תרגיל 11- טורים ב' וחזרה כללית
חדו"א : סדרות וטורים

טורים

1

חקרו את התכנסות הטורים הבאים באמצעות מבחני ההשוואה

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+5}}{n^2+37n}$

פתרון. הטור הנתון חיובי. נפעיל את מבחן ההשוואה הגבולי ביחס לטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{n^4+5}}{n^2+37n}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2\cdot(n^4+5)}}{n^2+37n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\sqrt[4]{1+\frac{5}{n^2}}}{n^2(1+\frac{37}{n})} = 1 .$$

.

נותר לנו לבדוק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ מתכנס. לצורך כך ניתן להשתמש במבחן ההשוואה הראשון לעומת הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ המתבדר, שכן לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. לסיכום- הראינו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+5}}{n^2+37}$ מתבדר.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n^2+1}$

פתרון. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $0 \leq \frac{\cos^2(n)}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$, ולכן הטור מתכנס- ממבחן ההשוואה הראשון והתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$

פתרון. הטור חיובי ומקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{e} = 1$, ולכן הטור מתבדר, ממבחן ההשוואה הגבולי לעומת הטור המתבדר $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$

פתרון. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^2}$. מכיוון שהטור חיובי, ע"י השוואה לטור המתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

2

חקרו את התכנסות הטורים הבאים (ניתן להשתמש בכל משפטי ההתכנסות שלמדנו)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

פתרון. נשתמש במבחן המנה

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1 .$$

על כן הטור מתבדר.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt[n]{e}-1\right)$

פתרון. כפי שצויין ברמז, לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי $e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ולכן $\sqrt[n]{e} > \left(1+\frac{1}{n}\right)$. נובע כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$\sqrt{n}\left(\sqrt[n]{e}-1\right) > \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

נובע מכך כי הטור מתבדר ע"י מבחן ההשוואה לטור החיובי המתבדר $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (ראו תרגיל 6 סעיף 5).

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \cdot \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$

פתרון. נשתמש במבחן המנה־

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{5^{n+1}} \cdot \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n+2)}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n+1)}}{\frac{1}{5^n} \cdot \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5} \cdot \frac{2n+2}{2n+1} = \frac{1}{5} < 1$$

ולכן הטור מתכנס.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$

פתרון. נשתמש במבחן השורש

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

ולכן הטור מתכנס.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n n}$

פתרון. נשתמש במבחן המנה

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}(n+1}}{\frac{3^n}{2^n n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2(n+1)} = \frac{3}{2} > 1$$

ולכן הטור מתבדר.

3

הראו כי טור **חיובי** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ תמיד מתכנס או מתכנס במובן הרחב ל־$+\infty$.

פתרון. נסמן ב־$S_n = a_1 + \ldots + a_n$ את סדרת הסכומים החלקיים של הטור הנתון. נשים לב כי הסדרה S_n היא מונוטונית עולה, שכן $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0$. אם הסדרה S_n חסומה, אז לפי משפט שהוכחנו בכיתה, היא מתכנסת, ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}$ מתכנס.

אחרת, אם S_n איננה חסומה, אז לכל $M > 0$ יש $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־$S_{n_0} > M$. מכיוון ש־$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה, נובע גם כי לכל $n > n_0$ מתקיים כי $S_n > M$ ולכן הסדרה S_n מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$.

4

נתון טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. הראו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot S_n$ מתכנס גם כן, כאשר $S_n = a_1 + \ldots + a_n$ היא סדרת הסכומים החלקיים של הטור.

פתרון. מהגדרת טור מתכנס, הסדרה S_n היא סדרה מתכנסת, ובפרט חסומה. יהא $M \in \mathbb{R}$ כך ש־$S_n < M$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$0 \leq a_n S_n \leq a_n M.$$

ממבחן ההשוואה ביחס לטור המתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} M a_n$ נובע כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n S_n$ מתכנס.

5

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית. הראו כי אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ מתכנס.

פתרון. ניזכר כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס. לפי אי־שוויון הממוצעים, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\frac{a_n}{n} = \sqrt{\frac{a_n^2}{n^2}} \leq \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right).$$

מכיוון ששני הטורים שמוגדרים ע"י הסדרות שבאגף ימין מתכנסות, גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ מתכנס.

