Лекция № 10. Постановка задачи и схема оценивания эффективности операции

Цель занятия: ***Уяснить постановку задачи и схему оценивания эффективности операции***

Учебные вопросы:

1. Схема оценивания эффективности операций
2. Математическая формулировка задачи оценивания эффективности целенаправленных процессов

1. Схема оценивания эффективности операций

Введение

Как было показано, по качеству результатов операции непосредственно судить о ее качестве (эффективности) нельзя (пригодность результатов операции есть случайное событие). Другими словами – эффективности операции не наблюдаема и измеряется косвенно путём вычисления вероятности достижения цели (пригодности результатов операции ее целям).

Таким образом, оценивание эффективности операции осуществляется в два этапа (на двух уровнях).

На первом уровне (1-й этап):

1.1) определяется ПКРО - вектор $\hat{\mathbf{Y}}_{<3>}$ показателей $\hat{\upsilon}, \hat{r}, \hat{\tau}$ его частных результатов (эффектов)

$$\hat{\mathbf{Y}}_{<3>} = <\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3> = <\hat{\upsilon}, \hat{r}, \hat{\tau}>;$$

1.2) задаются требования к качеству результатов операции – область $\{\hat{\mathbf{Y}}^{\partial}_{<3>}\}$ допустимых значений показателей $\hat{\upsilon}^{\partial}, \hat{r}^{\partial}, \hat{\tau}^{\partial}$ качества ее результатов

$$\{\hat{\mathbf{Y}}^{\partial}{}_{<3>}\} = <\hat{y}_1^{\partial}, \hat{y}_2^{\partial}, \hat{y}_3^{\partial}> = <\hat{\upsilon}^{\partial}, \hat{r}^{\partial}, \hat{\tau}^{\partial}>;$$

1.3) формулируется критерий оценивания качества результатов операции

$$\text{G: } \hat{\mathbf{Y}}_{<3>} \in \{\hat{\mathbf{Y}}^{\partial}_{<3>}\} \neq \mathbf{U}.$$

На втором уровне (2-й этап):

2.1) определяется (*вычисляется*) показатель эффективности операции – вероятность достижения ее цели:

$$P_{ДЦ} = P(\hat{\mathbf{Y}}_{<3>} \in \{\hat{\mathbf{Y}}^{\partial}_{<3>}\});$$

2.2) определяются (задаются, предъявляются) требования к эффективности операции – потребное (минимально-допустимое) или оптимальное (максимальное) значение вероятности $P_{ДЦ}$ достижения цели операции

$$P^{ТР}_{ДЦ}, P^{ОПТ}_{ДЦ} = P^{MAX}_{ДЦ};$$

2.3) формулируется и реализуется один из выбранных (обоснованных) критериев оценивания эффективности операции:

– критерий пригодности G: $P_{ДЦ} \geq P^{ТР}_{ДЦ};$

– критерии оптимальности O: $P_{ДЦ} = P^{ОПТ}_{ДЦ};$

2.4) производится собственно оценивание эффективности операции (принимается решение о пригодности или оптимальности данной операции).

