатам поиска решения.

1. Определение исходных данных.

Исходные данные вариантов задач к практической работе 4

В табл. 1.1. представлены исходные данные вариантов задач.

Таблица 1.1

№ вар.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	1100	1070	1140	1030	1180	990	1220	950	1260	910	1300	870	1340
w	250	240	260	230	270	240	260	230	270	240	260	230	270
h	300	290	280	270	260	250	240	310	320	330	340	350	360
$Тр_1$	4	4,4	3,6	4,8	3,2	5,2	2,8	5,6	2,4	6	2	6,4	1,6
$Тр_2$	4	10	5	9	6	8	7	5	8	6	9	7	10
$Тр_3$	8	15	10	13	9	13	10	8	11	10	15	14	16
$Тр_4$	10	16	12	14	10	14	11	9	14	13	18	16	20
$Р_1$	40	22	19	6	27	16	9	25	11	8	30	14	7
$Р_2$	14	16	12	11	7	5	13	3	6	8	10	2	9
$Пр_1$	10	4	9	5	2	6	4	7	4	3	5	8	6
$Пр_2$	100	150	170	250	180	130	190	120	200	110	210	140	220
$Пр_3$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$ФВ_1$	7	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,1	7,2	7,0	7,3	7,4
$ФВ_2$	7,5	7,6	7,7	7,0	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,1	7,2
$ФВ_3$	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,4	7,5	7,6
Z_1	400	390	365	380	415	370	405	350	395	410	385	420	375
Z_2	230	240	235	220	215	200	195	180	205	160	175	140	155
Z_3	260	200	250	190	240	180	230	290	220	230	210	270	200
$К_1$	14	15	5	16	6	17	7	12	8	13	18	11	9
$К_2$	10	11	12	5	13	6	14	7	15	8	16	9	17
V_1	50	20	65	40	55	75	45	60	35	70	25	30	80
V_2	350	400	360	300	370	310	380	320	390	330	410	340	420
V_3	5300	2000	3700	3000	1100	4000	2500	1500	1400	2700	4300	3100	1900
N	40	45	67	50	72	55	44	60	38	65	30	70	35
Ост	100	110	90	170	80	160	70	150	60	140	50	120	40

Окончаниее табл.1.1

№ вар.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Д	60(А,В2)	15А	10В1	15(В1,В2)	43(А,В1)	72А	12В2	16(В1,В2)	23(А,В2)	46А	59В1	13(В1,В2)	9(А,В1)
З	50В2	30А	15В1	10А, 18В1	5А, 12В2	40В1, 3В2	60В2	24А	80В1	14А, 21В1	38А, 62В2	23В1, 20В2	84В2
$С_1$	205	210	145	200	150	215	170	220	165	225	180	230	195
$С_2$	142	150	125	164	120	187	125	176	129	195	143	207	126
$С_3$	160	170	133	178	134	205	148	197	142	210	162	214	146
$Ц_1$	295	256	213	284	192	243	198	274	203	281	224	276	249
$Ц_2$	182	202	149	190	154	230	175	246	194	263	214	287	186
$Ц_3$	220	224	158	206	147	243	180	242	167	267	202	246	187
3 варианта раскроя листов ДСП; 8 ч в смене; работа в 1 смену; 22 рабочих дня в месяце													

2. Решение задач ЛП с использованием MS Excel и проведение их анализа

Порядок выполнения работы

1. Согласно номеру своего варианта выберите условие задачи и постройте ее модель.
2. Найдите оптимальное решение задачи в Microsoft Excel.
3. По результатам поиска решения получите в Microsoft Excel все типы отчетов, необходимые для анализа чувствительности.
4. Проанализируйте задачу на чувствительность к изменениям параметров исходной модели.
5. Результаты анализа задачи на чувствительность продемонстрируйте преподавателю.

Теоретические сведения

Основы построения математических моделей распределительных задач линейного программирования

Если в какой-либо системе (экономической, организационной, военной и т.д.) имеющихся в наличии ресурсов не хватает для эффективного выполнения каждой из намеченных работ, то возникают так называемые **распределительные задачи**.

Цель решения распределительной задачи – отыскание оптимального распределения ресурсов по работам. Под оптимальностью распределения может пониматься, например, минимизация общих затрат, связаных с выполнением работ, или максимизация получаемого в результате общего дохода.

Для решения таких задач используются методы математического программирования. **Математическое программирование** – это раздел математики, занимающийся разработкой методов отыскания экстремальных значений функции, на аргументы которой наложены ограничения. Слово «программирование» заимствовано из зарубежной литературы, где оно используется в смысле «планирование».

Наиболее простыми и лучше всего изученными среди задач математического программирования являются задачи линейного программирования (ЛП).

Характерные черты задач ЛП следующие:

1) показатель эффективности $L(\overline{x})$ представляет собой линейную функцию, заданную на элементах решения $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

2) ограничительные условия, налагаемые на возможные решения, имеют вид линейных равенств или неравенств.

В общей форме записи модель задачи ЛП имеет следующий вид:

$$L(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_\text{n} \to max(min);$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_\text{n} \leq (\geq, =) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_\text{n} \leq (\geq, =) b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_\text{n} \leq (\geq, =) b_\text{m}, \\ x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0 \ (k \leq n). \end{cases} \tag{1.1}$$

Допустимое решение – это совокупность чисел $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи (1.1).

Оптимальное решение – это план $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, при котором ЦФ принимает свое максимальное (минимальное) значение.

Для построения математической модели необходимо ответить на следующие три вопроса:

1. Что является искомыми величинами, то есть переменными этой задачи?
2. В чем состоит цель, для достижения которой из всех допустимых значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать наилучшему, то есть оптимальному, решению?
3. Какие ограничения должны быть наложены на переменные, чтобы выполнялись условия, описанные в задаче?

Задачи анализа оптимального решения на чувствительность

На практике многие экономические параметры (цены на продукцию и сырье, запасы сырья, спрос на рынке, заработная плата и т.д.) с течением времени меняют свои значения. Поэтому оптимальное решение задачи ЛП, полученное для конкретной экономической ситуации, после ее изменения может оказаться непригодным или неоптимальным. В связи с этим возникает задача **анализа чувствительности** задачи ЛП, а именно того, как возможные изменения параметров исходной модели повлияют на полученное ранее оптимальное решение.

Ограничения линейной модели классифицируются следующим образом (рис. 1.1).

Связывающие ограничения проходят через оптимальную точку, например (1) и (2).

Несвязывающие ограничения не проходят через оптимальную точку, например (3), (4) и (5).

Аналогично ресурс, представляемый связывающим ограничением, называют **дефицитным,** а ресурс, представляемый несвязывающим ограничением, – **недефицитным**. Ограничение называют **избыточным** в том случае, если его исключение не влияет на область допустимых решений и, следовательно, на оптимальное решение, например, (5).

Выделяют следующие три задачи анализа на чувствительность:

1. Анализ сокращения или увеличения ресурсов:

1) на сколько можно увеличить (ограничения типа $\leq$) или уменьшить (ограничения типа $\geq$) запас **дефицитного** ресурса для улучшения оптимального значения ЦФ;

2) на сколько можно уменьшить (ограничения типа $\leq$) или увеличить (ограничения типа $\geq$) запас **недефицитного** ресурса при сохранении полученного оптимального значения ЦФ?

2. Увеличение (уменьшение) запаса какого из ресурсов наиболее выгодно?

3. Анализ изменения целевых коэффициентов: каков диапазон изменения коэффициентов ЦФ, при котором не меняется оптимальное решение?

Графический анализ оптимального решения на чувствительность

Область допустимых решений задачи на рис. 1.1 – многоугольник OABCDE. Если *связывающее* ограничение (дефицитный ресурс) (2) передвигать до точки F, то это приведет к расширению области допустимых решений до многоугольника OABCFE и к получению нового оптимального решения в точке F. При этом ограничение (2) станет избыточным.

