מתמטיקה בדידה
תרגולים תשע"ח

מרצה: מנחם קוג'מן
מתרגל: שי שכטר

חוברת זו מכילה את תרגולי הקורס מתמטיקה בדידה למתמטיקה,
שניתן בשנה"ל 2017־8 באוניברסיטת בן־גוריון,
עם המרצה פרופ' מנחם קוג'מן.

חוברת זו נערכה באמצעות LaTeX, עדכון אחרון בתאריך 25 בינואר 2018.
לתגובות, תיקונים או כל נושא אחר, ניתן לפנות לשי במייל
.shais@post.bgu.ac.il [1]

[1] תודה רבה ליותם סבוראי על העזרה בהגהת החוברת.

תיאור הקורס

שלום רב לכל הלומדים בקורס מתמטיקה בדידה.

כדי להצליח בקורס עליכם להגיע להרצאות ולהשקיע כשעתיים לאחר כל הרצאה בעיבוד חומר ההרצאה וסידורו בצורה מובנת לכם.

ללא תרגול מתמיד לא תוכלו לרכוש את המיומנות הדרושה כדי להצליח בפתרון הבחינה המסכמת. הבנה לבדה לא תספיק. גם מי שמבין את הכל לא יוכל לפתור את הבחינה בזמן המוקצה לה אם הוא לא תרגל פתרון שאלות במהלך הקורס עצמו. שאלוני התרגיל יפורסמו באתר הקורס. באתר הקורס יהיו פורומים לשאלות ותשובות בכל נושא, בהם תוכלו להעלות כל שאלה ולקבל תשובה. הקפידו להשתמש בפורום כדי לקבל תשובות מצוות הקורס ולא ממקורות לא בדוקים. השאלות והתשובות נשארות באתר לאורך כל הקורס ותוכלו להשתמש בהן שוב בחזרה לקראת הבחינה המסכמת.

אופן קביעת הציון בקורס: כדי לעבור את הקורס חובה לעבור את המבחן המסכם בציון 56 ומעלה.

הציון הסופי יקבע כך:

- 15% ציון תרגיל
- 85% ציון בחינה מסכמת

התרגילים יועלו על ידי התלמידים לאתר הקורס.

נושאי הקורס

1. השפה המתמטית: הקשרים הפסוקיים וטבלאות האמת שלהן. הכמתים. עולם ייחוס. הצרנה בסיסית. סימן השוויון כמציין את יחס הזהות בלבד.
2. מושג הקבוצה. יחס השייכות. יחס השוויון בין קבוצות באמצעות שייכות (אקסיומת ההיקפיות).
3. פעולות בסיסיות בקבוצות: חיתוך, איחוד, הפרש, חיתוך אונארי, איחוד אונארי. דוגמאות (למשל, הצגת איחוד כאיחוד זר הכנה להכלה והדחה). קבוצת חזקה.
4. קבוצת המספרים הטבעיים הסדורה. אקסיומת האינדוקציה. אינדוקציה שלמה. שימושים.
5. בינום, מולטינום, משולש פסקל. הוכחות קומבינטוריות מול הוכחות אלגבריות של זהויות.
6. זוגות סדורים ויחסים. תחום ותמונה של יחס. מכפלה קרטזית. תכונות של יחסים (טרנזיטיביות, רפלקסיביות מעל קבוצה, סימטריה, אנטי־סימטריה). דוגמאות: יחסי סדר, יחסי שקילות.
7. פונקציות ופונקציות חח"ע. תמורות.
8. חלוקות של קבוצה. מנה של יחס שקילות. מנה היא חלוקה. הגדרת מבני מנה באמצעות נציגים. שלמים מוד n.
9. גרף פשוט. גרף מכוון. דוגמאות בסיסיות. דרגת קדקד. שיקולי זוגיות (מספר הקדקדים בגרף סופי שדרגתם איזוגית). מסילה. רכיב קשירות. משפט אוילר. עצים.
10. הכלה והדחה ושימושים. חישוב ההסתברות לתמורה ללא נקודת שבת. מושגים יסודיים בהסתברות סופית.
11. נוסחאות נסיגה ופתרונות.
12. פונקציות יוצרות.
13. תחשיב פסוקים. השמה והסתפקות של קבוצת פסוקים.

תוכן עניינים

חלק I

סיכומי תרגולים

תרגול 1

לוגיקה בסיסית והשפה המתמטית

השפה המתמטית

מילים שמורות: "וגם", "או", "לא", "אם...אז...", "אם"ם" (אם ורק אם, לפעמים נכתב "או"א"), "לכל", "קיים".

קשרים לוגיים

פסוק לוגי הוא ביטוי חוקי המורכב ממשתנים פסוקיים $(P, Q, R, \ldots)$ המקושרים ביניהם ע"י הקשרים הלוגיים $\neg$ (חד מקומי), ו־$\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ (דו־מקומיים).

