ВОЕННО-КОСМИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ ИМЕНИ А.Ф. МОЖАЙСКОГО

Кафедра управления организационно-техническими системами космического назначения
(наименование кафедры)

УТВЕРЖДАЮ

Начальник 23 кафедры

полковник Г.Дудалев
(воинское звание, подпись, инициал имени, фамилия)
«____» ____________ 20__ г.

Автор: доцент кафедры, кандидат технических наук, подполковник
(должность, ученая степень, ученое звание, воинское звание,
И.КОЧАНОВ
инициал имени, фамилия)

Задание на практическое занятие № 6

Тема: Решение задачи линейного программирования графическим методом
(наименование темы лекции по тематическому плану изучения дисциплины)

по дисциплине: Исследование операций
(наименование дисциплины)

Обсуждено и одобрено на заседании кафедры
(предметно-методической комиссии)
«___» ____________ 20__ г.
протокол № ___

Санкт-Петербург
2019

Содержание занятия и время

Введение	10 мин.
Учебные вопросы (основная часть):	
1. Определение исходных данных.	10 мин.
2. Решение задачи линейного программирования графическим методом.	35 мин.
3. Анализ полученных результатов. Защита работы.	30 мин.
Заключение	5 мин.

Место проведения: специализированная аудитория кафедры.

Общее время проведения занятия – 90 мин

Литература:

Основная:

1. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика в экономике: математические методы и модели: Учебник для бакалавров – М.: Юрайт, 2016. – 541 с.

2. Шафигуллин И.Ш., Тюрин Р.М., Зубачев А.М. Исследование операций: Практикум – СПб.: ВКА имени А.Ф.Можайского, 2015. – 99 с.

Введение

Практическое занятие №6 посвящено графическому методу решения задач линейного программирования. *Целью* практического занятия является приобретение навыков решения задачи линейного программирования графическим методом.

1. Определение исходных данных.

Исходные данные вариантов задач к практической работе 1

Решить задачи с использованием графического метода:

1. $L(\bar{x}) = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6; \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 3; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. $L(\bar{x}) = 2x_1 - 10x_2 \rightarrow \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0; \\ x_1 - 5x_2 \geq -5; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3. $L(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 8; \\ x_1 \leq 4; \\ 2x_2 \geq 5; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

4. $L(\bar{x}) = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3; \\ -3x_1 + x_2 \leq 6; \\ x_2 \geq 4; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

5. $L(\bar{x}) = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9; \\ x_1 + 2x_2 \geq 8; \\ x_1 + 6x_2 \geq 12; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

6. $L(\bar{x}) = 4x_2 \rightarrow \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 18; \\ 2x_1 - x_2 \geq 0; \\ 5x_1 - 3x_2 \leq 15; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

7. $L(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 15; \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 20; \\ x_2 \geq 5; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

8. $L(\bar{x})$ = $6x_1 + 10x_2$ → max при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \leq 6; \\ -6x_1 + 2x_2 \leq 12; \\ 2x_2 \geq 8; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

9. В суточный рацион включают два продукта питания $П_1$ и $П_2$, причем продукта $П_1$ должно войти в дневной рацион не более 200 ед. Стоимость 1 ед. продукта $П_1$ составляет 2 рубля, продукта $П_2$ – 4 рубля. Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта, минимальные нормы потребления указаны в табл. 1.2. Определить оптимальный рацион питания, стоимость которого будет наименьшей.

Таблица 1.2

Изделия	Минимальная норма потребления	Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта	
		$П_1$	$П_2$
A	120	0,2	0,2
B	160	0,4	0,2

10. $L(\bar{x})$ = $3x_1 + 4x_2$ → max при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4; \\ x_1 + x_2 \leq 3; \\ 2x_1 + x_2 \leq 8; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

11. $L(\bar{x})$ = $1{,}5x_1 + 2x_2$ → max при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 7; \\ x_1 + 2x_2 \geq 8; \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

12. $L(\bar{x})$ = $-2x_1 + x_2$ → max при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8; \\ x_1 - 3x_2 \geq 6; \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 3; \\ -x_1 + 3x_2 \leq -5; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Провести анализ задач с использованием графического метода:

