Лекция № 21. **Операционный функционал**

Цель занятия: *Уяснить понятия и постулаты теории операционных функционалов*

Учебные вопросы:

1. Понятие операционного функционала.

2. Постулаты теории операционных функционалов.

Введение

Как было показано, компоненты показателя качества результатов операции (вектора $Y_{<n>}$) зависят от характеристик (параметров и ЭТХ) ЦУТС – вектора $A'_{<k'>}$ и ЦНПФС – вектора $A''_{<k''>}$, а также от условий функционирования ЦУТС - вектора $B'_{<l'>}$, а поскольку эти характеристики влияют на все компоненты вектора $Y_{<n>}$ одновременно, то последние оказываются взаимосвязанными. Поэтому для построения математической модели виртуальных результатов операции необходимо иметь модели указанных зависимостей и связей. Эту задачу решает операционный функционал (ОФЛ).

1. ПОНЯТИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ФУНКЦИОНАЛА

Определение 5.3.1. Операционный функционал (ОФЛ) - это совокупность операционной функции и функций связи.

Определение 5.3.2. Операционной функцией (ОФ) называется соотношение, описывающее зависимость целевого эффекта от расходуемых операционных ресурсов и времени.

Определение 5.3.3. Функцией связи (ФСВ) называются *балансные соотношения,* связывающие между собой расходы ресурсов, необходимые для получения целевого (фиксированного) эффекта.

Как следует из определений 5.3.1 - 5.3.3, понятие "операционная функция" представляет собой обобщённый аналог используемого в экономике понятия "*производственная функция*", описывающий зависимость результата ("продукта") функционирования сложной системы (ЦУТС) от расходуемых на его получение ресурсов.

Операционная функция может определяться одним из двух способов:

$$Y^{(1)}_{\langle n_1\rangle} = Y^{(1)}_{\langle n_1\rangle}\left(Y^{(2)}_{\langle n_2\rangle}, Y^{(3)}_{\langle n_3\rangle}\right) = \mathcal{R}_{12}\left(Y^{(2)}_{\langle n_2\rangle}, Y^{(3)}_{\langle n_3\rangle}; A_{\langle K\rangle}, B'_{\langle L'\rangle}\right) \qquad (5.3.1)$$

или

$$Y^{(2)}_{\langle n_2\rangle} = Y^{(2)}_{\langle n_2\rangle}\left(Y^{(1)}_{\langle n_1\rangle}, Y^{(3)}_{\langle n_3\rangle}\right) = \mathcal{R}^{-1}_{21}\left(Y^{(1)}_{\langle n_1\rangle}, Y^{(3)}_{\langle n_3\rangle}; A_{\langle K\rangle}, B'_{\langle L'\rangle}\right). \qquad (5.3.2)$$

Функция (5.3.1) называется *РЭ-функцией* (РЭФ) или "функцией выпуска", а функция (5.3.2) - *ЭР-функцией* (ЭРФ) или "функцией затрат".

Символы РЭ и ЭР соответственно означают: "ресурс-эффект" и "эффект-ресурс". ОФ определяются параметрами $A_{<k>}$ при нормированном значении вектора $B'_{<l'>}$ - УФС, которые соответствуют определённой технологии.

В зависимости от имеющихся данных о соответствующих расходах операционных ресурсов и времени **функции связи** также могут определяться с помощью различных взаимно обратных соотношений. В частности, материально-технические и временные ресурсы связаны соотношениями

$$Y^{(3)}_{\langle n_3\rangle} = Y^{(3)}_{\langle n_3\rangle}\left(Y^{(2)}_{\langle n_2\rangle}\right) = S_{32}\left(Y^{(2)}_{\langle n_2\rangle}; A_{\langle k\rangle}, B'_{\langle l'\rangle}\right) \qquad (5.3.3)$$

или

$$Y^{(2)}_{\langle n_2\rangle} = Y^{(2)}_{\langle n_2\rangle}\left(Y^{(3)}_{\langle n_3\rangle}\right) = S_{23}\left(Y^{(3)}_{\langle n_3\rangle}; A_{\langle k\rangle}, B'_{\langle l'\rangle}\right). \qquad (5.3.4)$$