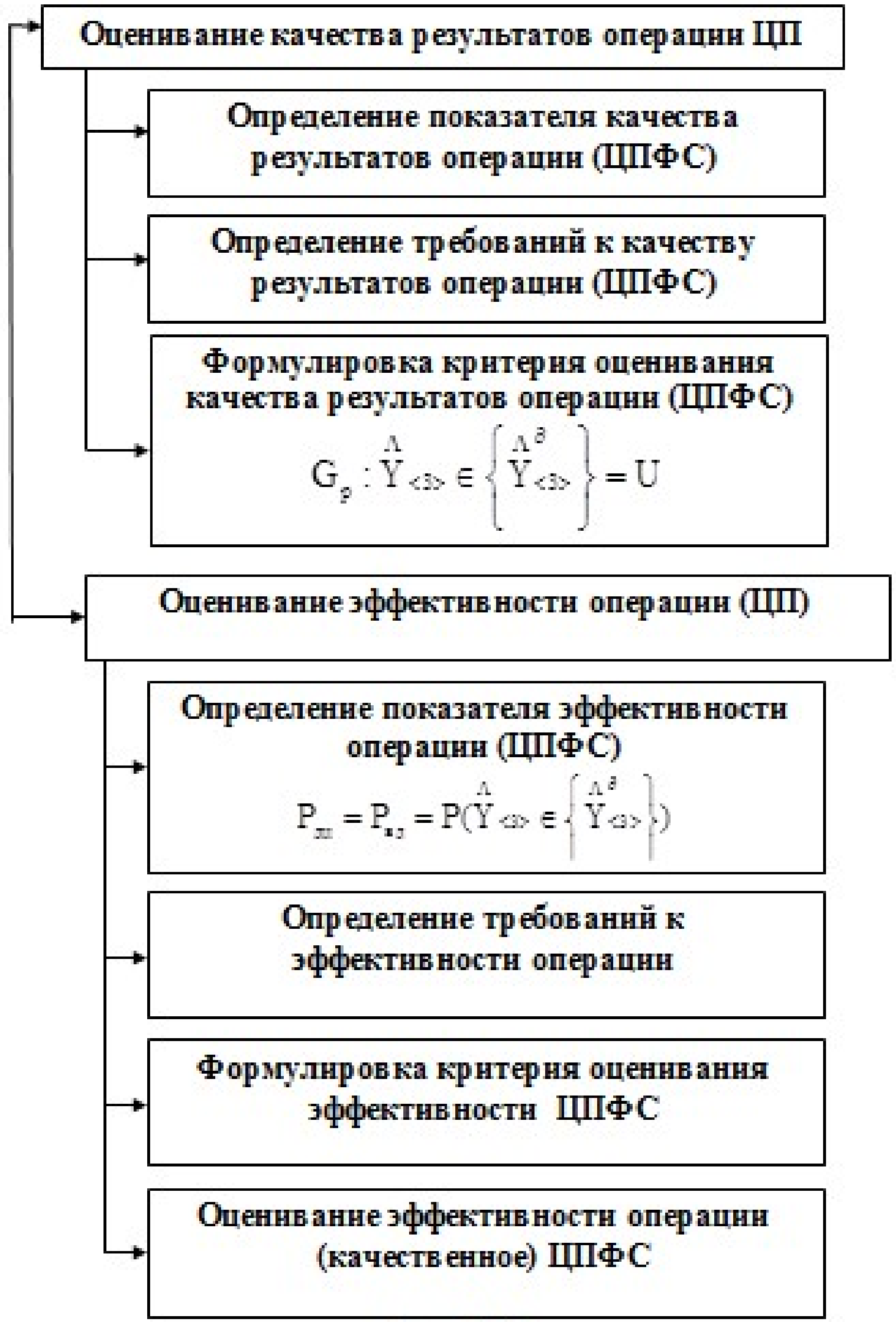

Оценивание качества результатов операции ЦП
Определение показателя качества результатов операции (ЦПФС)
Определение требований к качеству результатов операции (ЦПФС)
Формулировка критерия оценивания качества результатов операции (ЦПФС)
$G_p : \hat{Y}_{<з>} \in \left\{ \hat{Y}^{в}_{<з>} \right\} = U$
Оценивание эффективности операции (ЦП)
Определение показателя эффективности операции (ЦПФС)
$P_{пп} = P_{кз} = P(\hat{Y}_{<з>} \in \left\{ \hat{Y}^{в}_{<з>} \right\})$
Определение требований к эффективности операции
Формулировка критерия оценивания эффективности ЦПФС
Оценивание эффективности операции (качественное) ЦПФС

Рис. 2.3.3.

2. Математическая формулировка задачи оценивания эффективности целенаправленных процессов

СРЕДНЯЯ ВЕРОЯТНОСТЬ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛИ

Как было показано, оценивание эффективности операции должно *проводиться на двух уровнях, в два этапа, первый из которых завершается* оцениванием качества её результатов, точнее, формулировкой её цели в виде критерия пригодности *G*, а второй - оцениванием её эффективности по одному из принятых критериев *G* или *O*. При этом на первом этапе решается задача скаляризации путём перехода от вектора $Y_{<3>}$ к единственному критерию $\widehat{Y}_{<3>} \in \left\{\widehat{Y}^{d}_{<3>}\right\}$, а на втором этапе - задача детерминизации путем перехода от случайного события $\widehat{Y}_{<3>} \in \left\{\widehat{Y}^{d}_{<3>}\right\}$ к его вероятности $P_{ДЦ}$. Так обстоит дело на уровне идей. Для материализации этих идей их необходимо формализовать с помощью математических моделей исследуемых объектов (ЦУТС и ЦНПФС) и на основе последних построить методы и методики, позволяющие решать конкретные практические задачи.