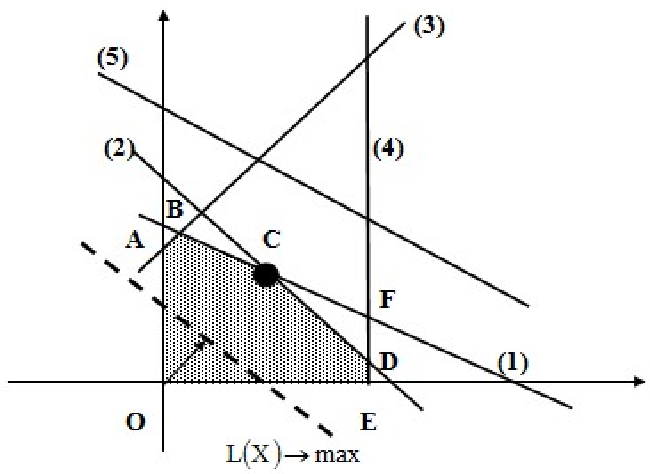


Рис. 1.1

Новое решение (F) лучше прежнего (C), поскольку для пересечения с точкой F линия ЦФ должна пройти по направлению вектора (выходящего из начала координат и показывающего направление максимизации ЦФ) дальше точки C (рис. 1.2).

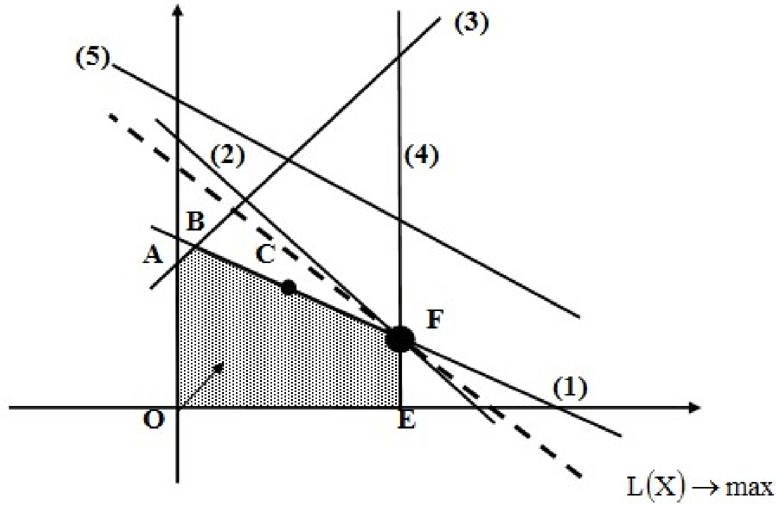


Рис. 1.2

Таким образом, *чтобы графически определить максимальное изменение запаса дефицитного ресурса, улучшающее оптимальное решение, необходимо передвигать соответствующую прямую в направлении улучшения ЦФ до тех пор, пока это ограничение не станет* ***избыточным.***

Графический анализ максимально возможного изменения запаса недефицитного ресурса показан на рис. 1.3. Передвинем несвязывающее ограничение (3) до пересечения с оптимальным решением в точке C.

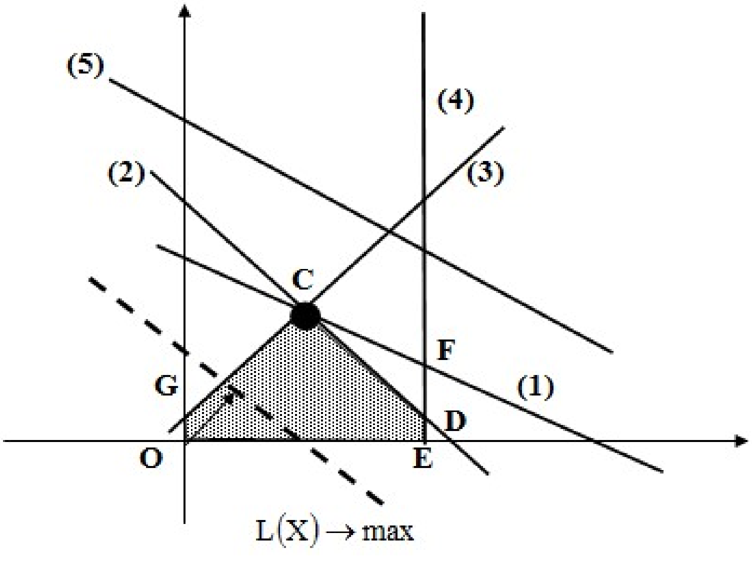


Рис. 1.3

Это соответствует уменьшению запаса недефицитного ресурса (3), который в оптимальной точке C исходной задачи (см. рис. 1.1) расходовался не полностью. Областью допустимых решений станет многоугольник OGCDE. Оптимальное решение останется прежним (точка C).

Таким образом, ***чтобы*** *графически определить максимальное изменение запаса недефицитного ресурса, не меняющее оптимального решения,*

необходимо *передвигать соответствующую прямую до пересечения с* ***оптимальной точкой***.

Для того чтобы выяснить, запас какого из *дефицитных* ресурсов выгоднее увеличивать в первую очередь, необходимо определить, какую пользу (например, прибыль) принесет увеличение запасов каждого из них на единицу. Для этих целей вводится понятие **ценности дополнительной единицы *i*-го ресурса** (теневая цена):

$$y_i = \frac{\max \text{приращение} \cdot \text{оптимального} \cdot \text{значения} \cdot \mathrm{L}(\bar{x})}{\max \text{допустимый} \cdot \text{прирост} \cdot \text{объема} \cdot (i\text{ - го ресурса})},$$

то есть сначала наращивается запас ресурса, имеющего максимальное значение y_i, затем – второе по величине и т.д.

Графический анализ изменения целевых коэффициентов (например, цен на производимую продукцию), не приводящих к изменению оптимального решения, проводится путем вращения линии ЦФ. При увеличении коэффициента ЦФ c_1 или уменьшении коэффициента c_2 целевая прямая на графике вращается вокруг оптимальной точки по часовой стрелке. Если c_1 уменьшается или же увеличивается c_2, то целевая прямая вращается вокруг оптимальной точки против часовой стрелки (рис. 1.4).

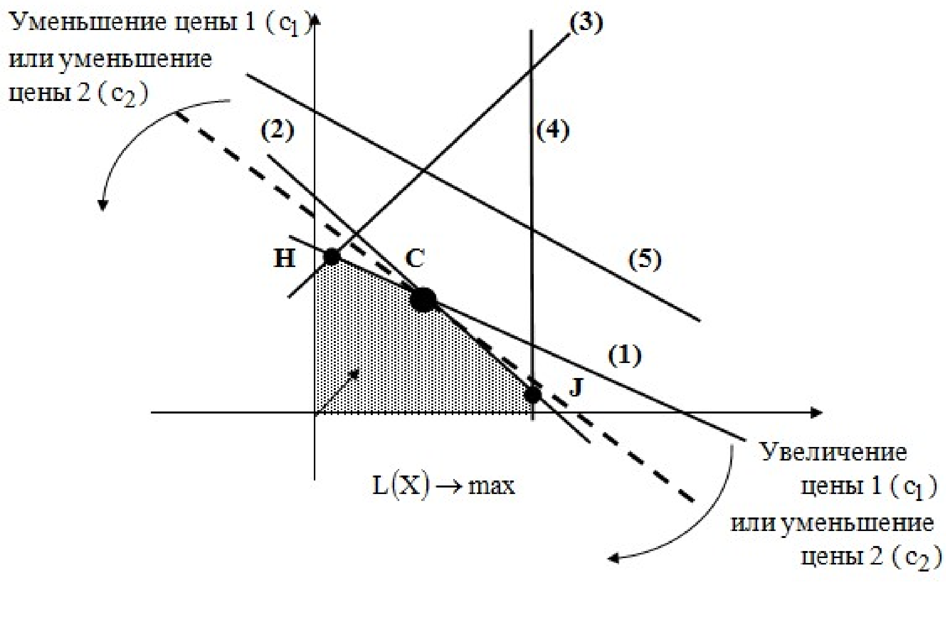


Рис. 1.4

Зафиксируем значение c_2. Оптимальное решение в точке С не будет меняться при увеличении c_1 до тех пор, пока целевая прямая не совпадет с прямой (2). Аналогично оптимальное решение в точке С не будет меняться при уменьшении c_1 до тех пор, пока целевая прямая не совпадет с прямой (1).

