תרגיל 11- טורים ב' וחזרה כללית
חדו"א : סדרות וטורים

טורים

1

חקרו את התכנסות הטורים הבאים באמצעות מבחני ההשוואה

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+5}}{n^2+37n}$,
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n^2+1}$,
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$,
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$.

2

חקרו את התכנסות הטורים הבאים (ניתן להשתמש בכל משפטי ההתכנסות שלמדנו)

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$,
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt[n]{e}-1\right)$, (רמז: זכרו כי $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ לכל $n \in \mathbb{N}$),
3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}$$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$,
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n n}$.

3

הראו כי טור **חיובי** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ תמיד מתכנס או מתכנס במובן הרחב ל-$+\infty$. רמז: הראו קודם כי סדרת הסכומים החלקיים של הטור מונוטונית עולה. חקרו בנפרד את המקרה בו סדרה זו חסומה והמקרה בו אינה חסומה.

4

נתון טור חיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. הראו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot S_n$ מתכנס גם כן, כאשר $S_n = a_1 + \ldots + a_n$ היא סדרת הסכומים החלקיים של הטור.

5

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית. הראו כי אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס, אז גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ מתכנס. (רמז: תרגיל 10, שאלה 3 ס' 5)

6

נתונה סדרה מונוטונית יורדת וחיובית $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. נגדיר סדרה חדשה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ע"י

$$b_n = a_{2^m}$$

כאשר $m \in \mathbb{N}$ הוא המספר הקטן ביותר כך ש־$2^m > n$.

1. רשמו את הערכים $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ המתאימים לסדרות $a_n = \frac{1}{n}$ ו־$a_n = \frac{1}{2^n}$.
2. הראו כי $b_n \geq a_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
3. הוכיחו כי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - רשמו את הסכום החלקי ה־N־י של $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, עבור N מהצורה 2^m, והסיקו ממנו את גבול סדרת הסכומים החלקיים.
4. הסיקו כי אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית ומונוטונית יורדת, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ אז גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ מתכנס.
5. הסיקו מהסעיף הקודם כי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ מתבדר לכל $\alpha < 1$.

סדרות הנדסיות וחשבוניות

7

האם קיים מספר $x \in \mathbb{R}$ כך שהאיברים $x^2, x-2, -12, -2^x - 10$ מהווים את ארבעת האיברים הראשונים של סדרה חשבונית? האם קיים x כך שאיברים אלה הם ארבעת האיברים הראשונים של סדרה הנדסית?

8

נתונה סדרה הנדסית $5, 3.5, 2.45, \ldots$. מצאו $N \in \mathbb{N}$ מינימלי כך שסכום N האיברים הראשונים בסדרה גדול מ־16. האם קיים N כך שסכום זה גדול מ־17?

9

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה הנדסית לא קבועה, ונניח כי האיברים a_2, a_4, a_5 מהווים סדרה חשבונית. חשבו את יחס הסדרה. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

10

יהא $n \in \mathbb{N}$ ויהיו $x_0, x_1, \ldots x_n$ ספרות, כך ש־$0 \leq x_i \leq 9$ לכל i. נסמן $x = x_0 + 10 \cdot x_1 + \ldots + 10^n x_n$. השתמשו בנוסחת סכום סדרה חשבונית אינסופית על מנת לחשב את ההצגה העשרונית של המספר $\frac{x}{10^{n+1}-1}$.

11

נתונה סדרה חשבונית $a_n = a_1 + (n-1)d$. הראו כי הסדרה $b_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$ היא סדרה חשבונית עם איבר ראשון $2a_1 d + d^2$ והפרש $2d^2$.

12

בדקו האם הסדרות הבאות חשבוניות או הנדסיות ורשמו את איברן הכללי ואת סכום עשרת האיברים הראשונים שלהן.

1. $5, -6, -17, \ldots$,
2. $21, 14, 9\frac{1}{3}, \ldots$,
3. $2.5, -12.5, 62.5, \ldots$,
4. $0.9, 0.99, 1.08, \ldots$.

גבולות של סדרות

13

השתמשו באינדוקציה על מנת להוכיח את אי השווין

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

לכל $n > 1$.רמז: השתמשו במונוטוניות הסדרה $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ כדי להוכיח כי $2 < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

14

נתונה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ לפי נוסחת הנסיגה

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{2a_n - 1}}{2} & \text{לכל } n > 1 \end{cases}.$$

הוכיחו כי הסדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע ע"י 1. חשבו את גבולה.

15

חשבו את הגבולות הבאים לפי הגדרת הגבול

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^3+1} = 0$
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{15n^2+1}{5n^2-4} = 3$.

16

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות כך ש־$x_n \le y_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הראו כי $\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n$.

17

חשבו את הגבולות הבאים

1. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1}-\frac{2n^2}{n^2+1}\right)$,
2. $\lim_{n\to\infty}\frac{n+\arctan(n)}{\sqrt{n^2+5n+3}}$,
3. $\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$ רמז: השתמשו באי השוויון שלמדנו לגבי e והסדרות $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

18

נתונה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

המספר e

19

הוכיחו את הגבולות הבאים

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$,
2. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=e^2$.

20

הראו כי הסדרה $a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ מתכנסת לגבול קטן או שווה ל־e^2. רמז: אי־השוויון $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$.

התכנסות במובן הרחב

21

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית ולא חסומה. הראו כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$ או ל־$-\infty$.

22

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות כך ש־$a_n \ge b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הראו כי אם b_n מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$ אז גם a_n מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$.

23

הוכיחו התכנסות במובן הרחב של הסדרות הבאות

1. $a_n = n - n^3$,
2. $a_n = \frac{\sqrt{n}-1}{2}$,
3. $a_n = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}$,
4. $a_n = (1.00001)^n$.

24

בדקו מי מהסדרות הבאות מתכנסות לגבול סופי, מי מהן מתכנסת במובן הרחב, ומי מהן לא מתכנסת

1. $a_n = 1 + (-2) + 3 + (-4) + \ldots + n \cdot (-1)^{n+1}$,
2. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$,
3. $a_n = \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$,
4. $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. רמז: נסו להגדיל במעט את הערך a_n ע"י שימוש באי־השוויון $\frac{1}{2n} < \frac{1}{2n+1}$ כדי לקבל חסם עליון על ערכי a_n.

25

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית המקיימת כי הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים וגדול מ־1. הראו כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$.