Таким образом, оценивание эффективности ЦНП заключается в определении (вычислении) показателя эффективности $P_{ДЦ}$ и его сравнении с требуемым (или оптимальным) значением.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как подтверждают теория и практика при решении оптимизационных задач могут быть реализованы лишь вычислительные схемы решения задач поиска оптимума скалярной детерминированной "критериальной" функции от детерминированных аргументов (возможно векторных). Все другие оптимизационные процедуры неизбежно содержат в себе элементы субъективизма и произвола.

Поэтому весьма актуальными остаются так называемые проблемы "скаляризации" и "детерминизации" задачи исследования. Следует подчеркнуть, что в рамках рассматриваемой методологии обе указанные проблемы решаются автоматически. На первом этапе решается задача скаляризации путем перехода от вектора $\mathbf{Y}_{<3>}$ к единственному критерию $\mathbf{Y}_{<3>} \in \{\mathbf{Y}^{\partial}_{<3>}\}$, а на втором этапе – задача детерминизации путем перехода от случайного события ($\hat{\mathbf{Y}}_{<3>} \in \{\hat{\mathbf{Y}}^{\partial}_{<3>}\}$) к его вероятности $P_{ДЦ}$.

И так,

$$P_{ДЦ} = P\left(\hat{Y}_{\langle 3\rangle} \in \left\{\hat{Y}^{д}_{\langle 3\rangle}\right\}\right), \tag{3.2.1}$$

где $\hat{Y}_{<3>}$ - показатель качества результатов операции (в симплексно - канонической форме);

$\{\hat{Y}^{d}_{<3>}\}$ - область допустимых значений показателя $\hat{Y}_{<3>}$.

Из (3.2.1) следует, что для вычисления показателя $P_{ДЦ}$ эффективности операции должны быть заданы законы распределения случайного вектора $\hat{Y}_{<3>}$ и случайной области $\{\hat{Y}^{d}_{<3>}\}$. Универсальной формой первого, как известно, является функция распределения

$$F_{\hat{Y}_{\langle 3\rangle}}\left(Y_{\langle 3\rangle}\right) \overset{d}{=} P\left[\left(\hat{y}_1 \le y_1\right) \cap \left(\hat{y}_2 \le y_2\right) \cap \left(\hat{y}_3 \le y_3\right)\right]. \tag{3.2.2}$$

Однако, как будет показано, применительно к рассматриваемой проблеме чаще более удобной оказывается следующая форма *интегрального закона распределения:*

$$\Phi_{\hat{Y}_{\langle 3\rangle}}\left(Y_{\langle 3\rangle}\right) \overset{d}{=} P\left[\left(\hat{y}_1 \ge y_1\right) \cap \left(\hat{y}_2 \le y_2\right) \cap \left(\hat{y}_3 \le y_3\right)\right], \tag{3.2.3}$$

которая и используется в дальнейшем.

Определением закона распределения $\Phi_{\hat{Y}_{<3>}}(Y_{<3>})$ вектора $Y_{<3>}$ (показателя качества результатов операции) завершается процедура построения математической модели ЦНПФС в задаче исследования его эффективности. Однако на базе такой модели может быть реализована только разомкнутая схема анализа эффективности операции, основанная лишь на измерении эффектов (результатов операции) без их оценивания.

Для замыкания схемы необходимо знать закон распределения области допустимых значений $\{\hat{Y}^d_{<3>}\}$ показателя $\hat{Y}_{<3>}$ результатов операции, свойства и характеристики которой зависят от условий применения ЦУТС, описываемых параметрами $B''_{<l'>}$. В общем случае с их помощью могут учитываться и условия, создаваемые искусственно (воздействия противника и т.п.). Закон распределения случайной области $\{\hat{Y}^d_{<3>}\}$ может быть задан аналитически лишь в простых случаях, когда она может быть описана конечным множеством случайных параметров. Например, указанная область может представлять собой куб со случайными координатами вершин и длинами ребер или шар со случайными координатами центра и радиусом и т.п.