При таких поворотах точка C будет оставаться оптимальной до тех пор, пока наклон целевой прямой не выйдет за пределы, определяемые наклоном прямых ограничений (1) и (2). Если целевая прямая выйдет за пределы наклона (1) или (2), то оптимальной станет соответственно точка *H* или *J*.

Таким образом, нижний и верхний пределы изменения цены 1 определяются значениями коэффициента c_1, при которых наклон целевой прямой совпадает соответственно с наклонами прямых ограничений (1) и (2).

Пример построения математической модели одноиндексной распределительной задачи линейного программирования и ее решения

В данной практической работе рассматривается одноиндексная задача ЛП, представляющая собой **общую распределительную задачу**, которая характеризуется различными единицами измерения работ и ресурсов**.**

Рассмотрим следующую задачу (вариант 0 из табл. 1.1).

Постановка задачи

Мебельный комбинат выпускает книжные полки A из натурального дерева со стеклом, полки B_1 из полированной ДСП (древесно-стружечной плиты) без стекла и полки B2 из полированной ДСП со стеклом. Габариты полок A, B_1 и B_2 следующие: длина 1100 (d) мм, ширина 250 (w) мм, высота 300 (h) мм представлены на рис. 1.5. Размер листа ДСП 2×3 м.

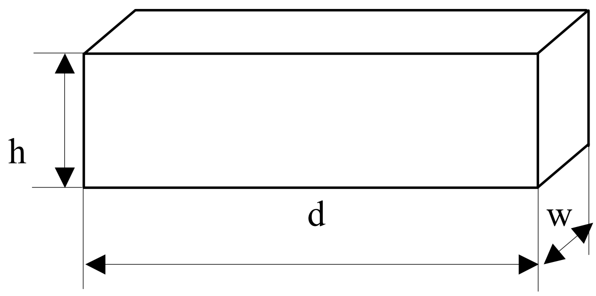


Рис. 1.5

При изготовлении полок A выполняются следующие работы: столярные, покрытие лаком, сушка, резка стекла, упаковка. Все операции, производимые в ходе столярных работ и упаковки, выполняются вручную. Полки B_1 и B_2 поставляются в торговую сеть в разобранном виде. За исключением операции упаковки, все остальные операции (производство комплектующих полки, резка стекла) при изготовлении полок B_1 и B_2, выполняются на специализированных автоматах.

Трудоемкость столярных работ по выпуску одной полки A составляет 4(**Тр**$_\mathbf{1}$) ч. Производительность автомата, покрывающего полки A лаком – 10 (**Пр**$_\mathbf{1}$) полок в час, автомата, режущего стекло – 100 (**Пр**$_\mathbf{2}$) стекол в час. Сменный фонд времени автомата для покрытия лаком – 7 (**ФВ**$_\mathbf{1}$) ч, автомата для резки стекла – 7,5 (**$ФВ_2$**) ч. Сушка полок, покрытых лаком, происходит в течение суток в специальных сушилках, вмещающих 50 (**V_1**) полок. На упаковку полки А требуется 4 (**$Тр_2$**) минуты. В производстве полок заняты 40 (**P_1**) столяров и 14 (**P_2**) упаковщиков.

Производительность автомата, производящего комплектующие полок B_1 и B_2, равна 3 (**$Пр_3$**) полки в час, а его сменный фонд времени равен 7,4 (**$ФВ_3$**) ч, трудоемкость упаковочных работ составляет 8 (**$Тр_3$**) мин для полки В1 и 10 (**$Тр_4$**) мин для полки B_2.

От поставщиков комбинат получает в месяц 400 (**Z_1**) листов полированной ДСП, 230 (**Z_2**) листов ДВП (древесноволокнистой плиты), а также 260 (**Z_3**) листов стекла. Из каждого листа ДВП можно выкроить 14 (**$К_1$**) задних стенок полок B_1 и B_2, а из каждого листа стекла – 10 (**$К_2$**) стекол для полок А и B_2.

Склад готовой продукции может разместить не более 350 (**V_2**) полок и комплектов полок, причем ежедневно в торговую сеть вывозится в среднем 40 (**N**) полок и комплектов. На начало текущего месяца на складе осталось 100 (**Ост**) полок, произведенных ранее. Себестоимость полки А равна 205 (**$С_1$**) руб., полки В без стекла – 142 (**$С_2$**) руб., со стеклом – 160 (**$С_3$**) руб.

Маркетинговые исследования показали, что доля продаж полок обоих видов со стеклом составляет не менее 60% (**Д**) в общем объеме продаж, а емкость рынка полок производимого типа составляет около 5300 (**V_3**) штук в месяц. Мебельный комбинат заключил договор на поставку заказчику 50 (**З**) полок типа B_2 в текущем месяце.

Составьте план производства полок на текущий месяц. Известны цены реализации полок: полка А – 295 (**$Ц_1$**) руб., полка В без стекла – 182 (**$Ц_2$**) руб., полка В со стеклом – 220 (**$Ц_3$**) руб.

Построение модели

I этап построения модели заключается в определении (описании, задании, идентификации) переменных. В данной задаче искомыми неизвестными величинами является количество полок каждого вида, которые будут произведены в текущем месяце. Таким образом, x_A– количество полок А (шт./мес.); x_{B1} – количество полок B_1 (шт./мес.); x_{B2} – количество полок B_2 (шт./мес.).

II этап построения модели заключается в построении целевой функции, представляющей цель решения задачи. В данном случае цель – это максимизация прибыли, получаемой от продажи полок всех видов в течение месяца. Поскольку в этой задаче прибыль может быть определена как разность между ценой ($Ц_1$, $Ц_2$, $Ц_3$) и себестоимостью ($С_1$, $С_2$, $С_3$), то ЦФ имеет вид

$L(X) = (295 - 205)x_A + (182 - 142)x_{B_1} + (220 - 160)x_{B_2} \to \max$	$\frac{\text{руб.}}{\text{шт.}} \cdot \frac{\text{шт.}}{\text{мес.}} = \frac{\text{руб.}}{\text{мес.}}$

III этап построения модели заключается в задании ограничений, моделирующих условия задачи. Все ограничения рассматриваемой задачи можно разделить на несколько типов.

Примечание 1.1. Расчет числовых данных, которые непосредственно не заданы в условии задачи, производите непосредственно в ячейках экранной формы. Например, для ввода коэффициента 4/60 при x_A в левой части (1.3) в соответствующую ячейку надо ввести выражение =4/60, после чего в ячейке отобразится результат вычисления, то есть 0,066666667. Для ввода правой части ограничения (1.3) в соответствующую ячейку надо ввести выражение =14*8*1*22, при этом в ячейке отобразится число 2461. Этот способ позволяет четко представлять путь получения числовых данных в ячейках экранной формы, избегать ошибок при расчете параметров задачи, а также обеспечивает высокую точность расчетов.

