ВОЕННО-КОСМИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ ИМЕНИ А.Ф. МОЖАЙСКОГО

Кафедра управления организационно-техническими системами космического назначения
(наименование кафедры)

УТВЕРЖДАЮ
Начальник 23 кафедры

полковник Г.Дудалев
(воинское звание, подпись, инициал имени, фамилия)
«____» _____ 20__ г.

Автор: доцент кафедры, кандидат технических наук, подполковник
(должность, ученая степень, ученое звание, воинское звание,
И.КОЧАНОВ
инициал имени, фамилия)

Задание на практическое занятие № 10

Тема: Решение двухиндексной задачи линейного программирования: Стандартная транспортная задача.
(наименование темы лекции по тематическому плану изучения дисциплины)

по дисциплине: Исследование операций
(наименование дисциплины)

Обсуждено и одобрено на заседании кафедры
(предметно-методической комиссии)
«___» _____ 20__ г.
протокол № ___

Санкт-Петербург
2020

Содержание занятия и время

Введение	10 мин.
Учебные вопросы (основная часть):	
1. Определение исходных данных.	10 мин
2. Решение задач ЛП (транспортных задач) с использованием MS Excel.	100 мин.
3. Анализ полученных результатов. Защита работы.	55 мин.
Заключение	5 мин.

Общее время проведения занятия – 180 мин.

Место проведения: специализированная аудитория кафедры.
Оснащение: ПЭВМ.

Литература:
Основная:

1. Шафигуллин И.Ш., Тюрин Р.М., Зубачев А.М. Исследование операций: Практикум – СПб.: ВКА имени А.Ф.Можайского, 2015. – 99 с.
2. Уокенбах Д. Microsoft Excel 2010. Библия пользователя, пер. с англ. – М.: Вильямс, 2011. – 912 с.

Введение

Практическое занятие № 10 посвящено решению задач линейного программирования в табличном редакторе Microsoft Excel. *Целью* практического занятия является приобретение навыков построения математических моделей стандартных транспортных задач линейного программирования и решения их в Microsoft Excel.

1. Определение исходных данных.

Исходные данные вариантов задач к практической работе 5

Постановка задачи

На складах хранится горючее, которое необходимо завезти в войсковые части. Номера складов и номера войсковых частей выбираются в соответствии с вариантами таблицы 1.1. Текущие тарифы перевозки горючего [руб./т], ежемесячные запасы горючего [т/мес.] на складах и потребности войсковых частей в горючем [т/мес.] указаны в таблице 1.2.

При этом необходимо учитывать, что из-за ремонтных работ временно нет возможности перевозить горючее с некоторых складов в некоторые войсковой части. В таблице 1.1 это показано в графе "Запрет перевозки" в формате № склада х № войсковой части. Например, «2х3» обозначает, что нельзя перевозить горючее со склада №2 в войсковую часть №3.

Кроме того, необходимо учесть, что некоторые войсковые части имеют договоры на гарантированную поставку горючего с определенных складов. В табл. 1.1 это показано в графе "Гарантированная поставка" в формате № склада × № войсковой части = объем поставки. Например, «1×4=40» обозначает, что между складом № 1 и войсковой частью №4 заключен договор на обязательную поставку 40 т горючего.

Необходимо организовать поставки наилучшим образом, учитывая, что горючее хранится и транспортируется в емкостях весом по 50 кг.

Таблица 1.1

№ Варианта	№ Складов	№ Войсковой части	Запрет перевозки	Гарантированная поставка, т/мес.
1	1, 2, 3	1, 2, 3, 4	2x2,3x4	3x3=50
2	2, 3, 4, 5	1, 2, 5	2x2, 3x5	3x2=40
3	1, 2, 4	1, 2, 3, 5	1x5, 2x3	4x3=45
4	1, 2, 3, 4	3, 4, 5	3x3,4x5	3x5=40
5	1, 2, 5	2, 3, 4, 5	1x4,5x3	1x5=60
6	1, 2, 3, 5	2, 3, 5	5x5, 2x2	3x5=30
7	2, 3, 4	2, 3, 4, 5	3x3, 2x5	4x3=45
8	1, 2, 3, 5	1, 2, 4	1x2,5x4	3x2=20
9	2, 3, 5	1, 2, 3, 5	5x1,3x5	5x2=30
10	2, 3, 4, 5	2, 3, 4	5x4, 3x2	4x3=35
11	3, 4, 5	1, 2, 3, 4	3x4, 5x1	4x1=40
12	1, 2, 3, 4	1, 2, 3	3x2, 4x1	2x2=50

Таблица 1.2

Склады	Войсковые части					
	1	2	3	4	5	Запас, т/мес.
1	400	600	800	200	200	80
2	300	100	500	600	500	70
3	500	200	100	600	300	60
4	300	700	200	400	900	55
5	200	500	800	200	400	65
Спрос, т/мес.	77,86	56,78	58,88	62,44	73,92	

2. Решение задач ЛП (транспортных задач) с использованием MS Excel.

