ВОЕННО-КОСМИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ ИМЕНИ А.Ф. МОЖАЙСКОГО

Кафедра управления организационно-техническими системами космического назначения
(наименование кафедры)

УТВЕРЖДАЮ

Начальник 23 кафедры

полковник Г.Дудалев
(воинское звание, подпись, инициал имени, фамилия)
«____» ___________ 20__ г.

Автор: доцент кафедры, кандидат технических наук, подполковник
(должность, ученая степень, ученое звание, воинское звание,
И.КОЧАНОВ
инициал имени, фамилия)

Задание на практическое занятие № 7

Тема: Решение задачи линейного программирования симплексным методом
(наименование темы лекции по тематическому плану изучения дисциплины)

по дисциплине: Исследование операций
(наименование дисциплины)

Обсуждено и одобрено на заседании кафедры

(предметно-методической комиссии)
«___» ____________ 20__ г.
протокол № ___

Санкт-Петербург
2019

Содержание занятия и время

<u>Введение</u>	10 мин.
<u>Учебные вопросы</u> (основная часть):	
1. Определение исходных данных.	10 мин.
2. Решение задачи линейного программирования симплексным методом.	100 мин.
3. Анализ полученных результатов. Защита работы.	50 мин.
<u>Заключение</u>	10 мин.

Общее время проведения занятия – 180 мин

Место проведения: специализированная аудитория кафедры.

Литература:
Основная:

1. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика в экономике: математические методы и модели: Учебник для бакалавров – М.: Юрайт, 2016. – 541 с.
2. Шафигуллин И.Ш., Тюрин Р.М., Зубачев А.М. Исследование операций: Практикум – СПб.: ВКА имени А.Ф.Можайского, 2015. – 99 с.

Введение

Практическое занятие № 7 посвящено симплексному методу решения задач линейного программирования. *Целью* практического занятия является приобретение навыков решения задачи линейного программирования симплексным методом.

1. Определение исходных данных.

Исходные данные вариантов задач к работе 2

Решить следующие задачи симплексным методом:

1. $L(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 300; \\ x_1 + x_2 \le 150; \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

2. $L(\bar{x}) = 4x_1 + 2x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 32; \\ x_1 + x_2 \le 20; \\ 3x_1 + x_2 \le 50; \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3. $L(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 4; \\ x_1 + 3x_2 \le 4; \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

4. $L(\bar{x}) = 48x_1 + 33x_2 + 16x_3 + 22x_4 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \le 252; \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \le 144; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 80; \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

5. $L(\bar{x}) = 4x_1 + 6x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \le 600; \\ 2x_1 + 2x_2 \le 300; \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

6. $L(\bar{x}) = 4x_1 + 6x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 64; \\ x_1 + 3x_2 \le 72; \\ x_2 \le 20; \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

7. $L(\bar{x}) = 8x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 64; \\ 2x_1 + 2x_2 \le 40; \\ 6x_1 + 2x_2 \le 100; \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

8. $L(\bar{x}) = 3x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 \le 12; \\ 3x_1 + 9x_2 \le 12; \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

9. $L(\bar{x}) = 8x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 6x_1 + 12x_2 \le 72; \\ 5x_1 + 2x_2 \le 20; \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

10. $L(\bar{x}) = 20x_1 + 30x_2 \rightarrow \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 \le 320; \\ 5x_1 + 15x_2 \le 360; \\ 5x_2 \le 100; \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

11. $L(\bar{x}) = 96x_1 + 66x_2 + 32x_3 + 44x_4 \rightarrow \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 12x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 8x_4 \le 504; \\ 4x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 2x_4 \le 288; \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 \le 160; \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

2. Решение задачи линейного программирования симплексным методом.

Порядок выполнения работы

1. Согласно номеру своего варианта выберите условие задачи и постройте ее модель.
2. Найдите оптимальное решение задачи симплексным методом и продемонстрируйте его преподавателю.

Теоретические сведения

Симплексный метод решения задач линейного программирования является универсальным, так как позволяет решить практически любую задачу линейного программирования, записанную в каноническом виде.

