

ВОЕННО-КОСМИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ ИМЕНИ А.Ф.МОЖАЙСКОГО

*Кафедра управления организационно-техническими системами космического назначения*  
(наименование кафедры)

УТВЕРЖДАЮ  
Начальник 23 кафедры  
ПОЛКОВНИК Г. ДУДАЛЕВ  
(воинское звание, подпись, инициал имени, фамилия)  
« » февраля 2020 г.

Автор: доцент кафедры, кандидат технических наук доцент  
(должность, ученая степень, ученое и воинское звание)  
А. ДАНИЛОВ

*Задание на практическое занятие № 4*

Тема: Исследование вероятностных характеристик применения ОТС с использованием случайных марковских процессов  
(наименование темы лекции по тематическому плану изучения дисциплины)

по дисциплине: Основы теории управления

(наименование дисциплины)

Обсуждено и одобрено на заседании кафедры  
(предметно-методической комиссии)  
«26» ноября 2019 г.  
протокол № 15

Санкт-Петербург  
2020

## Содержание занятия и время

<u>Введение</u>	–10 мин.
<u>Учебные вопросы</u> (основная часть)	–160 мин.
1. Постановка задачи и определение исходных данных	– 60 мин.
2. Решение задачи и анализ полученных результатов	–100 мин.
<u>Заключение</u>	–10 мин.
Общее время проведения занятия	–180 мин.

Место проведения: специализированная аудитория кафедры.

## Литература:

Основная:

Минаков Е.П., Шафигуллин И.Ш., Зубачев А.М. Методы исследования эффективности применения ОТС космического назначения. Учебник. – СПб.: ВКА имени А.Ф. Можайского, 2016. – 244 с.

Дополнительная:

Петухов Г.Б., Якунин В.И. Методологические основы внешнего проектирования целенаправленных процессов и целеустремленных систем – М.: АСТ, 2006 г.

## **Введение**

В процессе подготовки к практическому занятию на самоподготовке курсанты самостоятельно должны изучить материал лекции № 11 и раздела 1 настоящего пособия. На самоподготовке курсанты изучают порядок выполнения работы, особенности работы с используемым программным и аппаратным обеспечением, инструктируются об основных правилах организации эксплуатации, а также правилах и мерах безопасности при работе в компьютерном классе. Целью занятия является практическая отработка метода оценивания вероятностных характеристик применения ОТС с использованием непрерывных марковских процессов.

### **1. Постановка задачи и определение исходных данных**

#### **Порядок выполнения работы**

1. Разобрать постановку и решение задачи, рассмотренную в разделе 1 и п. 2.1.
2. Задайте необходимые исходные данные для заданий 1 и 2 из раздела 2.2.
3. Постройте математическую модель задачи.
4. Рассчитайте значения заданных показателей эффективности применения ОТС.
5. Проанализируйте полученные результаты и продемонстрируйте их преподавателю.

#### **1.1. Теоретическая установка практического занятия**

Основными теоретическими методами исследования качества и эффективности применения ОТС являются:

- 1) методы теории дискретных автоматов;
- 2) методы теории массового обслуживания (методы теории случайных процессов);
- 3) методы марковских случайных процессов;
- 4) статистические методы, метод статистических испытаний и метод СИМ;
- 5) методы линейного, нелинейного и динамического программирования;
- 6) методы теории игр;
- 7) графовые (сетевые) методы.

Изучением поведения стохастических систем занимается теория случайных процессов. Наиболее изученными и простыми процессами, происходящими в системах, являются Марковские процессы. Названы по фамилии выдающегося русского математика Маркова Андрея Николаевича (1856 – 1922).

Марковские случайные процессы явились исходной базой теории случайных процессов, а также теории надежности, методов теории массового обслуживания (ТМО) и других прикладных наук.

Сейчас область применения этих методов чрезвычайно широка. В большом числе случаев этот аппарат является единственным эффективным инструментом объективного обоснования решений, когда исследуется система, способная изменять свои состояния во времени.

## 1.2 Понятие о марковском случайном процессе

*Марковским* называется случайный процесс, состояние которого в очередной момент времени  $t+\Delta t$  зависит только от текущего состояния в момент времени  $t$ . Это означает, что поведение марковского процесса в будущем определяется текущим состоянием процесса и не зависит от предыстории процесса – состояний, в которых пребывал процесс до момента  $t$ .

В классе марковских процессов выделяют только процессы с дискретными состояниями, называемые *марковскими цепями*. Когда множество состояний процесса  $S=\{s_1, \dots, s_n\}$  конечно марковскую цепь называют *конечной*. Конечная марковская цепь может быть определена в дискретном или непрерывном времени. В первом случае, переходы процесса из одного состояния в другое происходят только в фиксированные моменты времени, обозначаемые порядковыми номерами  $t = 0, 1, 2, \dots$ , и цепь называется *дискретной*, во втором – переходы связываются с произвольными моментами времени  $t_0, t_1, t_2, \dots$  и цепь называют *непрерывной*. Основное отличие определяется целью исследования. Если важна только последовательность смены состояний, то процесс можно представить в виде дискретной марковской цепи с дискретным временем, а если важно знать поведение процесса в текущем времени, то в виде цепи с непрерывным временем.

## 1.3 Дискретная марковская цепь определяется:

- 1) множеством состояний  $S=\{s_1, \dots, s_n\}$ ;
- 2) матрицей вероятностей переходов (переходных вероятностей) характеризующей вероятности перехода процесса с текущим состоянием  $s_i$  в следующее состояние  $s_j$ :

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

3) вектором начальных вероятностей (начальным распределением)  $P_0 = (p_1^{(0)}, \dots, p_n^{(0)})$ , определяющим вероятности  $p_i^{(0)}$  того, что в начальный момент времени  $t = 0$  процесс находится в состоянии  $s_i$ .

Марковская цепь изображается в виде графа, вершины которого соответствуют состояниям цепи и дуги – переходам между состояниями. Дуги  $(i, j)$ , связывающие вершины  $s_i$  и  $s_j$ , помечаются вероятностями переходов  $p_{ij}$ .

#### 1.4 Марковские процессы с дискретным множеством состояний и непрерывным временем

Обозначим  $p_i(t)$  — вероятность того, что в момент  $t$  система  $S$  будет находиться в состоянии  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Очевидно, для любого момента  $t$  сумма вероятностей состояний равна единице:

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1, \quad (1)$$

т. к. события, состоящие в том, что в момент  $t$  система находится в состояниях  $s_1, s_2, \dots, s_n$  несовместны и образуют полную группу событий.

