Лекция 11. Обзор методов вычисления показателей эффективности применения сложных систем

Цель занятия: ***Уяснить методы вычисления показателей эффективности применения сложных систем***

Учебные вопросы:

1. **Аналитические и численные методы**
2. **Статистические и имитационные методы**

Введение

В предыдущих параграфах была дана математическая формулировка задачи оценивания эффективности операции и приведены соотношения, определяющие ее показатели $P_{\text{ДЦ}}$ и $\omega_{\text{ДЦ}}^{\Gamma}(\gamma)$, однако ничего не говорилось о вычислительных аспектах задачи оценивания эффективности.

Для вычисления показателей эффективности операции необходимо реализовать формулы (3.2.10), (3.2.13), (3.2.17), (3.2.20)[1] или (3.3.12), (3.3.15), (3.3.16), (3.3.17). На современном уровне развития прикладной математики это можно сделать одним из четырех методов: аналитическим, численным, статистических испытаний (СИ), статистического имитационного моделирования (СИМ).

Если законы распределения случайных векторов $\hat{Y}_{<3>}$ и $\hat{Z}_{<3>}$ известны, то по формуле полной вероятности (в интегральной форме) *вероятность достижения цели операции* будет определяться одним из следующих выражений:

$$P_{ДЦ} = \left(\hat{Y}_{\langle 3\rangle} \in \left\{ \hat{Y}^{\partial}_{(3)} \right\} \right) = (\hat{Y}_{<3>} \underset{<}{\overset{>}{-}} \hat{Z}_{<3>}) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\hat{Y}_{\langle 3\rangle}}(Z_{<3>}) dF_{\hat{Z}_{\langle 3\rangle}}(Z_{<3>}); \quad (3.2.10)$$

$$P_{ДЦ} = \left(\hat{Y}_{\langle 3\rangle} \in \left\{ \hat{Y}^{\partial}_{(3)} \right\} \right) = (\hat{Y}_{<3>} \underset{<}{\overset{>}{-}} \hat{Z}_{<3>}) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\Phi}_{\hat{Z}_{\langle 3\rangle}}(Y_{\langle 3\rangle}) dF_{\hat{Y}_{\langle 3\rangle}}(Y_{\langle 3\rangle}), \quad (3.2.10')$$

где

$$dF_{\hat{Z}_{\langle 3\rangle}}\left(Z_{\langle 3\rangle}\right) = \varphi_{\hat{Z}_{\langle 3\rangle}}\left(Z_{\langle 3\rangle}\right) dZ_{\langle 3\rangle} \; ; \; dZ_{\langle 3\rangle} \overset{-}{=} dz_1 dz_2 dz_3 ;$$

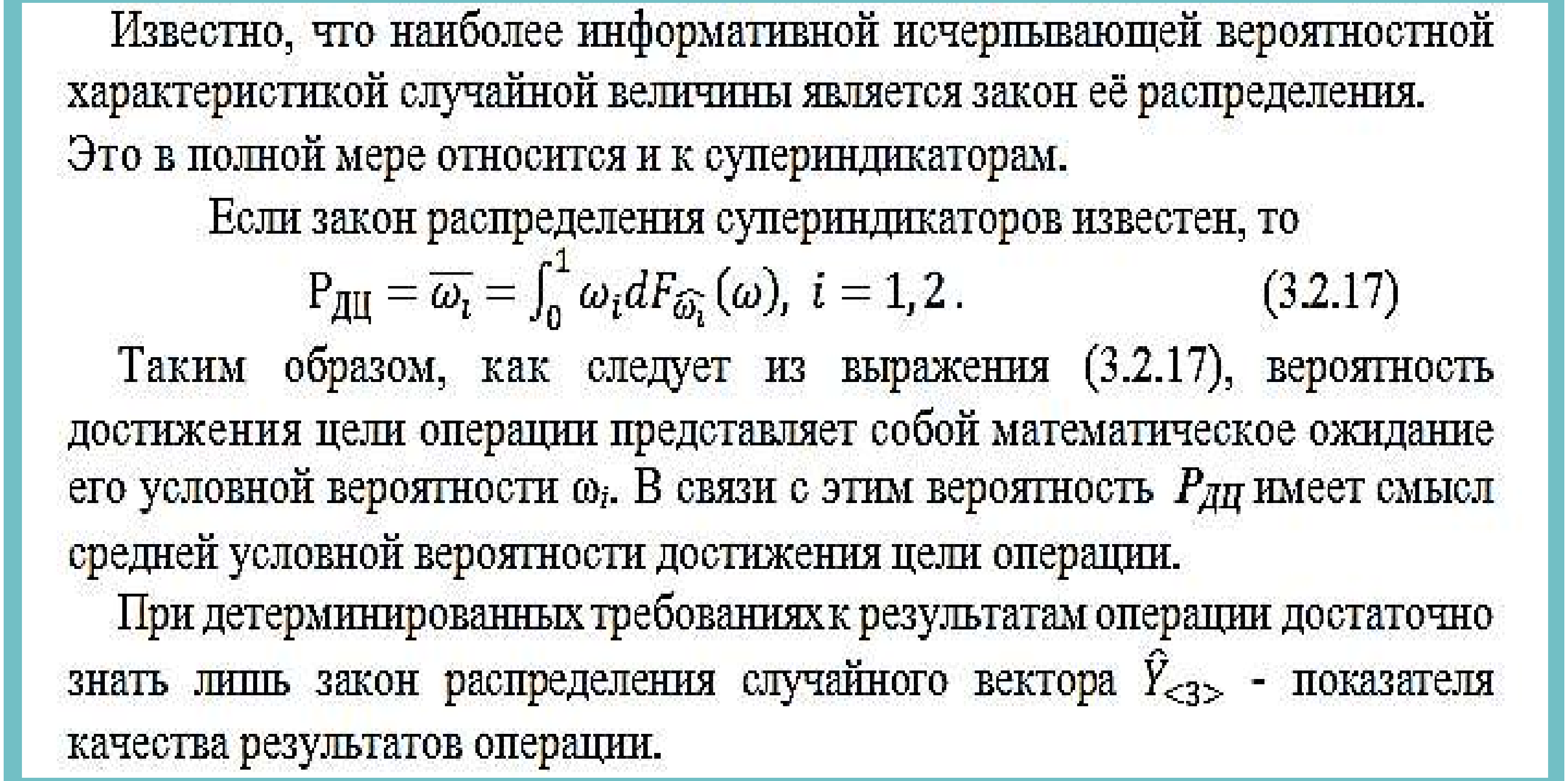
$$dF_{\hat{Y}_{\langle 3\rangle}}\left(Y_{\langle 3\rangle}\right) = \varphi_{\hat{Y}_{\langle 3\rangle}}\left(Y_{\langle 3\rangle}\right) dY_{\langle 3\rangle} \; ; \; dY_{\langle 3\rangle} \overset{d}{=} dy_1 dy_2 dy_3 .$$