Порядок выполнения работы

1. Согласно номеру своего варианта выберите условие задачи.

2. Постройте модель задачи, включая транспортную таблицу.

3. Найдите оптимальное решение задачи в Ms Exce1 и продемонстрируйте его преподавателю.

4. Оформите отчет по практической работе, который должен содержать:

- титульный лист;
- транспортную таблицу и модель задачи с указанием всех единиц измерения;
- результаты решения задачи с указанием единиц измерения.

Теоретические сведения

Стандартная модель транспортной задачи (ТЗ)

Задача о размещении (транспортная задача) - это РЗ, в которой работы и ресурсы измеряются в одних и тех же единицах. В таких задачах ресурсы могут быть разделены между работами, и отдельные работы могут быть выполнены с помощью различных комбинаций ресурсов. Примером типичной транспортной задачи является распределение (транспортировка) продукции, находящейся на складах, по предприятиям-потребителям.

Стандартная ТЗ определяется как задача разработки наиболее экономичного плана перевозки продукции *одного вида* из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При этом величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью тарифов на перевозку *единицы продукции*.

Исходные параметры модели ТЗ

a) n - количество пунктов отправления, m - количество пунктов назначения.

b) a_i - запас продукции в пункте отправления A_i, ($i = \overline{1,n}$) [ед. тов.].

c) b_j, - спрос на продукцию в пункте назначения B_j, ($j = \overline{1,m}$) [ед. тов.].

d) c_{ij}- тариф (стоимость) перевозки единицы продукции из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j. [руб./ед. тов.].

Искомые параметры модели ТЗ

1. x_{ij} - количество продукции, перевозимой из пункта отправления A_i, в пункт назначения B_j [ед. тов.].

2. L(x) - транспортные расходы на перевозку всей продукции [руб.].

Этапы построения модели

I. Определение переменных.

II. Проверка сбалансированности задачи.

III. Построение сбалансированной транспортной матрицы.
IV. Задание ЦФ.
V. Задание ограничений.

Транспортная модель

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min; \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,n}, \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,m}, \\ \forall\ x_{ij} \geq 0\ (i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}) \end{cases}$$

Целевая функция представляет собой транспортные расходы на осуществление всех перевозок в целом. Первая группа ограничений указывает, что запас продукции в любом пункте отправления должен быть равен суммарному объему перевозок продукции из этого пункта. Вторая группа ограничений указывает, что суммарные перевозки продукции в некоторый пункт потребления должны полностью удовлетворить спрос на продукцию в этом пункте. Наглядной формой представления модели ТЗ является транспортная матрица (таблица 1.3).

Таблица 1.3

Пункты отправления, A_i	Пункты потребления, B_j				Запасы, [ед. прод.]
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1m}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nm}	a_n
Потребность [ед. прод.]	b_1	b_2	…	b_m	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Из модели (1.1) следует, что сумма запасов продукции во всех пунктах отправления должна равняться суммарной потребности во всех пунктах потребления, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j \qquad (1.2)$$

Если (1.2) выполняется, то ТЗ называется **сбалансированной**, в противном случае – **несбалансированной**. Поскольку ограничения модели 1.1) могут быть выполнены только при сбалансированной ТЗ, то при построении транспортной модели необходимо проверять условие баланса (1.2). В случае, когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, необходим дополнительный **фиктивный** пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, то есть

$$b_ф = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j. \qquad (1.3)$$

Если суммарные потребности превышают суммарные запасы, то необходим дополнительный **фиктивный** пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$a_ф = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i. \qquad (1.4)$$

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания **фиктивных** тарифов $c^{ф}_{ij}$ (реально не существующих) для фиктивных перевозок. Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных *реальных* перевозок, то необходимо предусмотреть, чтобы при решении задачи (при нахождении опорных планов) **фиктивные** перевозки не рассматривались до тех пор, пока не будут определены все реальные перевозки. Для этого надо фиктивные перевозки сделать невыгодными, то есть дорогими, чтобы при поиске решения задачи их рассматривали в самую последнюю очередь. Таким образом, величина фиктивных тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели, то есть

$$c^{ф}_{ij} > \max c_{ij} \quad (i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}).$$