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

דוגמה

$$\text{אתמול ירד גשם} = P,$$
$$\text{שלשום היה יום בהיר} = Q.$$

הגדרה פסוק φ נקרא טאוטולוגיה אם לכל השמה של ערכים במשתנים הפסוקיים ב־φ, הפסוק φ מקבל ערך אמת. הפסוק נקרא סתירה לוגית אם לכל השמה של ערכים הפסוק מקבל ערך שקר.

דוגמה הפסוק $P \rightarrow P$ הוא טאוטולוגיה. אכן

P	$P \rightarrow P$
T	T
F	T

הגדרה בהינתן פסוקים φ, ψ אנו אומרים כי φ גורר (לוגית) את ψ, ומסמנים $\varphi \Rightarrow \psi$, אם הפסוק $\varphi \rightarrow \psi$ הוא טאוטולוגיה.
הפסוקים φ ו־ψ נקראים שקולים לוגית אם הפסוק $\varphi \leftrightarrow \psi$ הוא טאוטולוגיה. במקרה זה נסמן $\varphi \iff \psi$.

נשים לב: φ ו־ψ הם שקולים לוגית אם"ם העמודות הימניות ביותר בטבלאות האמת של φ ו־ψ הן זהות (מהגדרת הקשר $\leftrightarrow$). כמו כן $\varphi \iff \psi$ אם"ם $\varphi \Rightarrow \psi$ וגם $\psi \Rightarrow \varphi$.

תרגיל 1 מי גורר את מי מבין זוגות הפסוקים הבאים.

א. $P \wedge Q$ ו־$P \leftrightarrow Q$.

ב. $P \vee Q$ ו־$P \leftrightarrow Q$.

פתרון. נחשב את טבלאות האמת הרלוונטיות.

א.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \leftrightarrow Q$	$(P \wedge Q) \to (P \leftrightarrow Q)$	$(P \leftrightarrow Q) \to (P \wedge Q)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	F	F	T	T
F	F	F	T	T	F

לכן $P \wedge Q \Rightarrow P \leftrightarrow Q$ ו־$P \leftrightarrow Q \not\Rightarrow P \wedge Q$.

ב.

P	Q	$P \vee Q$	$P \leftrightarrow Q$	$(P \vee Q) \to (P \leftrightarrow Q)$	$(P \leftrightarrow Q) \to (P \vee Q)$
T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	T
F	F	F	T	T	F

לכן אין גרירה בין הפסוקים.

■

תרגיל 2 נניח כי φ הוא פסוק הגורר כל פסוק אחר. הוכיחו כי φ הינו סתירה לוגית.

פתרון. נשתמש בשיטת הוכחה בשלילה - נניח את שלילת המסקנה ונוכיח ע"י את שלילת ההנחות[1].
נניח בשלילה כי φ אינו סתירה לוגית. עלינו להראות כי הנחות הטענה שגויות, כלומר־ כי קיים פסוק ψ אשר אינו נגרר מ־φ, כלומר כך ש־$\varphi \to \psi$ שקרי. נתבונן בפסוק $\psi = \neg\varphi$. לפי ההנחה, φ אינו סתירה לוגית ולכן הצבה של משתנים פסוקיים ב־φ המחזירה אמת. מצד שני, עבור אותה הצבה בדיוק מתקיים כי $\psi = \neg\varphi$ הינו שקרי. לכן קיימת שורה בטבלת האמת של הפסוק $\varphi \to \psi$ בה מופיע $\mathrm{T} \to \mathrm{F}$, ולכן פסוק זה שקרי. ■

תרגיל 3 נתונים פסוקים P ו־Q. כתבו טבלאות אמת לפסוקים הבאים ובדקו מי מהם שקולים.

א. $P \to Q$ ו־$\neg P \vee Q$.

ב. $\neg(P \vee Q)$ ו־$(\neg P) \vee (\neg Q)$.

ג. $P \to Q$ ו־$(\neg Q) \to (\neg P)$.

ד. $P \leftrightarrow Q$ ו־$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$.

פתרון.

[1] באופן פורמלי, משתמשים בהוכחות שכאלה בשקילות הלוגית $\neg P \to \neg Q \iff P \to Q$.

.1

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

P	Q	$\neg P$	$(\neg P) \vee Q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

שני הפסוקים שקולים.

.2

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \wedge Q)$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	T

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

מתקיים כי $\neg(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$. הגרירה ההפוכה אינה מתקיימת.

.3

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$(\neg Q) \to (\neg P)$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

שני הפסוקים שקולים.

.4

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

שני הפסוקים שקולים.