Если ограничения на компоненты вектора допустимых значений вектора $\hat{Y}_{<3>}$ взаимно независимы, то область $\{\hat{Y}^d_{<3>}\}$ представляет собой параллелепипед со сторонами, параллельными осям системы координат $Oy_1y_2y_3$, т.е. прямое (декартово) произведение отрезков:

$$\left\{\hat{Y}^{\partial}_{\langle 3\rangle}\right\}=[\hat{y}_1',\hat{y}_1'']\times[\hat{y}_2',\hat{y}_2'']\times[\hat{y}_3',\hat{y}_3'']=\prod_{i=1}^{3}[\hat{y}_i',\hat{y}_i''] \,. \tag{3.2.4}$$

При n=2 соотношение (3,2.4) иллюстрируется рис. 2.3.2.

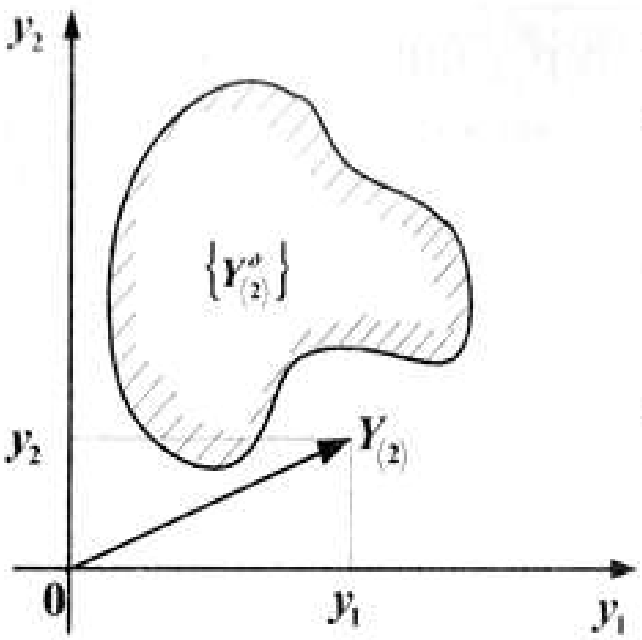


Рис. 2.3.1

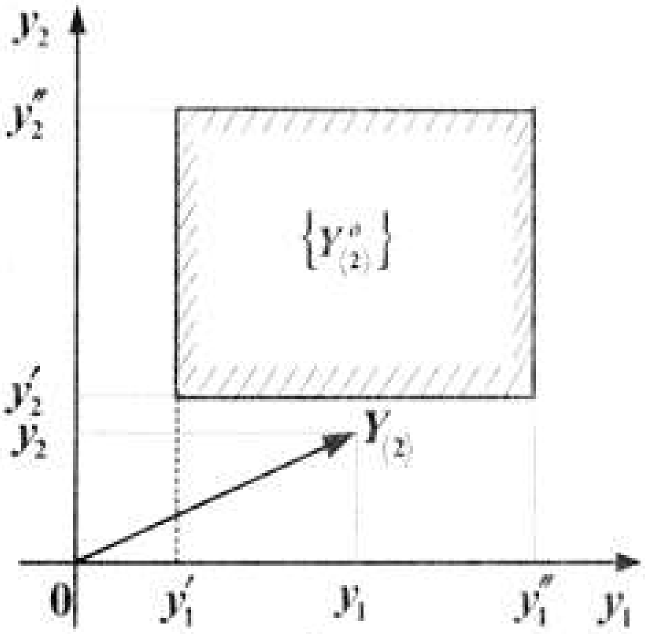


Рис. 2.3.2

Предположение о независимости ограничений, налагаемых на различные эффекты (результаты) операции - компоненты вектора $\hat{Y}_{<3>}$, как правило, правомерно, поскольку они обусловливаются не связанными между собой факторами.

