Лекция 15. Методы построения математических моделей показателей качества результатов операции

Цель занятия: <u>**Уяснить методики построения математических моделей показателей качества результатов операции и требований к ним.**</u>

Учебные вопросы:

1. Методика построения математической модели показателя качества результатов операции

2. Методика построения математической модели показателя требуемого качества результатов операции

Введение

Основные свойства законов распределения систем случайных величин - случайных векторов и их компонент рассматриваются в любом учебном пособии по теории вероятностей. Известно, что проще всего они определяются в случае, когда компоненты случайного вектора взаимно независимы. В этом случае плотность и функция распределения случайного вектора определяются через произведение безусловных законов распределения его компонент по следующим выражениям:

$$\varphi_{\hat{Y}_{<n>}}(Y_{<n>}) = \varphi_{\hat{y}_1}(y_1)\varphi_{\hat{y}_2}(y_2)\ldots\varphi_{\hat{y}_n}(y_n) \quad (1)$$

$$F_{\hat{Y}_{<n>}}(Y_{<n>}) = F_{\hat{y}_1}(y_1)F_{\hat{y}_2}(y_2)\ldots F_{\hat{y}_n}(y_n) \quad (2)$$

Если между случайными величинами существует стохастическая зависимость, то она описывается с помощью условных законов распределения этих величин и соотношения (1), (2) значительно усложняются, но зато они, эти формулы, носят универсальный характер и "работают" при любом виде и степени взаимной зависимости компонент вектора $\widehat{Y}_{<n>}$. Формулы же (1) и (2) соответственно представляют собой их частные случаи и имеют узкую область применения. В частности, они непригодны для определения закона распределения показателя $\widehat{Y}_{<n>}$ качества результатов операции (ПКРО), поскольку, как отмечалось, его компоненты существенно взаимно зависимы.

Как было показано, основу математической модели результатов операции составляет интегральный закон распределения (функция распределения) показателя $\widehat{Y}_{<n>}$ их качества (ПКРО), определяемый в симплексной канонической форме выражением

$$\Phi_{\widehat{Y}_{<3>}}(y_1, y_2, y_3) = P[(\widehat{y}_1 \geq y_1) \cap (\widehat{y}_2 \leq y_2) \cap (\widehat{y}_3 \leq y_3)]$$

С учётом стохастической зависимости компонент вектора ПКРО его функцию распределения можно представить в виде

$$\Phi_{\hat{Y}_{<3>}}(y_1, y_2, y_3) = R_{\hat{y}_1}(y_1) F_{\hat{y}_2 \perp \hat{y}_1}(y_2; y_1) F_{\hat{y}_3 \mathrm{I} < y_1, y_2 >}(y_3; y_1, y_2),$$

где $R_{\hat{y}_1}(y_1)$ **- вероятность того, что** $P(\hat{v}_1 \geq y_1)$,

$$F_{\hat{y}_2 \perp \hat{y}_1}(y_2, y_1) = P(\hat{v}_2 \leq y_2 / \hat{y}_1 \geq y_1),$$

$$F_{\hat{y}_3 \mathrm{I} < y_1, y_2 >}(y_3; y_1, y_2) = P(\hat{v}_3 \leq y_3 / (\hat{v}_1 \geq y_1) \cap (\hat{v}_2 \leq y_2)).$$

Функция распределения $\Phi_{\widehat{Y}}(Y)$ может определяться либо **аналитически, либо экспериментально.**

В первом случае необходимо знать все "операнды" выражения (10), т.е. безусловные и условные законы распределения компонент случайного вектора $\widehat{Y}_{<n>}$.

Во втором случае необходимо наблюдать реализации $Y^{j}_{<n>}$ вектора $\widehat{Y}_{<n>}$ в длинной серии однородных операций (экспериментов), проводимых в одинаковых условиях, по результатам которых может быть построена **статистическая функция распределения или кумулята** распределения случайного вектора $\widehat{Y}_{<n>}$. Машинный эксперимент может оказаться весьма трудоёмким, длительным и дорогостоящим.

Как отмечалось, имитационное моделирование ЦПФС может проводиться и без использования явного аналитического выражения функции распределения $\Phi_{\widehat{Y}}(Y)$. В этом одно из достоинств данного метода.

Аналитическое построение функции распределения ПКРО в общем случае также достаточно сложно и трудоёмко. Кроме того, оно требует от исследователя высокой математической (теоретико-вероятностной) подготовки. Однако оказывается, что наличие функциональных связей между компонентами вектора $\widehat{Y}_{<n>}$ упрощает задачу отыскания закона его распределения, так как в этом случае достаточно знать безусловный закон распределения лишь части его компонент, называемых *доминирующими*, *базисными* *или* *генеральными.*

1. Методика построения математической модели показателя качества результатов операции

Как уже отмечалось в зависимости от имеющейся исходной информации могут быть применены *аналитические* или *статистические* методы построения математической *модели* показателя $\widehat{Y}_{<n>}$ качества результатов операции (ПКРО). При этом последние (статистические) могут опираться либо на реальный - физический, либо на имитационный - машинный, либо на смешанный эксперимент. Принципы различных типов моделирования достаточно освещены в литературе и предполагаются Вам известными. Поэтому здесь рассматривается лишь методика аналитического решения задачи.