По структуре выражений (3.2.10) видно, что вероятность $P_{ДЦ}$ представляет собой математическое ожидание ("*среднее" значение)* одной из случайных величин:

$$\hat{\omega}_1^{\langle 3\rangle} \overset{d}{=} \Phi_{\hat{Y}_{\langle 3\rangle}}\left(\hat{Z}_{\langle 3\rangle}\right) \; ; \quad (3.2.11)$$

$$\hat{\omega}_2^{\langle 3\rangle} \overset{d}{=} \overline{\Phi}_{\hat{Z}_{\langle 3\rangle}}\left(\hat{Y}_{\langle 3\rangle}\right) \; , \quad (3.2.12)$$

называемых соответственно первым и вторым стохастическими супериндикаторами третьего ранга.



Известно, что наиболее информативной исчерпывающей вероятностной характеристикой случайной величины является закон её распределения. Это в полной мере относится и к супериндикаторам.

Если закон распределения супериндикаторов известен, то

$$\mathrm{P}_{\text{ДЦ}} = \overline{\omega_i} = \int_0^1 \omega_i dF_{\widehat{\omega_i}}(\omega),\ i = 1,2. \qquad (3.2.17)$$

Таким образом, как следует из выражения (3.2.17), вероятность достижения цели операции представляет собой математическое ожидание его условной вероятности ω_i. В связи с этим вероятность $P_{ДЦ}$ имеет смысл средней условной вероятности достижения цели операции.

При детерминированных требованиях к результатам операции достаточно знать лишь закон распределения случайного вектора $\hat{Y}_{<3>}$ - показателя качества результатов операции.

Итак, если известны законы распределения $F_{\hat{\omega}_1^{<3>}}(\omega)$ и $F_{\hat{\omega}_2^{<3>}}(\omega)$ суперидикаторов (рис.3.2.5), то могут быть определены еще два очень важных показателя эффективности операции, называемые гарантируемыми вероятностями достижения ее цели:

$$\omega^{\Gamma}_{\text{ДЦ}}(\gamma) = \begin{cases} \omega^{\Gamma}_1(\gamma) = R^{-1}_{\hat{\omega}_1}(\gamma) = F^{-1}_{\hat{\omega}_1}(1-\gamma); & (3.2.20) \\ \omega^{\Gamma}_2(\gamma) = R^{-1}_{\hat{\omega}_2}(\gamma) = F^{-1}_{\hat{\omega}_2}(1-\gamma) & (3.2.20)' \end{cases}$$

где γ - уровень гарантии (гарантийная вероятность).

Поскольку при определении гарантируемой вероятности используется закон распределения супериндикатора, то этот показатель позволяет оценивать эффективность уникальных (единичных) операций в отличие от вероятности $P_{ДЦ}$ достаточно полно характеризующей эффективность лишь массовых операций.

В силу естественных аналогий свойств случайных величин ω_1 и ω_2 в дальнейшем рассматриваем лишь первый из суперидикаторов

В определении показателя эффективности операции $\omega^{\Gamma}_{ДЦ}(\gamma)$ фигурируют две вероятности: гарантируемая $\omega^{\Gamma}_{ДЦ}(\gamma)$ и гарантийная γ. Для уяснения их различия представляется целесообразным дать их трактовки.

