ВОЕННО-КОСМИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ ИМЕНИ А.Ф. МОЖАЙСКОГО
Кафедра информационно-вычислительных систем и сетей

УТВЕРЖДАЮ

Начальник 24 кафедры

полковник

А. Басыров

«____» _____ 20 года

Автор: старший преподаватель 24 кафедры,
кандидат технических наук, доцент В.Тимофеев

Тема3. Испытания и контроль надёжности АС

Лекция № 8

Метод статистических испытаний

по дисциплине

Надежность автоматизированных систем

Обсуждено и одобрено на заседании 24 кафедры
«___» ____________ 20____ года протокол № ___

Санкт - Петербург

20

Цель занятия: ознакомить слушателей с сущностью метода статистических испытаний, основными задачами моделирования надежности и определением времени безотказной работы системы.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАНЯТИЯ И ВРЕМЯ

Введение	5 мин.
1. Сущность метода статистических испытаний	11 мин.
2. Основные задачи моделирования надежности	19 мин.
3. Определение времени безотказной работы системы	50 мин.
Заключение	5 мин.

Введение

Метод статистических испытаний – это численный метод, основанный на моделировании случайных величин и построении статистич. оценок для искомых величин. Принято считать, что ме тод возник в 1949 , когдав связи с работами по созданию атомных реакторов Дж. Нейман и С. Улам предложили использовать аппарат теории вероятностей для решения прикладных задач с помощью ЭВМ. Метод получил свое название по имени города Монте-Карло, известного своими игорными заведениями предложили

1. Сущность метода статистических испытаний

Сущность метода статистических испытаний (метода Монте-Карло) заключается в построении вероятностной модели системы, реализации ее многократно случайным образом и математической обработке результатов испытаний.

Теоретической основой метода является закон больших чисел, согласно которому частота случайного события стремится к его вероятности, а среднее арифметическое случайной величины – к ее математическому ожиданию при увеличении числа испытаний.

Рассмотрим следующую задачу.

Пусть задана функция $y = f(x)$, причем $0 \le x \le 1$, $|f(x)| < 1$.

Требуется найти площадь S, ограниченную сверху данной функцией на заданном интервале.

Аналитически: $\boldsymbol{S = \int_0^1 f(x)dx}$.

Статистически:

Пусть на координатную плоскость бросили случайную точку $(\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{y_1})$. Если $\boldsymbol{y_1 \le f(x_1)}$, т,е. точка попала на искомую площадь $\boldsymbol{S}$, то событие считается успешным.

Провели $\boldsymbol{N}$ бросков, из них зафиксировали $\boldsymbol{m}$ успешных, тогда:

$$S \approx \frac{m}{N}.$$

При этом $\lim_{N\to\infty} \Delta S(N) \to 0$.

2. Основные задачи моделирования надежности

Задача 1 – моделирование случайных событий по заданным вероятностям их появлений.

Задача 2 – определение значений случайной величины по заданному закону распределения.

<u>Решение Задачи 1</u>

Пусть есть полная группа событий A_1, A_2, ..., A_n с вероятностями появления $P_1, P_2, \ldots, P_n$ $(\sum_{i=1}^{n} P_i = 1)$.

Определить, какое из указанных событий произошло в каждом опыте.

Интервал ***[0,1]*** разбивается на $\boldsymbol{n}$ непересекающихся отрезков так, чтобы длина $\boldsymbol{i}$-го отрезка численно была равна P_i. Попадание случайного числа на $\boldsymbol{i}$-й отрезок фиксируется как событие A_i.

В качестве механизма случайного выбора используются программные датчики случайных чисел.

<u>Пример решения Задачи 1</u>

Пусть:

- отказы ЭВМ обнаруживаются системой контроля с вероятностью 0,9;
- событие 1 – отказ обнаружен, вероятность события 1 равна 0,9;
- событие 2 – отказ не обнаружен, вероятность события 2 равна 0,1.

Разбиваем интервал [0,1] на два отрезка длиной 0,9 и 0,1 соответственно.

Если в i-м опыте случайное число датчика (*датчик генерирует случайные числа в интервале [0,1]*) меньше либо равно 0,9, т.е. попало в первый отрезок , то имеет место событие 1, если число больше 0,9, то имеет место событие 2.

