

תרגיל 10- טורים א'

חדו"א : סדרות וטורים

1

נתון טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1. כתבו את הגדרת התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, כפי שנוסחה בכיתה.

2. נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס, ונניח כי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור מתכנס נוסף. הראו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ מתכנס גם כן.

3. נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ו- $c \in \mathbb{R}$ סקלר. הראו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ מתכנס.

2

נתונים טורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס וכי קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $b_n = a_n$. הוכיחו לפי הגדרת התכנסות הטור כי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס גם הוא.

3

נתונים טורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ בהם $a_n, b_n \geq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$. לכל $N \in \mathbb{N}$ נסמן

$$S_N^a = a_1 + a_2 + \dots + a_N, \quad S_N^b = b_1 + b_2 + \dots + b_N$$

את הסכום החלקי ה- N של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ בהתאמה.

1. הראו כי הסדרות $\{S_N^a\}_{N=1}^{\infty}$, $\{S_N^b\}_{N=1}^{\infty}$ הן אי-שליליות ומונוטוניות עולות.

2. נניח בנוסף כי $a_n \leq b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הראו כי $S_N^a \leq S_N^b$ לכל $N \in \mathbb{N}$.

3. הוכיחו כי אם $a_n \leq b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ובנוסף $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

4. הראו כי מסקנת המשפט שגוייה אם לא מניחים כי איברי הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ אי-שליליים.

מצאו דוגמה לטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס וכך ש- $a_n \leq b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$, אך $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ אינו מתכנס.

5. הסיקו מסעיף 3 ומתרגיל 1 כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ הם טורים אי-שליליים ומתכנסים אז $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ גם הוא טור מתכנס (רמז: אי-שוויון הממוצעים).

4

בדקו אלו מהטורים הבאים מתכנסים.

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ (רמז: השתמשו בנוסחה $4n^2 - 1 = (2n - 1)(2n + 1)$ כדי לרשום את הטור כטור טלסקופי).

2. $\sum_{n=1}^{\infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{4^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (הערה: שימו לב שבתרגיל 8 שאלה 3) הוכחתם כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ טור מתכנס. נסו להפעיל כאן את שאלה 3 של תרגיל זה.)