13. $L(\bar{x}) = x_1 + x_2 \to \max (\min)$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16; \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8; \\ x_1 + 3x_2 \ge 9; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

14. Завод выпускает изделия двух типов: *A* и *B*. При этом используется сырье четырех видов. Расход сырья каждого вида на изготовление единицы продукции и запасы сырья заданы в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Изделия	Сырье			
	1	2	3	4
A	2	1	0	2
B	3	0	1	1

Запасы сырья 1-го вида составляют 21 ед., 2-го вида – 4 ед., 3-го вида – 6 ед. и 4-го вида – 10 ед. Выпуск одного изделия типа *A* приносит доход 300 руб., одного изделия типа *B* – 200 руб. Составить план производства, обеспечивающий наибольший доход.

15. Обработка деталей *A* и *B* может производиться на трех станках, причем каждая деталь должна последовательно обрабатываться на каждом из станков. Прибыль от реализации детали *A* – 100 руб., детали *B* – 160 руб. Исходные данные приведены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Станки	Норма времени на обработку одной детали, ч		Время работы станка, ч
	A	*B*	
1	0,2	0,1	100
2	0,2	0,5	180
3	0,1	0,2	100

Определить производственную программу, максимизирующую прибыль при условии: спрос на деталь *A* – не менее 300 шт., на деталь *B* – не более 200 шт.

2. Решение задачи линейного программирования графическим методом.

Порядок выполнения работы

1. Согласно номеру своего варианта выберите условие задачи и постройте ее модель.

2. Найдите оптимальное решение задачи графическим методом и продемонстрируйте его преподавателю.

Теоретические сведения

Наиболее простым и наглядным методом линейного программирования является графический метод. Он применяется для решения задач ЛП с двумя переменными, заданными в неканонической форме, и многими переменными в канонической форме при условии, что они содержат не более двух свободных переменных.

С геометрической точки зрения в задаче линейного программирования ищется такая угловая точка или набор точек из допустимого множества решений, на котором достигается самая верхняя (нижняя) линия уровня, расположенная дальше (ближе) остальных в направлении наискорейшего роста.

Для нахождения экстремального значения целевой функции при графическом решении задач ЛП используют вектор $\overline{\mathrm{grad}\ L}(\bar{x})$ на плоскости X_1OX_2, который обозначим $\overline{C}$. Этот вектор показывает направление наискорейшего изменения целевой функции, он равен

$$\overline{grad}\, L(\bar{x}) = \overline{C} = \frac{\partial L}{\partial x_1}\bar{e}_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2}\bar{e}_2,$$

где $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ – единичные векторы по осям OX_1 и OX_2 соответственно; таким образом, $\overline{C} = (\partial L/\partial x_1,\ \partial L/\partial x_2)$. Координатами вектора $\overline{C}$ являются коэффициенты целевой функции $L(\bar{x})$.

Алгоритм решения задач

1. Находим область допустимых решений системы ограничений задачи.
2. Строим вектор $\overline{C}$.
3. Проводим линию уровня L_0, которая перпендикулярна $\overline{C}$.
4. Линию уровня перемещаем по направлению вектора $\overline{C}$ для задач на максимум и в направлении, противоположном $\overline{C}$, для задач на минимум.

Перемещение линии уровня производится до тех пор, пока у нее не окажется только одна общая точка с областью допустимых решений. Эта точка, определяющая единственное решение задачи ЛП, и будет точкой экстремума.

Если окажется, что линия уровня параллельна одной из сторон ОДР, то в таком случае экстремум достигается во всех точках соответствующей стороны, а задача ЛП будет иметь бесчисленное множество решений. Говорят, что такая задача ЛП имеет *альтернативный оптимум,* и ее решение находится по формуле

$$\overline{X}_{\text{опт}} = (1-t)\overline{X}_1 + t\overline{X}_2,$$

где $0 \le t \le 1$, $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ – оптимальные решения в угловых точках ОДР.

Задача ЛП может быть неразрешима, когда определяющие ее ограничения окажутся противоречивыми.

5. Находим координаты точки экстремума и значение целевой функции в ней.