Идея симплексного метода (метода последовательного улучшения плана) заключается в том, что начиная с некоторого исходного опорного решения осуществляется последовательно направленное перемещение по опорным решениям задачи к оптимальному. Значение целевой функции при этом перемещении для задач на максимум не убывает. Так как число опорных решений конечно, то через конечное число шагов получим оптимальное опорное решение. Опорным решением называется *базисное неотрицательное решение*.

Алгоритм решения задач

1. Математическая модель задачи должна быть канонической. Если она неканоническая, то ее надо привести к каноническому виду.

2. Находим исходное опорное решение и проверяем его на оптимальность. Для этого заполняем симплексную таблицу (табл. 1.1). Все строки таблицы 1-го шага, за исключением строки Δ_j (индексная строка), заполняем по данным системы ограничений и целевой функции.

Индексная строка для переменных находится по формуле

$$\triangle_j = \sum_{i=1}^{m} c_i h_{ij} - c_j, \quad j = \overline{1,n}$$

и по формуле

$$\triangle_j = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i \quad \text{для свободного члена.}$$

Таблица 1.1

c_i	**БП**	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_n	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n	b_i
c_1	x_1	1	0	…	0	$h_{1,m+1}$	…	h_{1n}	f_1
c_2	x_2	0	1	…	0	$h_{2,m+1}$	…	h_{2n}	f_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
c_m	x_m	0	0	…	1	$h_{m,m+1}$	…	h_{mn}	f_m
	$\triangle_j$	0	0	…	0	$\triangle_{m+1}$	…	$\triangle_n$	$L(\bar{x}_1)$

Возможны следующие случаи при решении задачи на максимум:

- если все оценки $\triangle_j \geq 0$, то найденное решение оптимальное;
- если хотя бы одна оценка $\triangle_j \leq 0$, но при соответствующей переменной нет ни одного положительного коэффициента, решение задачи прекращаем, так как $L(\bar{x}) \to \infty$, т.е. целевая функция не ограничена в области допустимых решений;
- если хотя бы одна оценка отрицательная, а при соответствующей переменной есть хотя бы один положительный коэффициент, то нужно перейти к другому опорному решению;
- если отрицательных оценок в индексной строке несколько, то в столбец базисной переменной (БП) вводят ту переменную, которой соответствует наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка.

- Если хотя бы одна оценка $\triangle_k < 0$, то k-й столбец принимаем за ключевой.

  За ключевую строку принимаем ту, которой соответствует минимальное отношение свободных членов (bi) к положительным коэффициентам k-го столбца. Элемент, находящийся на пересечении ключевых строки и столбца, называется ключевым элементом.

3. Заполняем симплексную таблицу 2-го шага:
   - переписываем ключевую строку, разделив ее на ключевой элемент;
   - заполняем базисные столбцы;
   - остальные коэффициенты таблицы находим по правилу «прямоугольника». Оценки можно считать по приведенным выше формулам или по правилу «прямоугольника» Получаем новое опорное решение, которое проверяем на оптимальность, и т.д.

Правило «прямоугольника» заключается в следующем.

Пусть ключевым элементом 1-го шага является элемент 1-й строки $(m+1)$-го столбца $h_{1,m+1}$. Тогда элемент i-й строки $(m+2)$-го столбца 2-го шага – обозначим его $h'_{i,m+2}$ – согласно правилу «прямоугольника» выражается формулой

$$h'_{i,m+2} = \frac{h_{1,m+1} \cdot h_{i,m+2} - h_{i,m+1} \cdot h_{1,m+2}}{h_{1,m+1}},$$

где $h_{i,m+2}$, $h_{i,m+1}$, $h_{1,m+1}$ – элементы 1-го шага.

Если целевая функция $L(\overline{x})$ требует нахождения минимального значения, то критерием оптимальности задачи является не положительность оценок Δ_j при всех $j =$ **Ошибка!**.

Анализ эффективности использования производственного потенциала предприятия

Предприятие располагает тремя производственными ресурсами (сырьем, оборудованием, электроэнергией) и может организовать производство продукции двумя различными способами. Расход ресурсов за один месяц и общий ресурс при каждом способе производства даны в табл. 1.2 (в условных единицах).