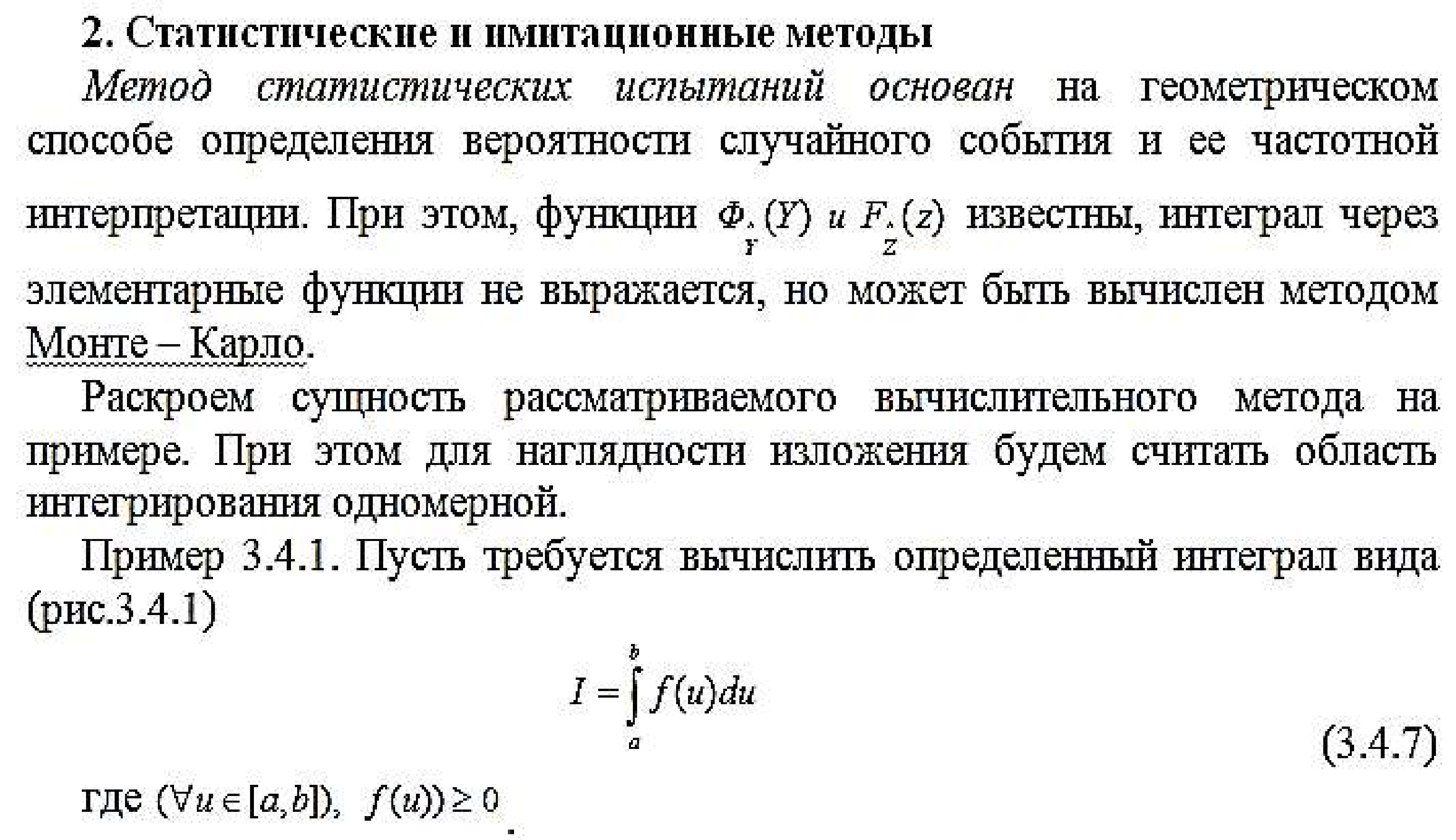
Для уникальных (единичных) операций частотные трактовки вероятностей не подходят, поэтому необходимо пользоваться понятней шансов: благоприятных и неблагоприятных. Так вот, гарантируемая вероятность $\omega^{\Gamma}_{ДЦ}(\gamma)$ имеет смысл минимально-возможной доли шансов от общего их числа, благоприятствующих достижению цели, а γ гарантийная вероятность равна доле шансов, не благоприятствующих тому, чтобы цель достигалась с вероятностью $\omega \geq \omega^{\Gamma}_{ДЦ}(\gamma)$.

1. Аналитические и численные методы

Аналитический метод основан на непосредственном интегрировании по формулам (3.2.10), (3.2.13) и (3.2.17). Для реализации этого метода, естественно, необходимо знать явные выражения для интегрируемой и интегрирующей функции $\Phi_{\hat{Y}}(Y)$ *и* $F_{\hat{Z}}(z)$, а также необходимо, чтобы интегралы имели выражения через элементарные функции (т.е. чтобы интегралы "брались”).

Численный метод основан на численном интегрировании выражений (3.2.10), (3.2.13) и (3.2.17). Функции $\Phi_{\hat{Y}}(Y)$ *и* $F_{\hat{Z}}(z)$ известны в явном виде, но интеграл через элементарные функции не выражается, тогда интеграл представляется в виде таблицы дискретного множества точек (*т.е. интеграл вычисляется численно*).

Понятно, что его реализация возможна лишь при наличии ЭВМ. При этом поскольку, как известно, точность и время решения задачи зависят от шага разбиения области интегрирования, то при большой размерности n вектора $Y_{<n>}$ затраты вычислительных ресурсов (времени, памяти ЭВМ) могут оказаться значительными.



2. Статистические и имитационные методы

Метод статистических испытаний основан на геометрическом способе определения вероятности случайного события и ее частотной интерпретации. При этом, функции $\Phi_{\hat{Y}}(Y)$ *и* $F_{\hat{Z}}(z)$ известны, интеграл через элементарные функции не выражается, но может быть вычислен методом Монте – Карло.

Раскроем сущность рассматриваемого вычислительного метода на примере. При этом для наглядности изложения будем считать область интегрирования одномерной.

Пример 3.4.1. Пусть требуется вычислить определенный интеграл вида (рис.3.4.1)

$$I = \int_a^b f(u)du \qquad (3.4.7)$$

где $(\forall u \in [a,b]),\ \ f(u)) \geq 0$.

Как видно из рис.3.4.1, интеграл (3.4.7) численно равен площади S_I, заштрихованной на рисунке области.