Необходимо определить для любого  $t$  вектор вероятностей состояний:

$$P(t) = \langle p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t) \rangle. \quad (2)$$

Для того чтобы найти эти вероятности, необходимо знать характеристики процесса, в качестве которых в случае процесса с непрерывным временем рассматриваются плотности вероятностей (интенсивности) перехода  $\lambda_{ij}$  (поскольку вероятность перехода системы из состояния в состояние точно в момент  $t$  будет равна нулю, так же как вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины).

Пусть система  $S$  в момент  $t$  находится в состоянии  $s_i$ . Рассмотрим элементарный промежуток времени  $\Delta t$ , примыкающий к моменту  $t$ . Назовем интенсивностью перехода  $\lambda_{ij}$  предел отношения вероятности перехода системы за время  $\Delta t$  из состояния  $s_i$  в состояние  $s_j$  к длине промежутка  $\Delta t$ :

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} p_{ij}(\Delta t) / \Delta t, \quad (j \neq i), \quad (3)$$

где  $p_{ij}(\Delta t)$  — вероятность того, что система, находившаяся в момент  $t$  в состоянии  $s_i$ , за время  $\Delta t$  перейдет из него в состояние  $s_j$ . Из (3) следует, что при малом  $\Delta t$  вероятность перехода (с точностью до бесконечно малых высших порядков) равна:  $p_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij} \cdot \Delta t$ . Если все интенсивности перехода  $\lambda_{ij}$  не зависят от  $t$  (от того, в какой момент начинается элементарный участок  $\Delta t$ ), марковский процесс называется *однородным*, а если эти интенсивности зависят от времени, то он является *неоднородным*. Предположим, что известны интенсивности перехода  $\lambda_{ij}$  для всех пар состояний  $s_i, s_j$ . Граф состояний процесса функционирования системы с проставленными у стрелок (дуг) интенсивностями перехода называется *размеченным графом состояний и переходов*. Используя его можно составить систему дифференциальных

уравнений и определить вероятности состояний  $P(t)$  (2) как функции времени.

## 2. Решение задачи и анализ полученных результатов

### Задача №1

Группа самолётов в составе пяти штук в строю (колонной) совершает налет на объект (территорию). Первый самолет (ведущий) является постановщиком помех. До тех пор, пока он не сбит, идущие за ним самолеты не могут быть обнаружены и атакованы. Поток атак Пуассоновский с интенсивностью  $\lambda$  атак/час. В результате атаки постановщик помех поражается с вероятностью  $p$ . Если постановщик помех сбит, то следующий самолет обнаруживается и подвергается атакам. На каждый из них (до тех пор, пока он не поражен) направляется Пуассоновский поток атак с интенсивностью  $\lambda$ . Когда самолет поражен (также с вероятностью  $p$ ), то атаки по нему прекращаются, но не переносятся на другие самолёты.

Система в данном случае может рассматриваться как система массового обслуживания, «клиентами» которой являются самолёты, образующие самостоятельную систему.

Поведение такой системы описывается с помощью графа, имеющих следующий смысл: данная система в любой момент времени может находиться в одном из следующих состояний (по числу сбитых самолетов):

- S0 – все самолеты целы;
- S1 - постановщик помех сбит, остальные целы;
- S2 - сбиты постановщик помех и один самолет;
- S3 - сбиты постановщик помех и два самолета;
- S4 - сбиты постановщик помех и три самолета;
- S5 - все пять самолетов сбиты.

Размеченный граф состояний системы и переходов между ними выглядит следующим образом:



Вероятности перехода из состояния в состояние, интенсивность потока и вероятности нахождения системы в  $i$ -ом состоянии  $P_i$  для рассматриваемой СМО связаны следующей системой дифференциальных уравнений (уравнения Колмогорова):

$$\left\{ \begin{array}{l} d P_0(t) / d t = -\lambda_p P_0(t), \\ d P_1(t) / d t = -4\lambda_p P_1(t) + \lambda_p P_0(t), \\ d P_2(t) / d t = -3\lambda_p P_2(t) + 4\lambda_p P_1(t), \\ d P_3(t) / d t = -2\lambda_p P_3(t) + 3\lambda_p P_2(t), \\ d P_4(t) / d t = -\lambda_p P_4(t) + 2\lambda_p P_3(t), \\ d P_5(t) / d t = \lambda_p P_4(t). \end{array} \right.$$

Это – система из шести линейных дифференциальных уравнений с шестью неизвестными функциями  $P_0(t)$ ,  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$ ,  $P_3(t)$ ,  $P_4(t)$ ,  $P_5(t)$ .

Для составления уравнений Колмогорова существует общее правило: в левой части для каждого из них стоит производная вероятности какого-то ( $i$ -го) состояния. В правой части – сумма произведений вероятностей всех состояний, из которых идут стрелки в данное состояние, на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного ( $i$ -го) состояния.

Чтобы решить систему уравнений Колмогорова и найти вероятности состояний, необходимо задать начальные условия (состояние системы в начальный момент времени). В общем случае эта система уравнений решается численно с использованием ЭВМ и соответствующего программного продукта (например, MathCad или Matlab).

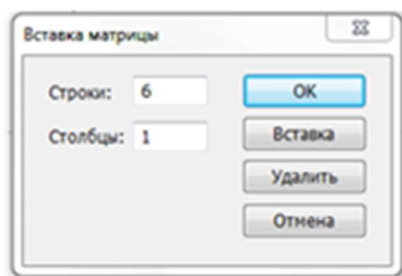
MathCad - один из современных и наиболее удобных программных продуктов, предназначенный для решения различных математических инженерных задач. Позволяет решать различные уравнения (интегральные, дифференциальные и др.). MathCad обладает большим количеством запрограммированных функций.

### Пример решения задачи №1

1. Запустить MathCad, включить английский алфавит, нажав (Shift+Alt).
2. Набрать на клавиатуре  $a:=12$  (интенсивность работы),  $p:=0.9$  (вероятность уничтожения самолета), нажать Enter.

**Примечание.** Назначение клавиш

Клавиша	:	[	Ctrl+6	Пробел	;	/	*	=	'	“	@	,
Операция	:=	Нижн. индекс	Верхн. индекс	Вверх	..	Дел.	Умн.	Выч.	(	Текст	Гра-фик	Доб. граф.



3. Набрать  $D(t,P):=$ , на панели инструментов нажать знак  $[:::]$ , появляется окно, где указываем количество строк - 6 и столбцов - 1 в матрице.