Ограничения по фонду времени
(с использованием трудоемкости работ)

Левая часть ограничений по фонду времени представляет собой время, затрачиваемое на производство полок в течение месяца в количестве x_A, x_{B1}, x_{B2} штук. *Правая часть ограничения* – это фонд рабочего времени исполнителя работы (рабочего или автомата) за смену. Неравенство (1.2) описывает ограничение по фонду времени на выполнение столярных работ. Коэффициент 4 ч/шт. ($Тр_1$) – это время, затрачиваемое на **столярные работы** при производстве одной полки типа А (трудоемкость); 40 чел. ($Р_1$) – это количество столяров, участвующих в производстве; 8 ч/(чел.·см.) – количество часов работы одного человека в течение смены; 1 см./дн. – количество смен в одном рабочем дне; 22 дн./мес . – количество рабочих дней в месяце (табл. 1.1):

$4x_A \le 40 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 22$	$\frac{ч}{мес.} \le \frac{ч}{мес.}$	(1.2)
$\frac{ч}{шт.} \cdot \frac{шт.}{мес.} \le чел. \cdot \frac{ч}{чел. \cdot см.} \cdot \frac{см.}{дн.} \cdot \frac{дн.}{мес.}$		

Примечание 1.2. Важным моментом проверки правильности составления ограничений является проверка совпадения единиц измерения левой и правой частей ограничения. В ограничении (1.2) левая и правая части измеряются в часах, потраченных на выпуск продукции в течение месяца.

Аналогично записывается ограничение (1.3) по фонду времени на **упаковочные работы**, в котором 14 чел. ($Р_2$) – это количество упаковщиков:

$\frac{4}{60}x_A + \frac{8}{60}x_{B_1} + \frac{10}{60}x_{B_2} \le 14 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 22$	$\frac{ч}{мес.} \le \frac{ч}{мес.}$	(1.3)
$\frac{мин/шт.}{мин/ч} \cdot \frac{шт.}{мес.} \le чел. \cdot \frac{ч}{чел. \cdot см.} \cdot \frac{см.}{дн.} \cdot \frac{дн.}{мес.}$		

Ограничения по фонду времени
(с использованием производительности работ)

Неравенство описывает ограничение по фонду времени на покрытие лаком полок типа А. Отличие ограничений, учитывающих данные о **производительности** работ, от ограничений, учитывающих данные о **трудоемкости** работ, состоит в том, что производительность необходимо преобразовать в трудоемкость. Трудоемкость является величиной, обратной производительности. Коэффициент 1/10 ($1/Пр_1$) при x_A – это количество часов, приходящихся на покрытие лаком одной полки типа А. При записи правой части ограничения учитываем, что автомат, выполняющий покрытие лаком, работает не полную смену (8 ч), а в течение сменного фонда времени 7 ч ($ФВ_1$). Это связано с необходимостью подготовки автомата к работе и обслуживанием его после окончания работы.

$\frac{1}{10}x_A \le 7 \cdot 1 \cdot 22$	$\frac{ч}{мес.} \le \frac{ч}{мес.}$	(1.4)
$\frac{ч}{шт.} \cdot \frac{шт.}{мес.} \le \frac{ч}{см.} \cdot \frac{см.}{дн.} \cdot \frac{дн.}{мес.}$		

Неравенство описывает ограничение по фонду времени на резку стекла для полок типа А и B_2:

$\frac{2}{100}x_A + \frac{2}{100}x_{B_2} \le 7{,}5 \cdot 1 \cdot 22$	$\frac{ч}{мес.} \le \frac{ч}{мес.}$	(1.5)
$\frac{ч}{шт.} \cdot \frac{шт.}{мес.} \le \frac{ч}{см.} \cdot \frac{см.}{дн.} \cdot \frac{дн.}{мес.}$		

Неравенство описывает ограничение по фонду времени на производство комплектующих полок типа B_1 и B_2:

$\frac{1}{3}x_{B_1} + \frac{1}{3}x_{B_2} \le 7{,}4 \cdot 1 \cdot 22$	$\frac{ч.}{мес.} \le \frac{ч.}{мес.}$	(1.6)
$\frac{ч.}{шт.} \cdot \frac{шт.}{мес.} \le \frac{ч}{см.} \cdot \frac{см.}{дн.} \cdot \frac{дн.}{мес.}$		

Ограничения по запасу расходуемых в производстве материалов (по запасу используемых для производства полок деталей)

Неравенство описывает ограничение по запасу листов ДСП, поставляемых на комбинат ежемесячно. При этом следует учесть, что из листа ДСП надо выкраивать комплекты (верхнюю и нижнюю стороны полок, 2 боковые стороны) для производства полок. Поэтому при задании ограничения имеет смысл ориентироваться не на количество листов ДСП, а на количество комплектов для полок [правая часть], которые можно получить из имеющегося запаса ДСП. Но поскольку листы ДСП можно раскраивать различными способами и получать при этом различное количество деталей и комплектов, то обозначим месячный запас комплектов в правой части как $Y_{компл}$ и рассмотрим способ его численного определения позже. В левой части ограничения задается количество комплектов (по одному на полку), необходимых на производство полок в течение месяца в объеме x_{B1}, x_{B2}:

$1x_{B_1} + 1x_{B_2} \le Y_{компл}$	$\frac{\text{компл.}}{\text{мес.}} \le \frac{\text{компл.}}{\text{мес.}}$	(1.7)
$\frac{\text{компл.}}{\text{шт.}} \cdot \frac{\text{шт.}}{\text{мес.}} \le \frac{\text{компл.}}{\text{мес.}}$		

$1x_{B_1} + 1x_{B_2} \le 230 \cdot 14$	$\frac{\text{задняя стенка}}{\text{мес.}} \le \frac{\text{задняя стенка}}{\text{мес.}}$	(1.8)
$\frac{\text{задняя стенка}}{\text{шт.}} \cdot \frac{\text{шт.}}{\text{мес.}} \le \frac{\text{лист ДВП}}{\text{мес.}} \cdot \frac{\text{задняя стенка}}{\text{лист ДВП}}$		

$2x_A + 2x_{B_2} \le 260 \cdot 10$	$\frac{\text{стекло}}{\text{мес.}} \le \frac{\text{стекло}}{\text{мес.}}$	(1.9)
$\frac{\text{стекло}}{\text{шт.}} \cdot \frac{\text{шт.}}{\text{мес.}} \le \frac{\text{лист стекла}}{\text{мес.}} \cdot \frac{\text{стекло}}{\text{лист стекла}}$		

Аналогично ограничению по ДСП неравенство (1.8.) – это ограничение по запасу задних стенок из ДВП для полок B_1 и B_2, а неравенство (1.9) – ограничение по запасу стекол для полок А и B_2. В отличие от ДСП листы ДВП и листы стекла кроятся стандартным способом, и из каждого листа ДВП получается 14 (K_1) задних стенок полок, а из каждого листа стекла получается 10 (K_2) стекол. Ежемесячный запас листов ДВП и стекла составляет соответственно 230 (Z_2) и 260 (Z_3). При составлении левых частей ограничений (1.8) и (1.9) следует учесть, что на каждую полку B_1 и B_2 приходится по одной задней стенке, а на каждую полку А и B_2 – по 2 стекла.

