ВОЕННО-КОСМИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ ИМЕНИ А.Ф. МОЖАЙСКОГО

Кафедра Математического обеспечения

несекретно
Экз. № 1

УТВЕРЖДАЮ

Начальник 25 кафедры
полковник______________С.Петренко

«___» ______ 2007 г.

Автор: профессор 25 кафедры
доктор технических наук
профессор А. Хомоненко

Тема: Основы теории нечетких множеств

по дисциплине: Системы искусственного интеллекта

Обсуждено и одобрено на заседании 25 кафедры
«___» _________ 2007 г.
протокол № ___

Санкт-Петербург
2007

Содержание занятия и время

Введение……………………………………………………………7 мин.

Учебные вопросы (основная часть)

1. Нечеткие множества...……………………………..……….…25 мин.

2. Определение функции принадлежности……………..………...…30 мин.

3. Операции над нечеткими множествами…………..…..……..…25 мин.

Заключение……………………………………………………..…3 мин.

Литература:

Основная:

1. Борисов В.В., Круглов В.В., Федулов А.С. Нечеткие модели и сети. - М.: Горячая линия-Телеком, 2007. – 284 с.

2. Леоненков А. Нечеткое моделирование в среде Matlab и fuzzyTECH. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 736 с.

3. Конспект лекции.

Дополнительная:

1.____

(наименование издания, страницы)

2.____

(наименование издания, страницы)

3. ____

(наименование издания, страницы)

Материально-техническое обеспечение:

1. Наглядные пособия (по данным учета кафедры): -

2. Технические средства обучения: проектор

3. Приложения (диафильмы, слайды): презентация «Работа с нечеткими знаниями»

Организационно-методические указания: Во введении сформулировать тему лекции, цель и название изучаемых вопросов. Задать вопросы обучаемым по материалам предыдущей лекции:

1. Назовите основные этапы разработки промышленных ЭС.
2. В чем состоит суть технологии быстрого прототипирования?

При изложении первого вопроса обратить внимание обучаемых на важность вопросов представления знаний, имеющих нечеткий характер.

Обратить внимание на смысловое толкование функции принадлежности, а также основные способы их определения

Привести примеры научных результатов ученых академии в области применения нечетких знаний в прикладных экспертных системах, в том числе для Космических войск.

В заключительной части обобщить изложенный материал и сформулировать задание на самостоятельную подготовку.

<u>Цель лекции:</u> Изложить понятие нечеткого множества, функции принадлежности и операции над нечеткими множествами.

Введение

Учебные вопросы:

1. Нечеткие множества

В системах искусственного интеллекта зачастую приходится иметь дело с нечеткими знаниями, которые нельзя интерпретировать как полностью истинные или полностью ложные. При выводе решения в продукционных системах с нечеткими знаниями требуется решать проблемы представления нечетких знаний и использования их в различных алгоритмах нечеткого вывода.

При попытке формализовать человеческие знания возникла проблема, затруднявшая использование традиционного математического аппарата для их описания. Существует класс описаний, использующих качественные характеристики объектов (много, мало, сильно, слабо, очень сильно и т. п.). Эти характеристики обычно размыты, и их нельзя интерпретировать однозначно. В то же время они содержат важную информацию, например, "Одним из возможных признаков неисправности двигателя является низкое давление масла".

С другой стороны, в системах искусственного интеллекта часто пользуются неточными знаниями, которые нельзя интерпретировать как полностью истинные или полностью ложные. Существуют знания, достоверность которых выражается некоторым коэффициентом, например, 0,5.

Для формального представления таких знаний с учетом свойств их размытости и неточности американским ученым Лотфи Заде предложен математический аппарат нечеткой алгебры и нечеткой логики. Это направление получило широкое распространение, положив начало одной из ветвей теории искусственного интеллекта, именуемой мягкими вычислениями.

Неформально нечеткое множество можно определить как набор элементов произвольной природы, относительно которых нельзя однозначно утверждать, принадлежат ли отдельные элементы этого набора заданному множеству или нет.

