תרגיל 9- המספר e, סדרות מתכנסות במובן הרחב
חדו"א : סדרות וטורים

1

נגדיר סדרה

$$.a_n = \frac{n!e^n}{n^n}$$

.1

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!e^n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot e = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n e = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

כנדרש.

2. בכיתה הראינו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (\star)$$

שכן הסדרה באגף השמאלי היא מונוטונית עולה ומתכנסת ל-e והסדרה באגף הימני מונוטונית יורדת ומתכנסת גם היא ל-e. אם נחלק את אי-השוויון $(\star)$ ב-$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ נקבל

$$.1 = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

נציב את מסקנת סעיף 1, ונקבל כי

$$,1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad (\star\star)$$

בפרט- הראינו כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה.

נוכיח כעת כי $a_n \le n \cdot e$ לכל n באינדוקציה. בסיס האינדוקציה הוא $n = 1$, בו מתקיים $.a_1 = \frac{1!e}{1} = e \le 1$ הנחת האינדוקציה היא כי עבור $n \in \mathbb{N}$ נתון מתקיים כי $.a_n \le n \cdot e$ נבדוק את $:a_{n+1}$

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot a_n \\
&\le \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot a_n && \text{לפי } (\star\star) \\
&\le \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot n \cdot e && \text{מהנחת האינדוקציה} \\
&= (n+1) \cdot e
\end{aligned}$$

כנדרש.

3. לפי הסעיף הקודם, ע"י הוצאת שורש n־י, אנחנו מקבלים

$$\sqrt[n]{e} \leq \sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n!}e}{n} \leq \sqrt[n]{n \cdot e}.$$

מכלל הסנדביץ', מכיוון שהסדרות באגף ימין ובאגף שמאל מתכנסות ל־1 (לפי $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, ולפי שאלה 1 בתרגיל 5 וחשבון גבולות), אנחנו מקבלים כי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}e}{n} = 1.$$

2

נגדיר סדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ע"י

$$a_n = \begin{cases} n & \text{זוגי } n \\ 1 & \text{אי־זוגי } n \end{cases} \quad , \quad b_n = \begin{cases} 1 & \text{זוגי } n \\ n & \text{אי־זוגי } n \end{cases}$$

אז $a_n b_n = n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכן $a_n b_n$ מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$.
מצד שני, נטען כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$. לפי הגדרה, עלינו להראות כי קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n_0 \in \mathbb{N}$ קיים $n > n_0$ כך ש־$a_n < M$.
במקרה זה, ניתן למשל לקחת $M = 2$, ואז לכל $n_0 \in \mathbb{N}$ ניקח $n = 2n_0 + 1$ (או לחילופין כל מספר אי זוגי אחר הגדול מ־n_0) ולפי הגדרת הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתקיים כי $a_n = a_{2n_0+1} = 1 < 2$. לכן $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת במובן הרחב.
באופן דומה מוכיחים כי $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$.
שימו לב כי הסדרות שהגדרנו הן חיוביות, כך שהטענה בתרגיל שגויה גם תחת ההנחה הנוספת שהסדרות הנתונות חיוביות.

3

נתונה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ עם $a_n \neq 0$ לכל n, המתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$, ונגדיר $b_n = \frac{1}{a_n}$. עלינו להראות כי $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.
יהא $\varepsilon > 0$ שרירותי, ונגדיר $M = \frac{1}{\varepsilon}$. מכיוון ש־$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־$+\infty$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $a_n > M$. מכאן ש־$b_n = \frac{1}{a_n} < \frac{1}{M} = \varepsilon$. הראינו כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים כי $b_n < \varepsilon$, ולכן $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־0.
הטענה ההפוכה אינה נכונה־ למשל, עבור $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, אך $a_n = \frac{1}{b_n} = (-1)^n n$ אינה מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$ (ראו שאלה 4 סעיף 2)

4

1. $a_n = n!$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = (n+1) > 1$ ולכן $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה. נראה כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$.

יהא $M \in \mathbb{R}$ שרירותי. ניקח $n_0 \in \mathbb{N}$ המקיים $n_0 > M$. אז לכל $n > n_0$ מתקיים $a_n > a_{n_0} = n_0! \geq n_0 > M$ ולכן $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$.

2. הסדרה a_n אינה מונוטונית, למשל־

$$a_2 = 2 > -1 = a_1 \quad \text{ו־} \quad a_3 = -3 < a_2 = 2.$$

כדי להוכיח שאינה מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$ נשים לב כי עבור $M = 0$, לכל $n_0 \in \mathbb{N}$ ניקח $n > n_0$ אי־זוגי, ואז $a_n = -n < M$, ולכן $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$. בדומה מוכיחים שאינה מתכנסת במובן הרחב ל־$-\infty$.