Ограничения по емкости вспомогательных помещений и рынка

Неравенство является ограничением по количеству полок А, которые может вместить сушилка. В правой части представлено количество полок, которые могут быть просушены в течение месяца (в день может быть просушено 50 (V_1) полок):

$x_A \le 50 \cdot 22$	$\frac{\text{шт.}}{\text{мес.}} \le \frac{\text{шт.}}{\text{мес.}}$	(1.10)
$\frac{\text{шт.}}{\text{мес.}} \le \frac{\text{шт.}}{\text{дн.}} \cdot \frac{\text{дн.}}{\text{мес.}}$		

Неравенство описывает ограничение по количеству полок всех видов, которые может вместить склад готовой продукции. При этом правая часть учитывает, что общая емкость склада уменьшена на 100 (Ост) полок, которые остались невывезенными с прошлого месяца. Кроме того, в течение месяца каждый день будет освобождаться по 40 (N) мест для полок:

$x_A + x_{B_1} + x_{B_2} \le 350 - 100 + 40 \cdot 22$	$\frac{\text{шт.}}{\text{мес.}} \le \frac{\text{шт.}}{\text{мес.}}$	(1.11)
$\frac{\text{шт.}}{\text{мес.}} \le \frac{\text{шт.}}{\text{мес.}} - \frac{\text{шт.}}{\text{мес.}} + \cdot \frac{\text{шт.}}{\text{дн.}} \cdot \frac{\text{дн.}}{\text{мес.}}$		

Неравенство описывает ограничение по примерной емкости рынка, равной 5300 (V_3) полкам всех видов:

$x_A + x_{B_1} + x_{B_2} \le 5300$	$\frac{\text{шт.}}{\text{мес.}} \le \frac{\text{шт.}}{\text{мес.}}$	(1.12)

Ограничения по гарантированному заказу

Неравенство показывает, что необходимо произвести как минимум 50 (З) заказанных полок B_2, а возможно, и большее количество, но уже для свободной продажи:

$x_{B_2} \ge 50$	$\frac{\text{шт.}}{\text{мес.}} \le \frac{\text{шт.}}{\text{мес.}}$	(1.13)

Ограничения по соотношению объемов продаж различных товаров

$x_A + (x_{B_2} - 50) \ge 0{,}6[x_A + x_{B_1} + (x_{B_2} - 50)]$	$\frac{\text{шт.}}{\text{мес.}} \le \frac{\text{шт.}}{\text{мес.}}$	(1.14)

Неравенство (1.14) показывает, что доля полок А и B_2 в общем объеме полок, производимых для свободной продажи, должна составлять не менее 60% (Д). К такому выводу приводят результаты маркетинговых исследований. Поскольку из всех полок B_2 в свободную продажу поступит лишь (x_{B2} – 50), то это учитывается при составлении ограничения (1.14), которое после алгебраических преобразований принимает вид

$0{,}4x_A - 0{,}6x_{B_1} + 0{,}4x_{B_2} \ge 20$	(1.15)

Определение количества комплектов для полок B_1 и B_2

Рассмотрим подробно вопрос определения максимально возможного количества комплектов для полок B_1 и B_2, которое можно произвести из ежемесячного запаса ДСП. В зависимости от размеров листов ДСП (2000×3000 мм) и габаритов полок ($1100 \times 250 \times 300$ мм) детали полок B_1 и B_2

можно выкроить различными способами. Рассмотрим три возможных варианта такого раскроя, представленные на рис. 1.6 (затемненные участки – это неиспользованная площадь ДСП).

Согласно 1-му варианту из одного листа ДСП для полок B_1 и B_2 можно выкроить 19 деталей верхней или нижней стенок, а также 9 деталей боковых стенок. По 2-му варианту раскроя получаем 12 деталей верхней или нижней стенок и 36 деталей боковых стенок. По 3-му варианту раскроя получаем 16 деталей верхней или нижней стенок и 18 деталей боковых стенок.

Обозначим количество листов ДСП, раскроенных в течение месяца: по 1-му варианту через y_1 (лист./мес.); по 2-му варианту – y_2 (лист./мес.); по 3-му варианту – y_3 (лист./мес.). При производстве полок нам выгодно стремиться к такому раскрою листов ДСП, при котором из полученных деталей можно укомплектовать максимальное количество полок. Количество комплектов, получаемых из раскроенных деталей, мы ранее обозначили через $Y_{\text{компл}}$.

Таким образом, наша цель описывается целевой функцией

$L(Y) = Y_{\text{компл}} \to \max$	компл./мес.

Количество всех раскроенных листов ДСП не должно превышать 400 (Z_1), то есть ежемесячный запас их на складе:

$y_1 + y_2 + y_3 \le 400$	лист./мес.

Возможные варианты раскроя листов ДСП представлены на рис. 1.6.

При этом, поскольку в каждый комплект входит одна верхняя и одна нижняя стенки, количество нижних и верхних стенок, получаемых при раскрое всех листов ДСП [левая часть], должно быть не меньше чем $2Y_{\text{компл}}$:

$19y_1 + 12y_2 + 16y_3 \ge 2Y_{\text{компл}}$	$\frac{\text{дет.}}{\text{мес.}} \ge \frac{\text{дет.}}{\text{мес.}}$	(1.16)
$\frac{\text{дет.}}{\text{лист.}} \cdot \frac{\text{лист.}}{\text{мес.}} \le \frac{\text{дет.}}{\text{компл}} \cdot \frac{\text{компл}}{\text{мес.}}$		

Аналогичный смысл имеет ограничение, которое задает нижнюю границу количества боковых стенок полок:

$9y_1 + 36y_2 + 18y_3 \ge 2Y_{\text{компл}}.$	$\frac{\text{дет.}}{\text{мес.}} \ge \frac{\text{дет.}}{\text{мес.}}$	(1.17)

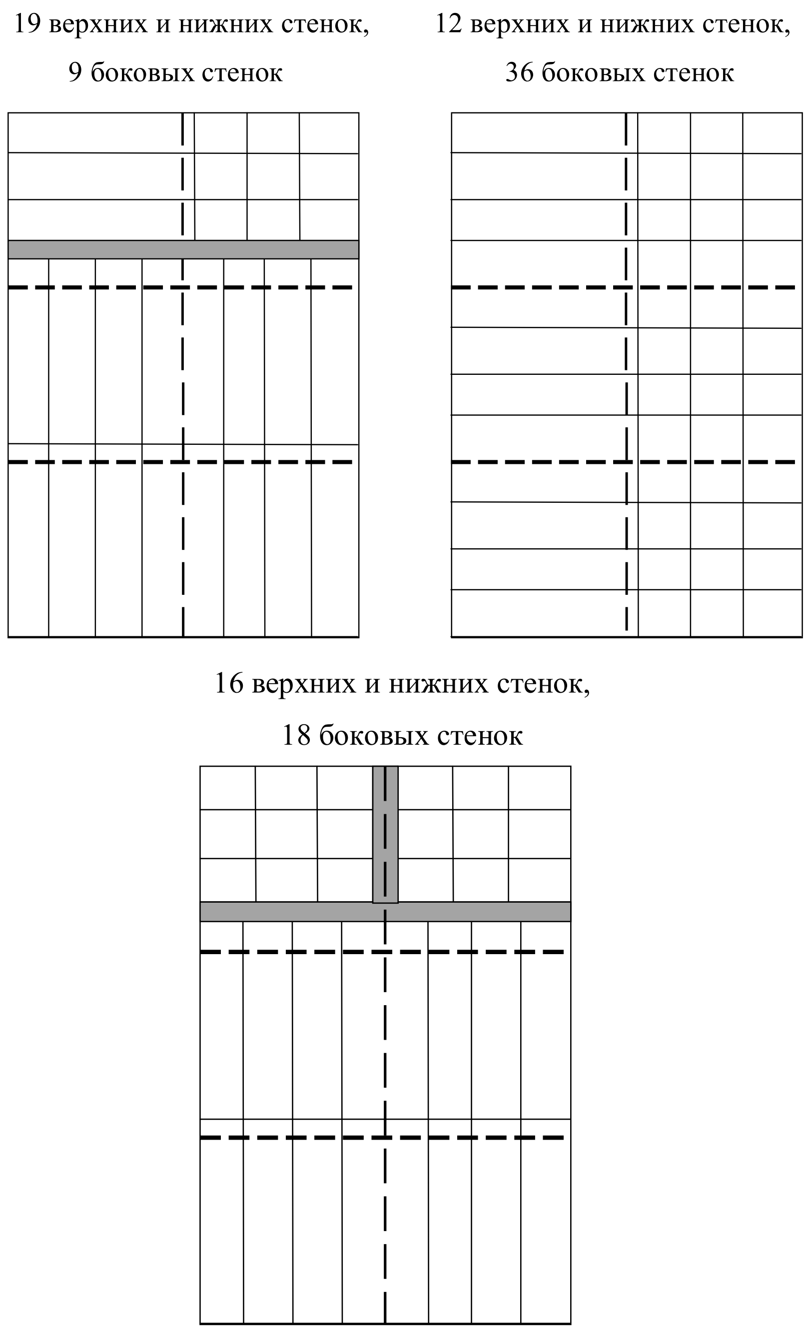


Рис. 1.6

После преобразования описанных неравенств получим модель задачи, позволяющую раскроить максимальное количество комплектов:

$$L(Y) = Y_{\text{компл}} \to \max ;$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \le 400, \\ 19y_1 + 12y_2 + 16y_3 - 2Y_{\text{компл}} \ge 0, \\ 9y_1 + 36y_2 + 18y_3 - 2Y_{\text{компл}} \ge 0, \\ y_1, y_2, y_3, Y_{\text{компл}} \ge 0. \end{cases} \tag{1.18}$$