Нечеткое множество A, формально определяется как множество упорядоченных пар $<x, \mu_A(x)>$, где x есть элемент универсального множества X, $x \in X$, $\mu_A(x)>$ — функция принадлежности, принимающая значения на интервале [0, 1]. Эта функция указывает степень принадлежности элемента x нечеткому множеству *A*.

В частности, значение $\mu_A\{x\}=1$ означает, что элемент x точно принадлежит нечеткому множеству *A*, а значение $\mu_A\{x\}=0$, наоборот указывает на то, что элемент x точно не принадлежит нечеткому множеству *A*.

Конечные нечеткие множества обычно записывают в виде:

$A = \{<x_1, \mu_A(x_1)>, <x_2, \mu_A(x_2)>, \ldots, <x_n, \mu_A(x_n)>\}$.

Кроме того, часто используют и другие варианты задания конечных нечетких множеств, например такой как:

$A = \{<x_1 / \mu_A(x_1)> + <x_2 / \mu_A(x_2)> +, \ldots, + <x_n / \mu_A(x_n)>\}$.

Здесь косая черта обозначает разделитель, а символ «+» служит для обозначения теоретико-множественного объединения отдельных элементов.

Пример. Нечеткое множество "юный" можно определить следующим образом:

"юный"={11/0,6 +12/0,8+13/1+14/1+15/0,9+16/0,7+17/0,4+18/0,2}

Такое определение нечеткого множества некоторым экспертом означает, что он с высокой степенью уверенности относит ребенка в возрасте 13-14 лет к юному ($\mu_A(x)=1$). Человека в возрасте 11-12 лет и 15-16 лет также относят к юному с меньшей степени уверенности ($0,6 \leq \mu_A(x) \leq 0,9$), в возрасте 17-18 лет его называют юным достаточно редко. Таким образом, нечеткие множества позволяют учитывать разброс индивидуальных мнений. Нечеткие множества можно задавать *графически*. Например, нечеткое множество "юный" графически можно задать, как показано на рис. 1.1 а) и b).

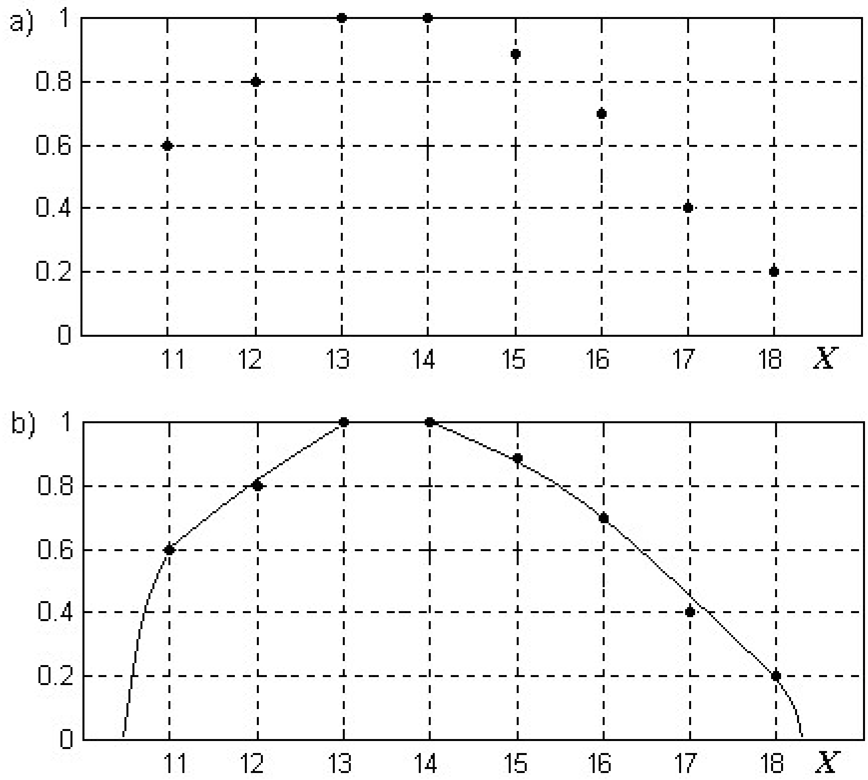

Рис. 1.1. Графическое представление нечеткого множества "юный"

Как видим на рис. 1.1, нечеткое множество можно задать с помощью дискретного (a) или непрерывного (b) графика функции принадлежности $\mu(x)$.