До сих пор рассматривался самый общий случай предъявления требований к результатам операции. Применительно к показателям операционных свойств ЦНП эти требования носят односторонний характер. Так, *виртуальный* целевой эффект должен быть не менее *требуемого (минимально допустимого)*, *виртуальные* затраты ресурсов должны быть не выше *максимально допустимых*, называемых *предельными*, цель операции должна быть достигнута за время, не превышающее максимально допустимого, называемого *директивным* временем.

Введём следующие обозначения:

$$\hat{y}_1^{T} \overset{d}{=} \hat{z}_1 \ ; \ \hat{y}_2^{П} \overset{d}{=} \hat{z}_2 \ ; \ \hat{y}_3^{\partial} \overset{d}{=} \hat{z}_3 \ .$$

где $y_1^T = z_1$, $y_2^П = z_2$, $y_3^{\partial} = z_3$ - требования к результативности, ресурсоемкости и оперативности операции соответственно.

Тогда область $\{\hat{Y}^d_{<3>}\}$ допустимых значений результатов операции (показателей их качества) будет представлять собой октант

$$\left\{\hat{Y}^{\partial}_{\langle 3\rangle}\right\} \overset{d}{=} \left[\hat{z}_1, \infty\right) \times \left(-\infty, \hat{z}_2\right] \times \left(-\infty, \hat{z}_3\right] \qquad (3.2.5)$$

с вершиной в точке $Z_{<3>} = (z_1,\ z_2,\ z_3)$. Возможные реализации вектора $\hat{Y}_{<3>}$ и области $\{\hat{Y}^d_{<3>}\}$ приведены на рис. 3.2.1.

При n=2

$\aleph=2$

$$Y_{\langle 2\rangle}=\langle y_1, y_2\rangle, \qquad \left\{Y^{\partial}_{\langle 2\rangle}\right\}=[z_1,\infty)\times(-\infty,z_2], \qquad Z_{\langle 2\rangle}=\langle z_1, z_2\rangle,$$

что иллюстрируется рис. 3.2.2.

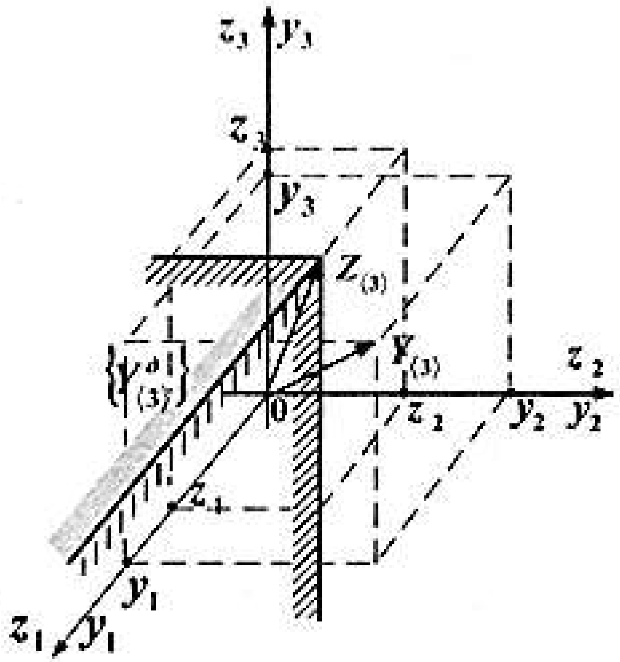


Рис. 3.2.1

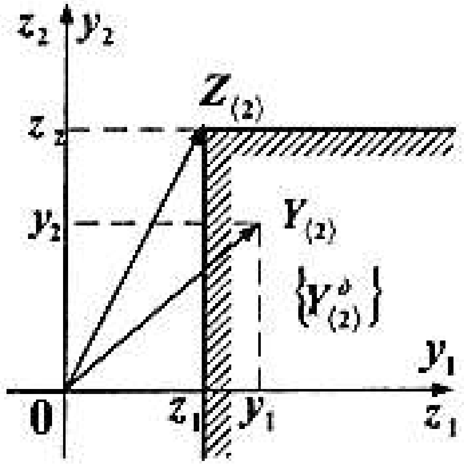


Рис. 3.2.2

С учётом сказанного критерий пригодности результатов операции (2.3.13) примет вид

$$G:\ \left(\hat{Y}_{<3>}\in\left\{\hat{Y}^{\partial}_{(3)}\right\}\right)=(\hat{Y}_{<3>}\overset{>}{\underset{<}{-}}\hat{Z}_{<3>})\ =\left((\hat{y}_1\ge\hat{z}_1)\cap(\hat{y}_2\le\hat{z}_2)\cap(\hat{y}_3\le\hat{z}_3)\right)$$

.