■

תרגיל 4 נתונים פסוקים P,Q ו־R. הוכיחו את שקילות הטענות הבאות

א. $P \to (Q \vee R)$ ו־$P \wedge (\neg Q) \to R$.

ב. $(P \vee Q) \to R$ ו־$(P \to R) \wedge (Q \to R)$.

פתרון. ניתן לפתור ע"י כתיבת טבלאות האמת. לחילופין, ניתן גם להציג פתרון מילולי.

1. אם P שקרי אז הפסוקים $P \wedge (\neg Q) \to R$ ו־$P \to (Q \vee R)$ אמיתיים, וחלק זה של טבלאות האמת זהה. לחילופין, נניח כי P אמיתי ונחלק למקרים לפי Q.

- אם Q אמיתי אז $P \to (Q \vee R)$ הוא $\mathrm{T} \to \mathrm{T}$ ולכן אמיתי, והפסוק $P \wedge (\neg Q) \to R$ הוא $\mathrm{F} \to *$, עבור $* \in \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$ ובפרט אמיתי.
- אם Q שקרי אז $P \to (Q \vee R)$ אמיתי אם"ם R אמיתי ולכן ערך האמת של הפסוק שווה לערך האמת של R. כמו כן, מכיוון ש־P אמיתי ו־Q שקרי, הביטוי $P \wedge (\neg Q)$ אמיתי, והפסוק $P \wedge (\neg Q) \to R$ אמיתי אם"ם R אמיתי. כלומר, ערך האמת של פסוק זה גם הוא זהה לערך האמת של R.

קיבלנו כי ערכי האמת של שני הפסוקים מזדהים לכל השמה של P, Q ו־R ולכן הפסוקים זהים.

2. נשים לב כי במקרה בו $P \vee Q$ אמיתי (כלומר P אמיתי או Q אמיתי) ערך האמת של $(P \vee Q) \to R$ זהה לערך האמת של R. כמו כן, במקרה זה ערך האמת של (לפחות) אחד מהפסוקים $P \to R$ או $Q \to R$ הוא זהה לערך האמת של R (זה שבו הרישא היא אמיתי), ושאר החלקים בפסוק הם אמיתיים, לכן ערך האמת של שני הפסוקים זהה לערך האמת של R.

נניח כי $P \vee Q$ שקרי, כלומר P שקרי וגם Q שקרי. במקרה זה הפסוק $(P \vee Q) \to R$ הוא נכון לכל הצבה של R וכן הפסוקים $P \to R$ ו־$Q \to R$.

■

תרגול 2

צעדים ראשונים בתורת הקבוצות

עולם ייחוס

כאשר אנחנו מעוניינים לעבוד עם עצמים ספציפיים, לבטא היגדים ונוסחאות הקשורות בהם ובהמשך־ לחלקם לקבוצות, עלינו לקבוע מראש את עולם הייחוס שלנו. עולם הייחוס קובע לנו את הפירוש של הסימנים שאנו משתמשים בהם ומתי שניים כאלה הם שווים.

למשל־ בעולם הייחוס של הגיאומטריה האוקלידית במישור ניתן לפרש את המושג של קו ישר. שני ישרים יכולים, למשל, להיות בני אותו אורך ועדיין לא להיות זהים. שני הישרים יהיו שווים אם"ם הם מתלכדים.

דוגמה אחרת היא עולם הייחוס של המספרים השלמים $\mathbb{Z}$, בו ניתן לתת פרשנות לסימנים $+$ ו־$\leq$, למשל. הביטוי "$5-4=1$" מתאר שוויון בין הערך שמבוטא ע"י הסמלים באגף שמאל ולערך מבוטא ע"י הסמלים באגף ימין.

הכמתים

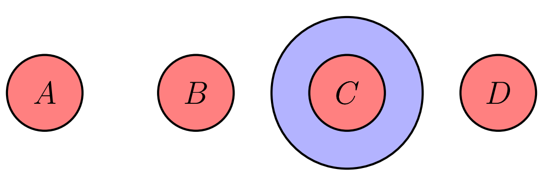
1. **לכל** לכל ילד יש שיער ירוק. באופן פורמלי: נסמן ב־$\varphi(x)$ את הנוסחא "ל־x יש שיער ירוק". אז הפסוק המדובר הוא "לכל ילד x מתקיים $\varphi(x)$". בסימונים מתמטיים נרשום

$$\forall x(\varphi(x)).$$

2. **קיים** קייס קוף עם רשיון נהיגה. באופן פורמלי, אם נרשום $\psi(x)=$"ל־x יש רשיון נהיגה", אז הפסוק המדובר הוא "קיים קוף x עבורו מתקיים $\psi(x)$". בסימונים מתמטיים

$$\exists x(\psi(x)).$$

תרגיל 1 נתון עולם ייחוס המורכב מ־4 איברים המוקפים בעיגולים.