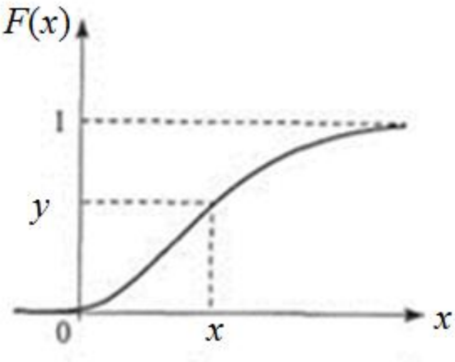
<u>Решение Задачи 2</u>

<u>Теорема:</u>

Если случайная величина ***X*** имеет плотность распределения ***f(x)***, то случайная величина ***Y*** = ***F(x)***, где ***F(x)*** = $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$, распределена равномерно в интервале [0,1].

Т.е. совокупность чисел $\{y_i = F(x_i)\}$ можно рассматривать как значения случайной величины ***Y***, равномерно распределенной на интервале [0,1].

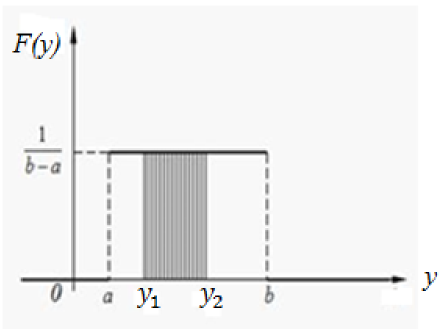
Данную теорему поясняет рисунок, на котором изображена функция распределения СВ *X*. Теорему доказывает цепочка рассуждений, основанная на определении понятия «функция распределения» и условии теоремы



$$F(y) = P(Y < y) = P(X < x) = F(x) = \int_0^x f(x)dx = y.$$

Таким образом, получили равенство $F(y) = y$, а это и означает, что СВ Y распределена равномерно в интервале [0; 1].

График плотности и функция распределения вероятности равномерно распределенной случайной величины Y :



$$F(y) = \begin{cases} 0, \ y < \alpha \\ \dfrac{y-\alpha}{\beta-\alpha}, \alpha \le y \le \beta \\ 1, \ y > \beta \end{cases}$$

При b = 1 и a = 0 $F(y) = y$.

С равномерным законом распределения имеют дело, когда по условиям испытания или опыта изучают случайную величину $\boldsymbol{Y}$, которая принимает значения в конечном промежутке и все значения из этого промежутка равно возможны, т.е. ни одно из значений не имеет преимуществ перед другими.

Справедливо и обратное утверждение. Если $\boldsymbol{\{y_i\}}$ – совокупность значений равномерно распределенной на интервале [0,1] случайной величины $\boldsymbol{Y}$, то обратным преобразованием $\boldsymbol{X = F(y)^{-1}}$ для каждого $\boldsymbol{y_i}$ можно найти $\boldsymbol{x_i}$, являющееся значением случайной величины $\boldsymbol{X}$, распределенной по закону $\boldsymbol{f(x)}$.

Аналитически задача сводится к решению следующего уравнения:

$$\boldsymbol{y_i = \int_{-\infty}^{x_i} f(x)dx.}$$

Например, для $\boldsymbol{F(x) = 1 - e^{-\lambda x}}$, имеем:

$$\boldsymbol{y_i = 1 - e^{-\lambda x_i}},$$

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} ln(1 - y_i),$$

а т.к. для равномерного распределения верно $\hat{x} = 1 - \hat{x}$, то

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} ln\, y_i.$$

Для других законов не всегда уравнение легко разрешимо.

3. Определение времени безотказной работы системы

Основной величиной, определяемой в каждом из N опытов при статистическом испытании на надежность, является время безотказной работы системы $T\ (t_1,\ t_2, \ldots,\ t_N)$. Все остальные показатели надежности определяются из $(t_1,\ t_2, \ldots,\ t_N)$ путем статистической обработки.

<u>Основное соединение элементов без резервирования и восстановления отказавших элементов</u>

Если известны плотности распределения времени безотказной работы всех элементов: $f_1(t), \ldots, f_n(t)$, то времена безотказной работы элементов $t_1, t_2, \ldots, t_n$ будут определяться выражением:

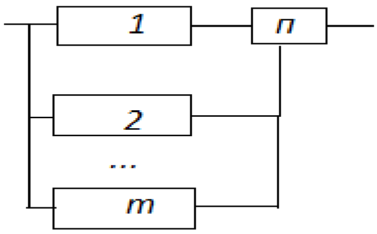
$$y_i = \int_0^{x_i} f_i(z)dz \rightarrow x_i = t_i\ ,$$

где y_i - i-е значение случайной величины Y, равномерно распределенной на интервале [0,1].

Например, для экспоненциального закона $x_i = t_i = -\frac{1}{\lambda_i} ln\, y_i$.

