ВОЕННО-КОСМИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ ИМЕНИ А.Ф. МОЖАЙСКОГО
Кафедра информационно-вычислительных систем и сетей

УТВЕРЖДАЮ

Начальник 24 кафедры

полковник

А. Басыров

«____» _____ 20 года

Автор: старший преподаватель 24 кафедры,
кандидат технических наук, доцент В.Тимофеев

Тема2. Аналитические методы расчета показателей надежности АС

Лекция № 5

Расчет показателей надежности невосстанавливаемых систем

по дисциплине

Надежность автоматизированных систем

Обсуждено и одобрено на заседании 24 кафедры
« ___» ____________ 20____ года протокол № ___

Санкт - Петербург

20

Цель занятия: ознакомить слушателей с аналитическим методом расчета показателей надежности невосстанавливаемой АС.

СОДЕРЖАНИЕ СЗАНЯТИЯ И ВРЕМЯ

Введение

Рассчитать надежность технической системы **–** значит определить ее показатели надежности по известным показателям надежности элементов.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ

- Метод, основанный на применении классических теорем теории вероятностей (метод перебора гипотез);
- Логико-вероятностные методы;
- Топологические методы;
- Методы, основанный на теории марковских процессов;
- Методы интегральных уравнений;
- Методы статистического моделирования.

СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ СИСТЕМ С ПОЗИЦИИ НАДЕЖНОСТИ

- Структурная схема;
- Функции алгебры логики;
- Граф состояний;
- Дифференциальные и алгебраические уравнения;
- Интегральные уравнения.

1. Метод перебора гипотез

Пусть:

1. Невосстанавливаемая система состоит из $\boldsymbol{n}$ элементов и имеет произвольную структуру;
2. Каждый элемент может находиться только в одном из двух состояний: состоянии работоспособности и состоянии отказа;
3. Пусть $\boldsymbol{p_i}$ – вероятность работоспособного, а $\boldsymbol{q_i}$ – вероятность отказового состояния i-го элемента, $\boldsymbol{p_i + q_i = 1}$.

Тогда система может находиться в 2^n состояниях:

- H_0 - все n элементов работоспособны;

- H_i - отказал i-й элемент, а остальные работоспособны;
- $H_{i,j}$ - отказали i-й и j-й элементы, а остальные работоспособны;

…..

- $H_{1,2\ldots n}$ - отказали все элементы.

Если предположить, что отказы элементов события независимые, то по теореме умножения вероятностей можно найти вероятности всех состояний:

$$P(H_0) = p_1 p_2 \cdots p_n,$$
$$P(H_i) = p_1 p_2 \cdots q_i \cdots p_n,$$
$$P(H_{i,j}) = p_1 p_2 \cdots q_i \cdots q_j \cdots p_n,$$
$$\ldots$$
$$P(H_{1,2,\ldots,n}) = q_1 q_2 \cdots q_n.$$

Так как события $H_0 \ldots H_{1,2\ldots n}$ составляют полную группу независимых событий, то сумма их вероятностей равна 1.

Вероятность безотказной работы системы по теореме сложения вероятностей будет равна сумме вероятностей тех событий, которые соответствуют работоспособному состоянию системы, т.е.

$$P = \sum_{\alpha \in E_+} P(H_\alpha).$$

Выражение означает, что суммирование осуществляется по всем гипотезам, которые соответствуют работоспособному состоянию системы.

2. Расчет надежности нерезервированной системы

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ НЕВОССТАНАВЛИВАЕМОЙ СИСТЕМЫ

Дано:

$\boldsymbol{P_i(t)}$ – вероятность безотказной работы i-го элемента,

$\boldsymbol{f_i(t)}$ – плотность распределения времени до отказа i-го элемента.

Определить:

$\boldsymbol{P_c(t)}$ – вероятность безотказной работы системы,

$\boldsymbol{f_c(t)}$ – плотность распределения времени до отказа системы,

$\boldsymbol{T_c}$ – среднее время безотказной работы системы,

$\boldsymbol{\lambda_c(t)}$ – интенсивность отказа.