Таким образом, при решении задачи (1.18) симплекс-методом (например, в Microsoft Excel) переменная $Y_{\text{компл}}$ **непосредственно** определяет значение ЦФ, а переменные y_1, y_2 и y_3 влияют на изменение значения ЦФ **косвенно,** через ограничения. Решив задачу (1.18) для варианта 0, мы получим значение правой части ограничения (1.7) Y=3387 комплектов, после чего сможем решить исходную задачу, модель которой имеет вид:

$$L(X) = 90x_A + 40x_{B_1} + 60x_{B_2} \to \max;$$

$$\begin{cases} 4x_A \le 7040; \\ 0{,}067x_A + 0{,}133x_{B_1} + 0{,}167x_{B_2} \le 2464; \\ 0{,}1x_A \le 154; \\ 0{,}02x_A + 0{,}02x_{B_2} \le 165; \\ 0{,}333x_{B_1} + 0{,}333x_{B_2} \le 162{,}8; \\ x_{B_1} + x_{B_2} \le 3387; \\ x_{B_1} + x_{B_2} \le 3220; \\ 2x_A + 2x_{B_2} \le 2600; \\ x_A \le 1100; \\ x_A + x_{B_1} + x_{B_2} \le 1220; \\ x_A + x_{B_1} + x_{B_2} \le 5300; \\ x_{B_2} \ge 50; \\ 0{,}4x_A - 0{,}6x_{B_1} + 0{,}4x_{B_2} \ge 20; \\ x_A, x_{B_1}, x_{B_2} \ge 0. \end{cases} \tag{1.19}$$

Решив задачу (1.19), получаем

$$x_A = 1100 \text{ шт./мес.}, \; x_{B1} = 0 \text{ шт./мес.}, \; x_{B2} = 120 \text{ шт./мес.}, \qquad L(\overline{x}) = 106\,200 \text{ руб./мес.}, \tag{1.20}$$

т.е. в текущем месяце необходимо произвести 1100 полок А и 120 полок B_2, а производство полок B_1 нецелесообразно. После реализации всех произведенных полок комбинат получит прибыль в размере 106 200 рублей.

Анализ оптимального решения на чувствительность в Microsoft Excel

Проведем анализ чувствительности по результатам поиска решения задачи о мебельном комбинате. Для этого необходимо после запуска в Microsoft Excel задачи на решение в окне **«Результаты поиска решения»** выделить с помощью мыши два типа отчетов: **«Результаты»** и **«Устойчивость»** (рис. 1.7).

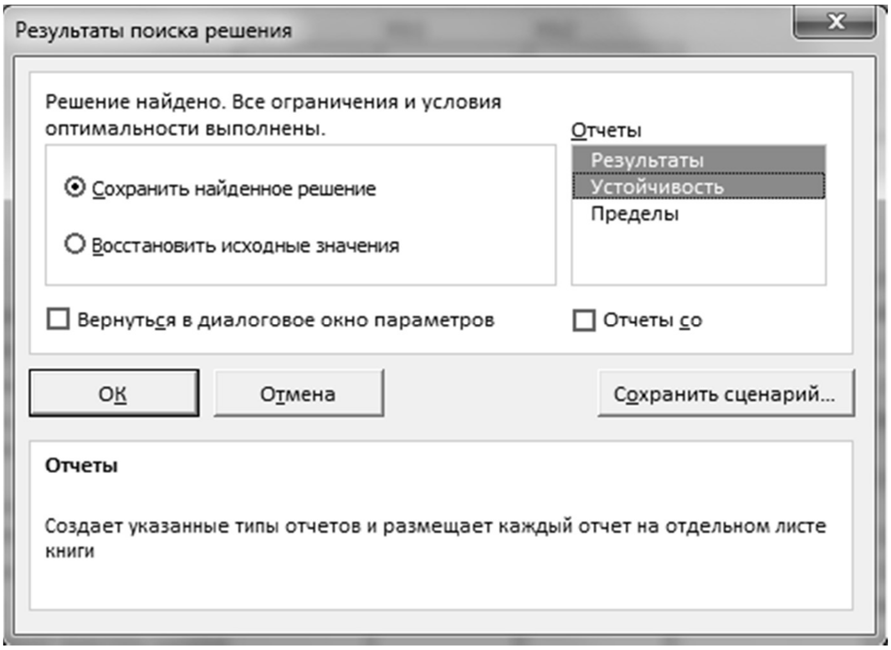


Рис. 1.7

Отчет по результатам

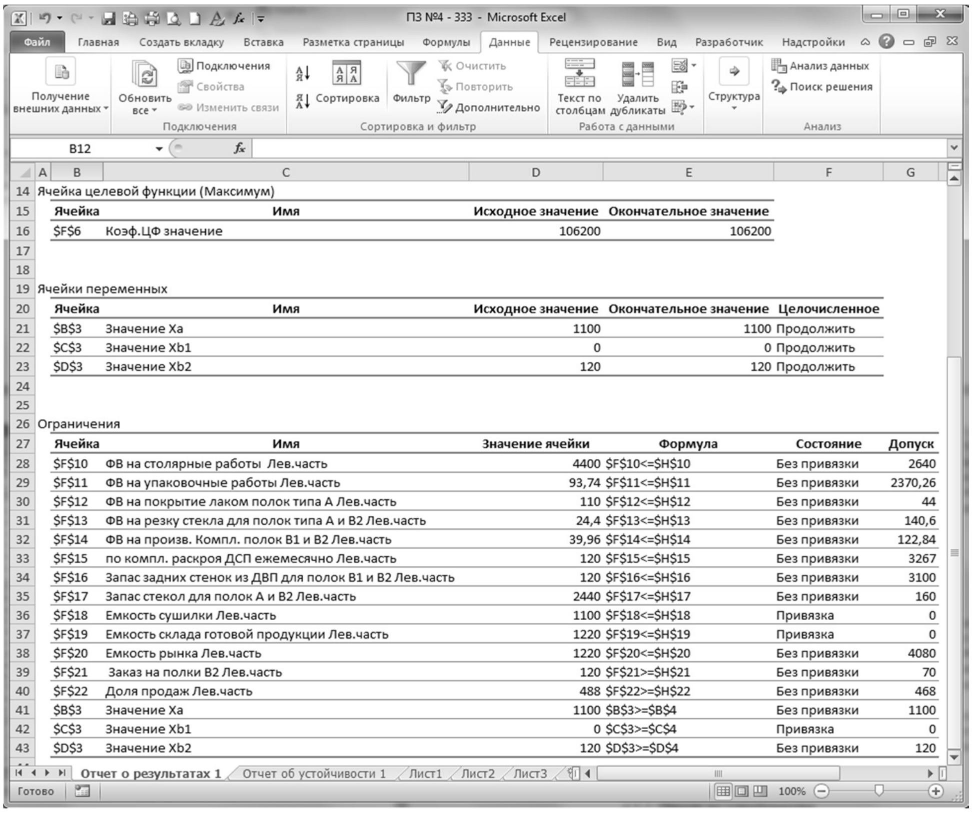
Отчет по результатам состоит из трех таблиц (рис. 1.8):

1) таблица 1 содержит информацию о ЦФ;
2) таблица 2 содержит информацию о значениях переменных, полученных в результате решения задачи;
3) таблица 3 показывает результаты оптимального решения для ограничений и для граничных условий.