Из последнего выражения видно, что:

$$\boxed{\begin{aligned}&P_{дц} = P(\hat{Y}_{<3>} \gtrless \hat{Z}_{<3>}) = P[(\hat{y}_1 \geq \hat{z}_1) \bigcap (\hat{y}_2 \leq \hat{z}_2) \cap (\hat{y}_3 \leq \hat{z}_3)] = \\ &= P[(\hat{\upsilon} \geq \hat{\upsilon}_T) \cap (\hat{r} \leq \hat{r}_n) \cap (\hat{\tau} \leq \hat{\tau}_\partial))\end{aligned}} \quad (4.2.9)$$

Теперь вероятностное описание области $\left\{\hat{Y}^d_{<3>}\right\}$ не представляет трудности, так как оно сводится к определению закона распределения случайного вектора $Z_{<3>}$.

Применительно к рассматриваемой задаче целесообразно использовать две формы интегрального закона распределения вектора $Z_{<3>}$ следующего вида:

$$\boxed{F_{\hat{Z}_{<3>}}(Z_{<3>}) = F_{\hat{Z}_{<3>}}(z_1, z_2, z_3) \overset{def}{=} P[(\hat{z}_1 \leq z_1) \bigcap (\hat{z}_2 \leq z_2) \cap (\hat{z}_3 \leq z_3)]}$$

$$\boxed{\overline{\Phi}_{\hat{Z}_{<3>}}(Z_{<3>}) \overset{def}{=} P[(\hat{z}_1 \leq z_1) \bigcap (\hat{z}_2 \geq z_2) \cap (\hat{z}_3 \geq z_3)]}$$

Если законы распределения случайных векторов $\hat{Y}_{<3>}$ и $\hat{Z}_{<3>}$ известны, то по формуле полной вероятности (в интегральной форме) *вероятность достижения цели операции* будет определяться одним из следующих выражений:

$$P_{ДЦ} = P\left(\hat{Y}_{\langle 3\rangle} \in \left\{\hat{Y}^{\partial}_{\langle 3\rangle}\right\}\right) = P\left(\hat{Y}_{<3>} \overset{\geq}{<} \hat{Z}_{<3>}\right) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\hat{Y}_{<3>}}\left(Z_{<3>}\right) dF_{\hat{Z}_{<3>}}\left(Z_{<3>}\right); \tag{3.2.10}$$

$$P_{ДЦ} = P\left(\hat{Y}_{\langle 3\rangle} \in \left\{\hat{Y}^{\partial}_{\langle 3\rangle}\right\}\right) = P\left(\hat{Y}_{<3>} \overset{\geq}{<} \hat{Z}_{<3>}\right) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\Phi}_{\hat{Z}_{<3>}}\left(Y_{\langle 3\rangle}\right) dF_{\hat{Y}_{<3>}}\left(Y_{\langle 3\rangle}\right), \tag{3.2.10'}$$

где

$$dF_{\hat{Z}_{\langle 3\rangle}}\left(Z_{\langle 3\rangle}\right) = \varphi_{\hat{Z}_{\langle 3\rangle}}\left(Z_{\langle 3\rangle}\right) dZ_{\langle 3\rangle}\ ;\ dZ_{\langle 3\rangle} \overset{d}{=} dz_1 dz_2 dz_3\ ;$$

$$dF_{\hat{Y}_{\langle 3\rangle}}\left(Y_{\langle 3\rangle}\right) = \varphi_{\hat{Y}_{\langle 3\rangle}}\left(Y_{\langle 3\rangle}\right) dY_{\langle 3\rangle}\ ;\ dY_{\langle 3\rangle} \overset{d}{=} dy_1 dy_2 dy_3\ .$$