Схема нерезервированной системы

Пусть:
$\boldsymbol{X_i}$ – время до отказа i-го элемента,
$\boldsymbol{X_c}$ – время до отказа системы.
Тогда:

$$P_c(t) = Вер(X_c > t) =$$

$$= Вер(X_1 > t \wedge X_2 > t \wedge \dots \wedge X_n > t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t);$$

$$f_c(t) = -P_c'(t) = \sum_{i=1}^{n} P_1(t) \dots f_i(t) \dots P_n(t);$$

$$T_c = \int_0^\infty t f_c(t) dt = \int_0^\infty P_c(t) dt;$$

$$\lambda_c(t) = f_c(t) / P_c(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) / P_i(t).$$

Для этапа нормальной эксплуатации системы, когда $\lambda_i(t) = \lambda_i$ и $P_i(t) = e^{-\lambda_i t}$,

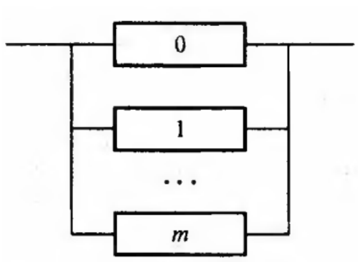
$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} = e^{-\lambda_c t},$$

где $\lambda_c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

$$T_c = \int_0^\infty P_c(t) dt = \int_0^\infty e^{-\lambda_c t} dt = \frac{1}{\lambda_c}.$$

3. Расчет надежности резервированной системы

ОБЩЕЕ РЕЗЕРВИРОВАНИЕ С ПОСТОЯННО ВКЛЮЧЕННЫМ РЕЗЕРВОМ



Общее число элементов в системе n = m + 1, где m – кратность резервирования

$$Q_c(t) = Вер(X_c \le t) =$$

$$Вер(X_0 \le t \wedge X_1 \le t \wedge \dots \wedge X_m \le t) = \prod_{i=0}^{m} Q_i(t).$$

Так как

$$Q_i\,(t) = 1 - P_i(t)\,,$$

то

$$P_c(t) = 1 - Q_c(t) = 1 - \prod_{i=0}^{m}(1 - P_i(t))\,,$$

$$f_c(t) = Q_c'(t) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m}(1 - P_0(t)) \dots f_i(t) \dots (1 - P_m(t))\,,$$

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)} = \frac{\sum_{i=0}^{m}(1 - P_0(t)) \dots f_i(t) \dots (1 - P_m(t))}{1 - \prod_{i=0}^{m}(1 - P_i(t))}\,.$$

Для однородных систем и постоянной интенсивности отказов, когда $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = \lambda$

$$P_c(t) = 1 - (1 - P(t))^{m+1} = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^{m+1},$$

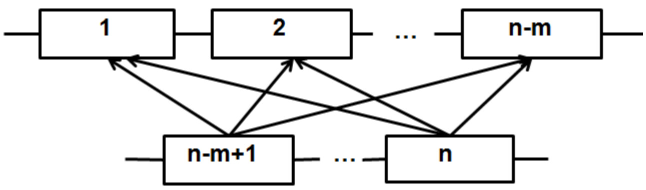
$$\lambda_c(t) = -\frac{P_c'(t)}{P_c(t)} = \frac{(m+1)\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{m}}{1 - (1 - e^{-\lambda t})^{m+1}}\,.$$

$$\rightarrow \lambda_c(0) = 0 \text{ и } \lim_{t\to\infty} \lambda_c(t) = \lambda\,.$$

$$T_c = \int_0^{\infty} P_c(t)dt = T_0 \sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}\,,$$

где $T_0 = \dfrac{1}{\lambda}$.

РЕЗЕРВИРОВАНИЕ С ДРОБНОЙ КРАТНОСТЬЮ ПРИ НАГРУЖЕННОМ РЕЗЕРВЕ



m – количество резервных элементов.
n – общее количество элементов.

Подобные системы часто называют мажоритарными.