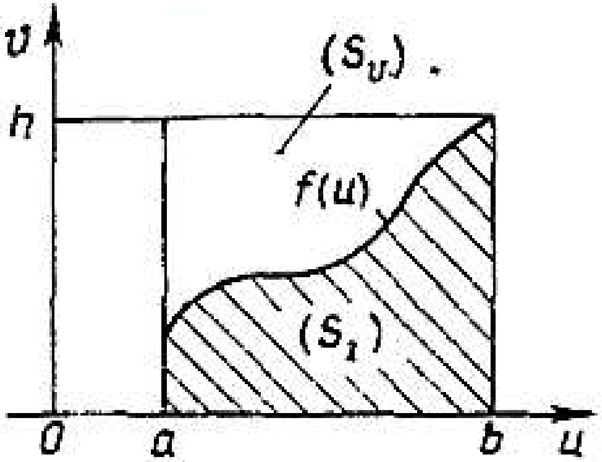


Рис.3.4.I

Введем в рассмотрение прямоугольник (S_U) со сторонами, параллельными осям системы координат, в котором целиком содержится область (S_I) (т.е. как показано на рис.3.4.1, $h \geq \max\limits_{u} f(u) \quad u \in [a,b]$), и некоторый случайный вектор (точку) $<\hat{u},\hat{v}>$ имеющий равномерный закон распределения в пределах области (S_U).

Если теперь провести испытание, исходом которого будет реализация вектора $<\hat{u},\hat{\upsilon}>$, то вероятность P_I попадания точки $<\hat{u},\hat{\upsilon}>$ в область S_I будет (согласно геометрическому определению вероятности) определяться равенством

$$P_I \overset{d}{=} \frac{mes(S_I)}{mes(S_u)} = \frac{S_I}{S_u} = \frac{I}{(b-a)h} \tag{3.4.8}$$

откуда

$$\boxed{I = (b-a)hP_I} \tag{3.4.9}$$

Описанное испытание повторяется достаточно большое число n раз. После подсчета числа mes(S_I) попаданий точек $<\hat{u}_j,\hat{\upsilon}_j>$, [$j = 1(1)n$, j – номер испытания] в область (S_I) определяется оценка $\widetilde{P}_I = mes(S_I)/n$ вероятности P$_I$ и затем приближенное значение $\tilde{I}$ интеграла I по формуле

$$\boxed{I = (b-a)hP_I \approx (b-a)h\widetilde{P}_I = \widetilde{I}}. \tag{3.4.10}$$

Структурная схема алгоритма вычисления интеграла (3.4.7) методом статистических испытаний приведена на рис.3.4.2, где через Д-1 обозначен датчик случайных чисел $\widehat{w}$, равномерно распределенных на интервале (0,1].