По структуре выражений (3.2.10) видно, что вероятность $\boldsymbol{P_{ДЦ}}$ представляет собой математическое ожидание (*"среднее" значение)* одной из случайных величин:

$$\hat{\omega}_1^{\langle 3\rangle} \overset{d}{=} \Phi_{\hat{Y}_{\langle 3\rangle}}\left(\hat{Z}_{\langle 3\rangle}\right)\ ; \tag{3.2.11}$$

$$\hat{\omega}_2^{\langle 3\rangle} \overset{d}{=} \overline{\Phi}_{\hat{Z}_{\langle 3\rangle}}\left(\hat{Y}_{\langle 3\rangle}\right)\ , \tag{3.2.12}$$

называемых соответственно первым и вторым стохастическими супериндикаторами третьего ранга.

Пояснение. Пусть с.в. $\hat{y} = f(\hat{x})$ и известна ф.р. $F_{\hat{x}}(x)$, тогда МО с.в.

$$\bar{y} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\hat{x}) dF_{\hat{x}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\hat{x}) \varphi_{\hat{x}}(x) dx.$$

3.2.4) Рассматривая соотношения (3.2.10) как формулы полных вероятностей, легко понять, что случайные величины представляют собой *условные* вероятности достижения цели операции относительно событий $\left(\hat{Z}_{(3)} = Z_{(3)}\right)$ и $\left(\hat{Y}_{(3)} = Y_{(3)}\right)$ соответственно

Известно, что наиболее информативной исчерпывающей вероятностной характеристикой случайной величины является закон её распределения. Это в полной мере относится и к супериндикаторам.

Если закон распределения суперииндикаторов известен, то

$$\mathrm{P}_{\text{ДЦ}} = \overline{\omega_i} = \int_0^1 \omega_i dF_{\widehat{\omega_i}}(\omega),\ i = 1,2. \qquad (3.2.17)$$

Таким образом, как следует из выражения (3.2.17), вероятность достижения цели операции представляет собой математическое ожидание его условной вероятности ω_i. В связи с этим вероятность $\boldsymbol{P}_{\text{ДЦ}}$ имеет смысл средней условной вероятности достижения цели операции.

При детерминированных требованияхк результатам операции достаточно знать лишь закон распределения случайного вектора $\hat{Y}_{<3>}$ - показателя качества результатов операции.

Гарантируемая вероятность достижения цели операции

Если известны законы распределения $F_{\hat{\omega}_1^{<3>}}(\omega)$ и $F_{\hat{\omega}_2^{<3>}}(\omega)$ суперындикаторов (рис.3.2.5), то могут быть определены еще два очень важных показателя эффективности операции, называемые гарантируемыми вероятностями достижения ее цели:

$$\omega_{ДЦ}^{Г}(\gamma) = \begin{cases} \omega_1^{Г}(\gamma) = R_{\omega_1^{<3>}}(\gamma) = F_{\omega_1^{<3>}}^{-1}(1-\gamma); \\ \omega_2^{Г}(\gamma) = R_{\omega_2^{<3>}}(\gamma) = F_{\omega_2^{<3>}}^{-1}(1-\gamma), \end{cases}$$

где γ - уровень гарантии (гарантийная вероятность).

Поскольку при определении гарантируемой вероятности используется закон распределения суперындикатора, то этот показатель позволяет оценивать эффективность уникальных (единичных) операций в отличие от вероятности $P_{ДЦ}$ достаточно полно характеризующей эффективность лишь массовых операций.