נסמן ב־$r(x)$ את הטענה כי x נמצא בתוך עיגול אדום וב־$b(x)$ הטענה כי x נמצא בתוך עיגול כחול. בדקו את נכונות הטענות הבאות:

א. $\forall x(b(x)\to r(x))$.

ב. $\exists x(b(x)\wedge(\neg r(x)))$.

3. $\neg(\forall x \exists y(r(y) \wedge (x=y)))$.

4. $\exists x(r(x) \wedge b(x) \wedge (\forall y((r(y) \wedge b(y)) \rightarrow x=y))$.

פתרון.

1. נבחר x שרירותי מבין A,B,C,D. עלינו לבדוק כי עבור ה־x שבחרנו מתקיים כי אם x הוא כחול, אזי הוא גם אדום. אם x הוא אחד מבין A,B או D טענה זו נכונה, מכיוון ש־x אינו כחול (כלומר, הרישא שקרית, ולכן הטענה תמיד נכונה). לחילופין, אם x הוא C, אז ידוע לנו ש־x הוא גם כחול וגם אדום, ולכן גם במקרה זה הטענה נכונה. כלומר, הטענה נכונה.

2. הטענה שקרית. ה־x היחיד שמקיים את הטענה $b(x)$ הוא C, וזה גם מקיים את $r(x)$. לכן לא קיים אף x שמקיים את הטענה $b(x)$ וגם $\neg r(x)$.

3. נבדוק ראשית את נכונות הטענה $\forall x \exists y(r(y) \wedge (x=y))$. אם טענה זו נכונה, אז הטענה שנתונה בסעיף זה היא שקרית.

   נבחר x שרירותי מבין A,B,C,D. עלינו לבדוק אם קיים y המקיים $r(y)$ (כלומר, y הוא אדום) וגם שווה ל־x. מהגדרת השוויון, ה־y היחיד שיכול לקיים את הטענה $r(y) \wedge (x=y)$ הוא x, וטענה זו נכונה אך ורק אם $r(x)$ הוא נכון. מכיוון שבציור שלקחנו $r(x)$ מתקיים לכל אחד מהאיברים, הטענה $\forall x \exists y(r(x) \wedge (x=y))$ היא אמיתית, ולכן הטענה בסעיף שקרית.

   מה היה קורה אם היה נוסף איבר E שנמצא בעיגול כחול ולא בעיגול אדום?

4. עלינו לראות כי קיים x המקיים את הטענה־

$$r(x) \wedge b(x) \wedge (\forall y((r(y) \wedge b(y)) \rightarrow x=y)).$$

   כלומר, נדרש כי

   (א) x נמצא בעיגול אדום, וגם

   (ב) x נמצא בעיגול כחול, וגם

   (ג) כל y שמקיים התנאים $r(y)$ וגם $b(y)$ בהכרח שווה ל־x, כלומר־ x הוא האיבר היחיד שמקיים $r(x) \wedge b(x)$.

   האיבר C מקיים טענה.

   שאלה. האם הטענה היתה נכונה אם C לא היה קיים? מה לגבי המקרה אם בנוסף ל־C היה בציור איבר חמישי E שגם הוא נמצא בעיגול כחול וגם בעיגול אדום?

■

שלילת כמתים

תרגיל 2 הוכיחו את שקילות הטענות הבאות

1. $\exists x(\neg\varphi(x))$ ו־$\neg\forall x(\varphi(x))$.

2. $\forall x(\neg\varphi(x))$ ו־$\neg\exists x(\varphi(x))$.

פתרון.

1. עלינו להראות כי טבלאות האמת של שני הפסוקים זהות, כלומר־ כי הפסוק $\exists x(\neg\varphi(x))$ אמיתי אם ורק אם הפסוק $\neg\forall x(\varphi(x))$ הוא אמיתי.

   נניח הפסוק $\neg\forall x(\varphi(x))$ אמיתי. פירוש הדבר כי הפסוק $\forall x(\varphi(x))$ הוא שקרי, ולכן אין זה נכון כי כל ה־x בעולם הייחוס שלנו מקיימים את $\varphi(x)$. בפרט, יש x שלא מקיים את $\varphi(x)$, ולכן בהכרח מקיים את $\neg\varphi(x)$. אותו x הוא עדות לנכונות הפסוק $\exists x(\neg\varphi(x))$. לכיוון השני, אם הפסוק $\exists x(\neg\varphi(x))$ אמיתי, אז יש x בעולם הייחוס שמקיים את הפסוק $\neg\varphi(x)$ ולכן לא מקיים את הפסוק $\varphi(x)$. בפרט־ אותו ה־x מעיד על כך כי הפסוק $\forall x(\varphi(x))$ הוא שקרי, ולכן הפסוק $\neg(\forall x(\varphi(x)))$ אמיתי.