Как отмечалось, и что соответствует физической сущности рассматриваемой задачи, компоненты вектора $\widehat{Y}_{<n>}$ существенно зависимы между собой. В связи с чем определение закона распределения $\widehat{Y}_{<n>}$ наталкивается на целый ряд трудностей. Так из-за многообразия операционных функционалов, связывающих компоненты вектора $\widehat{Y}_{<n>}$ в разных операциях, процедура построения закона его распределения оказывается довольно сложной. Однако может быть сформирован общий подход к решению этой задачи, сущность которого можно раскрыть на примере.

Пример 1. Пусть показатель качества результатов операции (ПКРО) задан в симплексной канонической форме, т.е.

$$\widehat{Y}_{<3>} = <\widehat{y}_1, \widehat{y}_2, \widehat{y}_3> = <\widehat{\vartheta}, \hat{r}, \hat{\tau}>,$$

а его компоненты связаны монотонными зависимостями.

В общем случае целевой эффект связан с ресурсами такой зависимостью (ОФ):

$$\vartheta = R(r, \tau)$$

Пусть целевой эффект и время связаны с расходом ресурсов функциями связи (ФС), для которых существуют обратные функции:

$$\vartheta = R(r) \quad \text{и} \quad \tau = S(r),$$

$$r = R^{-1}(\vartheta) \ \text{и} \ \ r = S^{-1}(\tau).$$

Предположим, что функции *R* и *S* монотонно возрастающие.

Замечание 1. Вообще говоря, понятие ресурс достаточно многогранно (это сырье, энергия, время, информация, технология и т.д.). Однако, если рассмотреть *операционные ресурсы*, то, как правило, при **фиксированной технологии, чем больше в ходе операции расходуется сырья, тем больше надо затратить времени** (это для обоснования правомерности использования возрастающей функции S).

Пусть известна функция распределения (ФР) $F_{\hat{r}}(r)$ **количества расходуемых ресурсов** $\hat{r}$ (т.е. это генеральная компонента).

При указанных предположениях найдем ФР вектора $\hat{Y}_{<3>}$ (всё выражаем через известную (генеральную) компоненту $\hat{r}$):

$$\Phi_{\hat{Y}_{<3>}}(Y_3) = \Phi_{<\hat{\vartheta},\hat{r},\hat{\tau}>}(\vartheta, r, \tau) = P\left[\left(\hat{\vartheta} \geq \vartheta\right) \cap (\hat{r} \leq r) \cap (\hat{\tau} \leq \tau)\right] =$$

$$= P[(R(r) \geq \vartheta) \cap (\hat{r} \leq r) \cap (S(r) \leq \tau)] =$$

$$= P\left[\left(\hat{r} \geq R^{-1}(\vartheta)\right) \cap (\hat{r} \leq r) \cap \left(\hat{r} \leq S^{-1}(\tau)\right)\right] =$$

$$= P\left[R^{-1}(\vartheta) \leq \hat{r} \leq min\left\{r, S^{-1}(\tau)\right\}\right] =$$

$$= F_{\hat{r}}\left[min\left\{r, S^{-1}(\tau)\right\}\right] - F_{\hat{r}}\left[R^{-1}(\vartheta)\right].$$

Замечание 2. В общем случае, если аспект $Y^{(1)}_{<n1>}$ содержит более одной компоненты, т.е. $n_1 \geq 2$, то в критерии пригодности результата операции будет входить более одной компоненты типа $\left(\widehat{\vartheta} \geq \vartheta\right)$. Тогда имеем:

$$R^{-1}(\vartheta) = max\,\{R^{-1}_{1/2}(\vartheta_1), R^{-1}_{2/2}(\vartheta_2), \dots, R^{-1}_{n1/2}(\vartheta_{n1}).$$

Аналогичное замечание можно сделать и для других компонент.

Вывод: если компоненты вектора $Y_{<n>}$ связаны функционально, то достаточно знать з/р подвектора его взаимно независимых компонент, называемых генеральными. В СКФ это означает, что достаточно знать з/р одной или двух компонент.

Замечание 3. Если зависимости типа $\vartheta = R(\tau)$ и $\tau = S(r)$ **неизвестны,** а также если компоненты вектора $\widehat{Y}_{<3>}$ связаны **стохастически** (нефункционально), то:

- либо экспериментально определяются **функции регрессии**, связывающие числовые характеристики одних компонент со значениями, принимаемыми другими компонентами, и тогда эти **функции регрессии используются в качестве операционного функционала;**
- либо з/р $\widehat{Y}_{<3>}$ строится по общей формуле (10) с учётом зависимостей СВ.