Время безотказной работы системы T определяется как: $T = min\ (t_1,\ t_2, \ldots,\ t_n)$.

<u>Общее резервирование</u>



$f_i(t)$ – плотность распределения времени безотказной работы i-го элемента;

$g_i(t)$ – плотность распределения времени восстановления i-го элемента;

$f_п(t)$ – плотность распределения времени безотказной работы переключателя;

R – вероятность обнаружения отказа элемента переключателем.

Резервирование без восстановления отказавших элементов

Резерв ненагруженный

Отказ системы наступает в следующих случаях:

- при отказе всех m элементов,
- резерв не израсходован, но отказал переключатель,
- резерв не израсходован, переключатель не отказал, но отказ неисправного элемента не обнаружен.

Последовательность нахождения времени безотказной работы:

1. По $\boldsymbol{y_1}$ и $\boldsymbol{f_{\text{п}}(t)}$ определяется время безотказной работы переключателя $\boldsymbol{t_{\text{п}}}$;

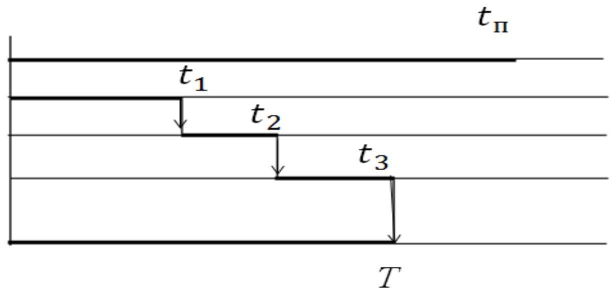
2. По $\boldsymbol{y_2}$ и $\boldsymbol{f_1(t)}$ определяется время безотказной работы 1-го элемента $\boldsymbol{t_1}$. Если к моменту отказа 1-го элемента переключатель не оказал и отказ элемента обнаружен $\boldsymbol{(t_1 \leq t_{\text{п}}}$ **и** $\boldsymbol{y_3 \leq R)}$, то будет подключен резервный элемент. Если не выполняется хотя бы одно условие из $\boldsymbol{(t_1 \leq t_{\text{п}}}$ и $\boldsymbol{y_3 \leq R)}$, то резервный элемент не будет подключен и наступит отказ системы, тогда $\boldsymbol{T = t_1}$.

3. При $\boldsymbol{(t_1 \leq t_{\text{п}}}$ **и** $\boldsymbol{y_3 \leq R)}$ по $\boldsymbol{y_4}$ и $\boldsymbol{f_2(t)}$ определяется время безотказной работы 2-го элемента $\boldsymbol{t_2}$. Проверяются неравенства $\boldsymbol{(t_1 + t_2 \leq t_{\text{п}}}$ **и** $\boldsymbol{y_5 \leq R)}$. Если хотя бы одно из них не выполняется, то $\boldsymbol{T = t_1 + t_2}$.

4. При $\boldsymbol{(t_1 + t_2 \leq t_{\text{п}}}$ **и** $\boldsymbol{y_5 \leq R)}$ по $\boldsymbol{y_6}$ и $\boldsymbol{f_3(t)}$ определяется время безотказной работы 3-го элемента $\boldsymbol{t_3}$ и проверяются неравенства $\boldsymbol{(t_1 + t_2 + t_3 \leq t_{\text{п}}}$ **и** $\boldsymbol{y_7 \leq R)}$.

И т.д. Процесс продолжается до тех пор, пока либо не выполнится одно из неравенств, либо будут израсходованы все элементы.

Иллюстрация процесса нахождения времени безотказной работы системы.



Резерв нагруженный

Последовательность нахождения времени безотказной работы:

1. По $\boldsymbol{y_1}$ и $\boldsymbol{f_{\text{п}}(t)}$ определяется время безотказной работы переключателя $\boldsymbol{t_{\text{п}}}$;
2. По $\boldsymbol{y_2}$ и $\boldsymbol{f_1(t)}$ определяется время безотказной работы 1-го элемента $\boldsymbol{t_1}$. Если не выполняется хотя бы одно условие из $\boldsymbol{(t_1 \leq t_{\text{п}}}$ и $\boldsymbol{y_3 \leq R)}$, то $\boldsymbol{T = t_1}$.

3. При ($t_1 \le t_п$ и $y_3 \le R$) по y_4 и $f_2(t)$ определяется время безотказной работы 2-го элемента t_2 и проверяется, не отказал ли он раньше первого. Для этого t_2 сравнивается с t_1.
4. При $t_2 < t_1$ по y_5 и $f_3(t)$ определяется время безотказной работы 3-го элемента t_3 и проверяется, не отказал ли он раньше первого. Если и он отказал раньше первого, то анализируется следующий элемент и т.д. до тех пор, пока не будет найден исправный элемент.