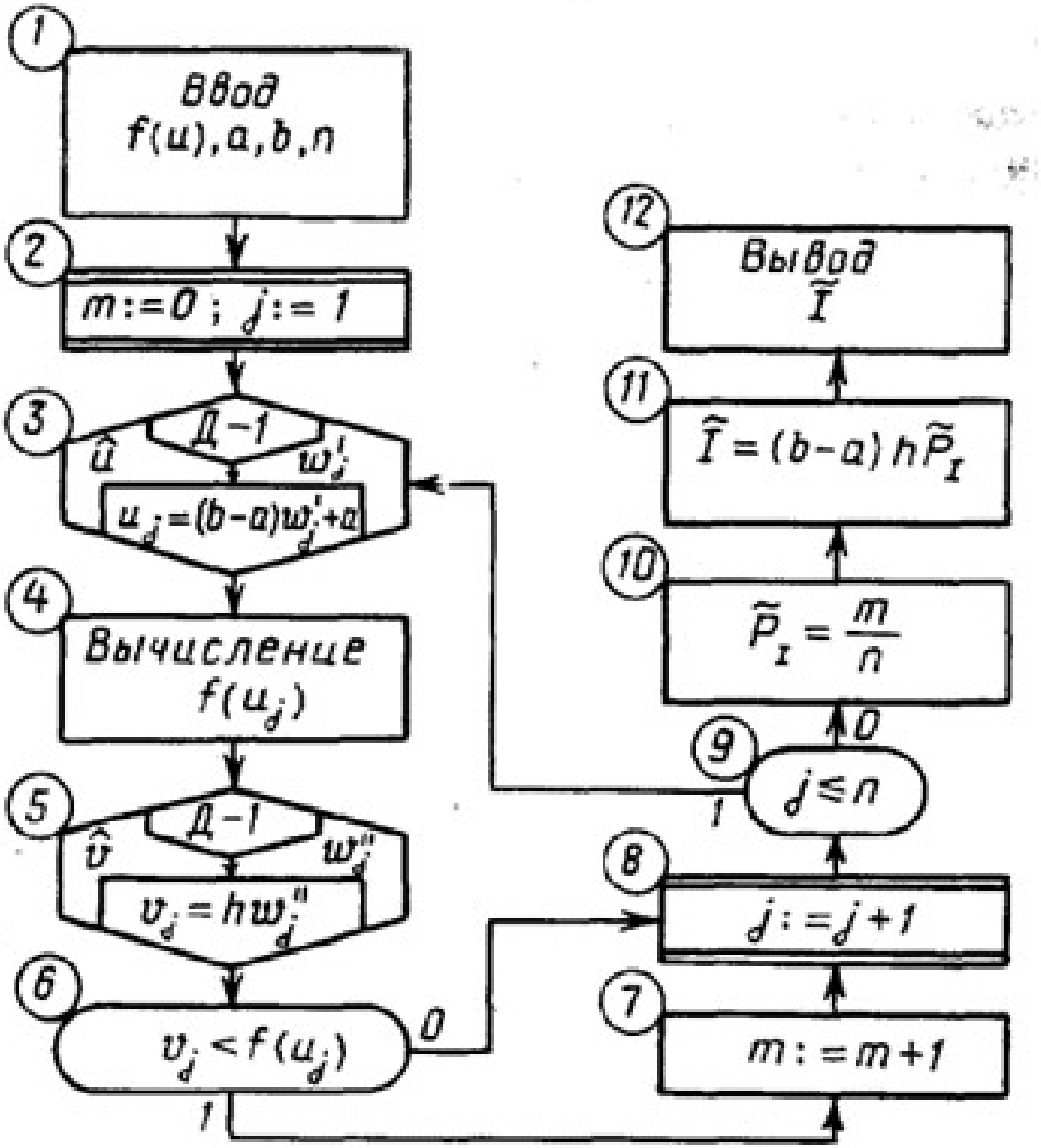
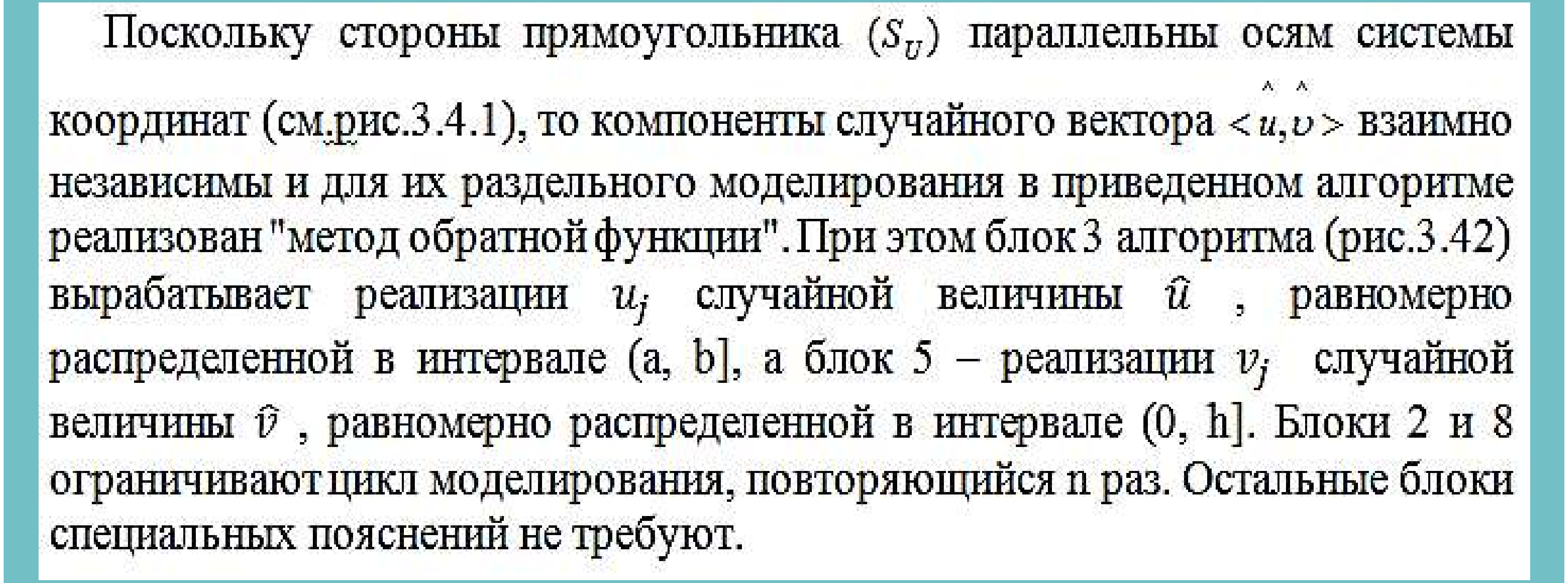

1
Ввод
$f(u), a, b, n$
2
$m:=0$; $j:=1$
3
Д-1
$\hat{u}$
w'_j
$u_j=(b-a)w'_j+a$
4
Вычисленце
$f(u_j)$
5
Д-1
$\hat{v}$
w''_j
$v_j=hw''_j$
6
$v_j<f(u_j)$
0
1
7
$m:=m+1$
8
$j:=j+1$
9
$j\leq n$
1
0
10
$\tilde{P}_I=\frac{m}{n}$
11
$\tilde{I}=(b-a)h\tilde{P}_I$
12
Вывод
$\tilde{I}$

Рис.3.4.2



Поскольку стороны прямоугольника (S_U) параллельны осям системы координат (см.рис.3.4.1), то компоненты случайного вектора $< \hat{u}, \hat{\upsilon} >$ взаимно независимы и для их раздельного моделирования в приведенном алгоритме реализован "метод обратной функции". При этом блок 3 алгоритма (рис.3.42) вырабатывает реализации u_j случайной величины $\hat{u}$, равномерно распределенной в интервале (a, b], а блок 5 – реализации v_j случайной величины $\hat{v}$, равномерно распределенной в интервале (0, h]. Блоки 2 и 8 ограничивают цикл моделирования, повторяющийся n раз. Остальные блоки специальных пояснений не требуют.