2. Определение функций принадлежности

Для определения функций принадлежности нечетких множеств могут быть использованы прямые и косвенные методы.

При использовании *прямых методов* эксперт либо просто задает для каждого $x \in E$ значение $\mu_A(x)$, либо определяет функцию совместимости. Прямые методы задания функции принадлежности обычно используются для измеримых понятий, таких как скорость, время, расстояние, температура и т.д., или когда выделяются полярные значения.

Во многих задачах при характеристике объекта можно выделить набор признаков и для каждого из них определить полярные значения, соответствующие значениям функции принадлежности, 0 или 1.

Например, в задаче определения характеристик и субхарактеристик качества программного обеспечения (согласно международному стандарту ISO 9126-1) можно выделить шкалы, приведенные в таблице 1.1.

Таблица 1.1. Шкалы в задаче оценки характеристик качества ПО

	характеристика	0	1
x_1	функциональные возможности	узкие	широкие
x_2	функциональная пригодность	низкая	высокая
x_3	правильность (корректность)	неполная	полная
x_4	способность к взаимодействию	слабая	сильная
x_5	защищенность	плохая	хорошая
x_6	надежность	низкая	высокая
x_7	практичность (применимость)	низкая	высокая
x_8	сопровождаемость	плохая	хорошая
x_9	мобильность	низкая	высокая

Для конкретного программного продукта *А* эксперт, исходя из приведенной шкалы, задает $\mu_A(x) \in [0; 1]$, формируя векторную функцию принадлежности $\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \ldots \mu_A(x_9)\}$.

При прямых методах используются также групповые прямые методы, когда, например, группе экспертов предъявляют конкретный программный продукт и каждый должен дать один из двух ответов: «это ПО надежное » или «это ПО не надежное», тогда количество утвердительных ответов, деленное на общее число экспертов, дает значение $\mu_{надежное}$ (ПО).

Косвенные методы определения значений функции принадлежности используются в случаях, когда нет элементарных измеримых свойств, через которые определяется нечеткое множество. Как правило, это методы попарных сравнений. Если бы значения функций принадлежности были бы нам известны, например, $\mu_A(x_i) = \omega_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то попарные сравнения можно было бы представить матрицей отношений А=$\{a_{ij}\}$, где $a_{ij} = \omega_i / \omega_j$.

На практике эксперт формирует матрицу А, при этом предполагается, что диагональные элементы равны 1, а для элементов, симметричных относительно диагонали, $a_{ij} = 1/ a_{ij}$, т.е. если один элемент оценивается в *а* раз сильнее чем другой, то этот последний должен быть в *а* раз сильнее, чем первый. В общем случае задача сводится к поиску вектора w, удовлетворяющего уравнению вида $\mathbf{Aw} = \lambda_{max\backslash}\mathbf{w}$, где λ_{max} □ наибольшее собственное значение матрицы **A**. Поскольку матрица **A** положительна по построению, решение данной задачи существует и является положительным.

Можно отметить еще два подхода:

- *использование относительных частот* по данным эксперимента в качестве значений функции принадлежности;
- *использование типовых форм* кривых для задания функций принадлежности с уточнением их параметров в соответствии с данными эксперимента.

Обычно используются следующие типовые формы функций принадлежности нечетких множеств: треугольная (trimf), трапецеидальная (trapmf), гауссова (gaussmf), двойная гауссова, обобщенная колоколообразная, сигмоидальная, двойная сигмоидальная, Z-функция, S-функция, Pi-функция.

Конкретный вид функций принадлежности определяется значениями параметров их аналитического представления, например:

$$trimf(x, a, b, c) = \left(max\left(min\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right),$$

$$gaussmf(x, \sigma, c) = e^{-((x-c)/\sigma)^2},$$

и т.д.