6

נתונה סדרה מונוטונית יורדת וחיובית $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. נגדיר סדרה חדשה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ע"י

$$b_n = a_{2^m}$$

כאשר $m \in \mathbb{N}$ הוא המספר הקטן ביותר כך ש־$2^m > n$.

1. רשמו את הערכים $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ המתאימים לסדרות $a_n = \frac{1}{n}$ ו־$a_n = \frac{1}{2^n}$.

פתרון.

(א) $\underline{a_n = \frac{1}{n}}$:

$$b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = b_3 = \frac{1}{4}, b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = \frac{1}{8}, b_8 = b_9 = \ldots = b_{15} = \frac{1}{16}, b_{16} = \ldots = b_{20} = \frac{1}{32},$$

(ב) $\underline{a_n = \frac{1}{2^n}}$:

$$b_1 = \frac{1}{4}, b_2 = b_3 = \frac{1}{16}, b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}, b_8 = b_9 = \ldots = b_{15} = \frac{1}{2^{16}}, b_{16} = \ldots = b_{20} = \frac{1}{2^{32}}.$$

2. הראו כי $a_n \geq b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

פתרון. לפי הגדרה $b_n = a^{2^m}$ עבור m כך ש־$2^m > n$. מכיוון ש־$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית יורדת מתקיים כי $a_{2^m} \leq a_n$ ולכן $b_n = a_{2^m} \leq a_n$.

3. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}a_{2^n}$ - רשמו את הסכום החלקי ה־N־י של $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, עבור N מהצורה 2^m, והסיקו ממנו את גבול סדרת הסכומים החלקיים.
פתרון.

4. הסיקו כי אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית ומונוטונית יורדת, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.
פתרון.

5. הסיקו מהסעיף הקודם כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ מתבדר לכל $\alpha < 1$.
פתרון.

סדרות הנדסיות וחשבוניות

7

האם קיים מספר $x \in \mathbb{R}$ כך שהאיברים $x^2, x-2, -12, -2^x-10$ מהווים את ארבעת האיברים הראשונים של סדרה חשבונית? האם קיים x כך שאיברים אלה הם ארבעת האיברים הראשונים של סדרה הנדסית?
פתרון. אם הסדרה הנתונה היא חשבונית אז מתקיים

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \iff x - 2 - x^2 = -12 + 2 - x \iff x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2) = 0.$$

אז אם x כזה קיים, אז $x = 4$ או $x = -2$.

- אם $x = -2$ אז הסדרה הנתונה היא $4, -4, -12, -10\frac{1}{4}$ וזו אינה סדרה חשבונית.
- אם $x = 4$ אז הסדרה הנתונה היא $16, 2, -12, -26$ וזו סדרה חשבונית מהצורה $a_n = 16 + (n-1)\cdot(-14)$.

אם הסדרה הנתונה היא גם הנדסית אז מתקיים

$$\frac{x^2}{x-2} = \frac{x-2}{-12} \iff -12x^2 = x^2 - 4x + 4 \iff 11x^2 + 4x - 4 = 0$$

ולשוויון ריבועי זה אין פתרונות ממשיים.

8

נתונה סדרה הנדסית $5, 3.5, 2.45, \ldots$. מצאו $N \in \mathbb{N}$ מינימלי כך שסכום N האיברים הראשונים בסדרה גדול מ־16. האם קיים N כך שסכום זה גדול מ־17?
פתרון. הסדרה ההנדסית נתונה ע"י $a_n = 5 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}$ והסכום החלקי ב־N־י הוא

$$S_N = 5\frac{1-\left(\frac{7}{10}\right)^N}{1-\frac{7}{10}} = \frac{50}{3}\left(1-\left(\frac{7}{10}\right)^N\right).$$

פיתוח של אי השוויון

$$\begin{aligned} S_N > 16 &\iff 1-\left(\frac{7}{10}\right)^N > \frac{48}{50} \\ &\iff \left(\frac{7}{10}\right)^N < \frac{2}{50} \\ &\iff N > \frac{\ln\left(\frac{2}{50}\right)}{\ln\left(\frac{7}{10}\right)} \approx 9.0247\ldots \end{aligned}$$

ו־$N = 10$ מספיק לצורך כך.
לא קיים N כך ש־$S_N > 17$ שכן

$$S_N > 17 \iff \frac{50}{3}\left(1-\left(\frac{7}{10}\right)^N\right) > 17 \iff -\left(\frac{7}{10}\right)^N > \frac{51}{50} - 1 > 0$$

מה שלא אפשרי.