4. Заполнить матрицу  $D(t,P)$  и задать вектор значений вероятностей при  $t_0=0$  (начальные условия)  $Y_0$ :

$$D(t,P) := \begin{pmatrix} -a \cdot p \cdot P_0 \\ -4a \cdot p \cdot P_1 + a \cdot p \cdot P_0 \\ -3a \cdot p \cdot P_2 + 4a \cdot p \cdot P_1 \\ -2a \cdot p \cdot P_3 + 3a \cdot p \cdot P_2 \\ -a \cdot p \cdot P_4 + 2a \cdot p \cdot P_3 \\ a \cdot p \cdot P_4 \end{pmatrix} \quad Y0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

5. Задать функцию решения системы дифуравнений методом Рунге-Кутты четвертого порядка с необходимыми параметрами следующим образом:

$S := \text{rkfixed}(Y0, 0, 0.4, 10, D),$

где  $t_0=0$  - начальный момент времени;

$t=0.4$  - конечный момент времени;

$N=10$  - число разбиений промежутка на интервалы (число узлов).

6. Для получения решения набрать  $S=$  , появляется таблица, в которой первый

столбец - это моменты времени от 0 до 0.4 с шагом 0.03, а последующие столбцы

вероятности того, что будут сбиты 0,1,2,...,5 самолетов,  $P_5$ -вероятность того, что вообще ни один самолёт не уцелеет.

### Листинг решения

ORIGIN := 0

Начало массива. Определяет индекс первого элемента массива

$a := 12$

$p := 0.9$

Задание значений параметрам

Задание

системы дифуравнений и начальных условий:

$$D(t,P) := \begin{pmatrix} -a \cdot p \cdot P_0 \\ -4a \cdot p \cdot P_1 + a \cdot p \cdot P_0 \\ -3a \cdot p \cdot P_2 + 4a \cdot p \cdot P_1 \\ -2a \cdot p \cdot P_3 + 3a \cdot p \cdot P_2 \\ -a \cdot p \cdot P_4 + 2a \cdot p \cdot P_3 \\ a \cdot p \cdot P_4 \end{pmatrix} \quad Y0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

S := rkfixed(Y0,0,0.4,10,D)

Задание функции решения системы дифуравнений с необходимыми параметрами



Таблица с решением

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	0	0	0	0	0
1	0.04	0.649	0.124	0.204	-0.013	0.035	0
2	0.08	0.422	0.115	0.205	0.142	0.096	0.021
3	0.12	0.274	0.084	0.157	0.204	0.198	0.082
4	0.16	0.178	0.057	0.11	0.196	0.274	0.185
5	0.2	0.115	0.038	0.074	0.159	0.303	0.311
6	0.24	0.075	0.025	0.049	0.118	0.293	0.44
7	0.28	0.049	0.016	0.032	0.083	0.259	0.56
8	0.32	0.032	0.011	0.021	0.057	0.217	0.663
9	0.36	0.021	$6.837 \cdot 10^{-3}$	0.014	0.038	0.173	0.747
10	0.4	0.013	$4.44 \cdot 10^{-3}$	$8.875 \cdot 10^{-3}$	0.026	0.134	0.814

### Построение графиков

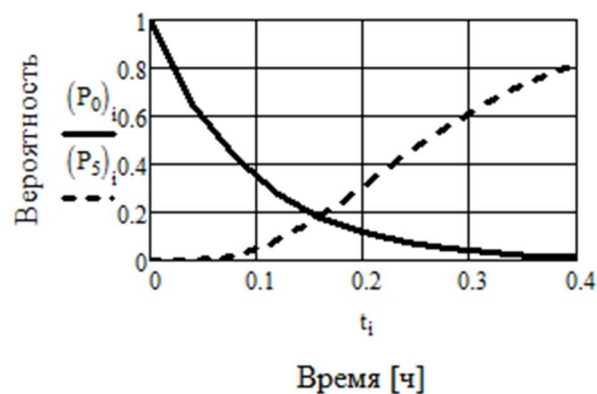
$t := S^{(0)}$      $P_0 := S^{(1)}$      $P_5 := S^{(6)}$

Присвоение векторам значений из столбцов таблицы

$i := 0..11$

Присвоение дискретного аргумента

Наберите @, появится заготовка для графика с заполнителями, заполните их при необходимости, щелкните дважды на выбранный график и отредактируйте его с использованием открывшегося окна



### Варианты заданий для самостоятельного выполнения

Решить рассмотренную задачу для исходных данных своего варианта (см. таблицу).

№ варианта	Кол-во самолётов	$\lambda$ [1/час]	$p$	$t$ [час]	$N$
С постановщиком помех					
1	3	7	0.5	0 – 0.6	10
2	4	8	0.6	0 – 0.55	10
3	5	9	0.7	0 - 0.5	10
4	6	10	0.8	0 – 0.45	10
5	7	11	0.9	0 – 0.4	10
6	8	12	0.95	0 – 0.35	10
Без постановщика помех					
7	3	7	0.5	0 – 0.6	10
8	4	8	0.6	0 – 0.55	10
9	5	9	0.7	0 - 0.5	10
10	6	10	0.8	0 – 0.45	10
11	7	11	0.9	0 – 0.4	10
12	8	12	0.95	0 – 0.35	10

№ варианта	Кол-во самолётов	$\lambda$ [1/час]	$p$	$t$ [час]	$N$
С постановщиком помех					
13	3	12	0.5	0 – 0.6	10
14	4	11	0.6	0 – 0.5	10
15	5	10	0.7	0 - 0.4	10
16	6	9	0.8	0 – 0.35	10
17	7	8	0.9	0 – 0.3	10
18	8	7	0.95	0 – 0.2	10
Без постановщика помех					
19	3	12	0.5	0 – 0.6	10
20	4	11	0.6	0 – 0.5	10
21	5	10	0.7	0 - 0.4	10

22	6	9	0.8	0 – 0.35	10
23	7	8	0.9	0 – 0.3	10
24	8	7	0.95	0 – 0.2	10

## Марковская модель оценивания эффективности подготовки ОТС к применению

### Задача №2

Рассмотрим в качестве примера процесс подготовки к применению ОТС  $S$ , состоящей из четырех подсистем: подсистемы управления, подсистемы обеспечения применения, подсистемы применения боевых средств и собственно боевых средств, который представим в виде размеченного графа (рис. 1). Входы каждой из подсистем на указанном рисунке имеют нечетные, а выходы – четные номера.