2. ניתן להוכיח כמו בסעיף הקודם. אפשרות אחרת, היא להתבונן בטענה $\psi(x) = \neg\varphi(x)$. לפי הסעיף הקודם הפסוקים $\exists x(\neg\psi(x))$ ו־$\neg\forall x(\psi(x))$ הם שקולים. לפי הגדרת $\psi(x)$, זה אומר כי הפסוקים

$$\exists x(\neg(\neg\varphi(x))) \quad \text{ו־} \quad \neg\forall x(\neg(\varphi(x))$$

הם שקולים. מכיוון ש־$\exists x(\neg(\neg(\varphi(x)))$ שקול ל־$\exists x(\varphi(x))$ קיבלנו כי

$$\exists x(\varphi(x)) \iff \neg\forall x(\neg\varphi(x)).$$

מכיוון ששני פסוקים הם שקולים אם ורק אם שלילותיהם שקולות אנו מקבלים כי

$$\neg\exists x(\varphi(x)) \iff \forall x(\neg(\varphi(x))$$

כנדרש.

■

תרגיל 3 כתבו טענה השקולה לטענה הבאה בעולם הייחוס של מספרים הממשיים (עם הסימן $<$ במשמעות הרגילה), שלא מופיע בה קשר השלילה

$$\neg(\forall x\forall y(x < y \to (\exists z(x < z \land z < y)))).$$

פתרון.

$$\begin{aligned}
\neg(\forall x\forall y(x < y \to (\exists z(x < z \land z < y)))) &\iff \exists x(\neg(\forall y(x < y \to (\exists z(x < z \land z < y)))) \\
&\iff \exists x\exists y(\neg(x < y \to (\exists z(x < z \land z < y)))) \\
&\iff \exists x\exists y(\neg(\neg(x < y) \lor (\exists z(x < z \land z < y)))) \\
&\iff \exists x\exists y((x < y) \land (\neg\exists z(x < z \land z < y))) \\
&\iff \exists x\exists y((x < y) \land (\forall z(\neg((x < z) \land (z < y)))) \\
&\iff \exists x\exists y((x < y) \land (\forall z(\neg(x < z) \lor \neg(z < y)))) \\
&\iff \exists x\exists y((x < y) \land (\forall z((x > z) \lor (x = z) \lor (z > y) \lor (z = y))).
\end{aligned}$$

■

קבוצות נאיביות

הגדרה קבוצה A היא אוסף של אובייקטים מתמטיים, ללא חזרות וללא חשיבות לסדר.

סימון $\{\ldots\}$. האובייקטים בקבוצה נקראים איברי הקבוצה. אם a הוא איבר בקבוצה A מסמנים $a \in A$. לדוגמה

$$1 \in \{1\},\ 0, 2, 12^4 \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\},\ \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\},\ \varnothing = \{\}.$$

דרך נוספת לייצג קבוצות היא ע"י

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

כאשר $P(x)$ היא תכונה כלשהי.

הגדרה בהינתן קבוצות A ו־B אומרים כי A מוכלת ב־B אם $x \in A \to x \in B$ במקרה זה מסמנים $A \subseteq B$.

תרגיל 1 יהיו A, B, C קבוצות, ונניח כי $A \subseteq B$ ו־$C \subseteq B$. הראו כי $A \subseteq C$.

פתרון. יהא $x \in A$. עלינו להראות כי $x \in C$. מההנחה כי $A \subseteq B$ מתקיים כי $x \in A \to x \in B$ ולכן $x \in B$. מההנחה כי $B \subseteq C$ מתקיים כי $x \in B \to x \in C$ ולכן $x \in C$. ■

אקסיומת ההיקפיות יהיו A, B קבוצות. אז $A = B$ אם"ם $A \subseteq B$ ו־$B \subseteq A$.

פעולות על קבוצות

- **חיתוך** בהינתן A, B קבוצות, החיתוך $A \cap B$ מוגדר ע"י

$$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$$

במילים אחרות $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

- **איחוד** האיחוד של A ו־B מוגדר ע"י

$$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B.$$

במילים אחרות $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

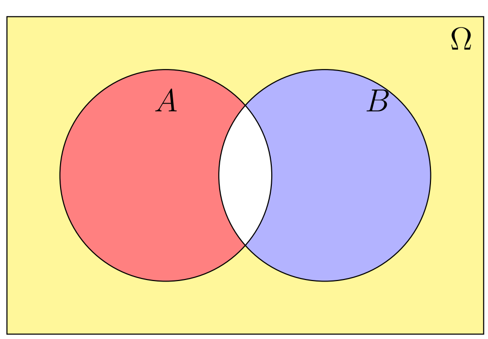
- **חיסור קבוצות** ההפרש $A \setminus B$ (לעתים מסומן גם ב־$A - B$) מוגדר ע"י

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge x \notin B.$$

במילים אחרות $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

- **המשלים** בהינתן קבוצה A בתוך עולם ייחוס קבוע Ω נוח להגדיר A^c (לעתים מסומן $\overline{A}$) להיות $A^c := \Omega \setminus A$, כלומר $\{x \mid x \notin A\}$.