9

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה הנדסית לא קבועה, ונניח כי האיברים a_2, a_4, a_5 מהווים סדרה חשבונית. חשבו את יחס הסדרה. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

פתרון. נסמן $a_n = a_1 q^{n-1}$. מהנתון $a_5 - a_4 = a_1q^4 - a_1q^3 = a_1q^3 - a_1q = a_4 - a_2$ ולכן

$$a_1q\left(q^3 - q^2\right) = a_1q\left(q^2 - 1\right)$$

ומכיוון ש־a_n לא סדרה קבועה $a_1q \neq 0$ וגם $q \neq 1$, ולכן ניתן לחלק ב־$a_1q(q-1)$ ולקבל כי

$$q^2 = q + 1$$

חישוב נותן ש־$q = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. בנוסף, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$a_{n+2} = a_1q^{n+1} = a_1q^{n-1}(q+1) = a_1q^n + a_1q^{n-1} = a_{n+1} + a_n ,$$

כנדרש.

10

יהא $n \in \mathbb{N}$ ויהיו $x_0, x_1, \ldots x_n$ ספרות, כך ש־$0 \leq x_i \leq 9$ לכל i. נסמן $x = x_0 + 10 \cdot x_1 + \ldots + 10^n x_n$. השתמשו בנוסחת סכום סדרה חשבונית אינסופית על מנת לחשב את ההצגה העשרונית של המספר $\frac{x}{10^{n+1}-1}$.

פתרון.

$$\frac{x}{10^{n+1}-1} = 10^{n+1}\frac{x}{1-10^{-n+1}} = x + 10^{-n+1}x + 10^{-2(n+1)}x \ldots = x_n x_{n-1} \ldots x_0.\overline{x_n x_{n-1} \ldots x_0}.$$

11

נתונה סדרה חשבונית $a_n = a_1 + (n-1)d$. הראו כי הסדרה $b_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$ עם איבר ראשון $2a_1d + d^2$ והפרש $2d^2$.

פתרון.

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^2 - a_n^2 &= a_1^2 + n^2d^2 + 2a_1nd - a_1^2 - (n-1)^2d^2 - 2a_1(n-1)d \\
&= 2a_1nd + n^2d^2 - (n^2 - 2n + 1)d^2 - 2a_1nd + 2a_1d \\
&= 2a_1 - d^2 + 2d^2n \\
&= 2a_1 + d^2 + 2d^2(n-1)
\end{aligned}$$

12

בדקו האם הסדרות הבאות חשבוניות או הנדסיות ורשמו את איברן הכללי ואת סכום עשרת האיברים הראשונים שלהן.

1. $5, -6, -17, \dots$,
   פתרון. $a_n = 5 + (-11)(n-1)$ סדרה חשבונית.

2. $21, 14, 9\frac{1}{3}, \dots$,
   פתרון. $a_n = 21 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ סדרה הנדסית.

3. $2.5, -12.5, 62.5, \dots$,
   פתרון. $a_n = 2.5 \cdot (-5)^{n-1}$ סדרה הנדסית.

4. $0.9, 0.99, 1.08, \dots$.
   פתרון. $a_n = 0.9 + (n-1) \cdot 0.09$ סדרה חשבונית.

גבולות של סדרות

13

השתמשו באינדוקציה על מנת להוכיח את אי השווין

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

לכל $n > 1$.

פתרון. נוכיח באינדוקציה. עבור $n = 2$ מתקיים $2 = 2! < \left(\frac{2+1}{2}\right)^2 = 2.25$. נניח כי עבור $n \in \mathbb{N}$ נתון מתקיים $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ אז

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \overset{\text{הנחת האינדוקציה}}{<} \frac{(n+1)^{n+1}}{2^n}$$

לצורך הוכחת התרגיל עלינו להראות כי $\frac{(n+2)^{n+1}}{2} < (n+1)^{n+1}$. עובדה זו נובעת מכיוון ש־

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > (1+1)^1 = 2,$$

ממונוטוניות הסדרה $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

14

נתונה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ לפי נוסחת הנסיגה

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{2a_n - 1}}{2} & \text{לכל } n > 1 \end{cases}.$$

הוכיחו כי הסדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע ע"י 1. חשבו את גבולה.