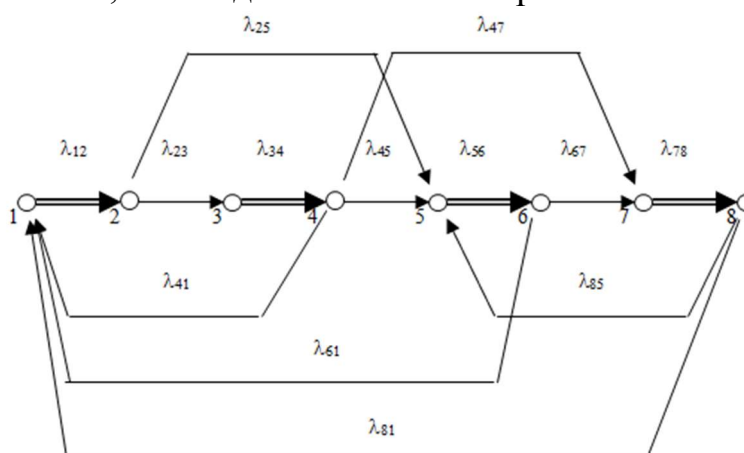


Рис. 1

Таким образом, система  $S$  состоит из четырех подсистем  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$ , для каждой из которых принята модель «черного ящика», когда рассматриваются лишь ее входные и выходные параметры (внутреннее устройство и протекающие процессы не моделируются).

Пример описания состояний, в которых может находиться система  $S$ , приведен в табл. 1.

Таблица 1

### Описания состояний системы $S$

№	Описание состояния
1	Начало планирования применения ОТС $S$ в подсистеме управления
2	Окончание планирования применения ОТС $S$ в подсистеме управления

3	Начало подготовки данных для применения ОТС в подсистеме обеспечения применения
4	Окончание подготовки данных для применения ОТС в подсистеме обеспечения применения
5	Начало подготовки данных для применения ОТС в подсистеме применения средств
6	Окончание подготовки данных для применения ОТС в подсистеме применения средств
7	Начало подготовки к применению средств
8	Окончание подготовки к применению средств

Предположение о том, что вероятность нахождения системы  $S$  в какой-либо вершине графа в момент  $t$  зависит только от того, в какой вершине была она в предыдущий момент времени, позволяет отнести процесс подготовки к применению этой системы к марковскому процессу с непрерывным временем.

Пусть для каждого возможного перехода из состояния  $i$  в состояние  $j$  задана соответствующая интенсивность перехода  $\lambda_{ij}$  и она не зависит от времени, т. е. имеет место однородный процесс. Пример описания выполняемых работ и их интенсивностей приведен в табл. 2.

Таблица 2

### Описание интенсивностей переходов

Обозначение	Описание работ, изменяющих состояния системы
$\lambda_{12}$	Планирование применения ОТС $S$
$\lambda_{23}$	Передача данных в подсистему обеспечения
$\lambda_{34}$	Подготовка данных по обеспечению применения ОТС $S$
$\lambda_{45}$	Передача данных по обеспечению применения в подсистему применения
$\lambda_{56}$	Приведение в готовность подсистемы применения
$\lambda_{67}$	Передача данных в боевые средства
$\lambda_{78}$	Приведение в готовность боевых средств
$\lambda_{25}$	Передача данных планирования из подсистемы управления в подсистему применения
$\lambda_{47}$	Передача данных из подсистемы обеспечения на боевые средства
$\lambda_{41}$	Сбой в подготовке данных по обеспечению применения ОТС $S$ с возвратом к планированию применения ОТС $S$
$\lambda_{61}$	Сбой при приведении в готовность подсистемы применения с возвратом к планированию применения ОТС $S$
$\lambda_{81}$	Сбой при приведении в готовность боевых средств с возвратом к планированию применения ОТС $S$
$\lambda_{85}$	Сбой при приведении в готовность боевых средств с повторным приведением в готовность подсистемы применения

По размеченному графу рис. 1 можно получить систему дифференциальных уравнений для определения вектора вероятностей состояний (2) по правилу Колмогорова: в левой части каждого из уравнений стоит производная по времени от вероятности нахождения процесса в данном ( $j$ -м) состоянии, а в правой – сумма произведений всех вероятностей состояний, из которых возможен переход в данное состояние, на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность нахождения процесса в данном состоянии.

Система дифференциальных уравнений для рассматриваемого графа в развернутом виде имеет следующее представление:

$$\begin{cases} d P_1(t) / d t = - \lambda_{12} P_1(t) + \lambda_{41} P_4(t) + \lambda_{61} P_6(t) + \lambda_{81} P_8(t), \\ d P_2(t) / d t = \lambda_{12} P_1(t) - \lambda_{23} P_2(t) - \lambda_{25} P_2(t), \\ d P_3(t) / d t = \lambda_{23} P_2(t) - \lambda_{34} P_3(t), \\ d P_4(t) / d t = \lambda_{34} P_3(t) - \lambda_{47} P_4(t) - \lambda_{45} P_4(t) - \lambda_{41} P_4(t), \\ d P_5(t) / d t = \lambda_{45} P_4(t) + \lambda_{25} P_2(t) + \lambda_{85} P_8(t) - \lambda_{56} P_5(t), \\ d P_6(t) / d t = \lambda_{56} P_5(t) - \lambda_{61} P_6(t) - \lambda_{67} P_6(t), \\ d P_7(t) / d t = - \lambda_{78} P_7(t) + \lambda_{47} P_4(t) + \lambda_{67} P_6(t), \\ d P_8(t) / d t = - \lambda_{85} P_8(t) - \lambda_{81} P_8(t) + \lambda_{78} P_7(t). \end{cases} \quad (4)$$

Задача (4) определения вероятностей нахождения системы в состояниях ( $i, j$ ) является задачей Коши, для решения которой целесообразно последовательно использовать метод Адамса и метод Рунге-Кутты. В настоящее время система уравнений Колмогорова решается численно с использованием ЭВМ и соответствующего программного продукта (например, MathCad, Matlab или Excel).

Начальными условиями для ее интегрирования являются:

$$P_1(t_0) = 1; \quad P_j(t_0) = 0, \quad [j = 2, \dots, 8]. \quad (5)$$

Для улучшения характеристик соответствующих алгоритмов необходимо учитывать условие нормировки, т.е. что

$$\sum_{j=1}^8 P_j(t) = 1.$$

Это означает что любое уравнение в системе уравнений (4) можно заменить на условие нормировки вероятностей.

Можно также показать, что в условиях «стационарного» режима функционирования системы существуют предельные вероятности

$$P_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_j(t), \quad j = 1(1)8.$$

Их значения не зависят от начальных условий (5) и являются средним относительным временем пребывания системы в данном состоянии.