Система работоспособна при отказе не более чем m элементов из n (все элементы с позиции надежности однородны и n > m).

Пусть:

A_i – событие, когда отказывают i элементов ($0 \le i \le m$) из n,

$\boldsymbol{A}$ – событие, когда система работоспособна.

Тогда

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=0}^{m} A_i, \quad \boldsymbol{Bep(A)} = \sum_{i=0}^{m} \mathrm{Bep}(A_i),$$

$$\mathrm{Bep}(A_i) = C_n^i \boldsymbol{Q}^i(t) \boldsymbol{P}^{n-i}(t),$$

где

$C_n^i = \frac{\boldsymbol{n}!}{\{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{i})!\boldsymbol{i}!\}}$ – число сочетаний из n по i,

$\boldsymbol{Q(t) = 1 - P(t)}$ – вероятность отказа элемента за время t,

$\boldsymbol{P(t)}$ – безотказной вероятность работы элемента за время t,

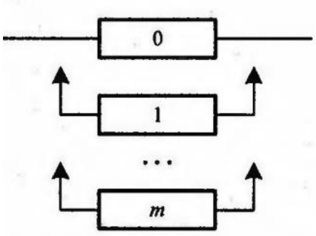
$$\boldsymbol{P_c(t) = Bep(A)} = \sum_{i=0}^{m} C_n^i \boldsymbol{Q}^i(\boldsymbol{t}) \boldsymbol{P}^{n-i}(\boldsymbol{t}),$$

$$\boldsymbol{f_c(t)} = -\boldsymbol{P_c}'(t) =$$

$$(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})\, C_n^m \boldsymbol{Q}^m(\boldsymbol{t}) \boldsymbol{P}^{n-m-1}(\boldsymbol{t}) \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}),$$

$$\boldsymbol{\lambda_c(t)} = \frac{\boldsymbol{f_c(t)}}{\boldsymbol{P_c(t)}} = \boldsymbol{\lambda(t)} \frac{C_n^m \boldsymbol{Q}^m(\boldsymbol{t}) \boldsymbol{P}^{n-m}(\boldsymbol{t})(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})}{\sum_{i=0}^{m} C_n^i \boldsymbol{Q}^i(\boldsymbol{t}) \boldsymbol{P}^{n-i}(\boldsymbol{t})\}}.$$

ОБЩЕЕ РЕЗЕРВИРОВАНИЕ ЗАМЕЩЕНИЕМ



Поскольку отказ системы наступает при отказе всех $m + 1$ элементов, то

$$\boldsymbol{X_c} = \sum_{i=0}^{m} \boldsymbol{x_i},$$

где

$\boldsymbol{x_i}$ – время до отказа i-го элемента;

$\boldsymbol{X_c}$ – время до отказа системы.

Плотность суммы независимых случайных величин равна свертке плотностей слагаемых

$$f_c(t) = f_0 * f_1 * \ldots * f_m(t),$$

где

$$f*f(t) = \int_0^t f(x) f(t-x)\,dx,$$

$$f*f*f(t) = \int_0^t f(x) \int_0^{t-x} f(y) f(t-x-y)\,dy\,dx.$$

Рассмотрим случай, когда $m = 1$.

Система проработает безотказно в течение времени t при наступлении одного из двух несовместных событий:

1. ***А*** – элемент с номером ***0*** проработает безотказно в течение времени t;
2. ***Б*** – элемент с номером ***0*** откажет в момент времени X $(X < t)$, а элемент с номером 1 проработает безотказно в течение оставшегося времени $t - x$.

$$Вер(A) = P_0(t),$$

$$Вер(Б) = \int_0^t f_0(x) P_1(t-x)\,dx = f_0 * P_1(t).$$

По теореме сложения вероятностей

$$P_c(t) = P_0(t) + f_0 * P_1(t).$$

Для общего случая

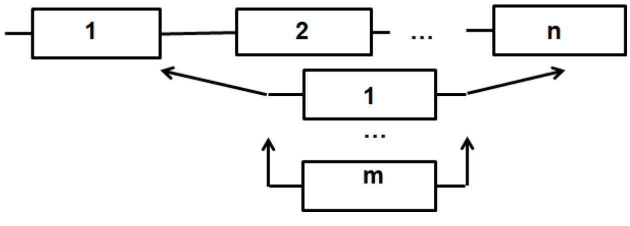
$$P_c(t) = \sum_{i=0}^{m} f_0 * f_1 * \ldots * f_{i-1} * P_i(t).$$