3. נראה כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת־

$$a_{n+1} - a_n = \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) < 0,$$

לפי חוקי לוגריתם ומכיוון ש־$\frac{n}{n+1} < 1$.

נראה כי הסדרה מתכנסת במובן הרחב ל־$-\infty$. יהא $M \in \mathbb{R}$ שרירותי. עלינו למצא $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־$a_n < M$ לכל $n > n_0$.

אם $M \geq 0$ עובדה זו נכונה לכל $n \in \mathbb{N}$ (כי $\ln\left(\frac{1}{n}\right) < 0 = M$). אחרת, עלינו למצא n_0 כך ש־

$$\ln\left(\frac{1}{n_0}\right) < M \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(n_0) = -\ln\left(\frac{1}{n_0}\right) > -M \quad \Longleftrightarrow \quad n_0 > e^{-M}.$$

עבור $n_0 > e^{-M}$ מתקיים כי לכל $n > n_0$

$$a_n = \ln\left(\frac{1}{n}\right) < \ln\left(\frac{1}{n_0}\right) < M.$$

4. נשים לב כי

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2}\right) e^{n+1}}{\left(1 + \frac{(-1)^n}{2}\right) e^n} = \begin{cases} \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} e = 3e & \text{אם } n \text{ אי־זוגי} \\ \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} e = \frac{1}{3} e & \text{אם } n \text{ זוגי} \end{cases}.$$

במקרה בו n זוגי התוצאה יוצאת קטנה מ־1, בעוד במקרה האי־זוגי התוצאה גדולה מ־1. לכן הסדרה אינה מונוטונית.

הוכחת התכנסות במובן הרחב ל־$+\infty$: נשים לב כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{2}\right) e^n \geq \frac{1}{2} e^n$.

יהא $M \in \mathbb{R}$ שרירותי. עלינו למצא $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n < n_0$ מתקיים כי $a_n > M$. מההבחנה למעלה, מספיק לנו למצא n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים כי

$$\frac{1}{2} e^n > M.$$

לצורך כך מספיק לקחת כל $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־$n_0 > \ln(2M)$, שכן אז

$$\forall n > n_0, \quad a_n \geq \frac{1}{2} e^n > \frac{1}{2} e^{n_0} > \frac{1}{2} e^{\ln(2M)} = M.$$

5 *

1. $a_n = \sqrt{n^2-n} - n$. נבדוק אם הסדרה מתכנסת

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n}-n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-n)-n^2}{\sqrt{n^2-n}+n} = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = -\frac{1}{2}$$

מחשבון גבולות. בפרט קיבלנו גם כי הסדרה חסומה. נבדוק ש־a_n מונוטונית עולה.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \sqrt{(n+1)^2-n-1} - (n+1) - \sqrt{n^2-n} + n \\
&= \sqrt{n^2+2n+1-n-1} - n - 1 - \sqrt{n^2-n} + n \\
&= \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} - 1 \\
&= \frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}} - 1
\end{aligned}$$

נטען כי $sqrtn^2 + n + \sqrt{n^2-n} \leq 2n$, ומכאן הביטוי לעיל גדול או שווה ל־0. מכיוון ששני האגפים חיוביים, ניתן להעלות בריבוע, ואי־השוויון מתקיים אם"ם

$$\begin{aligned}
(n^2+n) + (n^2-n) + 2\sqrt{(n^2+n)(n^2-n)} \leq 4n^2 \quad &\iff \quad 2n^2 + 2\sqrt{n^4-n^2} \leq 4n^2 \\
&\iff \quad 2\sqrt{n^4-n^2} \leq 2n^2 \\
&\iff \quad 4(n^4-n^2) \leq 4n^4 \\
&\iff \quad 2n^2 \geq 0
\end{aligned}$$

ועובדה זו נכונה תמיד.

הערה. ניתן לתת גם הוכחה קצרה יותר המשתמשת באי"ש הממוצעים־

$$\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n} = \sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n(n-1)} \leq \frac{n+n+1}{2} + \frac{n+n-1}{2} = 2n.$$

2. $a_n = \frac{1+x+x^2+\ldots+x^n}{1+y+y^2+\ldots+y^n}$ כאשר $0 < x < y < 1$.