Для стационарных процессов левые части в (4) равны нулю и (4) сводится к системе линейных алгебраических уравнений, для решения которой могут

быть использованы прямые или итерационные методы. Используя прямые методы (Гаусса, Гаусса – Жордана, Крамера и некоторые другие), в принципе можно найти точное решение этой системы. Итерационные методы (Якоби, Гаусса – Зейделя, релаксации и ряд других) позволяют получить решение в результате последовательных приближений.

Рассмотренный подход применения марковских случайных процессов позволяет прогнозировать значения вероятностей наступления состояний процессов функционирования ОТС. Например, это позволяет оценивать значения вероятности успешной подготовки ОТС  $S$  к применению ( $P_8$ ) в зависимости от интенсивностей переходов системы из состояния в состояние. Для примера исследована зависимость указанной вероятности от интенсивности  $\lambda_{12}$  при фиксированных значениях других интенсивностей (табл. 3).

Таблица 3

Исходные данные

№ вар.	$\lambda_{12}$	$\lambda_{23}$	$\lambda_{34}$	$\lambda_{45}$	$\lambda_{56}$	$\lambda_{67}$	$\lambda_{78}$	$\lambda_{25}$	$\lambda_{47}$	$\lambda_{41}$	$\lambda_{61}$	$\lambda_{81}$	$\lambda_{85}$
1	0,5	0,8	0,9	0,7	0,9	0,8	0,8	0,8	0,8	0,1	0,1	0,1	0,1
2	0,7	0,8	0,9	0,7	0,9	0,8	0,8	0,8	0,8	0,1	0,1	0,1	0,1
3	0,9	0,8	0,9	0,7	0,9	0,8	0,8	0,8	0,8	0,1	0,1	0,1	0,1

Таким образом, управлять (оптимизировать) вектором вероятностей состояний (2) с использованием рассмотренной модели можно несколькими способами:

- 1) изменяя значения  $\lambda_{ij}(t)$ ;
- 2) изменяя структуру моделируемой ОТС, т. е. множество состояний системы и связей (направлений обмена информацией) между ними –  $Q = \{q_{ij}\}$ .

### 2.1. Пример решения задачи с использованием Matlab

Поставим задачу по решению системы дифференциальных уравнений (4). Для этого разработаем специальную программу, выполнение которой дает искомый результат.

%Решение системы ДУ Колмогорова

function kolmogorov8

% Интенсивности перехода

lambda=[0 0.7 0 0 0 0 0 0;

0 0 0.8 0 0.8 0 0 0;

0 0 0 0.9 0 0 0 0;

0.1 0 0 0 0.7 0 0.8 0;

0 0 0 0 0 0.9 0 0;

0.1 0 0 0 0 0 0.8 0;

0 0 0 0 0 0 0 0.8;

0.1 0 0 0 0.1 0 0 0;]

% Начальные условия

P0=[1 0 0 0 0 0 0 0];

% интервал моделирования

```

t = [0, 20];
% интегрирование
[T,P] = ode45(@righth_part, t ,P0);
function dP = righth_part(t,P);
% определяем вероятности
P1 = P(1);
P2 = P(2);
P3 = P(3);
P4 = P(4);
P5 = P(5);
P6 = P(6);
P7 = P(7);
P8 = P(8);
% задаем размерность выходного вектора
dP = zeros(8,1);
% правые части СДУ
dP(1) = -lambda(1,2)*P1+lambda(4,1)*P4+lambda(6,1)*P6+lambda(8,1)*P8;
dP(2) = lambda(1,2)*P1-lambda(2,3)*P2-lambda(2,5)*P2;
dP(3) = lambda(2,3)*P2-lambda(3,4)*P3;
dP(4) = lambda(3,4)*P3-lambda(4,7)*P4-lambda(4,5)*P4-lambda(4,1)*P4;
dP(5) = lambda(4,5)*P4+lambda(2,5)*P2+lambda(8,5)*P8-lambda(5,6)*P5;
dP(6) = lambda(5,6)*P5-lambda(6,1)*P6-lambda(6,7)*P6;
dP(7) = -lambda(7,8)*P7+lambda(4,7)*P4+lambda(6,7)*P6;
dP(8) = -lambda(8,5)*P8-lambda(8,1)*P8+lambda(7,8)*P7;
end
% Вывод графика
plot (T,P);
% Метка на оси абсисс
xlabel('t');
% Легенда графика
legend('P1', 'P2','P3','P4', 'P5','P6','P7', 'P8');
% Вывод результатов в командном окне
P
end

```

Результаты расчетов  $P_8$  на интервале в 20 мин, полученные интегрированием (4) методом Рунге – Кутты 4-го порядка по НУ (5), сведены в табл. 4. На рис. 2 представлены соответствующие графики.

Таблица 4

#### Результаты расчетов $P_8$

Время, мин.	$\lambda_{12}$		
	0,5	0,7	0,9
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0,020751	0,02598	0,029585
4	0,08074	0,100619	0,115861
5	0,169046	0,204634	0,230532
6	0,261773	0,306707	0,336873
7	0,341004	0,387327	0,415776
8	0,399403	0,441422	0,465034

Время, мин.	$\lambda_{12}$		
	0,5	0,7	0,9
9	0,437515	0,472763	0,491074
10	0,459671	0,488183	0,502232
11	0,470976	0,494118	0,505383
12	0,475761	0,495257	0,505038
13	0,477099	0,49447	0,503662
14	0,4769	0,493245	0,50235
15	0,476204	0,492202	0,501437
16	0,475499	0,491501	0,500917
17	0,474959	0,491104	0,500673
18	0,474604	0,490916	0,500589
19	0,4744	0,490849	0,50058
20	0,474298	0,49084	0,500598

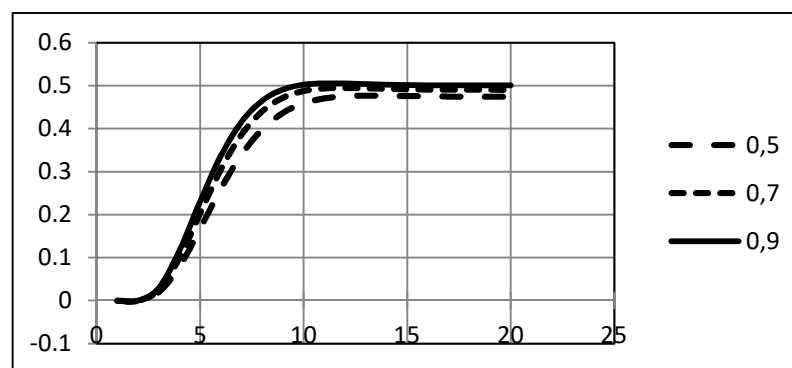


Рис. 2. Графики зависимостей  $P_8$  от времени

### Задача № 3

*Моделирование сеансов управления (СУ) космическими аппаратами (КА) с использованием командно-измерительной системы (КИС).*

Наибольший практический интерес представляют модельные исследования СУ автоматизированных КИС, содержащих в своем составе информационный управляющий комплекс (ИУК) и автоматическую систему контроля технического состояния (АСК), поскольку такие КИС составляют основу средств управления КА наземного комплекса управления. Наличие АСК позволяет оперативно обнаруживать отказы и переключать рабочие объемы (в простейшем случае - комплекты КИС) аппаратуры.