2. Методика построения математической модели показателя требуемого качества результатов операции

Для замыкания схемы оценивания результатов операции к ним должны быть предъявлены обоснованные требования, описываемые вектором $\widehat{Z}_{<n>}$, значения которого зависят от условий применения ЦУТС, характеризуемых вектором $B''_{l''}$.

Поскольку вектор $\widehat{Z}_{<n>}$ случаен, то исчерпывающей его моделью является закон распределения (ФР) $F_{\hat{z}_{<n>}}(z)$. В общем случае определение закона распределения показателя требуемого качества результатов операции $F_{\hat{z}_{<n>}}(z)$, является прерогативой суперсистемы. Тем не менее, представляется необходимым кратко обсудить основные методы решения этой задачи. В основе построения закона распределения $F_{\hat{z}_{<n>}}(z)$, лежат ***методы экспертного оценивания и статистических испытаний***. Раскроем их сущность.

В отличие от компонент вектора $\widehat{Y}_{<n>}$ компоненты вектора $\widehat{Z}_{<n>}$, как правило, взаимно независимы. Поэтому

$$F_{\hat{z}_{<п>}}(Z_{<п>}) = F_{\hat{z}_{<п>}}(z_1, z_2, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{\hat{z}_i}(z_i). \qquad (27)$$

Аналогичную структуру будет иметь и эмпирическая функция распределения случайного вектора $\widehat{Z}_{<n>}$, т.е.

$$\widetilde{F}_{\hat{z}_{<п>}}(Z_{<п>}) = \widetilde{F}_{\hat{z}_{<п>}}(z_1, z_2, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^{n} \widetilde{F}_{\hat{z}_i}(z_i). \qquad (28)$$

При экспертном оценивании

$$\widetilde{F}_{\hat{z}_i}(z) = F^{э}_{\hat{z}_i}(z) = \sum_{j=1}^{m_э} g_j \widetilde{F}^{э}_{\hat{z}_{ij}}(z), \left[0 \le g_j \le 1;\ \sum_{j=1}^{m_э} g_j = 1\right], \qquad (29)$$

где $F^{э}_{z_{ij}}(z)$ - функция распределения *i*-й компоненты вектора $\widehat{Z}_{<n>}$, задаваемая (определяемая) *j* -м экспертом;

g_j - весовые коэффициенты, выражающие относительную степень объективности (авторитетности) мнения *j*-го эксперта;

$m_э$ - число опрошенных экспертов.

Если даваемые экспертами оценки компонент вектора $\widehat{Z}_{<n>}$ детерминированы (не случайны), то их распределения будут (формально) вырожденными и, следовательно

$$\widetilde{F}_{\hat{z}_i}(z) = F^{э}_{\hat{z}_i}(z) = \sum_{j=1}^{m_э} g_j \Delta\left(z - z^{э}_{ij}\right), \tag{29}$$

где $z^{э}_{ij}$ - предельно допустимое значение *i* -й компоненты вектора $\widehat{Y}_{<n>}$, назначаемое *j*-м экспертом.

Возможны случаи, когда одни эксперты задают законы распределения, а другие - конкретные значения компонент вектора $\widehat{Z}_{<n>}$. Тогда, как нетрудно понять, будет иметь место "смесь" выражений (28) и (29), т.е.

$$\widetilde{F}_{\hat{z}_i}(z) = F^{э}_{\hat{z}_i}(z) = \sum_{j=1}^{m_{э1}} g_j F^{э}_{\hat{z}_{ij}}(z) + \sum_{j=m_{э1}+1}^{m_{э1}+m_{э2}} g_j \Delta(z - z^{э}_{ij}) \tag{30}$$

где $m_{э1}+m_{э2}=m_э$; смысл остальных элементов соотношения (30) ясен из ранее сказанного.

При оценивании методом статистических испытаний

$$\widetilde{F}_{\hat{z}_i}(z) = F^*_{\hat{z}_i}(z) = \frac{1}{m_0}\sum_{j=1}^{m_0} \Delta(z - z^*_{ij}) \quad (31)$$

где z^*_{ij} - предельное значение результата $\widehat{y}_i$, потребовавшееся в j-м предшествовавшем опыте (эксперименте);

m_0 - число проведённых опытов (испытаний - операций).

Если объём m_0 выборки велик, то **вместо статистической функции распределения строится кумулята распределения**

$$\widetilde{F}_{\hat{z}_i}(z) = \widetilde{F}^*_{\hat{z}_i}(z) = \sum_{l=1}^{r}\left[P^*_l \Delta(z - z^r_{l+1}) + P^*_l \frac{(z - z^*_l)}{z^r_{l+1} - z^r_l} \prod(z; z^r_l, z^r_{l+1})\right]$$

где z^r_l, z^r_{l+1} - границы l-го разряда статистического ряда распределения случайной величины z_i;

P_l^* - частота попадания варианта z^*_{ij} в *l-й* разряд;

r - число разрядов статистического ряда.

Экспериментальное определение законов распределения ПТКРО должно осуществляться **методами математической статистики.**

Конец лекции !