Метод статистического имитационного моделирования

Для реализации рассмотренных методов необходимо знать явные выражения подынтегральных функций (законы распределения) $\Phi_{\dot{Y}}(Y)$, $F_{\dot{Z}}(z)$, и $F_{\dot{\omega}}(\omega)$.

Подобная необходимость существенно ограничивает сферу применимости этих методов, что обусловлено причинами двух типов:

а) необходимостью принятия целого ряда допущений, без которых аналитическая модель не может быть построена и которые, как правило, достаточно трудно строго обосновать.

б) сравнительной технической сложностью решения задачи (в том числе и при допущениях), требующей от исследователя высокой математической подготовки.

Проведение экспериментов наталкивается на препятствия двух типов:

а) необходимостью априорного оценивания качества объекта, так как наибольший интерес качество объекта (ЦУТС, ЦПФС) представляет на этапах его проектирования (планирования) и создания (организации), т.е. когда объекта еще нет, но прогноз его качества уже необходим;

б) трудностью экспериментальных исследований качества сложных, дорогостоящих и особенно уникальных (единичных) объектов, так как они зачастую не могут быть подвергнуты испытаниям, проводимым в условиях, близких к реальным.

По этим причинам широкое применение нашли методы исследования объектов на их моделях. Различают, как мы уже знаем, модели *аналитические и имитационные*.

Аналитические модели представляют собой совокупности математических зависимостей и соотношений, описывающих основные свойства объекта, взаимосвязи этих свойств и взаимодействия объекта со средой.

Имитационные модели делятся на "физические", "математические" и "смешанные" призваны имитировать процесс целевого функционирования объекта.

Физические имитационные модели представляют собой либо образец исследуемого объекта, либо его копию (часто выполненную в меньшем масштабе), исследуемые свойства которой подобны аналогичным свойствам моделируемого объекта.

Математические имитационные модели строятся с применением вычислительной техники. Они, как правило, совершенно не похожи на моделируемые объекты, но, как и у физических моделей, количественные характеристики их динамических свойств подобны (адекватны) соответствующим свойствам моделируемого объекта.

Смешанные имитационные модели представляют собой комплексы, элементы которых являются либо физическими, либо математическими моделями, имитирующими функционирование элементов моделируемых объектов.

Поскольку физическое моделирование сложных объектов (ЦУТС, ЦПФС) не всегда возможно, особенно на этапах проектирования систем и планирования ЦПФС, то наиболее действенным методом их исследования является **метод математического имитационного моделирования.**

Этот способ, позволяющий исследовать операции с учетом воздействия случайных факторов, получил название **метода *статистического имитационного моделирования (СИМ).***

Для реализации метода СИМ строится так называемая **"имитационная модель"** ЦПФС, отображающая его в формализованном виде с помощью алгоритмического описания (которая, как правило, реализуется на ЭВМ). Таким образом, **имитационная модель – это алгоритм работы ЭВМ, моделирующий, т.е. приближенно воспроизводящий, ЦПФС** (его протекание во времени) или его отдельные этапы. При этом элементарные явления, образующие ЦПФС, т.е. этапы ЦП и происходящие в его ходе события имитируются с сохранением их логических связей и последовательности протекания во времени, а также характера и состава информации о последовательных соотношениях и событиях процесса.

Влияние случайных факторов на ЦПФС имитируется путем моделирования случайных объектов (событий, величин, векторов, функций) с обусловленными вероятностными характеристиками. Эти характеристики, в свою очередь, определяются в процессе "функционирования" имитационной модели ЦПФС. При реализации моделирующего алгоритма на ЭВМ вырабатывается информация, описывающая элементарные события и этапы процесса с учетом их связей и взаимных влияний. Затем эта информация используется для определения (оценивания) исследуемых характеристик ЦУТС и ЦПФС.

Таким образом, при этом способе моделируется ЦПФС и при каждом модельном испытании фиксируются значения $Y^{j}_{<3>}\ u\ Z^{j}_{<3>}$ (j-номер испытания). Частота события $(Y^{j}_{<3>} \overset{<}{>} Z^{j}_{<3>})$ принимается в качестве оценки $P_{ДЦ}$, т.е. $P_{\partial ц} = P(Y^{j}_{<3><} \overset{>}{} Z^{j}_{<3>}) = \widetilde{P}_{\partial ц} \xrightarrow[n\to\infty]{} P_{\partial ц}.$

Поскольку показатели эффективности операции представляют собой вероятности некоторых случайных событий, то их оценками, обладающими всеми необходимыми свойствами (состоятельность, несмещенность, "эффективность") являются частоты (частости) появления этих событий в "длинных" сериях однородных опытов (испытаний). Как было показано, такие оценки могут быть получены методом статистических испытаний. Однако при реализации метода СИМ испытаниям повергаются не абстрактные модели стохастических экспериментов, у которых лишь некоторые параметры численно равны оцениваемым характеристикам исследуемого объекта (или связаны с ними известными зависимостями), а модели конкретных ВТС и ЦПфС, во всех существенных деталях количественно адекватные реальным или создаваемым (организуемым) ВТС (ЦПФС).

Алгоритм СИМ

Итак, требуется разработать алгоритм, моделирующий ЦПФС и позволяющий определить (вычислять) показатели его эффективности.

Как видно из рис. 3.4.3, алгоритм включает в себя два цикла:

- внешний цикл, - по j_1 (j_1 - номер испытания во внешнем цикле), повторяющийся N_1раз;
- внутренний цикл - по j_2 (j_2 - номер испытания во внутреннем цикле), повторяющийся в каждом j_1 - м внешнем цикле N_2 раз.

Рассмотрим последовательность работы блоков алгоритма.