В симплексной канонической форме, когда показатель качества результатов операции задан в виде $\hat{Y}_{<n>} = \hat{Y}_{<3>} = < \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3 > = < \hat{\vartheta}, \hat{r}, \hat{t} >$, эти соотношения соответственно примут вид (опустим и аргументы)

$$y_1 = y_1(y_2, y_3) = \Re_{12}(y_2, y_3) \text{ - РЭФ}$$

или

$$y_2 = y_2(y_1, y_3) = \Re_{21}(y_1, y_3) \text{ – ЭРФ;}$$

$$y_3 = y_3(y_2) = S_{32}(y_2) \text{ - ФС}$$

или

$$y_2 = y_2(y_3) = S_{23}(y_3) \text{ – ФС.}$$

Таким образом, операционный функционал представляет собой одну из *пар* этих соотношений (ОФ+ФС).

Раскроем физический смысл приведенных зависимостей на примере.

Пример 5.3.1. Пусть в ходе операции целевой эффект образуется по следующему закону

$$y_1 = \mathcal{R}_{12}(y_2, y_3) = \alpha_{12} \int_0^{y_3} \dot{y}_2(t)\,dt = \alpha_{12}\, y_2(y_3) = \alpha_{12} S_{23}(y_3)\ , \quad (5.3.11)$$

где α_{12} - размерный коэффициент, характеризующий удельную ресурсоёмкость целевого эффекта y_1 операции; $\dot{y}_2(t)$ - *темп* (скорость) *освоения* расходуемых материально-технических *ресурсов,*

$$\dot{y}_2(t) \stackrel{d}{=} \frac{dy_2(t)}{dt}$$

y_2 - количество освоенных (израсходованных) в ходе операции ресурсов;

y_3 - длительность операции.

Соотношение (5.3.11) описывает (моделирует) процесс освоения ресурсов в ходе операции и превращения их в целевой эффект.

При проектировании ОТС используются теоретические ОФЛ или ОФ.

ПРИМЕРЫ ОПЕРАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Приведём ряд примеров "*производственных функций*", используемых в экономике и могущих служить прототипами операционных функций.

1. Одной из наиболее распространённых является степенная РЭФ вида

$$y_1 = \alpha_{12}\, y_{21}^{\beta_1}\, y_{22}^{\beta_2} \cdots y_{2n_2}^{\beta_{n_2}}, \qquad (5.3.I5)$$

где α_{12}, β_i - "агрегаты", причём α_{12} - коэффициент производительности (отдачи) ресурсов, а α_{12}^{-1} - коэффициент ресурсоёмкости единицы целевого эффекта,

$$\alpha_{12} = \frac{y_1}{\prod_{i=1}^{n_2} y_{2i}^{\beta_i}}, \quad \alpha_{12}^{-1} = \frac{\prod_{i=1}^{n_2} y_{2i}^{\beta_i}}{y_1}.$$

При $n_2 = 2$ РЭФ (5.3.I5) принимает вид

$$y_1 = \alpha_{12}\, y_{21}^{\beta_1}\, y_{22}^{\beta_2}. \qquad (5.3.I6)$$

Функция (5.3.16) называется производственной функцией Кобба–Дугласа.

2. *Мультипликативная ОФ* (вводится зависимость переменных от операционного времени)

$$y_1 = \mathcal{R}_{12}\left(Y^{(2)}_{\langle n_2\rangle}, Y^{(3)}_{\langle n_3\rangle}\right) = \alpha_{12} \prod_{i=1}^{n_2} y_{2i}^{\beta_i}(y_{3i}), \qquad (5.3.I8)$$

3. Наряду с ними находят применение и *аддитивные* функции вида

$$y_1 = \mathcal{R}_{12}(Y^{(2)}_{\langle n_2\rangle}, Y^{(3)}_{\langle n_3\rangle}) = \sum_{i=1}^{n_2} \alpha_{2i}\, y_{2i}^{\beta_i}(y_{3i}), \qquad (5.3.I9)$$

где $\alpha_{2i} = \alpha_{2i}(A_{\langle k\rangle}, B'_{\langle l'\rangle})$; $\beta_i = \beta_i(A_{\langle k\rangle}, B'_{\langle l'\rangle})$.