В наиболее общем случае система резервирования автоматизированной КИС удовлетворяет следующим положениям:

- резервирование КИС осуществляется дублированием комплектов ее аппаратуры;
- резервный комплект аппаратуры находится в ненагруженном режиме ожидания;
- основной и резервный комплекты аппаратуры КИС равнонадежны;



- наработка до отказа комплекта аппаратуры КИС подчинена экспоненциальному закону распределения;
- время восстановления аппаратуры КИС имеет экспоненциальное распределение;
- контрольно-переключающее устройство резервируемых объемов аппаратуры КИС в составе АСК ИУК работает безотказно.

Представим процессы включения, подготовки и проведения СУ КИС нестационарной марковской системой обслуживания с дискретным множеством состояний и непрерывным временем. Ориентированный взвешенный граф вершина-событие (дуга-работа), представлен на рис.3, а описание содержания работ, их обозначения и обозначения интенсивностей переходов указаны в табл. 5. При составлении графа учитывалось, что все работы (включение основного и резервного комплектов КИС, их подготовка к СУ, проведение СУ на основном и резервном комплектах) выполняются последовательно.

Таким образом, СУ КИС может содержать не более шести работ (операций), при выполнении каждой из которых может быть обнаружен отказ основного или резервного комплекта КИС. При этом отказы комплектов КИС и их восстановление могут трактоваться в самом широком смысле (от сбоев и отказов технических средств до влияния человеческого фактора на качество подготовки и проведения СУ). Общим для таких «отказов» является свойство делать невозможным выполнение операций до их устранения.

Временные интервалы выполнения всех работ имеют экспоненциальные распределения с интенсивностями  $\{\omega_1\lambda_1, \omega_2\lambda_2, \dots, \omega_6\lambda_6\}$  при обнаружении отказа, зависящими от номера работы (а значит и от номера отказа) и значений соответствующих вероятностей их обнаружения  $\omega_i, i=\overline{1,6}$ . В случае отсутствия отказа КИС, осуществляется переход по соответствующим дугам, с интенсивностями  $\{(1 - \omega_1)\lambda_1, (1 - \omega_2)\lambda_2, \dots, (1 - \omega_6)\lambda_6\}$ . На рис. 3 используются обозначения  $(1 - \omega_i) = \bar{\omega}_i$ . Время устранения обнаруженных отказов распределено по экспоненциальному закону с интенсивностями  $\mu_i, i = \overline{1,5}$ . Состояния  $(i, j)$  такой системы в каждый момент времени будем характеризовать количеством обнаруженных (и еще не устраненных) отказов  $i, i=0,1$ , и числом выполненных операций  $j (j= \overline{0,6})$ . Вероятности пребывания системы в этих состояниях обозначим  $P_{i,j}(t)$ .

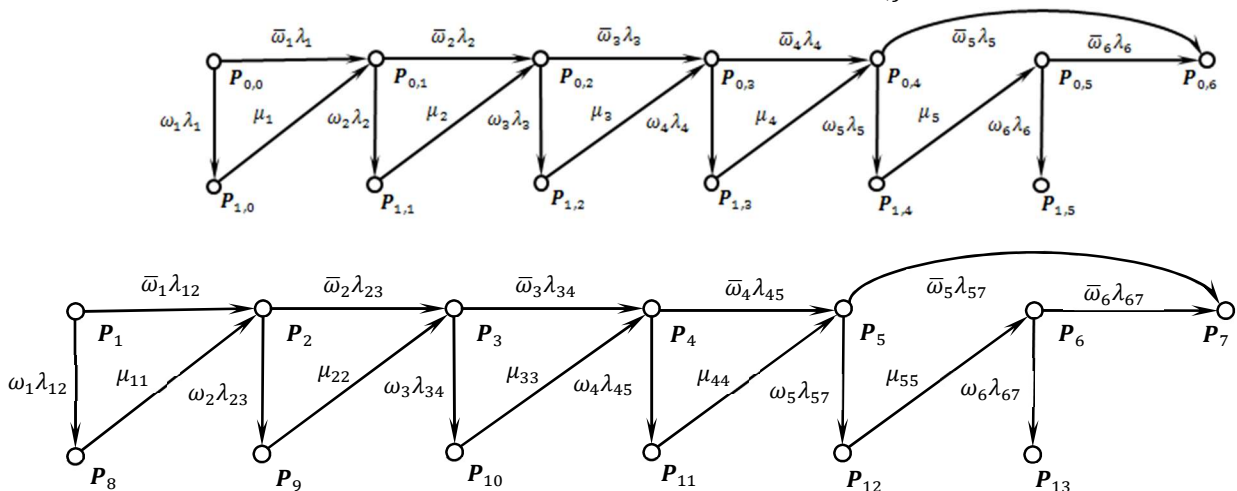


Рис. 3. Ориентированный граф процесса подготовки и проведения СУ КИС

Таблица 5

Описание содержания работ, их обозначения и обозначения интенсивностей переходов

Обозначение работы	Интенсивность	Описание работ, изменяющих состояния системы
A <sub>1</sub>	$\lambda_{12}$	Включение основного комплекта КИС
A <sub>2</sub>	$\lambda_{23}$	Включение резервного комплекта КИС
A <sub>3</sub>	$\lambda_{34}$	Подготовка к СУ основного комплекта КИС
A <sub>4</sub>	$\lambda_{45}$	Подготовка к СУ резервного комплекта КИС
A <sub>5</sub>	$\lambda_{57}$	Проведение СУ основным комплектом КИС
A <sub>6</sub>	$\lambda_{67}$	Проведение СУ резервным комплектом КИС

Как видно из рис. 3 в таком представлении общее число состояний графа равно  $N_c=13$ . Процессы в рассматриваемой марковской модели описываются системой из тринадцати дифференциальных уравнений, численное решение которых позволяет получить ряд важных вероятностных показателей процессов подготовки и проведения СУ КИС.