Выбор оптимального варианта выпуска изделий

Завод выпускает изделия двух типов: *А* и *В*. При этом для их изготовления используется сырье двух видов: *С* и *Д*. Расход сырья каждого вида на изготовление единицы продукции и суточные запасы сырья заданы в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Исходный продукт	Расход исходных материалов на 1т горючего		Запас, т
	A	*B*	
C	800	500	400
Д	400	800	365

Изучение рынка заказов показало, что суточный заказ на изделие *А* превышает заказ на изделие *В* не более чем на 100 т. Кроме того, установлено, что заказ на изделие *В* не превышает 350 т в сутки. Розничная цена 1 т изделия *А* – 16 000 руб., изделия *В* – 14 000 руб. Какое количество изделий каждого вида должен производить завод, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Решение

Обозначим: x_1 – суточный объем выпуска изделие *А*, т; x_2 – суточный объем выпуска изделие *В*, т.

Составим математическую модель задачи.

Целевая функция будет иметь вид

$$L(\bar{x}) = 16x_1 + 14x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \leq 400; \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \leq 365; \\ x_1 - x_2 \leq 100; \\ x_2 \leq 350; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0; \end{cases}$$

OABDEF – область допустимых решений (рис. 1.1).

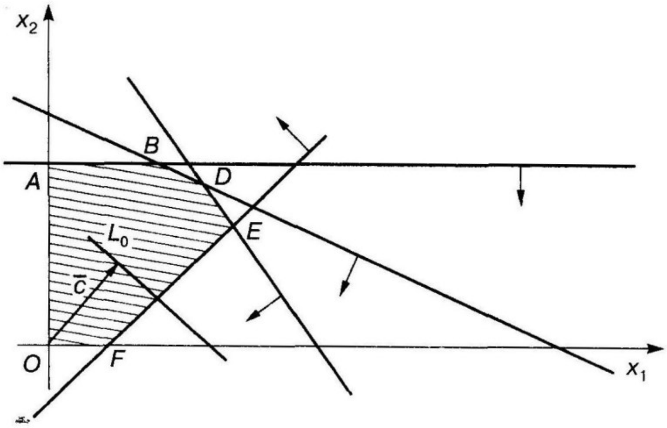

Рис. 1.1

Строим вектор $\overline{c}$ (1, 1). Линия уровня L_0 задается уравнением

$$16x_1 + 14x_2 = \text{const}.$$

Перемещаем линию уровня по направлению вектора $\overline{c}$. Точкой выхода L_0 из области допустимых решений является точка *D*, ее координаты определяются как пересечение прямых, заданных уравнениями:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 400; \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 = 365. \end{cases}$$

Решая систему, получим координаты точки *D* (312,5; 300), в которой и будет оптимальное решение, т.е.

$$\overline{X}_{\text{опт}} = \ (312{,}5; 300),$$

при этом

$$L(\bar{x})_{max} = 16\,000 \cdot 312{,}5 + 14\,000 \cdot 300 = 9\,200\,000 \text{ руб.}$$

Таким образом, завод должен выпускать в сутки 312,5 т изделия *A* и 300 т изделия *B*, при этом доход от реализации составит 9 200 000 рублей.

Экономический анализ задач с использованием графического метода

Проведем экономический анализ рассмотренной выше задачи по производству изделий.

Математическая модель задачи имеет вид

$$L(\bar{x}) = 16x_1 + 14x_2 \ \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400 & \text{ограничение 1.1;} \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 365 & \text{ограничение 1.2;} \\ x_1 - \ x_2 \le 100 & \text{ограничение 1.3;} \\ x_2 \le 350 & \text{ограничение 1.4;} \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. & \end{cases}$$

Согласно найденному оптимальному решению, заводу необходимо выпускать в сутки 312,5 т изделие *A* и 300 т – изделие *B*, при этом максимально возможный доход от реализации составит 9 200 000 руб.

Определим, как влияет на оптимальное решение увеличение или уменьшение запасов исходных продуктов. Для анализа задачи примем, что неравенства системы ограничений могут быть активными или пассивными. Если прямая проходит через точку, в которой находится оптимальное решение, то будем считать, что она представляет активное ограничение. В противном случае, прямая относится к пассивному ограничению.