Блок 1 осуществляет ввод исходных данных, необходимых для статистического имитационного моделирования ЦНПФС и статистического оценивания показателей его эффективности.

Набор этих данных зависит от этапа жизненного цикла ЦУТС, на котором проводится исследование ЦНПФС, и обусловленного этим характера имеющейся у исследователя информации (детерминированная, случайная, неопределенная, вероятностная и т.п.).

Блок 2 (вспомогательный) организует начало внешнего цикла, засылая в счетчик циклов единицу.

Блок 3 (стохастический) моделирует вектор $\hat{Z}_{<n>}$ требуемых (предельно допустимых) значений результатов операции.

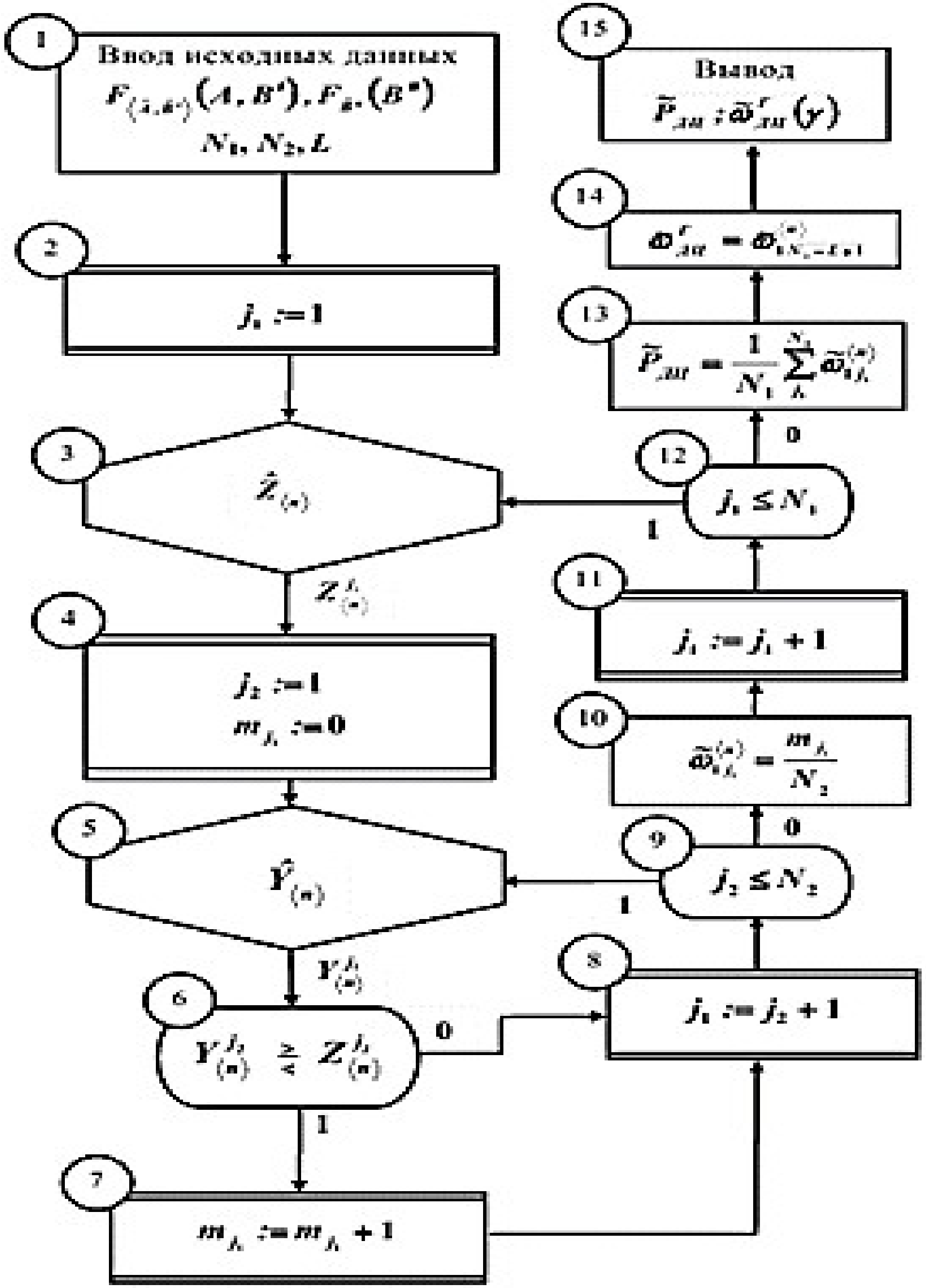

1
Ввод исходных данных
$F_{(A,B')}(A,B'), F_{B''}(B'')$
N_1, N_2, L
2
$j_1 := 1$
3
$\hat{Z}_{(n)}$
$Z^{j_1}_{(n)}$
4
$j_2 := 1$
$m_{j_1} := 0$
5
$\hat{Y}_{(n)}$
$Y^{j_2}_{(n)}$
6
$Y^{j_2}_{(n)} \gtrless Z^{j_1}_{(n)}$
0
1
7
$m_{j_1} := m_{j_1} + 1$
8
$j_2 := j_2 + 1$
9
$j_2 \leq N_2$
1
0
10
$\tilde{\omega}^{(n)}_{1j_1} = \frac{m_{j_1}}{N_2}$
11
$j_1 := j_1 + 1$
12
$j_1 \leq N_1$
1
0
13
$\tilde{P}_{ДИ} = \frac{1}{N_1}\sum_{j_1}^{N_1}\tilde{\omega}^{(n)}_{1j_1}$
14
$\omega^{r}_{ДИ} = \omega^{(n)}_{1N_1-L+1}$
15
Вывод
$\tilde{P}_{ДИ}; \tilde{\omega}^{r}_{ДИ}(y)$

Рис.3.4.3

Блок 4 (вспомогательный) организует начало внутреннего цикла, засылая в счетчик циклов единицу и очищая счетчик числа m_{j_1} "успешных" испытаний (в которых при фиксированных требованиях $Z^{j_1}_{<n>}$ к результатам операции была достигнута ее цель) внутреннего цикла (полное число которых равно N_2).