תרגיל 2 מצאו את הקבוצות $B \setminus A,\ A \setminus B,\ B^c,\ A^c,\ A \cap B,\ A \cup B$ ו־$(A \cup B)^c$ בציור.



תרגיל 3 בהינתן A,B קבוצות, הראו כי $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$.

פתרון. לפי הכלה דו־כיוונית.

$\subseteq$ אם $x\in A\setminus B$ אז בפרט $x\in A$. כמו כן, $x\notin B$ לכן גם אינו איבר של $B\cap A$. קיבלנו כי $x\in A\setminus(A\cap B)$.

$\supseteq$ נניח כי $x\in A\setminus(A\cap B)$ ונניח בשלילה כי $x\notin A\setminus B$. מכיוון ש־$x\notin A\setminus B$ מתקיים בהכרח כי $x\notin A$ או $x\in B$. אך נתון לנו כי $x\in A$ (מהגדרת $A\setminus(A\cap B)$). ולכן בהכרח גם $x\in B$. אך אז $x\in A\cap B$, בסתירה להנחה כי $x\notin(A\cap B)$.

■

תרגיל 4 הוכח או הפרך את הטענות הבאות.

א. $B\not\subseteq A\setminus B$ לכל A,B.

ב. $A\cap B\subseteq A\cup B$ לכל A,B.

ג. $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$.

ד. אם $A\setminus B\subseteq C$ אז $A\setminus C\subseteq B$.

פתרון.

1. לא נכון, למשל עבור $A=\{1\}$ ו־$B=\varnothing$ מתקיים כי $A\setminus B=\{1\}$ ואינה מוכלת ב־$\varnothing$.
2. לא נכון, עבור $A=\{1\}$ ו־$B=\varnothing$ כמו בסעיף הקודם $A\cup B=\{1\}\not\subseteq A\cap B=\varnothing$.
3. לא נכון, למשל עבור $A=\{1\},B=\varnothing$ ו־$C=\{2\}$ מתקיים כי
$$(A\cap B)\cup C=\varnothing\cup\{2\}=\{2\},$$
ולעומת זאת
$$A\cap(B\cup C)=\{1\}\cap\{2\}=\varnothing.$$
4. נכון, אם $x\in A\setminus C$ אזי בפרט x אינו איבר ב־C ומההנחה $A\setminus B\subseteq C$ נובע כי גם $x\notin A\setminus B$. מכיוון שידוע לנו כי $x\in A$ (לפי ההנחה), בהכרח מתקיים כי $x\in A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$ ובפרק $x\in B$.

■

תרגול 3

המשך תורת קבוצות בסיסית
אינדוקציה

תורת קבוצות בסיסית

פעולות נוספות על קבוצות

תהא F קבוצה. ה**איחוד האונארי** $\bigcup F$ מוגדר ע"י

$$x \in \bigcup F \iff \exists A \in F (x \in A).$$

ה**חיתוך האונארי** הוא $\bigcap F$ והוא מוגדר ע"י

$$x \in \bigcap F \iff \forall A \in F (x \in A).$$

דוגמה א. $F = \{\{1\}, \{\varnothing\}, 1, 2\}$. $\bigcap F = \varnothing$ כי אף איבר אינו מוכל באיברים 1 או 2. $\bigcup F = \{1, \varnothing\}$.

ב. $F = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$. $\bigcap F = \varnothing, \bigcup F = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

ג. $F = \{[0, \epsilon] \mid \epsilon > 0\}$. $\bigcap F = \{0\}, \bigcup F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

ד. $F = \{[a, b] \cap \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a < \pi < b\}$. $\bigcap F = \varnothing$ שכן לכל מספר ממשי r, אם $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ אז r לא מופיע באף אחת מהקבוצות ב־F, ואם $r \in \mathbb{Q}$ אזי קיימים מספרים רציונליים a, b כך ש $a < \pi < b$ וכן ש־$r \notin [a, b]$. $\bigcup F = \mathbb{Q}$.

תזכורת (כלל דה־מורגן) בהינתן קבוצות A, B בתוך עולם ייחוס Ω מתקיים כי

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

או באופן שקול $\Omega \setminus (A \cup B) = (\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)$.

תרגיל 1 נתון עולם ייחוס Ω וקבוצה F של תתי־קבוצות של Ω. הראו כי

$$\bigcap \{A^c \mid A \in F\} = \left(\bigcup F\right)^c$$

פתרון.