Если ограничение активное, то будем считать, что соответствующий ресурс является дефицитным, так как он используется полностью. Если ограничение пассивное, то оно недефицитное и имеется на заводе в избытке.

Рассмотрим увеличение ресурса правой части ограничения (1.1) по сырью *C* (рис. 1.2). При перемещении параллельно самой себе прямой (1) вправо до пересечения с прямыми (2) и (3) в точке *M* ограничение (1.1) будет оставаться активным. Точку *M* определим, как точку пересечения прямых (2) и (3):

$$\begin{cases} 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 = 365; \\ x_1 - x_2 = 100. \end{cases}$$

Откуда получаем *M* (370,83; 270,3).

Подставляя координаты точки *M* в уравнение (1.1), получим предельно допустимый суточный запас сырья *C*:

$$0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 0{,}8 \cdot 370{,}83 + 0{,}5 \cdot 270{,}3 = 432{,}1 \text{ т},$$

при этом величина дохода составляет

$$L(\bar{x}) \; = \; 16\,000 \cdot 370{,}83 + 14\,000 \cdot 270{,}3 = 9\,724\,900 \text{ руб.}$$

Рассмотрим увеличение ограничения по сырью *Д* (рис. 1.3). При перемещении параллельно самой себе прямой (2) вправо до пересечения с прямыми (1) и (4) в точке *N* ограничение (1.2) будет оставаться активным. Точку *N* определим, как точку пересечения прямых:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 400; \\ x_2 = 350. \end{cases}$$

Откуда получаем *N* (281,25; 350).

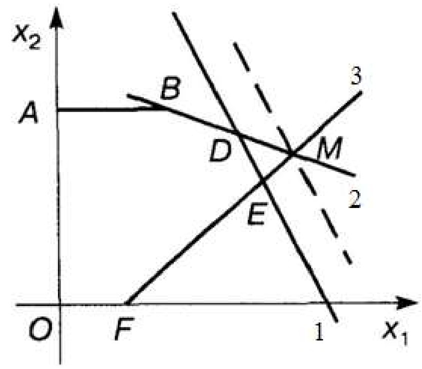

Рис. 1.2

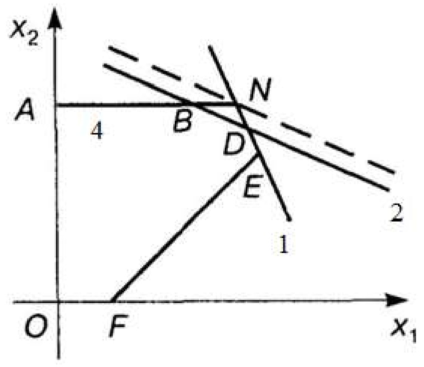

Рис. 1.3

Предельно допустимый суточный запас сырья можно увеличивать до значения

$$0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 = 0{,}4 \cdot 281{,}25 + 0{,}8 \cdot 350 = 392{,}5 \text{ т},$$

при этом величина дохода составит

$$L(\bar{x}) = 16\,000 \cdot 281{,}25 + 14\,000 \cdot 350 = 9\,400\,000 \text{ руб.}$$

Рассмотрим возможность изменения правой части пассивных ограничений (1.3) и (1.4). Не изменяя оптимальное решение (рис. 1.4), прямую (3) можно перемещать параллельно самой себе вверх до пересечения с точкой *D* (312,5; 300), т.е. правую часть ограничения (3) можно уменьшать до величины

$$312{,}5 - 300 = 12{,}5 \text{ т.}$$

Прямую (3) можно перемещать параллельно самой себе вниз до пересечения с осью OX_1 в точке *P* (500; 0), т.е. правую часть ограничения (1.3) можно увеличивать до 500 т.

Таким образом, при неизменном оптимальном решении разница в заказах на изделие *A* и изделие *B* может изменяться в диапазоне от 12,5 до 500 т.

Аналогично, не изменяя оптимальное решение (рис. 1.5), прямую (4) можно перемещать параллельно самой себе вверх до пересечения с осью OX_2 в точке *R* (0; 456,25) или вниз до пересечения с прямой (1) в точке *D* (312,5; 300).