В частном случае, когда $\beta_i = 1, [i = 1(1)n_2]$, аддитивная производственная функция становится *линейной* вида

$$y_1 = \sum_{i=1}^{n_2} \alpha_{2i}\, y_{2i}(y_{3i}) \, . \qquad (5.3.I9')$$

2. ПОСТУЛАТЫ ТЕОРИИ ОПЕРАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Операционный функционал представляет собой "сердцевину" математической модели ЦНПФС, от качества которой зависит адекватность модели, а, следовательно, и объективность, точность и достоверность окончательных выводов о качестве ЦУТС и реализуемого ею ЦНПФС.

При построении модели операционного функционала должны быть решены следующие задачи:

- анализ структуры операционного комплекса и определение функциональных и ЭТХ ЦУТС и установление и описание всех связей между ними;
- анализ существенных свойств (атрибутов) результатов ЦНПФС, т.е. целевых эффектов и расходуемых операционных ресурсов, обусловливающих эффективность операции;
- построение математической модели операционного функционала, т.е. определение соотношений для операционной функции и функций связи.

Выше были рассмотрены примеры производственных функций, используемых в качестве математических моделей процессов преобразования ресурсов в целевой эффект. Адекватность подобных моделей должна обосновываться в каждом конкретном случае самостоятельно. Однако существует ряд общих требований, которым должны удовлетворять функции, описывающие такие модели. В основу этих требований положен практический опыт и здравый смысл; формулируются они в форме *постулатов*, выражающих основные принципы, которыми следует руководствоваться при "конструировании" (построении) операционных функций и функций связи.

ПОСТУЛАТ 1. **При определённом расходе ресурсов может быть получен определенный (соответствующий проектной технологии) целевой эффект (продукт) или меньший, т.е. операционная РЭ-функция удовлетворяет соотношению:** $y_1 \le \Re_{12}(y_2, y_3)$.

Иллюстрацией могут служить заштрихованные на рис. 5.3.2 области, которые называются *областями операционных* (производственных) *возможностей* (ООВ).

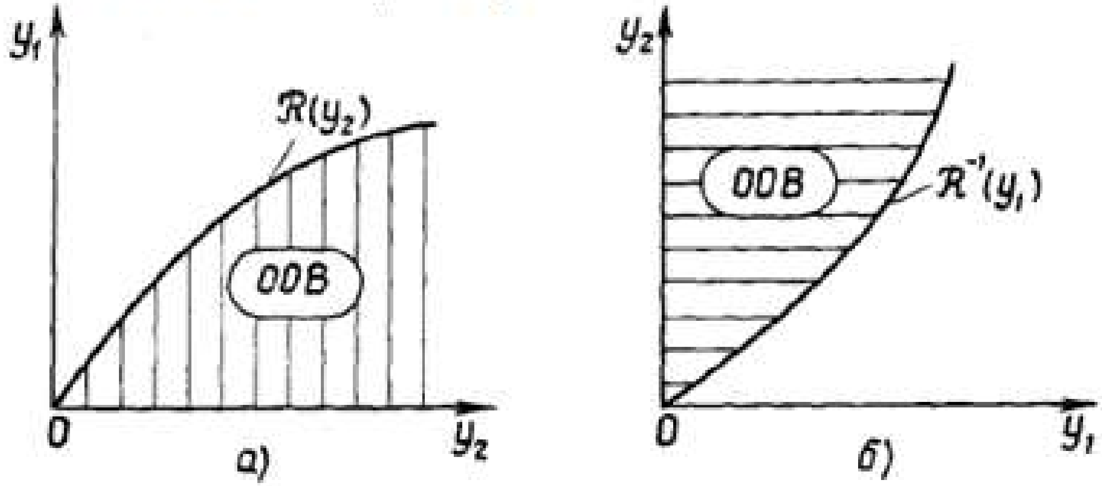

Рис.5.3.2

Из РЭФ можно вывести два обратных соотношения (ЭР-функции):

$$y_2 \ge \Re_{21}^{-1}(y_1, y_3) \text{ и } y_3 \ge \Re_{31}^{-1}(y_1, y_2).$$

Тогда постулат 1 может быть сформулирован следующим образом.