פתרון. נוכיח ראשית באינדוקציה כי הסדרה הנתונה חסומה מלרע ע"י 1. בסיס האינדוקציה נתון, שכן $a_1 = 5 > 1$. נניח (באינדוקציה) כי $a_n \geq 1$ ונוכיח כי $a_{n+1} \geq 1$. ואכן

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{2a_n - 1}}{2} \overset{\text{הנחת האינדוקציה}}{\geq} \frac{1 + \sqrt{2-1}}{2} \geq \frac{2}{2}$$

כנדרש.

כעת נבדוק כי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת. ברצוננו להוכיח כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$a_{n+1} - a_n \le 0$$

ואכן

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + \sqrt{2a_n - 1}}{2} - a_n = \frac{\sqrt{2a_n - 1} - a_n}{2}$$

נשים לב כי לפי אי־שוויון הממוצעים $\sqrt{2a_n - 1} = \sqrt{(2a_n - 1) \cdot 1} \le \frac{2a_n - 1 + 1}{2} = a_n$ ולכן, מהמשוואה למעלה קיבלנו כי

$$a_{n+1} - a_n \le \frac{a_n - a_n}{2} = 0$$

ולכן הסדרה מונוטונית יורדת. בפרט, קיבלנו כי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

נסמן את גבול הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב־L. נשים לב כי לפי כלל הנסיגה המגדיר את הסדרה אנו מקבלים כי

$$\left(a_{n+1} - \frac{a_n}{2}\right)^2 = \frac{2a_n - 1}{4}$$

לכל $n \in \mathbb{N}$.

לפי חשבון גבולות הסדרות המופיעות בשני האגפים של השוויון מתכנסים ומקיימים

$$\frac{L^2}{4} = \left(\lim_{n\to\infty} a_{n+1} - \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2}\right) = \frac{2\lim_{n\to\infty} a_n - 1}{4} = \frac{L - 1}{4}$$

15

חשבו את הגבולות הבאים לפי הגדרת הגבול

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^3+1} = 0$

פתרון. יהא $\varepsilon > 0$ שרירותי. עלינו למצא $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים כי $\frac{2n}{n^3+1} < \varepsilon$. נשים לב כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $\frac{2n}{n^3+1} < \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$, לכן מספיק לנו לקחת $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־$\frac{2}{n_0^2} < \varepsilon$, כלומר $n_0 > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$, ואז לכל $n > n_0$

$$\frac{2n}{n^3+1} < \frac{2}{n^2} < \frac{2}{n_0^2} < \varepsilon$$

כנדרש.

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{15n^2+1}{5n^2-4} = 3$.

פתרון. יהא $\varepsilon > 0$ שרירותי. עלינו למצא $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים

$$\left|\frac{15n^2+1}{5n^2-4} - 3\right| = \left|\frac{15n^2 + 1 - 15n^2 + 12}{5n^2 - 4}\right| = \left|\frac{13}{5n^2-4}\right| < \varepsilon$$

נשים לב כי הביטוי בערך המוחלט הוא חיובי ומקיים

$$\frac{13}{5n^2-4} < \frac{13}{5n^2-5} = \frac{13}{5(n^2-1)}$$

לכל $n > 1$. אם נבחר את $n_0 \in \mathbb{N}$ להיות גדול מ־1 כך ש־$\frac{13}{5(n_0^2-1)} < \varepsilon$ אז לכל $n > n_0$ מתקיים כי

$$\frac{13}{5n^2-4} < \frac{13}{5(n^2-1)} < \frac{13}{5(n_0^2-1)} < \varepsilon.$$

לצורך כך, מספיק לנו לקחת $n_0 > \sqrt{\frac{13}{5\varepsilon} + 1}$.

16

יהיו $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות כך ש־$x_n \le y_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הראו כי $\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n$.