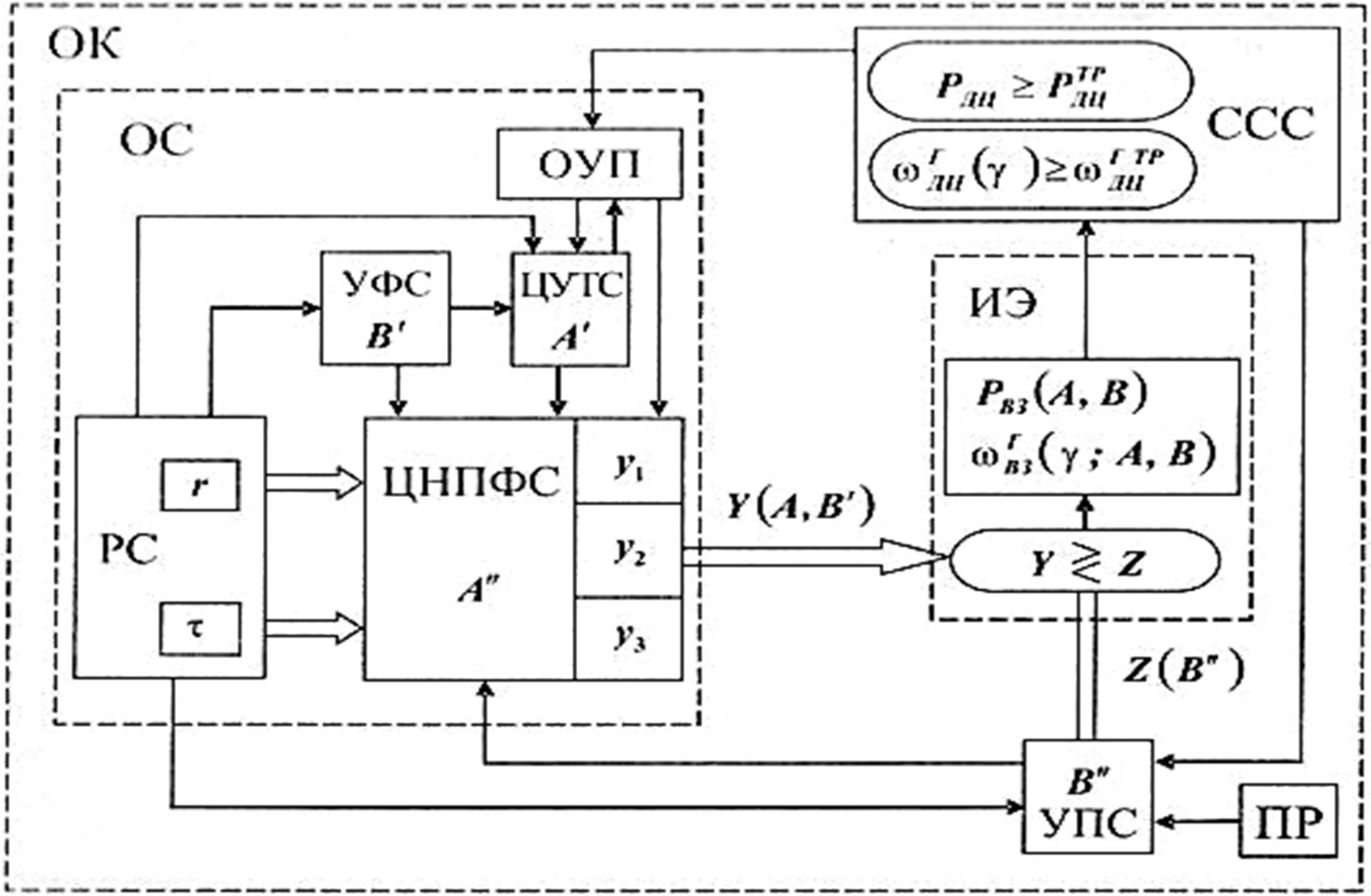
При детерминированных требованиях к результатам операции все показатели ее эффективности равны между собой при любом уровне гарантии (рис.3.2.6), т.е.

$$\omega_{ДЦ}^{г}(\gamma) = \omega_1^{г}(\gamma) = \omega_2^{г}(\gamma) = F_{\hat{\omega}_1^{<3>}}^{-1}(1-\gamma) = F_{\hat{\omega}_2^{<3>}}^{-1}(1-\gamma) = \omega^{г}.$$

$$P_{ДЦ} = \overline{\omega_1^{<3>}} = \overline{\omega_2^{<3>}} \equiv \omega_1^{г}(\gamma) \equiv \omega_2^{г}(\gamma) \equiv \omega^{г}, \qquad (3.2.21)$$

где $\omega^{г}$ - гарантированное значение вероятности достижения цели.

Общая характеристика элементов операционного комплекса (рис.1)



Конец лекции !