Если ресурс используется полностью (то есть ресурс дефицитный), то в графе «Состояние» соответствующее ограничение указывается как «Привязка»; при неполном использовании ресурса (то есть ресурс недефицитный) в этой графе указывается **«Без привязки»**. В графе «**Значение ячейки»** приведены величины использованного ресурса.

Для граничных условий (строки 24, 25, 26 на рис. 1.8) в графе **«Допуск»** показана разность между значением переменной в найденном оптимальном решении и заданным для нее граничным условием.

Таблица 3 отчета по результам дает информацию для анализа возможного изменения запасов *недефицитных* ресурсов при сохранении полученного оптимального значения ЦФ. Так, если на ресурс наложено ограничение типа $\geq$, то в графе **«Допуск»** дается количество ресурса, на которое была превышена минимально необходимая норма.



Ячейка целевой функции (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
$F$6	Коэф.ЦФ значение	106200	106200

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
$B$3	Значение Xa	1100	1100	Продолжить
$C$3	Значение Xb1	0	0	Продолжить
$D$3	Значение Xb2	120	120	Продолжить

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
$F$10	ФВ на столярные работы Лев.часть	4400	$F$10<=$H$10	Без привязки	2640
$F$11	ФВ на упаковочные работы Лев.часть	93,74	$F$11<=$H$11	Без привязки	2370,26
$F$12	ФВ на покрытие лаком полок типа A Лев.часть	110	$F$12<=$H$12	Без привязки	44
$F$13	ФВ на резку стекла для полок типа A и B2 Лев.часть	24,4	$F$13<=$H$13	Без привязки	140,6
$F$14	ФВ на произв. Компл. полок B1 и B2 Лев.часть	39,96	$F$14<=$H$14	Без привязки	122,84
$F$15	по компл. раскроя ДСП ежемесячно Лев.часть	120	$F$15<=$H$15	Без привязки	3267
$F$16	Запас задних стенок из ДВП для полок B1 и B2 Лев.часть	120	$F$16<=$H$16	Без привязки	3100
$F$17	Запас стекол для полок A и B2 Лев.часть	2440	$F$17<=$H$17	Без привязки	160
$F$18	Емкость сушилки Лев.часть	1100	$F$18<=$H$18	Привязка	0
$F$19	Емкость склада готовой продукции Лев.часть	1220	$F$19<=$H$19	Привязка	0
$F$20	Емкость рынка Лев.часть	1220	$F$20<=$H$20	Без привязки	4080
$F$21	Заказ на полки B2 Лев.часть	120	$F$21>=$H$21	Без привязки	70
$F$22	Доля продаж Лев.часть	488	$F$22>=$H$22	Без привязки	468
$B$3	Значение Xa	1100	$B$3>=$B$4	Без привязки	1100
$C$3	Значение Xb1	0	$C$3>=$C$4	Привязка	0
$D$3	Значение Xb2	120	$D$3>=$D$4	Без привязки	120

Рис. 1.8.

Например, анализ строки 26 (рис. 1.8) отчета по результатам для задачи о мебельном комбинате показывает, что полок выпущено на 70 шт. больше, чем было заказано, то есть из 120 полок только 70 шт. пойдут в свободную продажу.

Таким образом, можно дать следующий ответ на вопрос об изменении запаса недефицитного ресурса «Значение XB2»: *обязательный заказ на производство полок* B_2 *можно* ***увеличить на 70 шт****., то есть заказывать до 120 шт., и при этом оптимальное решение (1.20) задачи не изменится.*

Если на ресурс наложено ограничение типа $\leq$, то в графе **«Допуск»** дается количество ресурса, которое не используется при реализации оптимального решения. Так, анализ строки 13 (рис. 1.8) отчета по результатам для задачи о мебельном комбинате показывает, что время столярных работ составило 4440 ч. Неизрасходованным остается 2640 ч из общего фонда времени, отведенного на столярные работы. Из этого следует, что *запас недефицитного ресурса «Фонд времени по столярным работам» можно* ***уменьшить на 2640 ч*** *и это никак не повлияет на оптимальное решение (1.20)*. Отсюда следует, что количество столяров можно уменьшить на 15 человек:

$$\frac{2640 \text{ ч}/\text{мес.}}{8\text{ ч}/(\text{чел.}\cdot\text{см.})\cdot 1\text{см.}/\text{дн.}\cdot 22\text{ дн.}/\text{мес.}} = 15\text{ чел.}$$

или перевести их на выпуск другой продукции.

Анализ строки 23 показывает, что общее количество выпускаемых полок составляет 1220 шт., что меньше предполагаемой емкости рынка на 4080 шт., т.е. *запас недефицитного ресурса «Емкость рынка» может быть* ***уменьшен***

до 1220 полок *и это никак не повлияет на оптимальное решение (1.20).* Другими словами, уменьшение спроса до 1220 полок в месяц никак не скажется на оптимальных объемах выпуска полок.

На основании проведенного анализа можно сделать вывод о том, что существуют причины (ограничения), не позволяющие мебельному комбинату выпускать большее количество полок и получать большую прибыль. Проанализировать эти причины позволяет отчет по устойчивости.

Отчет по устойчивости

Отчет по устойчивости состоит из двух таблиц (рис. 1.9). *Таблица 1* содержит информацию, относящуюся к переменным.

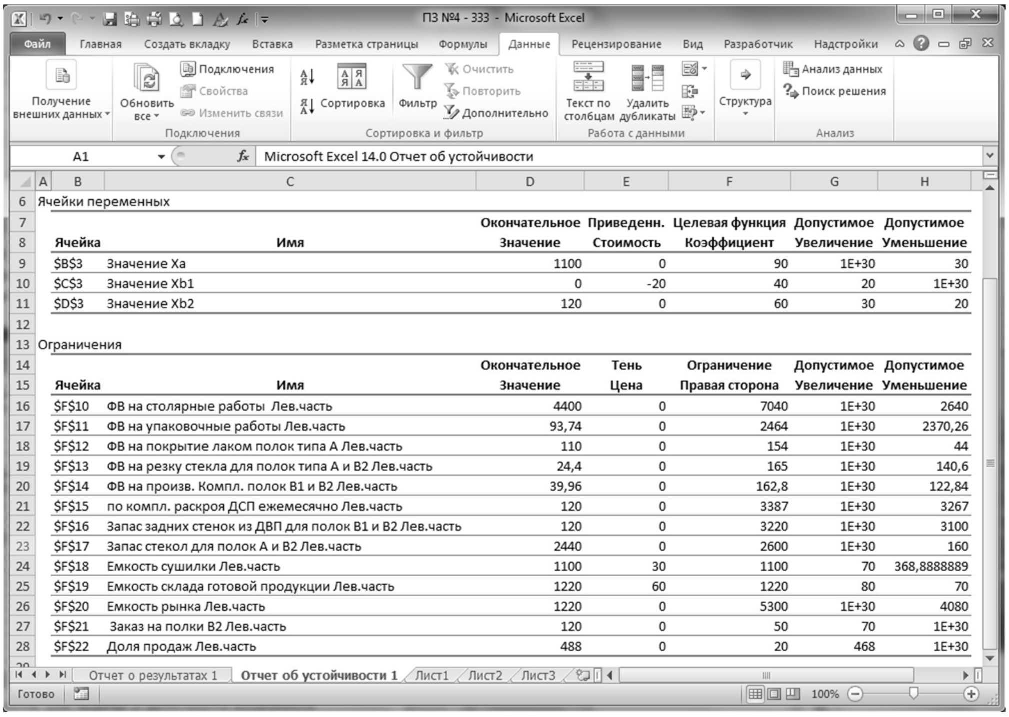
1. Результат решения задачи.