נשים לב כי מנוסחת סכום סדרה הנדסית ניתן לרשום

$$a_n = \frac{\frac{1-x^{n+1}}{1-x}}{\frac{1-y^n}{1-y}} = \frac{1-y}{1-x}\cdot\frac{1-x^{n+1}}{1-y^{n+1}}$$

לכל n. ע"י חשבון גבולות, מכיוון ש־$0 < x, y < 1$ אנחנו מקבלים כי

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1-y}{1-x}$$

ובפרט הסדרה הינה גם חסומה. נחשב את הערך $a_{n+1}-a_n$:

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n &= \frac{1-y}{1-x}\cdot\left(\frac{1-x^{n+2}}{1-y^{n+2}}-\frac{1-x^{n+1}}{1-y^{n+1}}\right)\\
&= \frac{1-y}{1-x}\cdot\frac{1}{(1-y^{n+2})(1-y^{n+1})}\left(1-y^{n+1}-1+y^{n+2}-x^{n+2}+y^{n+1}x^{n+2}+x^{n+1}-y^{n+2}x^{n+1}\right)\\
&= \frac{1-y}{1-x}\cdot\frac{1}{(1-y^{n+2})(1-y^{n+1})}\cdot\left(y^{n+1}(1-y)+x^{n+1}(1-x)-x^{n+1}y^{n+1}(y-x)\right)\\
&\geq \frac{1-y}{1-x}\cdot\frac{1}{(1-y^{n+2})(1-y^{n+1})}\cdot\left(y^{n+1}x^{n+1}(1-y)+x^{n+1}y^{n+1}(1-x)-x^{n+1}y^{n+1}(y-x)\right)\\
&= \frac{1-y}{1-x}\cdot\frac{1}{(1-y^{n+2})(1-y^{n+1})}\cdot x^{n+1}y^{n+1}\cdot((1-y)+(1-x)-(y-x))\\
&= \frac{1-y}{1-x}\cdot\frac{x^{n+1}y^{n+1}}{(1-y^{n+2})(1-y^{n+1})}\cdot(2-2y)\geq 0
\end{aligned}$$

בפרט a_n סדרה מונוטונית עולה.

3. $a_n=\sin(n)\cdot(0.999)^n$. הסדרה a_n היא מכפלה של סדרה חסומה ($\sin(n)$) וסדרה מתכנס ל־0 (0.999^n) ולכן, ממשפט שהוכחנו, מתכנסת ל־0 ובפרט הינה חסומה. ניתן לוודא כי לכל $n_0\in\mathbb{N}$ קיימים $n,n'>n_0$ כך ש

$$\sin(n)\cdot(0.999)^n<0<\sin(n')\cdot(0.999)^{n'}$$

ולכן הסדרה a_n לא יכולה להיות מונוטונית.

4. $a_n=n^{(-1)^n}$. הסדרה אינה חסומה, מכיוון שלכל $n\in\mathbb{N}$ זוגי $a_n=n^1=n$, וערך זה אינו חסום. ספרט הסדרה לא מתכנסת לאף ערך ב־$\mathbb{R}$. כמו כן, הסדרה איננה מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$ מכיוון שלכל n אי־זוגי $a_n=n^{-1}=\frac{1}{n}$, וערך זה קטן מ־1.

5. $a_n=\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{2n}$. נסמן $b_n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n+1}$ נשים לב ש־

$$a_n=\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{2n}=\frac{1}{\left(\frac{2n-1+2}{2n-1}\right)^{2n}}=\frac{1}{\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{(2n-1)+1}}=\frac{1}{b_{2n-1}}.$$

לכן, כדי להראות ש־a_n מתכנסת ומונוטונית עולה, מספיק לנו להראות ש־b_n מתכנס לערך גדול מ־0, וכי היא מונוטונית יורדת. הוכחה זו דומה להוכחה כי $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ מונוטונית יורדת ומתכנסת, ונחזור עליה כאן בקצרה.

$$
\begin{aligned}
\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+1}} \\
&= \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n+2}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n+1} \\
&= \left(\frac{n+1}{n+3}\right)\cdot\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right)^{n+2} \\
&= \left(\frac{n+1}{n+3}\right)\cdot\left(\frac{n^2+3n+2}{n^3+3n}\right)^{n+2} \\
&= \left(\frac{n+1}{n+3}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n^3+3n}\right)^{n+2} \\
&\geq \left(\frac{n+1}{n+3}\right)\cdot\left(1+\frac{2n+4}{n^2+3n}\right) && \text{לפי אי־שוויון ברנולי} \\
&= \frac{(n+1)(n^2+5n+4)}{(n+3)(n^2+3n)} = \frac{n^3+6n^2+9n+4}{n^3+6n^2+9n} \geq 1
\end{aligned}
$$

מכיוון ש־b_n מונוטונית יורדת וחיובית, היא מתכנסת, ועל כן a_n מונוטונית עולה ומתכנסת.