Таблица 1.2

Производственные ресурсы	Расход ресурсов за 1 месяц при работе		Общий ресурс
	1-м способом	2-м способом	
Сырье	1	2	4
Оборудование	1	1	3
Электроэнергия	2	1	8

При первом способе производства предприятие выпускает за один месяц –

3 тыс. изделий, при втором – 4 тыс. изделий.

Сколько месяцев должно работать предприятие каждым из этих способов, чтобы при наличных ресурсах обеспечить максимальный выпуск продукции?

Решение

Составим математическую модель задачи. Обозначим: x_1 – время работы предприятия первым способом, x_2 – время работы предприятия вторым способом.

Математическая модель имеет вид

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4; \\ x_1 + x_2 \leq 3; \\ 2x_1 + x_2 \leq 8; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Приведем задачу к каноническому виду

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3; \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 8; \\ x_j \geq 0,\ \mathrm{j} = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Составляем симплексную таблицу 1-го шага (табл. 1.3).

Таблица 1.3

c_i	**БП**	3	4	0	0	0	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_3	1	2	1	0	0	4
0	x_4	1	1	0	1	0	3
0	x_5	2	1	0	0	1	8
	$\triangle_j$	–3	–4	0	0	0	0

Получим:

$$\bar{X}_1 = (0, 0, 4, 3, 8), \qquad L(\bar{x}) = 0.$$

В индексной строке Δ_j имеются две отрицательные оценки, значит, найденное решение не является оптимальным и его можно улучшить. В качестве ключевого столбца следует принять столбец базисной переменной x_2, а за ключевую строку взять строку переменной x_3, где

$$\min (4/2, 3/l, 8/1) = \min (2, 3, 8) = 1.$$

Ключевым элементом является (2). Вводим в столбец базисной переменной x_2, выводим x_3. Составляем симплексную таблицу 2-го шага (табл. 1.4).

Получим:

$$\bar{X}_2 = (0, 2, 0, 1, 6), \qquad L(\bar{x}) = 8.$$

Таблица 1.4

c_i	**БП**	3	4	0	0	0	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
4	x_2	1/2	1	1/2	0	0	2
0	x_4	1/2	0	–1/2	1	0	1
0	x_5	3/2	0	–1/2	1	1	6
	Δ_j	–1	0	2	0	0	8

В индексной строке имеется одна отрицательная оценка. Полученное решение можно улучшить. Ключевым элементом является (1/2). Составляем симплексную таблицу 3-го шага (табл. 1.5).

Таблица 1.5

c_i	**БП**	3	4	0	0	0	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
4	x_2	0	1	1	–1	0	1
3	x_1	1	0	–1	2	0	2
0	x_5	0	0	1	–3	1	3
	Δ_j	0	0	1	2	0	10

Все оценки свободных переменных $\Delta_j \geq 0$, следовательно, найденное опорное решение является оптимальным:

$$\bar{X}_{\text{опт}} = (2, 1, 0, 0, 3), \qquad L(\bar{x})_{max} = 10.$$

Таким образом, по первому способу предприятие должно работать два месяца,
по второму – один месяц, при этом максимальный выпуск продукции составит 10 тыс. ед.

Альтернативный оптимум

При решении задач ЛП симплексным методом критерием оптимальности является условие $\Delta_j \geq 0$ для задач на максимум и условие $\Delta_j < 0$ для задач на минимум. Если на каком-то шаге окажется, что хотя бы одна оценка свободной переменной $\Delta_j = 0$, а все остальные $\Delta_j > 0$ для задач на максимум ($\Delta_j < 0$ для задач на минимум), то, приняв в качестве ключевого столбца столбец, где $\Delta_j = 0$, и найдя новое оптимальное решение, заметим, что значение целевой функции при этом не изменится. Говорят, что в этом случае задача имеет альтернативный оптимум. *Критерием альтернативного оптимума* при решении задач симплексным методом является равенство нулю хотя бы одной оценки свободной переменной ($\Delta_j = 0$).