$\supseteq$ נניח כי $x \in (\bigcup F)^c$, אז x אינו איבר של $\bigcup F$ ולכן לא קיים איבר $A \in F$ כך ש־$x \in A$. מהשקילות לגבי שלילית פסוקים עם כמתים, נובע כי לכל $A \in F$ מתקיים כי $x \notin A$ ולכן $x \in A^c$ לכל $A \in F$, ומהגדרה $x \in \bigcap\{A^c \mid A \in F\}$.

$\subseteq$ לחילופין, נניח כי $x \in \bigcap\{A^c \mid A \in F\}$. אז לכל $A \in F$ מתקיים כי $x \notin A$ ולכן לא קיים $A \in F$ עבורו $x \in A$. בפרט, x איננו איבר בקבוצה $\bigcup F$ ולכן $x \in (\bigcup F)^c$

■

תרגיל 2 הסיקו מהתרגיל הקודם כי $(\bigcap F)^c = \bigcup\{A^c \mid A \in F\}$.

פתרון. נגדיר $G = \{A^c \mid A \in F\}$.

$$\bigcap F = \bigcap\{A \mid A \in F\} = \bigcap\{B^c \mid B \in G\} = \left(\bigcup G\right)^c = \left(\bigcup\{A^c \mid A \in F\}\right)^c.$$

והטענה נובעת מכיון ש־$X = Y$ אם"ם $X^c = Y^c$. ■

קבוצות חזקה

נתונה קבוצה A. **קבוצת החזקה** של A היא הקבוצה

$$\mathbf{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}.$$

עובדה נניח כי $|A| = n$. אז $|\mathbf{P}(A)| = 2^n$.

תרגיל 3 חשבו את $\mathbf{P}(\mathbf{P}(\mathbf{P}(\varnothing)))$.

פתרון.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\varnothing) &= \{\varnothing\} \\
\mathbf{P}(\mathbf{P}(\varnothing)) &= \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
\mathbf{P}(\mathbf{P}(\mathbf{P}(\varnothing))) &= \{\varnothing, \underbrace{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}}_{\text{יחידונים}}, \mathbf{P}(\mathbf{P}(\varnothing))\} \\
&= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}
\end{aligned}$$

■

תרגיל 4 נתונה קבוצה A. הראו כי $A = \bigcup \mathbf{P}(A)$.

פתרון.

$\subseteq$ בהינתן $a \in A$ מתקיים כי $a \in \{a\} \in \mathbf{P}(A)$ ולכן $a \in \bigcup \mathbf{P}(A)$.

$\supseteq$ לכיוון השני, אם $a \in \bigcup \mathbf{P}(A)$ אז יש $X \in \mathbf{P}(A)$ כך ש־$a \in X$ ולכן $a \in X \subseteq A$ ובפרט $a \in A$.

■

תרגיל 5 הוכיחו או הפריכו

$$\mathbf{P}(A \setminus B) = \mathbf{P}(A) \setminus \mathbf{P}(B).$$

האם השוויון מתקיים לאיזשהם A ו־B?

פתרון. נשים לב כי, מכיוון שלכל קבוצה X מתקיים כי $\varnothing \subseteq X$, בהכרח מתקיים כי $\varnothing \in \mathbf{P}(A \setminus B)$ וכן $\varnothing \in \mathbf{P}(A) \cap \mathbf{P}(B)$. בפרט, $\varnothing \notin \mathbf{P}(A) \setminus \mathbf{P}(B)$. לכן אין שוויון עבור אף זוג קבוצות A, B.

שאלת המשך. האם מתקיימת ההכלה $\mathbf{P}(A) \setminus \mathbf{P}(B) \subseteq \mathbf{P}(A \setminus B)$ לכל זוג קבוצות A, B?

התשובה היא לא בהכרח. למשל, עבור $A = \{1, 2\}$ ו־$B = \{1\}$ מתקיים כי

$$\mathbf{P}(A \setminus B) = \mathbf{P}(\{2\}) = \{\varnothing, \{2\}\} \quad , \quad \mathbf{P}(A) \setminus \mathbf{P}(B) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \setminus \{\varnothing, \{1\}\} = \{\varnothing, \{2\}, \{1,2\}\}$$

■

תרגיל 6 נתון כי $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) \cup \mathbf{P}(B)$. הראו כי בהכרח $B \subseteq A$ או $A \subseteq B$.