Для однородных систем (основной и резервные элементы равно надежны) и постоянной интенсивности отказов, когда $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = \lambda$

$$P_c(t) = e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{m} \frac{(\lambda t)^i}{i!},$$

$$T_c = \int_0^{\infty} P_c(t)\,dt = (m+1)\frac{1}{\lambda} = (m+1)\,T_0.$$

СКОЛЬЗЯЩЕЕ РЕЗЕРВИРОВАНИЕ С НЕНАГРУЖЕННЫМ РЕЗЕРВОМ



Сначала работают n основных элементов, резервные элементы не работают. При отказе любого элемента из числа основных он заменяется на резервный, который становится основным. При следующим отказе основного элемента он также заменяется на один из оставшихся резервных и т.д. Отказ системы наступает при отказе ***(m+1)***-го элемента ***(m<n)***.

Пусть все элементы системы равно надежны и имеют плотность ***f(t)*** и вероятность безотказной работы ***P(t)***.

Тогда для ***m=2***

$$\boldsymbol{P_c(t)} = \boldsymbol{P^n(t)} +$$

$$\boldsymbol{n\, P^{n-1}(t)} \int_0^t \boldsymbol{f(x)P(t-x)}dx +$$

$$+ \mathrm{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{2}}\ \boldsymbol{P^{n-2}(t)} \int_0^t \boldsymbol{f(x)} \int_0^{t-x} \boldsymbol{f(y)P(t-x-y)}dy\, dx \quad ,$$

для общего случая

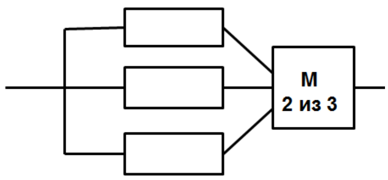
$$\boldsymbol{P_c(t)} = \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{m}} \mathrm{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{i}}\, \boldsymbol{P^{(n-i)}(t)\, f^{(i)} * P(t)}\ ,$$

где $\boldsymbol{f^{(i)} * P(t)} =$

$$=\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{f(x_1)} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t-x_1}} \boldsymbol{f(x_2)}\ldots \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t-x_1-\cdots-x_i}} \boldsymbol{f(x_i)P(t-x_1-\cdots-x_i)\, dx_i \ldots dx_1}.$$

УЧЕТ НАДЕЖНОСТИ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЕЙ

Учет надежности переключателей при расчете показателей надежности резервированных систем рассмотрим на примере мажоритарной системы с нагруженным резервом.



Пусть

P(t) – вероятность безотказной работы элемента за время t,

Q(t) = 1 - P(t) – вероятность отказа элемента за время t,

Pм(t) – вероятность безотказной работы мажоритарного элемента за время t.

Тогда с учетом того, что в данной системе имеет место резервирование с дробной кратностью

$$\boldsymbol{P_c(t)} = \boldsymbol{P_{\text{м}}(t)} \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{1}} \mathrm{C}_{\boldsymbol{3}}^{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{Q^i}\ \boldsymbol{(t)P^{3-i}(t)} \quad =$$

$$= \boldsymbol{P_{\text{м}}\ (t)\{3P^2(t) - 2P^3(t)\}}\ .$$

Заключение

Таким образом, сегодня был рассмотрен аналитический метод расчета показателей надежности невосстанавливаемой АС.

Задание на самостоятельную работу:

1) Отработать учебный материал по конспекту лекций.
2) Изучить материал рекомендуемой литературы.

______________ В.Тимофеев_______

(воинское звание, подпись, инициал имени, фамилия автора)

«____» ____________ 20___ г.