Если только одна оценка свободной переменной равна нулю, то решение находится по формуле

$$\overline{X}_{\text{опт}} = t\overline{X}_{\text{опт1}} + (1-t)\overline{X}_{\text{опт2}},$$

где $0 \le t \le 1$.

Если две оценки и более, например *S,* свободных переменных равны нулю, то оптимальное решение определяется по формуле

$$\overline{X}_{\text{опт}} = \sum_{i=1}^{S} t_i \overline{X}_i, \qquad \text{где} \sum_{i=1}^{S} t_i = 1, t_i \ge 0.$$

В задачах, имеющих альтернативный оптимум, возникает возможность включения в ее модель других критериев эффективности.

Пример. Дана задача линейного программирования

$$L(\bar{x}) = 2x_1 - 4x_2 + 2x_5 \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7; \\ -x_2 + 4x_3 + x_4 = 12; \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Решение

Составим симплексную таблицу (табл. 1.6).

Таблица 1.6

c_i	БП	0	2	–4	0	2	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_1	1	3	–1	0	2	–7
0	x_4	0	–2	4	1	2	12
	$\triangle_j$	0	–2	4	0	0	10

В индексной строке имеется одна положительная оценка. Полученное решение можно улучшить. Ключевым элементом является (4). Составляем симплексную таблицу 2-го шага (табл. 1.7).

Таблица 1.7

c_i	БП	0	2	-4	0	2	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_1	1	5/2	0	1/4	2	10
–4	x_3	0	–1/2	1	1/4	1/2	3
	$\triangle_j$	0	0	0	–1	–2	–12

Получаем $\bar{X}_{\text{опт}} = (10, 0, 3, 0, 0)$.

Так как $\Delta_2 = 0$, то задача имеет альтернативный оптимум. Найдем еще одно оптимальное решение, введя вместо базисной переменной x_1 свободную переменную x_2 (таблица 1.8). Получаем $\bar{X}_{\text{опт}2} = (0, 4, 5, 0, 0)$.

Таблица 1.8

c_i	БП	0	2	–4	0	2	$L(\bar{x})$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
2	x_2	2/5	1	0	1/10	4/5	4
–4	x_3	1/5	0	1	3/10	9/10	5
	$\triangle_j$	0	0	0	–1	–4	–12

Найдем координаты оптимального решения задачи:

$$x_1 = 10t + (1-t)0 = 10t,$$

$$x_2 = 0t + (1-t)4 = 4 - 4t,$$

$$x_3 = 3t + (1-t)5 = -2t + 5,$$

$$x_4 = 0t + (1-t)0 = 0,$$

$$x_5 = 0t + (1-t)0 = 0,$$

$$\bar{X}_{\text{опт}} = (10t, 4 - 4t, 5 - 2t, 0, 0).$$

Давая t значения из [0,1], получим различные $\overline{X}_{\text{опт}}$, при которых $L(\bar{x}) = -11$.

3. Анализ полученных результатов. Защита работы.

По результатам работы в рабочей тетради оформляется отчет о проделанной работе. Отчет должен содержать:

1. Тему и цель практического занятия.
2. Постановку задачи на занятие.
3. Содержание основных этапов занятия.
   – результаты определение исходных данных;
   – результаты решения задачи графическим методом и анализ полученных данных.
4. Выводы по практическому занятию.

Оформленный отчет представляется преподавателю для проверки.

Примерные вопросы на защите работы

1. Что такое линейное программирование?
2. Какие математические модели ЛП называются каноническими?
3. В чем заключается идея симплексного метода?
4. Перечислите последовательность решения задачи ЛП симплексным методом.
5. Запишите формулу расчета индексной строки для переменных.
6. Запишите формулу расчета индексной строки для свободного члена.
7. Какие случаи возможны при решении задачи на максимум?
8. Какие случаи возможны при решении задачи на минимум?
9. Какой элемент симплексной таблицы называется ключевым?
10. В чем заключается правило «прямоугольника»?
11. Что является критерием альтернативного оптимума?

подполковник   Е.Ряхова
(воинское звание, подпись, инициал имени, фамилия автора)

«_____» ___________ 20__ г.