Вероятность выполнения СУ без замечаний:  $R_{\text{ББЗ}}(t) = P_{0,6}(t)$ .

Вероятность невыполнения СУ:  $R_{\text{НСУ}}(t) = P_{1,5}(t)$ .

В рамках системного подхода к анализу космических радиотехнических комплексов при моделировании СУ наибольший практический интерес представляет интегральный системный показатель качества управления КА КИС - вероятность выполнения СУ без замечаний (ББЗ). Данный показатель характеризует надежность и устойчивость управления КА в условиях возникновения отказов аппаратуры, нештатных ситуаций, сложной помеховой обстановки и других факторов.

Для выполнения задания 1 необходимо:

- 1) разработать дифференциальную модель ОТС по графу рис. 3;
- 2) задать исходные данные:

- значения вероятностей обнаружения отказов  $\omega_i$ ,  $i = \overline{1, 6}$ ,  
 $(\omega_1 = \omega_2 = 0,03; \omega_3 = \omega_4 = 0,06; \omega_5 = \omega_6 = 0,01)$  для всех вариантов задания;
  - значения интенсивностей выполнения работ (переходов  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, 6}$ ) взять из табл. 6 согласно своему варианту;
  - значения интенсивностей  $\mu_i$ ,  $i = \overline{1, 5}$ , устранения отказов взять из табл. 6 согласно своему варианту;
- 3) выявить начальных условий для интегрирования уравнений, входящих в дифференциальную модель ОТС;
  - 4) задать (при необходимости) интервал времени и шаг оценивания эффективности ОТС;
  - 5) решить систему дифференциальных уравнений с использованием Matlab или MathCad;
  - 6) представить результаты в удобной для их анализа форме, т.е. вычислить и построить графики:
    - а) значение вероятности выполнения СУ без замечаний;
    - б) значение вероятности выполнения СУ с замечаниями.