Пусть этот элемент имеет номер j. Тогда проверяются неравенства ($t_j \le t_п$ и $y_{j+3} \le R$). Если хотя бы одно из них не выполняется, то $T = t_j$. Если выполняются оба неравенства, то переходят к анализу *(j+1)*-го элемента и т.д.

Процесс продолжается до тех пор, пока либо не выполнится одно из неравенств, либо будут израсходованы все элементы.

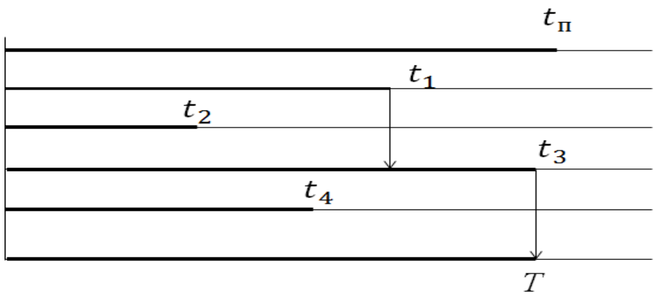


Иллюстрация процесса нахождения времени безотказной работы системы при *R = 1*.

<u>Резервирование с восстановлением отказавших элементов</u>

<u>Резерв ненагруженный</u>

После отказа первого элемента в работу включается второй, а первый восстанавливается. По окончании восстановления он становится в резерв. После отказа второго элемента он восстанавливается, а в работу включается следующий исправный резервный элемент. Переключение происходят до тех пор, пока одновременно не окажутся в неисправном состоянии все элементы.

Допущения: *R = 1,* восстановление отказавшего элемента осуществляется сразу после переключения, переключатель идеальный.

Последовательность нахождения времени безотказной работы:

1. По y_1 и $f_1(t)$ определяется время безотказной работы 1-го элемента $t_{р1}^{(1)}$. Подсчитывается суммарная наработка системы $t_\Sigma = t_{р1}^{(1)}$.

2. По y_2 и $g_1(t)$ определяется время восстановления первого элемента $t_{в1}^{(1)}$. Запоминается момент окончания ремонта первого элемента $t_{в1} = t_\Sigma + t_{в1}^{(1)}$.

3. По $\boldsymbol{y_3}$ и $\boldsymbol{f_2(t)}$ определяется время безотказной работы 2-го элемента $\boldsymbol{t}_{\text{р}\boldsymbol{2}}{}^{(\boldsymbol{1})}$. Подсчитывается суммарная наработка системы $\boldsymbol{t_\Sigma} = \boldsymbol{t}_{\text{р}\boldsymbol{1}}{}^{(\boldsymbol{1})} + \boldsymbol{t}_{\text{р}\boldsymbol{2}}{}^{(\boldsymbol{1})}$.

4. По $\boldsymbol{y_4}$ и $\boldsymbol{g_2(t)}$ определяется время восстановления второго элемента $\boldsymbol{t}_{\text{в}\boldsymbol{2}}{}^{(\boldsymbol{1})}$ и запоминается момент окончания его ремонта $\boldsymbol{t}_{\text{в}\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{t_\Sigma} + \boldsymbol{t}_{\text{в}\boldsymbol{2}}{}^{(\boldsymbol{1})}$ и т.д.

5. После отказа $\boldsymbol{m}$-го элемента запоминается момент его восстановления $\boldsymbol{t}_{\text{в}\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{t_\Sigma} + \boldsymbol{t}_{\text{в}\boldsymbol{m}}{}^{(\boldsymbol{1})}$, где $\boldsymbol{t_\Sigma} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{t}_{\text{р}\boldsymbol{i}}{}^{(\boldsymbol{1})}$, и среди резервных элементов ищется первый исправный элемент (первый среди восстановленных при последовательном просмотре сверху вниз). Пусть номер этого элемента $\boldsymbol{j}$.

6. По $\boldsymbol{y_{2m+1}}$ и $\boldsymbol{f_j(t)}$ определяется время безотказной работы $\boldsymbol{j}$-го элемента $\boldsymbol{t}_{\text{р}\boldsymbol{j}}{}^{(\boldsymbol{2})}$. Подсчитывается суммарная наработка системы $\boldsymbol{t_\Sigma} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{t}_{\text{р}\boldsymbol{i}}{}^{(\boldsymbol{1})} + \boldsymbol{t}_{\text{р}\boldsymbol{j}}{}^{(\boldsymbol{2})}$.