На практике возможны ситуации, когда в определенных направлениях перевозки продукции невозможны, например, по причине ремонта транспортных магистралей. Такие ситуации моделируются с помощью введения так называемых **запрещающих** тарифов $c^{з}_{ij}$ Запрещающие тарифы должны сделать невозможными, то есть совершенно невыгодными, перевозки в соответствующих направлениях. Для этого величина запрещающих тарифов

должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели:

$$c^3_{ij} > \max c_{ij} \ (i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}).$$

Пример построения модели ТЗ

Пусть необходимо организовать оптимальные по транспортным расходам перевозки горючего с двух складов в три войсковые части. Ежемесячные запасы горючего на складах равны 79,515 и 101,925 т, а ежемесячные потребности войсковых частей составляют 68, 25 и 117,4т соответственно. Транспортные расходы (руб./т) по доставке горючего представлены в таблице 1.2. Между первым складом и второй войсковой частью заключен договор о гарантированной поставке 4,5 т горючего ежемесячно. В связи с ремонтными работами временно невозможна перевозка из второго склада во вторую войсковую часть.

Таблица 1.4

Склады	Войсковые части		
	X1	X2	X3
C1	350	190	420
C2	400	100	530

ТЗ представляет собой задачу ЛП, которую можно решать симплекс-методом, что и происходит при решении таких задач в Excel. В то же время существует более эффективный вычислительный метод - **метод потенциалов**, в случае применения которого используется специфическая структура условий ТЗ (1.1) и, по существу, воспроизводятся шаги симплекс-алгоритма. Исходя из этого, на практическом занятии необходимо построить модель задачи вида (1.1), пригодную для ее решения методом потенциалов.

Определение переменных

Обозначим через x_{ij} [емкости] количество горючего, которые будут перевезены с i-го склада в j-ю войсковую часть.

Проверка сбалансированности задачи

Согласно условию задачи горючее хранится и перевозится в таре по 45 кг, то есть единицами измерения переменных x_{ij} являются количество горючего. Но запасы горючего на складах и потребности в ней войсковых частей заданы в тоннах. Поэтому для проверки баланса и дальнейшего решения задачи приведем эти величины к одной единице измерения - емкостям. Например, запас горючего на первом складе равен 79,515 т/мес, или $\frac{79{,}515 m/мес}{0{,}045 m/мес} = 1767$ емк/мес., а потребность первой войсковой части составляет 68 т/мес., или

$\frac{68{,}000 т / мес}{0{,}045 т / мес}$ = 1511,1 ≈ 1512 емк./мес. Округление при расчете потребностей надо проводить в большую сторону, иначе потребность в горючем не будет удовлетворена полностью.

Для данной ТЗ имеет место соотношение

$$\overbrace{1767+2265}^{\text{склады}} < \overbrace{1512+556+2609}^{\text{войсковые части}}$$

4032 емк./мес. 4677 емк./мес.

Ежемесячный суммарный запас горючего на складах меньше суммарной потребности войсковых частей на 4677-4032=645 емкостей с горючим, откуда следует вывод: ТЗ не сбалансирована.

Построение сбалансированной транспортной матрицы

Сбалансированная транспортная матрица представлена в таблице 1.5. Стоимость перевозки горючего должна быть отнесена к единице продукции, то есть к 1 емкости горючего. Так, например, тариф перевозки из первого склада в третью войсковую часть равен 420 руб./т×0,045 т/емк. =18,90 руб./емк.

Для установления баланса необходим дополнительный фиктивный склад, то есть дополнительная строка в транспортной таблице задачи. Фиктивные тарифы перевозки зададим таким образом, чтобы они были дороже реальных тарифов, например, $c^{ф}_{ij}$= 50,00 руб./емк.

Невозможность доставки грузов со второго склада во вторую войсковую часть задается в модели с помощью запрещающего тарифа, который должен превышать величину фиктивного тарифа, например, $c^{з}_{22}$ = 100,00 руб./емк.