פתרון. נסמן $T = \lim_{n\to\infty} x_n$ ו־$L = \lim_{n\to\infty} y_n$. נניח בשלילה כי $T > L$, ונסמן $\varepsilon = \frac{T-L}{2}$. מהגדרת הגבול, קיימים $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ כך ש־

$$T - \varepsilon < x_n < T + \varepsilon$$

לכל $n > n_1$ וכן

$$L - \varepsilon < y_n < L + \varepsilon$$

לכל $n > n_2$. אך אז, לכל $n > \max\{n_1, n_2\}$ מתקיים כי

$$y_n < L + \varepsilon = L + \frac{T-L}{2} = \frac{T+L}{2} = T - \frac{T-L}{2} = T - \varepsilon < x_n$$

בסתירה להנחה כי $x_n \le y_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

17

חשבו את הגבולות הבאים

1. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{n+1} - \frac{2n^2}{n^2+1}\right)$,

פתרון.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{n+1} - \frac{2n^2}{n^2+1}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 2n - 2n^3 - 2n^2}{(n+1)(n^2+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{2}{n} - 2\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{-2 + \frac{2}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 0 \cdot (-2) = 0\end{aligned}$$

לפי חשבון גבולות.

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n+\arctan(n)}{\sqrt{n^2+5n+3}}$,

פתרון. נשים לב כי $0 \le \arctan(n) \le \frac{\pi}{2}$ לכל $n \in \mathbb{N}$. בפרט מתקיים כי $\frac{\arctan(n)}{\sqrt{n^2+5n+3}}$ היא מכפלה של סדרה חסומה ($\arctan(n)$) וסדרה המתכנסת ל־0 ($\frac{1}{\sqrt{n^2+5n+3}}$) ולכן מתכנס ל־0.

נחשב את $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+5n+3}}$

3. $\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$

פתרון. ניזכר כי לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$.\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

נשתמש באי השוויון השמאלי עבור $k = n$ ובאי השוויון הימני עבור $k = n-1$ ונקבל כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$.1 + \frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n-1}$$

נציב זאת בסדרה הנתונה, ונקבל כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$,1 < n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \frac{n}{n-1}$$

ומכיוון שהסדרות הימנית והשמאלית ביותר באי־השוויון שואפות ל־1, לפי כלל הסנדביץ, קיבלנו כי

$$\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)=1 .$$

18

נתונה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

פתרון. נסמן $\varepsilon=\frac{1}{2}>0$ ו־$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$. מכיוון שהסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ שואפת ל־0, קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים כי

$$(\star)\qquad |b_n|=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\frac{1}{2} .$$

נבחר מספר $n_1>n_0$ ונטען את הטענה הבאה:

לכל $n>n_1$ מתקיים כי

$$-|a_{n_1}|\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_1}<a_n<|a_{n_1}|\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_1} .$$

נוכיח את הטענה באינדוקציה על $n>n_1$. עבור $n=n_1+1$ הטענה נכונה מכיוון ש־$n_1>n_0$ ומאי־השוויון $(\star)$ לעיל. אכן, מתקיים כי

$$|b_{n_1}|=\frac{|a_{n_1+1}|}{|a_{n_1}|}<\frac{1}{2}$$

ולכן

$$-\frac{|a_{n_1}|}{2}<a_{n_1+1}<\frac{|a_{n_1}|}{2} .$$

נניח כי הטענה נכונה עבור $n=n_1+k$, לאיזשהו $k\in\mathbb{N}$ ונוכיח כי

$$-|a_{n_1}|\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}<a_{n_1+k+1}<|a_{n_1}|\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} .$$

בדומה למקרה של n_1+1, גם כאן מאי־השוויון $(\star)$ והעובדה כי $n_1+k>n_0$ מתקיים כי

$$|b_{n_1+k}|=\frac{|a_{n_1+k+1}|}{|a_{n_1+k}|}<\frac{1}{2}$$

ולכן

$$|a_{n_1+k+1}|<\frac{1}{2}|a_{n_1+k}|<\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k}|a_{n_1}|$$

כאשר באי־השווין האחרון השתמשנו בהנחת האינדוקציה. מכאן ש־

$$-\frac{|a_{n_1}|}{2^{k+1}}<a_{n_1+k}<\frac{|a_{n_1}|}{2^{k+1}}$$

כנדרש בטענה.

הראינו כי לכל $n>n_1$ מתקיים כי

$$-|a_{n_1}|\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_1}<a_n<|a_{n_1}|\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_1}$$

ומכיוון שהסדרות בחלק הימני והשמאלי של אי־השוויון מתכנסות ל־0, לפי כלל הסנדביץ' קיבלנו שגם a_n מתכנסת ל־0.