3. Операции над нечеткими множествами

Подчеркнем, что нечеткие множества являются обобщением обычных четких множеств. Поэтому любое определение некоторой операции над нечеткими множествами должно быть справедливым в случае, когда вместо нечетких множеств используются обычные множества. Для обеспечения возможности сравнения нечетких множеств и выполнения над ними различных операций соответствующие нечеткие множества должны быть определены на одном и том же универсуме.

Прежде всего, определим следующие два простейших отношения между нечеткими множествами.

Равенство. Два нечетких множества A={x, μA(x)} и B={x, μ_B(x)} считаются равными (A=B), если их функции принадлежности принимают равные значения на универсуме X:

$$\mu_A(x) = \mu_B(x) \text{ для любого } x \in X. \quad (1.1)$$

Нечеткое подмножество. Нечеткое множество A={x, $\mu_A(x)$} является *нечетким подмножеством* нечеткого множества B={x, $\mu_B(x)$} (обозначают $A \subseteq B$) тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad (\forall x \in \boldsymbol{X}). \qquad (1.2)$$

Говорят, что нечеткое множество B *доминирует* нечеткое множество A, а нечеткое множество A *содержится* в нечетком множестве B. Нечеткое множество A называют также *несобственным подмножеством* множества B.

Если в определении нечеткого подмножества исключается равенство соответствующих нечетких множеств, то A называется *собственным* нечетким подмножеством B и обозначается: $A \subset B$. При этом нечеткое множество B *строго* доминирует нечеткое множество A, а нечеткое множество A *строго* содержится в нечетком множестве B.

Приведем определения нескольких важных *логических операций* над нечеткими множествами.

Пересечением двух нечетких множеств A и *B* называют нечеткое множество C ($C=A \cap B$), заданное на этом же универсуме $\boldsymbol{X}$, функция принадлежности которого определяется по формуле:

$$\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (\forall x \in \boldsymbol{X}). \qquad (1.3)$$

Пересечение $A \cap B$ есть наибольшее нечеткое подмножество C, которое содержится одновременно в нечетких множествах A и B.

Операцию пересечения нечетких множеств называют также min-пересечением или $\wedge$-пересечением (по определению логической операции "И", обозначаемой знаком "$\wedge$").

Объединением двух нечетких множеств A и *B* называют нечеткое множество C ($D=A \cup B$), заданное на этом же универсуме $\boldsymbol{X}$, функция принадлежности которого определяется по формуле:

$$\mu_D(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (\forall x \in \boldsymbol{X}). \qquad (1.4)$$

Объединение $A \cup B$ есть наименьшее нечеткое множество D, которое доминирует одновременно A и B. Операцию объединения нечетких множеств называют max-объединением или $\vee$-объединением (по определению логической операции "ИЛИ", обозначаемой знаком "$\vee$").

Заметим, что эта же операция в терминах вероятностного подхода задается в виде:

$$\mu_D(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) * \mu_B(x).$$

Разностью двух нечетких множеств A и *B* называется некоторое третье нечеткое множество S (обозначается $S=A \backslash B$), заданное на этом же универсуме $\boldsymbol{X}$, функция принадлежности которого определяется по формуле:

$$\mu_S(x) = \max\{\mu_A(x) - \mu_B(x),\ 0\} \qquad (\forall x \in \boldsymbol{X}), \tag{1.5}$$

где используется операция арифметической разности двух чисел.

При построении нечетких моделей сложных систем широко используются унарные операции умножения нечеткого множества на число и возведение нечеткого множества в степень.

Умножение нечеткого множества на число. Пусть А=$\{x,\ \mu_A(x)\}$ — произвольное нечеткое множество, заданное на универсуме $\boldsymbol{X}$; a — положительное действительное число, такое, что $a \cdot h_A \leq 1$ (h_A — высота нечеткого множества А). Результат операции *умножения нечеткого множества* А *на число a* определяется как нечеткое множество В=$\{x,\ \mu_B(x)\}$, заданное на этом же универсуме $\boldsymbol{X}$, функция принадлежности которого определяется по формуле:

$$\mu_B(x) = a \cdot \mu_A(x) (\forall x \in \boldsymbol{X}). \tag{1.6}$$

Эту операцию в дальнейшем будем обозначать через $a \cdot$А.