Для получения определенного эффекта (продукта) должен быть израсходован определенный (соответствующий технологии) ресурс или больший.

ПОСТУЛАТ 2. **В пределах операционной области (любая) операционная функция есть функция *неубывающая* (рис. 5.3.2), т.е. если**

$$(y_2'' > y_2') \Rightarrow \mathcal{R}(y_2'', y_3) \geq \mathcal{R}(y_2', y_3); \qquad (5.3.32')$$

$$(y_3'' > y_3') \Rightarrow \mathcal{R}(y_2, y_3'') \geq \mathcal{R}(y_2, y_3'); \qquad (5.3.32'')$$

$$(y_2'' > y_2') \cap (y_3'' > y_3') \Rightarrow \mathcal{R}(y_2'', y_3'') \geq \mathcal{R}(y_2', y_3'). \qquad (5.3.32''')$$

Сформулированный постулат представляется очевидным, так как основан на естественном предположении, что при увеличении затрат операционных ресурсов целевой эффект операции не может уменьшаться. Однако это справедливо не всегда. Так, если при увеличении расхода ресурсов технология ЦНПФС ухудшается, то целевой результат (эффект) операции также может ухудшаться (уменьшаться).

Другим примером ЦНПФС, операционная функция которого не удовлетворяет этим соотношениям, может служить операция по добыванию данных, целевой эффект которой - собранная информация, в силу старения последней с течением времени падает, и если скорость старения информации превосходит скорость её добывания, то соотношения выполняться не будут.

ПОСТУЛАТ 3. **При увеличении расхода одного ресурса и постоянных расходах других ресурсов производительность (ресурсоотдача) этого ресурса падает, т.е. РЭФ – вогнута (рис 5.3.2,б), а ЭРФ – выпуклая (рис. 5.3.2,а), т.е. при** $0 \le \alpha \le 1$

$$\Re(\alpha y_{21} + (1-\alpha) y_{22}; y_3) \ge \alpha \Re(y_{21}; y_3) + (1-\alpha)\Re(y_{22}; y_3) \qquad (5.3.33)$$

Определение 5.3.4. При расширении (увеличении) расхода ресурсов их отдача:

- п о с т о я н н а, если

$$\mathcal{R}(\alpha Y^{(2)}_{\langle n_2 \rangle}; Y^{(3)}_{\langle n_3 \rangle}) = \alpha \mathcal{R}(Y^{(2)}_{\langle n_2 \rangle}; Y^{(3)}_{\langle n_3 \rangle}); \qquad (5.3.35)$$

- в о з р а с т а е т, если

$$\mathcal{R}(\alpha Y^{(2)}_{\langle n_2 \rangle}; Y^{(3)}_{\langle n_3 \rangle}) > \alpha \mathcal{R}(Y^{(2)}_{\langle n_2 \rangle}; Y^{(3)}_{\langle n_3 \rangle}); \qquad (5.3.36)$$

- у б ы в а е т, если

$$\mathcal{R}(\alpha Y^{(2)}_{\langle n_2 \rangle}; Y^{(3)}_{\langle n_3 \rangle}) < \alpha \mathcal{R}(Y^{(2)}_{\langle n_2 \rangle}; Y^{(3)}_{\langle n_3 \rangle}). \qquad (5.3.37)$$

Соотношение (5.3.35) означает, что при расширении масштаба производства (операции), т.е. при увеличении затрат ресурсов, целевой эффект возрастает в той же пропорции. Понятно, что это условие выполняется не всегда. Причём чем больше операционная функция отличается от линейной, тем сомнительнее правомерность постулата (5.3.35). Так, например, если операция проводится с целью нанесения ущерба противнику, то навряд ли можно предположить, что при удвоении расхода снарядов наносимый цели ущерб также удвоится. Поэтому, хотя постулат 3 и применяется в рамках теории производственных функций, в задачах теории эффективности целенаправленных процессов характер "отдачи ресурсов" должен исследоваться специально.

ВКА имени А.Ф. Можайского