המספר e

19

הוכיחו את הגבולות הבאים

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$

פתרון.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\frac{1}{e}}$$

2. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=e^2$

פתרון. נוכיח כי

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}=1,$$

ואז, מסעיף קודם ומחשבון גבולות, נובע כי

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\cdot e^{-2}=1$$

ומכאן הגבול הנדרש.

נשים לב כי

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)^n=\left(1-\frac{3n-2}{n^3}\right)^n$$

נשים לב שהביטוי בצד ימין של אי־השוויון קטן מ־1 לכל $n\in\mathbb{N}$. מצד שני, מאי־שוויון ברנולי

$$\left(1-\frac{3n-2}{n^3}\right)^n\geq 1-\frac{3n^2-2n}{n^3}=1-\frac{3n-2}{n^2}$$

וביטוי זה שואף ל־1 כאשר n שואף לאינסוף. מכלל הסדנביץ' אנחנו מסיקים את הטענה.

20

הראו כי הסדרה $a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ מתכנסת לגבול קטן או שווה ל־e^2.

פתרון. הסדרה a_n מונוטונית עולה, שכן $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)>1$. בנוסף, מאי־השוויון $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$ לכל $n\in\mathbb{N}$ אנחנו מקבלים כי

$$a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left((1+\frac{1}{2^n}\right)<e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}<e^2$$

לכל $n \in \mathbb{N}$.

התכנסות במובן הרחב

21

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית ולא חסומה. הראו כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$ או ל־$-\infty$.
פתרון. נוכיח ראשית את הטענה תחת ההנחה כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה. יהא $M \in \mathbb{R}$ שרירותי. מההנחה כי a_n היא סדרה לא חסומה, קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־$a_{n_0} > M$. ממונוטוניות הסדרה a_n, לכל $n > n_0$ מתקיים כי $a_n > a_{n_0} > M$ ולכן הסדרה מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$.

ההוכחה למקרה בו a_n מונוטונית יורדת ולא חסומה זהה.

22

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות כך ש־$a_n \geq b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הראו כי אם b_n מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$ אז גם a_n מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$.
פתרון. יהא $M \in \mathbb{R}$ שרירותי. עלינו למצא $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $a_n > M$. מההנחה כי b_n מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$ ידוע לנו שיש $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $b_n > M$, ומכיוון ש־$a_n \geq b_n > M$ לכל $n \in \mathbb{N}$ הטענה נובעת.

23

הוכיחו התכנסות במובן הרחב של הסדרות הבאות

1. $a_n = n - n^3$,

פתרון. נראה כי a_n מתכנסת במובן הרחב ל־$-\infty$, כלומר, כי לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $n - n^3 < M$. נשים לב כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$n - n^3 = n(1 - n^2) < 1 - n^2$$

ולכן, מספיק לנו לקחת $n_0 > \sqrt{|1 - M|}$ ואז לכל $n > n_0$ מתקיים $n(1-n^2) < 1-n^2 < 1-|1 - M| \leq M$ כנדרש. את אי־השוויון האחרון $(1 - |1 - M| \leq M)$ מוכיחים באופן ישיר ע"י חלוקה למקרים $M < 1$ ו־$M \geq 1$.

2. $a_n = \frac{\sqrt{n}-1}{2}$,

פתרון. נראה ש־a_n מתכנס במובן הרחב ל־$+\infty$. נשים לב כי לכל n מתקיים כי $a_n = \frac{\sqrt{n}-1}{2} > \frac{\sqrt{n}}{2}$. בהינתן $M \in \mathbb{R}$ ניקח $n_0 > 2M^2$. אז לכל $n > n_0$ מתקיים

$$a_n = \frac{\sqrt{n} - 1}{2} > \frac{\sqrt{n}}{2} > \frac{\sqrt{n_0}}{2} > \frac{2\,|M|}{2} \geq M.$$

3. $a_n = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}$,

פתרון. יהא

בכיתה הראינו כי לכל $x > 0$ מתקיים כי $\sin(x) < x$ ולכן בפרט לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2}$, ולכן

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)} > \frac{1}{\frac{1}{n^2}} = n^2.$$

מכיוון שהסדרה באגף הימני ביותר שואפת המובן הרחב לאינסוף (מונוטונית עולה ולא חסומה), לפי תרגיל 22 בדף זה נובע כי a_n מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$.

4. $a_n = (1.00001)^n$.