Возведение в степень. Пусть А=$\{x,\ \mu_A(x)\}$ — произвольное нечеткое множество, заданное на универсуме $\boldsymbol{X}$; k — положительное действительное число. В этом случае формально можно определить операцию *возведения* нечеткого множества А *в степень k* как нечеткое множество В=$\{x,\ \mu_B(x)\}$, заданное на этом же универсуме $\boldsymbol{X}$, функция принадлежности которого определяется по формуле:

$$\mu_B(x) = \mu_A(x)^k \ (\forall x \in \boldsymbol{X}). \tag{1.7}$$

Примеры графического представления операции возведения нечеткого множества в степень приведены на рис. 1.2.

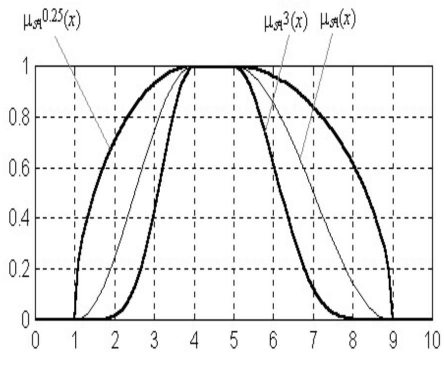

Рис. 1.2. Представление операций возведения в степень

На основе операции возведения в степень определяются две специальные операции над нечеткими множествами: операция концентрирования и операция растяжения нечеткого множества.

Концентрирование. Пусть на универсуме $\boldsymbol{X}$ задано произвольное нечеткое множество A={x, $\mu_A(x)$}. Операция *концентрирования*, обозначаемая через CON(A), дает в результате нечеткое множество C={x, $\mu_C(x)$}, функция принадлежности которого:

$$\mu_C(x) = \mu_A(x)^2 \qquad (\forall x \in \boldsymbol{X}). \tag{1.8}$$

Очевидно, в этом случае CON(A)=A^2.

Например, для конечного нечеткого множества A={<1, 1.0>, <2, 1.0>, <3, 0.9>, <4, 0.8>, <5, 0.6>, <6, 0.5>, <7, 0.4>, <8, 0.2>, <9, 0.1>} его концентрирование равно: CON(A)=A^2□={<1, 1.0>, <2, 1.0>, <3, 0.81>, <4, 0.64>, <5, 0.36>, <6, 0.25>, <7, 0.16>, <8, 0.04>, <9, 0.01>}.

Растяжение. Операция *растяжения*, обозначаемая через DIL(A), дает в результате нечеткое множество D={x, $\mu_D(x)$}, функция принадлежности которого:

$$\mu_D(x) = \mu_A(x)^{0.5} \qquad (\forall x \in \boldsymbol{X}). \tag{1.9}$$

С помощью операций концентрирования и растяжения выполняется усиление и ослабление лингвистических понятий соответственно. В частности, с помощью операции концентрирования можно задать модификатор «ОЧЕНЬ» для некоторого лингвистического понятия, а с помощью операции *растяжения* задается модификатор «СРАВНИТЕЛЬНО» или «БОЛЕЕ МЕНЕЕ».

Например, если некоторое понятие, скажем, «старый возраст», определяется как: A=<x, $\mu_A(x)$>, тогда понятие "очень старый возраст" определяется так: CON(A)=A^2=<x, $\mu_A(x)^2$>.

Заключение:

Обратить внимание обучаемых на актуальность вопросов, связанных с представлением нечетких знаний и их смысловой интерпретацией.

На самостоятельной подготовке прочитать материалы из рекомендуемой литературы.

Самостоятельно представить вид функции принадлежности для понятия «Температура жидкости средняя».

ДОКТОР ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК ПРОФЕССОР

____А. ХОМОНЕНКО

«_____» ___________ 200_ г.