פתרון תרגיל 1- סדרות חשבוניות

חדו"א 1: סדרות וטורים

1

1. $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$,
2. $a_n = 13 \cdot (-3)^{n-1}$,
3. מכיוון שהסדרה הנדסית נדרש כי

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{x+1}{4} = \frac{2x-1}{x+1} = \frac{a_3}{a_2}.$$

פיתוח המשוואה הריבועית נותן את הפתרונות $x = 1$ ו-$x = 5$. במקרה בו $x = 1$ הסדרה נתונה ע"י $4, 2, 1, \ldots$ והנוסחה המתאימה היא $a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. במקרה בו $x = 5$ הסדרה נתונה ע"י $4, 6, 9, \ldots$ והנוסחה המתאימה היא $a_n = 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

2

הסדרה החשבונית בתרגיל נתונה ע"י הנוסחה $a_n = 4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$ ונוסחת הסכום החלקי של n האיברים הראשונים היא

$$S_n = 4 \cdot \frac{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n}{1 - \frac{9}{10}} = 40 \cdot \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$$

פיתוח של אי השוויון $S_n > 18$ נותן כי האינדקס המינימלי המקיים את אי-השוויון הוא $n = 6$.

3

נרשום $a_n = 1 + (n-1)d$. מהנתון ידוע כי

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{1+3d}{1+2d} = \frac{1+5d}{1+3d} = \frac{a_6}{a_4}.$$

פיתוח המשוואה הריבועית נותן כי $d = -1$ או $d = 0$. מכיוון שהסדרה אינה קבועה, נובע כי נוסחת הסדרה a_n היא פשוט $a_n = 1 - (n-1)$. נשים לב כי

$$a_3 = -1, a_4 = -2, a_6 = -4$$

ותת הסדרה ההנדסית שהם מגדירים היא $b_n = -1 \cdot (2)^{-n}$ המקיימת

$$b_n = a_{2^n}.$$

4

הוכחה אחת כבר הוצגה בכיתה. הוכחה אלטרנטיבית ניתנת באינדוקציה־
המקרה $n=1$ נכון בצורה טריוויאלית־ $S_1 = a_1 \cdot \frac{1-q}{1-q} = a_1$.
נניח כי הטענה נכונה למקרה $n-1$, כלומר כי־ $S_{n-1} = a_1 \cdot \frac{1-q^{n-1}}{1-q}$. נחשב את S_n־

$$\begin{aligned} S_n = S_{n-1} + a_n &= a_1 \cdot \frac{1-q^{n-1}}{1-q} + a_1 \cdot q^{n-1} \\ &= a_1 \cdot \frac{1-q^{n-1}+q^{n-1}(1-q)}{1-q} = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \end{aligned}$$

כנדרש.

5 *

1. עבור $n=2$ הטענה שיש להוכיח היא $\varphi^2 = \mathrm{Fib}_2\varphi + \mathrm{Fib}_1 = \varphi + 1$, שהיא פשוט המשוואה המגדירה את φ.
נניח באינדוקציה כי הטענה נכונה ל־$n-1$, כלומר $\varphi^{n-1} = \mathrm{Fib}_{n-1}\varphi + \mathrm{Fib}_{n-2}$. צעד האינדוציה נותן

$$\begin{aligned} \varphi^n &= \varphi \cdot \varphi^{n-1} \\ &= \varphi \cdot (\mathrm{Fib}_{n-1}\varphi + \mathrm{Fib}_{n-2}) \\ &= \mathrm{Fib}_{n-1}\varphi^2 + \mathrm{Fib}_{n-2}\varphi \\ &= \mathrm{Fib}_{n-1}\varphi + \mathrm{Fib}_{n-1} + \mathrm{Fib}_{n-2}\varphi \\ &= (\mathrm{Fib}_{n-1} + \mathrm{Fib}_{n-2})\,\varphi + \mathrm{Fib}_{n-1} = \mathrm{Fib}_n\varphi + \mathrm{Fib}_{n-1}. \end{aligned}$$

כנדרש.

2.

$$\psi^2 - \psi - 1 = \frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi} - 1 = \frac{1+\varphi-\varphi^2}{\varphi^2} = 0.$$

נובע מכך ψ גם הוא פתרון של המשוואה שהגדרנו בתחילת התרגיל, ועל כן גם הוא מקיים את נוסחת הנסיגה של סעיף א'.

3.

$$\varphi + \psi = \varphi - \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi^2-1}{\varphi} = \frac{\varphi}{\varphi} = 1.$$

4. בתרגיל זה היתה טעות, והנוסחה שנתבקשתם להוכיח לא היתה נכונה.

מצורפת כאן הטענה והנוסחה הנכונה, לטובת המתעניינים־

$$\mathrm{Fib}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \psi^n\right)$$

כאשר $\psi > \varphi$.

נשים לב כי φ ו־ψ שניהם פתרונות של המשוואה $x^2 - x - 1 = 0$, והם אינם זהים, לכן אנו יכולים לדרוש מראש כי $\psi > \varphi$.

הוכחה

(א) נוכיח כי $\varphi - \psi = \sqrt{5}$:

$$\begin{aligned}
(\varphi-\psi)^2 &= \left(\frac{\varphi^2+1}{\varphi}\right)^2 && \text{מהגדרת } \psi = -\frac{1}{\varphi} \\
&= \left(\frac{\varphi+2}{\varphi}\right)^2 && \text{מהנוסחה } \varphi^2 = \varphi + 1 \\
&= \frac{\varphi^2+4\varphi+4}{\varphi^2} && \text{נוסחת כפל מקוצר} \\
&= \frac{\varphi+1+4\varphi+1}{\varphi+1} = \frac{5(\varphi+1)}{\varphi+1)} = 5 && \text{מהנוסחה } \varphi^2 = \varphi + 1
\end{aligned}$$

ומכיוון ש־$\varphi - \psi > 0$ מקבלים כי $\varphi - \psi = \sqrt{5}$.

(ב) כעת, מסעיף (א) לעיל, ומהנוסחה בסעיף (1) אנו מקבלים כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\varphi^n - \psi^n = \mathrm{Fib}_n\varphi + \mathrm{Fib}_{n-1} - \mathrm{Fib}_n\psi - \mathrm{Fib}_{n-1} = \mathrm{Fib}_n(\varphi-\psi) = \sqrt{5}\mathrm{Fib}_n.$$

לכן

$$\mathrm{Fib}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \psi^n\right)$$