6. $a_n = \frac{n!}{2^n}$. מונוטוניות:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!} = \frac{n+1}{2} \geq 1$$

לכל $n \in \mathbb{N}$. כלומר, הסדרה a_n מונוטונית עולה. נראה כי הסדרה מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$. נשים לב ראשית כי לכל $n \geq 3$ מתקיים כי

$$.a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{2^n} \geq \frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

כעת, בהינתן $M \in \mathbb{R}$ שרירותי, ניתן לבחור $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־$\left(\frac{3}{2}\right)^{n_0} > M$ (ניקח $0 < \frac{M}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} < n_0$ טבעי), ואז לכל $n > n_0$ מתקיים

$$.a_n \geq a_{n_0} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n_0} > M$$

6 * אי־שוויון הממוצעים

משפט 1 יהא $m \in \mathbb{N}$ ויהיו $x_1, \ldots, x_m$ מספרים אי־שליליים. אז

$$. \sqrt[m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_m} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_m}{m}$$

1. לכל $x, y \geq 0$ מתקיים

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \quad\iff\quad xy \leq \frac{x^2+2xy+y^2}{4} \quad\iff\quad 0 \leq \frac{x^2+2xy+y^2-4xy}{4} = \frac{(x-y)^2}{4}$$

ואי השוויון הימני ביותר מתקיים לכל $x, y \in \mathbb{R}$.

2. נניח כי נתון $m \in \mathbb{N}$ כך שלכל סדרה $x_1, \ldots, x_m$ של אי־שליליים מתקיים

$$\sqrt[m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_m} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_m}{m}$$

ונקח סדרה $x_1, \ldots, x_{2m}$ של $2m$ מספרים אי־שליליים.

נסמן $y_1 = \sqrt[m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_m}$ ו־$y_2 = \sqrt[m]{x_{m+1} \cdot \ldots x_{2m}}$. אז

$$\begin{aligned}
\sqrt[2m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2m}} &= \sqrt[2]{\sqrt[m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2m}} \cdot \sqrt[m]{x_{m+1} \cdot \ldots \cdot x_{2m}}} \\
&= \sqrt[2]{\sqrt[m]{y_1} \cdot \sqrt[m]{y_2}} \\
&\leq \frac{\sqrt[m]{y_1} + \sqrt[m]{y_2}}{2} && \text{לפי סעיף 1} \\
&\leq \frac{\frac{x_1 + \ldots + x_m}{m} + \frac{x_{m+1} + \ldots + x_{2m}}{m}}{2} && \text{לפי הנחת האינדוקציה} \\
&= \frac{x_1 + \ldots + x_{2m}}{2m}
\end{aligned}$$

כנדרש. מכאן אנו מקבלים כי אי־שוויון הממוצעים נכון לכל סדרה בת 2^k איברים, ע"י אינדוקציה פשוטה על k.

3. בסעיף זה נתון לנו $m \in \mathbb{N}$ שרירותי וסדרה $x_1, \ldots, x_m$ של מספרים אי־שליליים הקטנים או שווים ל־1.

ראשית נבדוק מה קורה כאשר מרחיבים סדרה כזו לסדרה באורך n, עבור $m \leq n$ כלשהו, באופן הבא. נקבע $S = \frac{x_1 + \ldots + x_m}{m}$ ונגדיר

$$x_{m+1} = \ldots = x_n = S.$$

• נשים לב כי

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \frac{x_1 + \ldots + x_m}{m}.$$

כדי להיווכח בכך נפתח את הביטוי־

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + \ldots + x_m}{m} - \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} &= S - \frac{x_1 + \ldots + x_m + (n-m)S}{n} \\
&= \frac{Sn - Sm - (n-m)S}{n \cdot m} \\
&= \frac{(S\,(n - m - (n-m))}{n \cdot m} = 0
\end{aligned}$$

• כעת, ניקח $k \in \mathbb{N}$ כך ש־$n = 2^k \geq m$. אז

$$\begin{aligned}
S &= \frac{x_1 + \ldots + x_m}{m} \\
&= \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} && \text{לפי הטענה הקודמת} \\
&\geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} && \text{לפי סעיף 2 , כי } n = 2^k \\
&= (x_1 \cdot \ldots x_m \cdot S^{n-m})^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

נעלה את הביטוי הראשון והאחרון בחזקת n ונקבל כי

$$S^n \leq x_1 \cdot \ldots \cdot x_m \cdot S^{n-m}$$

וע"י כפל ב-S^{m-n} נקבל

$$S^m \leq x_1 \cdot \ldots \cdot x_m$$

או באופן שקול

$$\frac{x_1 + \ldots + x_m}{m} = S \leq \sqrt[m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_m}$$

כנדרש.

הערה

נשים לב כי למעשה ההנחה שנוספה בסעיף הקודם, כי $0 \leq x_i \leq 1$ לכל i, היא מיותר וההוכחה הנתונה כאן עובדת בשביל המקרה הכללי, בו $x_i \geq 0$, לכן אין צורך לפתור את סעיף 2.