Блок 5 (стохастический) моделирует вектор $\hat{Y}_{<n>}$, виртуальных результатов операции.

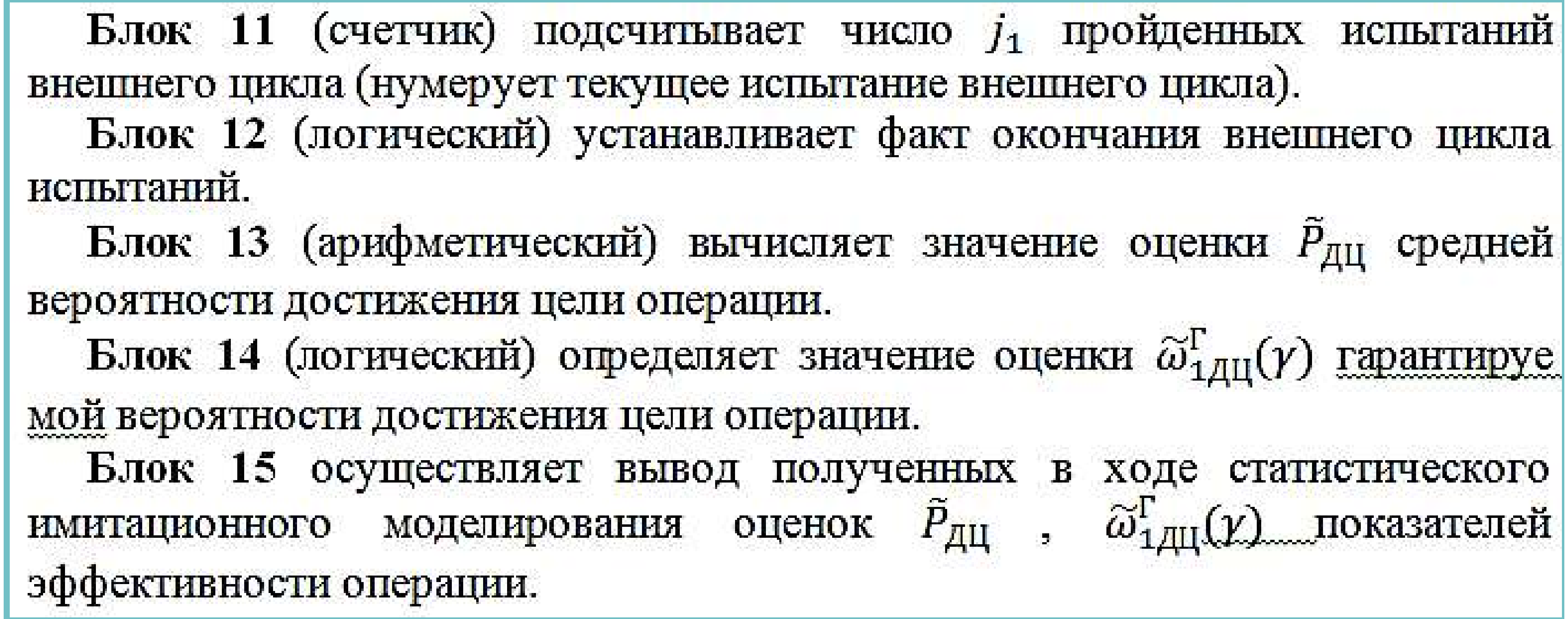
Блок 6 (логический) реализует критерий пригодности результатов операции для использования по назначению. Выполнение проверяемых блоком 6 условий означает достижение цели операции,

Блок 7 (счетчик) подсчитывает число m_{j_1} "успешных" испытаний внутреннего цикла.

Блок 8 (счетчик) подсчитывает число j_2 , пройденных испытаний внутреннего цикла (нумерует текущее испытание внутреннего цикла).

Блок 9 (логический) устанавливает факт окончания внутреннего цикла испытаний.

Блок 10 (арифметический) вычисляет оценку $\tilde{\omega}^{<n>}_{1j_1}$ значения условной вероятности достижения цели операции в j_1 - м испытании внешнего цикла.



Блок 11 (счетчик) подсчитывает число j_1 пройденных испытаний внешнего цикла (нумерует текущее испытание внешнего цикла).

Блок 12 (логический) устанавливает факт окончания внешнего цикла испытаний.

Блок 13 (арифметический) вычисляет значение оценки $\tilde{P}_{\text{ДЦ}}$ средней вероятности достижения цели операции.

Блок 14 (логический) определяет значение оценки $\tilde{\omega}_{1\text{ДЦ}}^{\Gamma}(\gamma)$ гарантируемой вероятности достижения цели операции.

Блок 15 осуществляет вывод полученных в ходе статистического имитационного моделирования оценок $\tilde{P}_{\text{ДЦ}}$, $\tilde{\omega}_{1\text{ДЦ}}^{\Gamma}(\gamma)$ показателей эффективности операции.

ВКА имени А.Ф. Можайского

Конец лекции !