Таблица 1.5

	Войсковые части			Запас, емкости
Склады	X1	X2	X3	
C1	15,75	8,55	18,90	1767
C2	18,00	**100,00**	23,85	2265
СФ	**50,00**	**50,00**	**50,00**	645
Потребность, емкости	1512	556	2609	$\sum$ ***= 4677***

Задание ЦФ

Формальная ЦФ, то есть суммарные затраты на все возможные перевозки горючего, учитываемые в модели, задается следующим выражением:

$$L(X)= 15{,}75x_{11} +8{,}55x_{12} +18{,}90x_{13} + \\ +18{,}00x_{21}+100{,}00x_{22} +23{,}85x_{23} + \\ + 50.00x_{31}+ 50{,}00x_{32}+50{,}00x_{33} \rightarrow \min \text{ (руб./мес.)}. \qquad (1.5)$$

При этом следует учитывать, что вследствие использования фиктивных тарифов **реальная** ЦФ (то есть средства, которые в действительности придется заплатить за транспортировку горючего) будет меньше **формальной** ЦФ (1.5) на стоимость найденных в процессе решения фиктивных перевозок.

Задание ограничений

$$\begin{cases} x_{11}+ x_{12} +x_{13} = 1767 \\ x_{21}+ x_{22} +x_{23} = 2265 \\ x_{31} + x_{32} +x_{33} = 645 \\ x_{11}+ x_{21} +x_{31} = 1512 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32}= 556 \\ x_{13}+ x_{23} + x_{33} = 2609 \\ x_{ij} \geq 0 \ (\forall i = \overline{1,3}\,;\ \forall j=\overline{1,3}\,). \end{cases} \qquad (1.6)$$

Решение задачи

Решение задачи производится с использованием Microsoft Excel (см. практическое занятие №3).

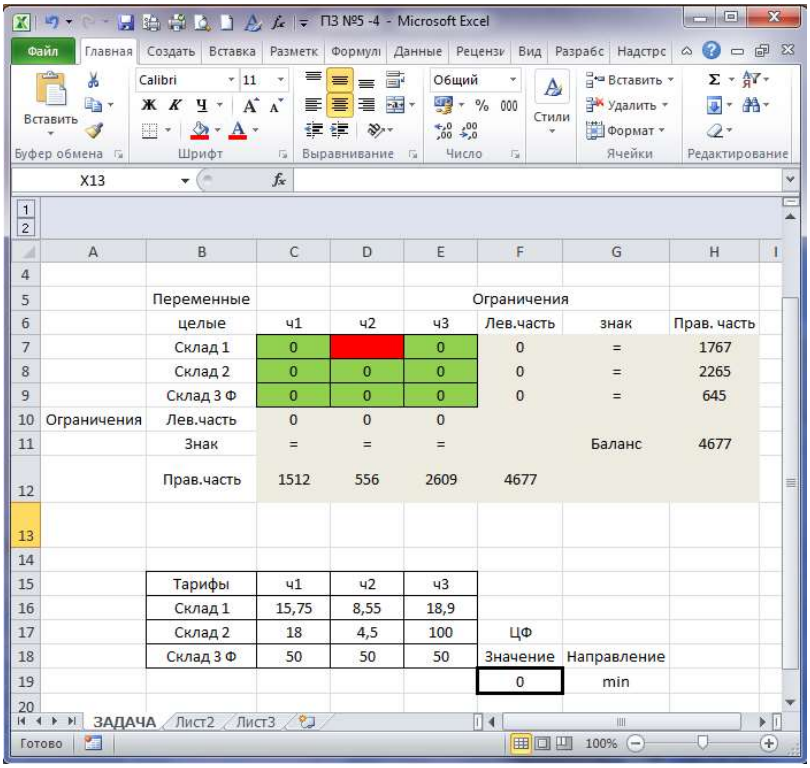

Рис.1.1. Экранная форма задачи (1.5, 1.6) после ввода всех необходимых формул.

Для учета гарантированной поставки 4,5 т горючего ежемесячно с первого склада во вторую войсковую часть необходимо:

- перевести объем горючего к единице измерения – емкостям ($\frac{4{,}5т/мес}{0{,}045т/мес}$ = 100 емк/мес.);

- добавить данное ограничение в Окно **"Параметры поиска решения"** (см. рис 1.2).