7. По $\boldsymbol{y_{2m+2}}$ и $\boldsymbol{g_j(t)}$ определяется время восстановления $\boldsymbol{j}$-го элемента при втором включении $\boldsymbol{t}_{\text{в}\boldsymbol{j}}{}^{(\boldsymbol{2})}$ и запоминается момент окончания его ремонта $\boldsymbol{t}_{\text{в}\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{t_\Sigma} + \boldsymbol{t}_{\text{в}\boldsymbol{j}}{}^{(\boldsymbol{2})}$.

После этого ищется следующий исправный элемент и процесс вычислений продолжается до тех пор, пока все элементы не окажутся в состоянии ремонта. В этом случае наступает отказ системы и $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t_\Sigma}$.

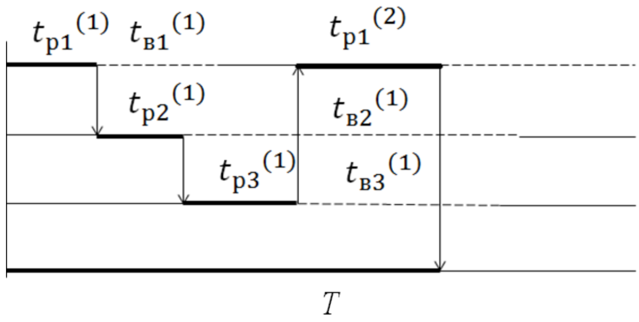


Иллюстрация процесса нахождения времени безотказной работы системы

<u>Резерв нагруженный</u>

Первоначально определяется время безотказной работы первого элемента $\boldsymbol{t}_{\text{р}\boldsymbol{1}}{}^{(\boldsymbol{1})}$. Подсчитывается суммарная наработка системы $\boldsymbol{t_\Sigma} = \boldsymbol{t}_{\text{р}\boldsymbol{1}}{}^{(\boldsymbol{1})}$, затем моделируется поведение остальных элементов до момента $\boldsymbol{t_\Sigma}$ включительно. Для этого определяются времена безотказной работы и восстановления элементов, затем они соответственно суммируются вплоть до момента $\boldsymbol{t_\Sigma}$. Состояние каждого элемента на момент $\boldsymbol{t_\Sigma}$ запоминается. Среди всех исправных элементов ищется ближайший к отказавшему и время от $\boldsymbol{0}$ до момента $\boldsymbol{t_\Sigma}$ его очередного отказа принимается за суммарную наработку $\boldsymbol{t_\Sigma}$.

После этого моделируется поведение остальных элементов до момента $\boldsymbol{t_\Sigma}$ включительно и т.д. до тех пор, пока одновременно все элементы не окажутся в состоянии восстановления, тогда $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t_\Sigma}$.

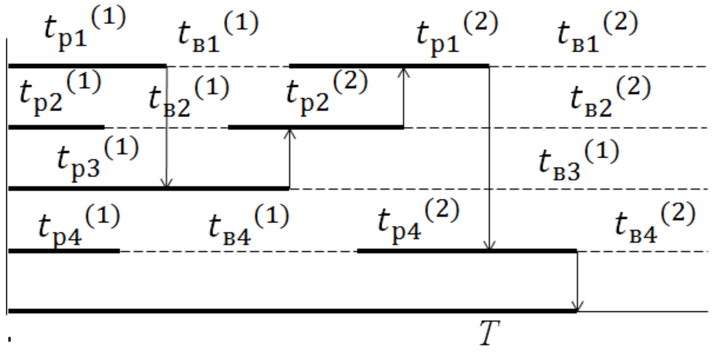


Иллюстрация процесса нахождения времени безотказной работы системы

Рассмотренные алгоритмы позволяют моделировать работу сколь угодно сложных систем. Для этого систему разбивают на последовательно соединенные узлы, каждый из которых имеет одну из рассмотренных структур. Затем находится время безотказной работы каждого узла, после чего минимальное из найденных значений принимается за время исправной работы системы в данном опыте.

Заключение

Таким образом, сегодня был рассмотрены сущность метода статистических испытаний, основные задачи моделирования надежности и определение времени безотказной работы системы.

Задание на самостоятельную работу:

1) Отработать учебный материал по конспекту лекций.
2) Изучить материал рекомендуемой литературы.

_______________В.Тимофеев_______

(воинское звание, подпись, инициал имени, фамилия автора)

«____» ___________ 20___ г.