2. Приведенная стоимость, которая показывает, на сколько изменится значение ЦФ в случае принудительного включения единицы этой продукции в оптимальное решение. Например, в отчете по устойчивости для рассматриваемой задачи (см. рис.1.9) нормированная стоимость для полок $В_1$ равна –20 руб./шт. (строка 5). Это означает, что если мы, несмотря на оптимальное решение (2.20), потребуем включить в план выпуска 1 полку $В_1$, то новый план выпуска ($x_А$ =1100; $x_{В1}$ = 1; $x_{В2}$ = 119) принесет нам прибыль 106180 руб./мес., что на 20 руб. меньше, чем в прежнем оптимальном решении.

3. Коэффициенты ЦФ.

4. Предельные значения приращения целевых коэффициентов Δ_{Cj}, при которых сохраняется первоначальное оптимальное решение. Например, *допустимое увеличение цены на полки $В_1$ равно 20 руб./шт., а допустимое уменьшение – практически не ограничено* (строка 10 на рис. 1.9). Это означает, что если цена на полки $В_1$ возрастет более чем на 20 руб./шт., например станет равной 61 руб./шт., то оптимальное решение изменится: станет целесообразным выпуск $В_1$ в количестве 70 шт. А если их цена будет снижаться вплоть до нуля, то оптимальное решение (1.20) останется прежним.

Примечание 1.3. При выходе за указанные в отчете по устойчивости пределы измения цен оптимальное решение может меняться как по номенклатуре выпускаемой продукции, так и по объемам выпуска (без изменения номенклатуры).



Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$3	Значение Xa	1100	0	90	1E+30	30
$C$3	Значение Xb1	0	-20	40	20	1E+30
$D$3	Значение Xb2	120	0	60	30	20

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$F$10	ФВ на столярные работы Лев.часть	4400	0	7040	1E+30	2640
$F$11	ФВ на упаковочные работы Лев.часть	93,74	0	2464	1E+30	2370,26
$F$12	ФВ на покрытие лаком полок типа А Лев.часть	110	0	154	1E+30	44
$F$13	ФВ на резку стекла для полок типа А и В2 Лев.часть	24,4	0	165	1E+30	140,6
$F$14	ФВ на произв. Компл. полок В1 и В2 Лев.часть	39,96	0	162,8	1E+30	122,84
$F$15	по компл. раскроя ДСП ежемесячно Лев.часть	120	0	3387	1E+30	3267
$F$16	Запас задних стенок из ДВП для полок В1 и В2 Лев.часть	120	0	3220	1E+30	3100
$F$17	Запас стекол для полок А и В2 Лев.часть	2440	0	2600	1E+30	160
$F$18	Емкость сушилки Лев.часть	1100	30	1100	70	368,8888889
$F$19	Емкость склада готовой продукции Лев.часть	1220	60	1220	80	70
$F$20	Емкость рынка Лев.часть	1220	0	5300	1E+30	4080
$F$21	Заказ на полки В2 Лев.часть	120	0	50	70	1E+30
$F$22	Доля продаж Лев.часть	488	0	20	468	1E+30

Рис. 1.9.

Таблица 2 (рис. 1.9) содержит информацию, относящуюся к ограничениям.

1. Величина использованных ресурсов в колонке **«Окончательное значение»**.

2. Предельные значения приращения ресурсов Δb_i. В графе **«Допустимое Уменьшение»** показывают, на сколько можно уменьшить (устранить излишек) или увеличить (повысить минимально необходимое требование) ресурс, сохранив при этом оптимальное решение.

Рассмотрим анализ *дефицитных* ресурсов, так как анализ *недефицитных* ресурсов был дан в подразд. 1.5.1. Анализируя отчет по результатам, мы установили, что существуют причины (ограничения), не позволяющие мебельному комбинату выпускать большее, чем в оптимальном решении, количество полок и получать более высокую прибыль.

В рассматриваемой задаче (вариант 0) такими ограничениями *являются дефицитные* ресурсы «Емкость сушилки» и «Емкость склада готовой продукции». Поскольку знак ограничений этих запасов имеет вид $\le$, то возникает вопрос, на сколько максимально должна возрасти емкость этих помещений, чтобы обеспечить увеличение выпуска продукции. Ответ на этот вопрос показан в графе **«Допустимое Увеличение»**.

Емкость сушилки имеет смысл увеличить самое большее на 70 полок, а емкость склада готовой продукции – на 80 полок. Это приведет к новым оптимальным решениям, увеличивающим прибыль по сравнению с (1.20). Дальнейшее увеличение емкостей сушилки и склада сверх указанных пределов не будет больше улучшать решение, т.к. уже другие ресурсы станут связывающими.

3. **Ценность дополнительной единицы i-го ресурса** (теневая цена) рассчитывается только для *дефицитных* ресурсов. После того как мы установили, что увеличение емкостей сушилки и склада приведет к новым планам выпуска, обеспечивающим более высокую прибыль, возникает следующий вопрос. Что выгоднее в первую очередь расширять: сушилку или склад? Ответ на этот вопрос дает графа **«Тень цена»**. Для емкости сушилки она равна 30 руб./шт., а для склада – 60 руб./шт. (см. рис. 1.9), то есть каждая полка, которую дополнительно можно будет поместить в сушилку, увеличит прибыль на 30 руб., а каждая полка, которую дополнительно можно будет поместить на склад, увеличит прибыль на 60 руб. Отсюда вывод: *в первую очередь выгодно увеличивать емкость склада готовой продукции.*

3. Анализ полученных результатов. Защита работы.

По результатам работы в рабочей тетради оформляется отчет о проделанной работе. Отчет должен содержать:

1. Тему и цель практического занятия.
2. Постановку задачи на занятие.
3. Результаты решения задачи.
4. Выводы по практическому занятию.

Решение задачи производится в табличном редакторе Microsoft Excel. Полученные результаты демонстрируются преподавателю на экране монитора ПЭВМ, а оформленный отчет представляется преподавателю для проверки.

Примерные вопросы на защите работы

1. Что такое распределительная задача, общая распределительная задача?

2. Что такое математическое и линейное программирование?

3. Какова общая форма записи модели ЛП?

1. Что такое допустимое и оптимальное решения?

5. Каковы основные этапы построения математической модели ЛП?

6. Каков экономический смысл и математический вид ЦФ задачи о производстве полок?

7. Как можно классифицировать ограничения задачи о полках по их экономическому смыслу?

8. Чем отличается построение ограничений, использующих данные о трудоемкости и производительности работ?

9. Объясните способ построения каждого конкретного ограничения задачи о полках.

10. Каким образом решается задача оптимального раскроя листов ДСП?

11. Каким образом единицы измерения параметров задачи используются для выявления ошибок построения ограничений?

12 Что такое связывающие, несвязывающие, избыточные ограничения; дефицитные и недефицитные ресурсы?

13. Каковы предпосылки и основные задачи анализа оптимального решения на чувствительность?

11. Каким образом, опираясь на результаты графического анализа, можно численно рассчитать новый запас недефицитного ресурса?

16. Что такое ценность дополнительной единицы i-го ресурса?

17. Как численно определить диапазон изменения коэффициентов ЦФ, не изменяющий оптимального решения?

18. Какую информацию о чувствительности оптимального решения задачи ЛП можно получить из отчета по результатам и отчета по устойчивости?

19. Проанализируйте на чувствительность задачу о производстве полок (согласно своему варианту)?

подполковник ____________________ И.Кочанов

(воинское звание, подпись, инициал имени, фамилия автора)

«_____» ___________ 20__ г.