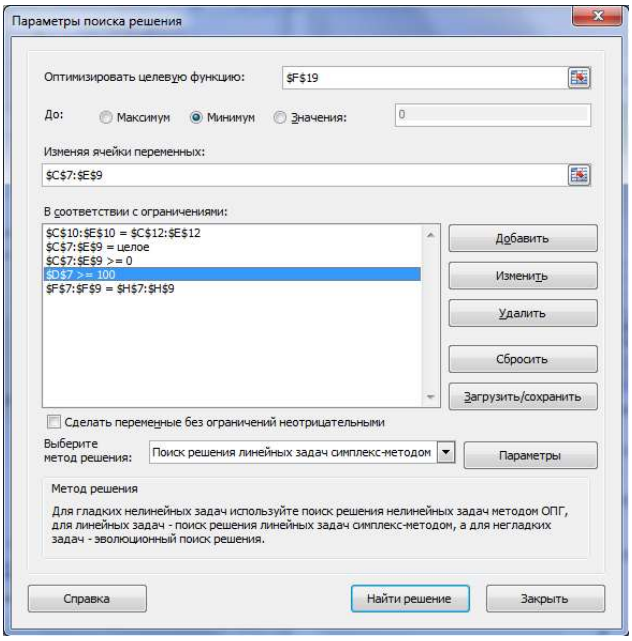

Рис.1.2. Ввод ограничений для учета гарантированной поставки

На рис.1.3 представлено решение задачи (1.5, 1.6).

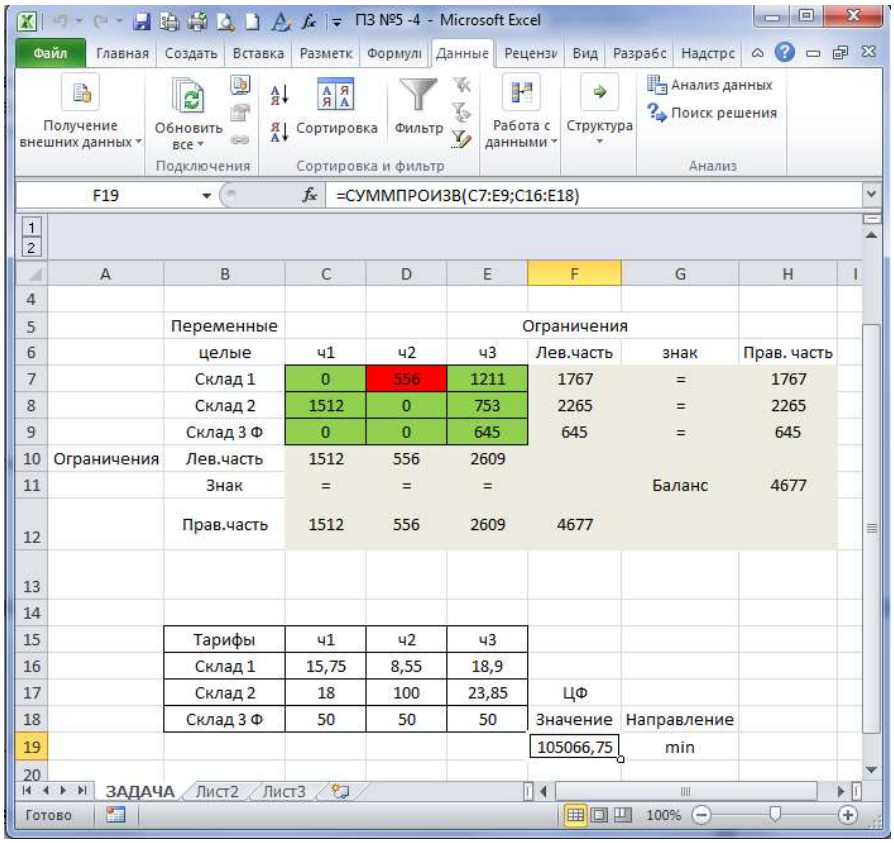

Рис.1.3. Экранная форма после получения решения задачи

3. Анализ полученных результатов. Защита работы.

По результатам работы в рабочей тетради оформляется отчет о проделанной работе. Отчет должен содержать:

1. Тему и цель практического занятия.
2. Постановку задачи на занятие.
3. Результаты решения задачи.
4. Выводы по практическому занятию.

Решение задачи производится в табличном редакторе Microsoft Excel. Полученные результаты демонстрируются преподавателю на экране монитора ПЭВМ, а оформленный отчет представляется преподавателю для проверки.

Примерные вопросы на защите работы

1. Что такое задача о размещении?
2. Какова постановка стандартной ТЗ?
3. Запишите математическую модель ТЗ.
4. Перечислите исходные и искомые параметры модели ТЗ.
5. Какова суть каждого из этапов построения модели ТЗ?
6. Раскройте понятие сбалансированности ТЗ.
7. Что такое фиктивные и запрещающие тарифы?
8. В каком соотношении должны находиться величины фиктивных и запрещающих тарифов при необходимости их одновременного использования в транспортной модели?

подполковник _____ И.Кочанов
(воинское звание, подпись, инициал имени, фамилия автора)

«_____» _____ 20__ г.