Таким образом, при неизменном оптимальном решении заказ на изделие *B* может изменяться в диапазоне от 300 до 456,25 т.

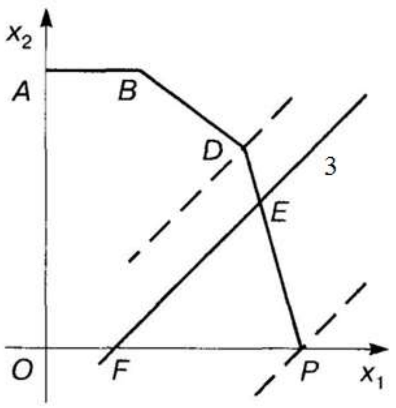

Рис. 1.4

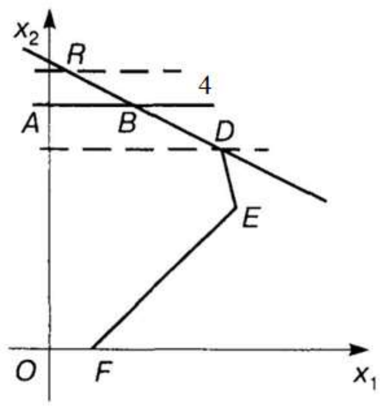

Рис. 1.5

Проведем анализ задачи по пределам возможного изменения коэффициентов целевой функции, т.е. по диапазону оптовых цен на бензин, при котором не происходит изменения оптимального решения. Изменение коэффициентов целевой функции оказывает влияние на наклон линии уровня. Уравнение линии уровня записывается в общем виде (рис. 1.6):

$$c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const.}$$

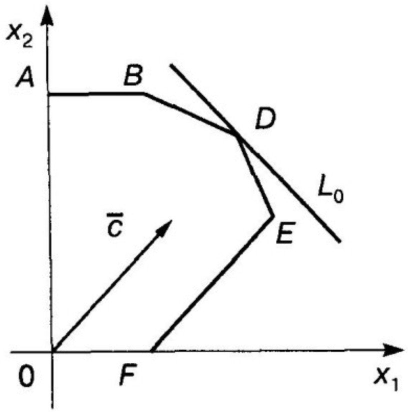

Рис. 1.6

Угловой коэффициент прямой (1):

$$K_1 = -8/5.$$

Так как прямые совпадают, то K = K_1, откуда $c_{1max} = 22{,}4$ при $c_2 = 14$. Коэффициент c_1 можно уменьшать до совпадения линии уровня с прямой (2), поэтому

$$-c_1/14 = -1/2, \qquad c_{1mi} \ = 7.$$

Таким образом, оптимальное решение задачи не изменится, если розничная цена одной тонны изделия *А* лежит в диапазоне от 7 до 22 400 рублей, при этом доход будет от 6 387 500 до 11 200 000 рублей.

Аналогичные рассуждения для случая c_2 = 16 позволили сделать вывод, что оптимальное решение задачи не изменится, если розничная цена одной тонны изделия *В* лежит в диапазоне от 10 до 32 000 рублей, при этом доход будет от 8 000 000 до 14 600 000 рублей.

3. Анализ полученных результатов. Защита работы.

По результатам работы в рабочей тетради оформляется отчет о проделанной работе. Отчет должен содержать:

1. Тему и цель практического занятия.
2. Постановку задачи на занятие.
3. Содержание основных этапов занятия.
   - результаты определение исходных данных;
   - результаты решения задачи графическим методом и анализ полученных данных.
4. Выводы по практическому занятию.

Оформленный отчет представляется преподавателю для проверки.

Примерные вопросы на защите работы

1. Что такое математическое программирование?
2. Что такое линейное программирование?
3. Что необходимо осуществить для формирования математической модели задачи ЛП?
4. Запишите математическую модель задачи ЛП в общем виде.
5. Запишите математическую модель задачи ЛП в кратком виде.
6. Для решения каких задач ЛП применим графический метод?
7. Перечислите последовательность решения задачи ЛП графическим методом.
8. Какие задачи ЛП имеют альтернативный оптимум?

подполковник ____________________ И.Кочанов
(воинское звание, подпись, инициал имени, фамилия автора)

«_____» ___________ 20__ г.