Таблица 6

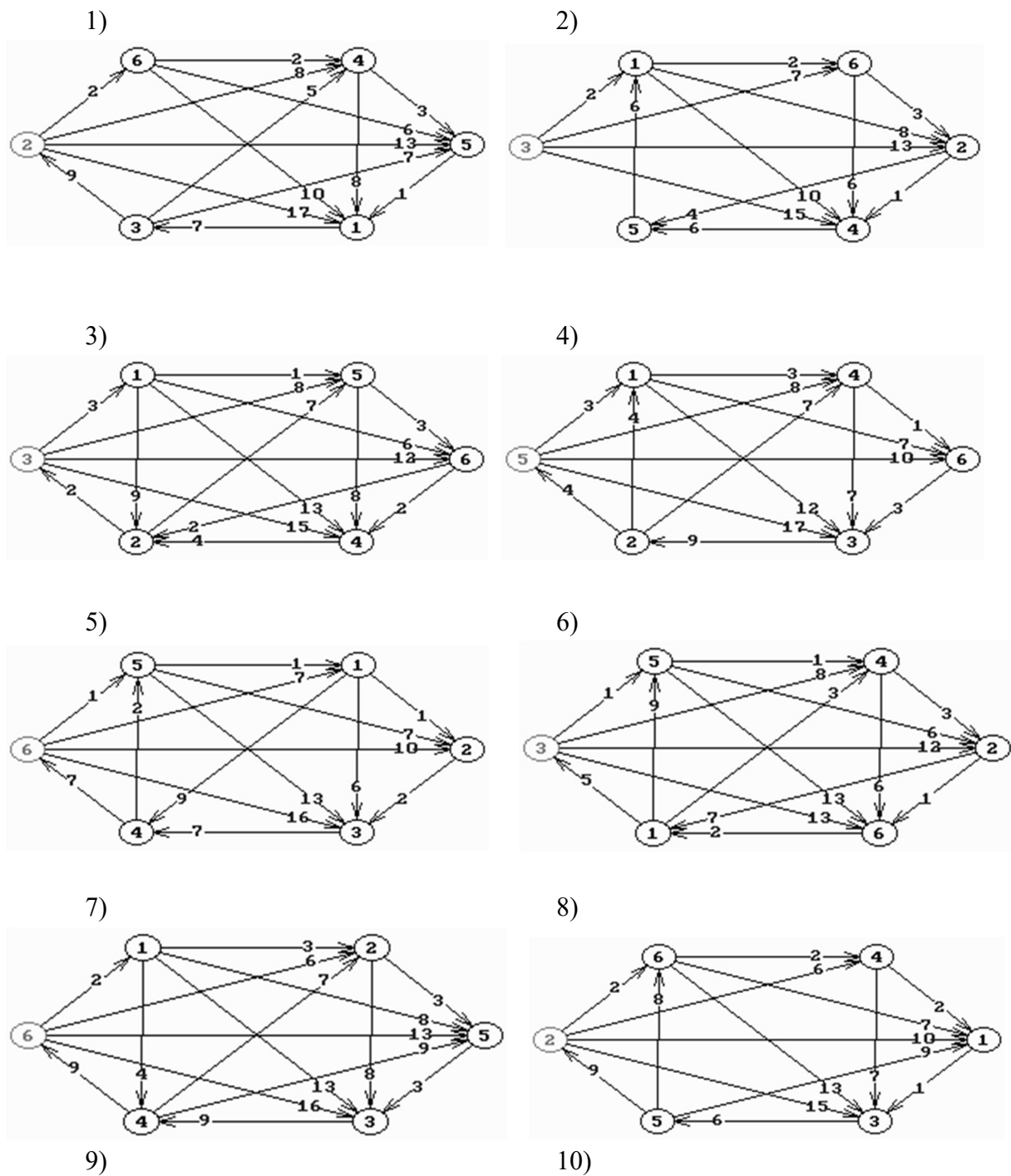
Варианты исходных данных

№ Варианта	Интенсивность выполнения работ (переходов) $\lambda_i$ , $i = \overline{1, 6}$	Интенсивность устранения отказов $\mu_i$ , $i = \overline{1, 5}$ .
1	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1; \lambda_3 = \lambda_4 = 1;$ $\lambda_5 = \lambda_6 = 6$	$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1;$ $\mu_5 = 12.$
2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1,5; \lambda_3 = \lambda_4 = 1,2;$ $\lambda_5 = \lambda_6 = 6$	$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1,1;$ $\mu_5 = 12.$
3	$\lambda_1 = \lambda_2 = 2; \lambda_3 = \lambda_4 = 1,4;$ $\lambda_5 = \lambda_6 = 6$	$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1,2;$ $\mu_5 = 12.$
4	$\lambda_1 = \lambda_2 = 2,5; \lambda_3 = \lambda_4 = 1,6;$ $\lambda_5 = \lambda_6 = 6$	$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1,3;$ $\mu_5 = 12.$
5	$\lambda_1 = \lambda_2 = 3; \lambda_3 = \lambda_4 = 1,8;$ $\lambda_5 = \lambda_6 = 6$	$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1,4;$ $\mu_5 = 12.$
6	$\lambda_1 = \lambda_2 = 3,5; \lambda_3 = \lambda_4 = 2;$ $\lambda_5 = \lambda_6 = 6$	$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1,5;$ $\mu_5 = 12.$
7	$\lambda_1 = \lambda_2 = 4; \lambda_3 = \lambda_4 = 2,5;$ $\lambda_5 = \lambda_6 = 5$	$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0,9;$ $\mu_5 = 12.$
8	$\lambda_1 = \lambda_2 = 4; \lambda_3 = \lambda_4 = 2;$ $\lambda_5 = \lambda_6 = 5$	$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0,8;$ $\mu_5 = 12.$
9	$\lambda_1 = \lambda_2 = 3; \lambda_3 = \lambda_4 = 1;$ $\lambda_5 = \lambda_6 = 5$	$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0,7;$ $\mu_5 = 12.$
10	$\lambda_1 = \lambda_2 = 2; \lambda_3 = \lambda_4 = 2;$ $\lambda_5 = \lambda_6 = 4$	$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0,6;$ $\mu_5 = 12.$
11	$\lambda_1 = \lambda_2 = 2; \lambda_3 = \lambda_4 = 1;$	$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0,5;$ $\mu_5 = 12.$

	$\lambda_5 = \lambda_4 = 4$	
12	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1; \lambda_3 = \lambda_4 = 2;$ $\lambda_5 = \lambda_6 = 4$	$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0,6;$ $\mu_5 = 12.$

#### Задача №4

Для взвешенного графа своего варианта, представленного на рис. 4, вычислить вектор вероятностей состояний  $P(t) = \langle P_1(t), P_2(t), \dots, P_6(t) \rangle$  и построить графики компонент этого вектора.



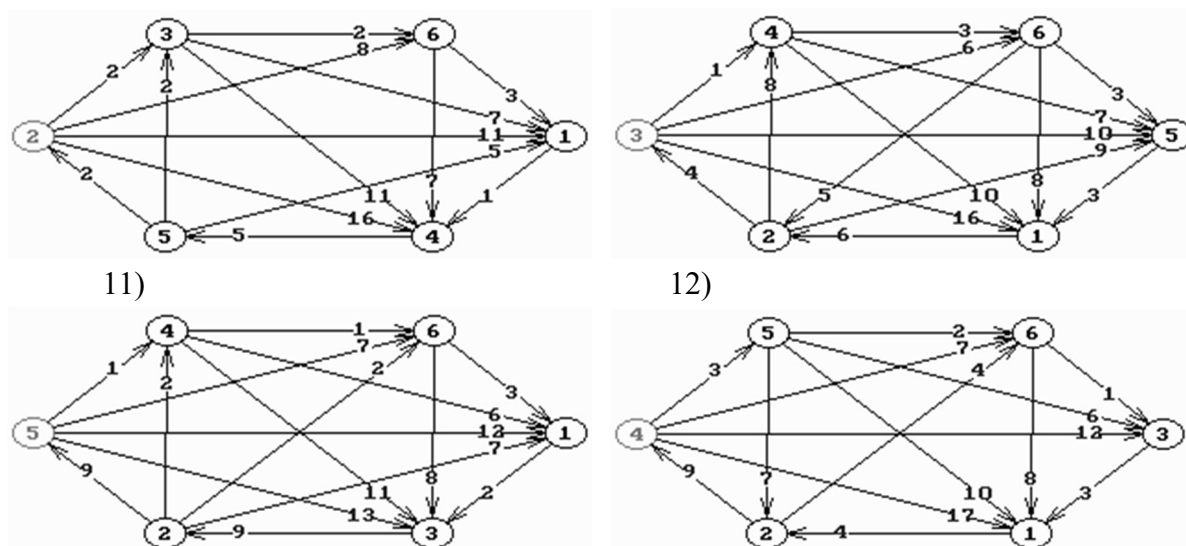


Рис. 4

### Заключение

Таким образом, метод оценивания эффективности применения ОТС состоит из следующих этапов:

1. выявления множеств  $S$ ,  $\Lambda$ ,  $Q$ ;
2. разработки соответствующей графовой модели ОТС;
3. разработки дифференциальной модели ОТС;
4. выявления значений элементов множества  $\Lambda$ ;
5. выявления начальных условий для интегрирования уравнений, входящих в дифференциальную модель ОТС;
6. задания интервала времени и шага оценивания эффективности ОТС;
7. интегрирования системы дифференциальных уравнений;
8. представления результатов в удобной для их анализа форме.

Управлять (оптимизировать) вектором вероятностей состояний (2) с использованием рассмотренной модели можно несколькими способами:

- 1) изменяя значения  $\lambda_{ij}(t)$ ;
- 2) изменяя структуру моделируемой ОТС, т. е. множество состояний системы и связей (направлений обмена информацией) между ними –  $Q = \{q_{ij}\}$ .

### Оформление отчета и защита работы

По выполненной работе курсанты оформляют в тетрадях или на отдельных листах отчет, в который обязательно включаются:

- титульный лист;
- номер варианта ПЗ;
- формулировку задачи исследований;
- расчетные соотношения;
- результаты расчетов;
- графики полученных зависимостей;
- краткий анализ полученных зависимостей и выводы.

При представлении результатов быть готовым ответить на следующие контрольные вопросы:

1. Доложить определения и классификацию марковских случайных процессов.
2. Какими элементами определяется дискретная марковская цепь.
3. Какими элементами определяется непрерывная марковская цепь.
4. Какие характеристики позволяет вычислить использование марковских случайных процессов.
5. Что означают состояния системы?
6. Каков порядок изображения графа состояний системы?
7. Правило составления дифференциальных уравнений.
8. Перечислите исходные и искомые параметры модели.
9. Что означают начальные условия для системы?
10. Прокомментируйте полученные результаты.

А. Данилов

---

(воинское звание, подпись, инициал имени, фамилия автора)

« » \_\_\_\_\_ 2020 г.