פתרון. ניקח $M > 0$ וניקח $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $n_0 > \frac{\ln(M)}{\ln(1.00001)}$ (שימו לב כי המכנה בביטוי הוא חיובי). אז לכל $n > n_0$ מתקיים

$$(1.00001)^n > (1.00001)^{n_0} = e^{n_0 \cdot \ln(1.00001)} > e^{\frac{\ln(M)}{\ln(1.00001)} \cdot \ln(1.00001)} = e^{\ln(M)} = M.$$

24

בדקו מי מהסדרות הבאות מתכנסות לגבול סופי, מי מהן מתכנסת במובן הרחב, ומי מהן לא מתכנסת

1. $a_n = 1 + (-2) + 3 + (-4) + \ldots + n \cdot (-1)^{n+1}$,

פתרון. לכל $n = 2m \in \mathbb{N}$ זוגי, $a_{2m} = (1-2) + (3-4) + \ldots + (2m-1-2m) = -1 \cdot m$. מצד שני, אם $n = 2m+1$ אי־זוגי, אז $a_{2m+1} = a_{2m} + 2m + 1 = -m + 2m + 1 = m + 1$. בפרט הסדרה a_n איננה חסומה ולכן לא מתכנסת לגבול סופי, ואינה מתכנסת במובן הרחב, מכיוון שעבור $M = 0$ לכל $n_0 \in \mathbb{N}$ קיימים $n_1, n_2 > n_0$ כך ש־$a_{n_1} > 0$ ו־$a_{n_2} < 0$.

2. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$,

פתרון. מכיוון שהסדרה $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ היא מונוטונית עולה, לכל $n \geq 2$ מתקיים כי $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1\frac{1}{2}$, ולכן

$$a_n = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^n \geq \left(1\frac{1}{2}\right)^n.$$

מכיוון שהסדרה באגף ימין היא מונוטונית עולה ולא חסומה, היא מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$, ולכן גם a_n.

3. $a_n = \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$,

פתרון. נראה כי הסדרה מתכנסת במובן הרחב ל־$-\infty$. נבחר $M < 0$ שרירותי. עלינו למצא $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) < M$. אי שוויון זה קיים אם"ם $\sin\left(\frac{1}{n}\right) < e^M$. מאי־השוויון $\sin(\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$ מספיק לנו למצא $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\frac{1}{n_0} < e^M$, שכן אז לכל $n > n_0$ מתקיים כי $\sin\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < e^M$. לצורך כך נוכל לקחת כל $n_0 > e^{-M}$ טבעי.

4. $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

פתרון. נשים לב שלכל $m \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_{2n} < a_{2m+1}$ וכן $a_{2m+1} > a_{2m+2}$. כמו כן, מכיוון ש־$\frac{1}{2m} > \frac{1}{2m+1}$ לכל $m \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$a_{2m+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2m+1} < 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \ldots + \frac{1}{2m+1} = 1 + \frac{1}{2m+1}$$

ולכן (בגלל שהאיברים במקומות הזוגיים קטנים מאלו במקומות האי זוגיים) מתקיים כי $a_n < 1 + \frac{1}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

בנוסף, ע"י שימוש נוסף באי־השוויון $\frac{1}{2m} > \frac{1}{2m+1}$ מקבלים כי

$$a_{2m} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2m} > 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2m} = 1 - \frac{1}{2m},$$

וכמו קודם, מקבלים כי $a_n > 1 - \frac{1}{n}$ לכל n. מכלל הסנדביץ מסיקים שהסדרה a_n מתכנסת ל־1, ובפרט הינה חסומה.

25

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית המקיימת כי הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים וגדול מ־1. הראו כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$.

פתרון. נסמן $1 < L = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, וניקח $\varepsilon = \frac{L-1}{2} > 0$. מהנחת ההתכנסות, יש $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים

$$\frac{L+1}{2} = L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon.$$

נסמן $q = \frac{L+1}{2}$ ונשים לב כי $q > 1$. בדומה לפתרון תרגיל 81 בדף זה, מראים כי לכל $n > n_0$ מתקיים כי $a_n > a_{n_0} \cdot q^{n-n_0}$. כמו כן, הסדרה $a_{n_0}q^{n-n_0}$ מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$ (מונוטונית עולה ואינה חסומה), וע"י שימוש בתרגיל 22 נקבל כי גם הסדרה a_n מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$.