פתרון. נניח בשלילה כי $B \not\subseteq A$ וגם $A \not\subseteq B$. אז יש $a \in A \setminus B$ ו־$b \in B \setminus A$. נתבונן בקבוצה $\{a, b\}$. מובן כי $\{a, b\} \subseteq A \cup B$ ולכן $\{a, b\} \in \mathbf{P}(A \cup B)$. מצד שני, $\{a, b\} \not\subseteq A$ וגם $\{a, b\} \not\subseteq B$, ובפרט $\{a, b\} \notin \mathbf{P}(A) \cup \mathbf{P}(B)$. ■

קבוצות אינדוקטיביות

המספרים הטבעיים

המספרים הטבעיים הם הקבוצה $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$[1] כמה תכונות חשובות של הטבעיים:

1. **עקרון הסדר הטוב**־ לכל תת־קבוצה $K \subseteq \mathbb{N}$ קיים מינימום.
2. **קיומה של פונקציית עוקב**־ לכל $x \in \mathbb{N}$ קיים מספר יחיד $y \in \mathbb{N}$ כך ש־$x < y$ ולא קיים אף $z \in \mathbb{N}$ כך ש־$x < z < y$. המספר y מסומן כ־$x + 1$.

   הערה קיומה של פונקציית העוקב נובע מעיקרון הסדר הטוב־ העוקב נלקח להיות האיבר המינימלי בקבוצה $\{y \mid y > x\}$.

3. הטבעיים הם **קבוצה אינדוקטיבית**. נניח כי A היא תת־קבוצה של $\mathbb{N}$ שמקיימת

   (א) $0 \in \mathbb{N}$,

   (ב) $\forall x (x \in A \to (x + 1) \in A)$.

   אז $A = \mathbb{N}$.

[1] בקורסים בתורת־הקבוצות (כמעט) תמיד מניחים ש־$0 \in \mathbb{N}$. באופן כללי אין הסכמה רחבה לגבי האם אפס הוא טבעי או לא, אז לרוב כדאי פשוט לשאול.

אינדוקציה ואינקודציה שלמה

ההגדרות לעיל של קבוצות אינדוקטיביות מאפשרות לנו להשתמש בכלי של **הוכחה באינדוקציה**.

תרגיל 1 הראו כי לכל מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $\sum_{j=0}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

פתרון. ניתן לנסח את השאלה באופן הבא:

נסמן ב־A את הקבוצה

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\}.$$

הראו כי $A = \mathbb{N}$.

נשתמש באינדוקטיביות של $\mathbb{N}$. נבדוק:

1. $0 \in \mathbb{N}$. אכן $0^2 = \frac{0\cdot(0+1)(2\cdot 0+1)}{6} = 0$.
2. $n \in A \to (n+1) \in A$. נניח כי $n \in A$ מתקיים עבור איזשהו $n \in \mathbb{N}$ (כלומר $0^2+1^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$), ונבדוק אם בהכרח מתקיים כי $n+1 \in A$. ואכן

$$\begin{aligned}
0^2 + 1^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &= \left(0^2 + \ldots + n^2\right) + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= (n+1)\cdot\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}
\end{aligned}$$

כנדרש.

■

תרגיל 2 נתון $n \geq 3$. הראו כי לכל מצולע בן n קודקודים יש $\frac{n(n-3)}{2}$ אלכסונים.

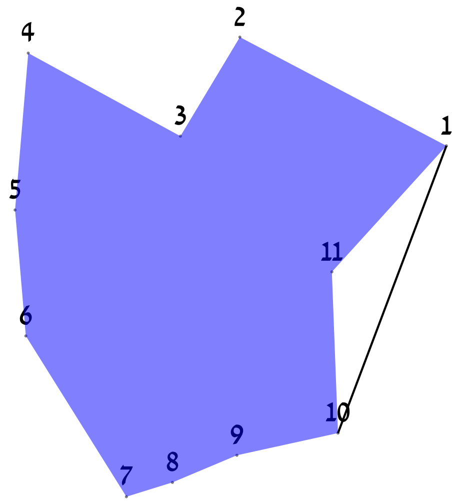
פתרון. נגדיר

$$\begin{aligned}
&A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 3 \wedge \text{לכל מצולע בן } n \text{ קודקודים יש } \frac{n(n-3)}{2} \text{ אלכסונים}\} \\
&B = \{0,1,2\} \\
&C = A \cup B.
\end{aligned}$$

נראה כי C **היא קבוצה אינדוקטיבית**.

- $0 \in C$ מתקיים מהגדרת B.
- ההיגד $n \in C \to (n+1) \in C$ נכון ל־$n = 0,1$ מהגדרת B.
- במקרה בו $n = 2$ עלינו לוודא כי $3 \in C$. מכיוון ש־$3 \notin B$ צריך להראות כי $3 \in A$. זה מתקיים מכיוון שבמשולש אין אלכסונים ואז $\frac{n(n-3)}{2} = 0$.

- נבדוק כי $n \in C \to (n+1) \in C$ עבור $n \geq 3$. יהא $n \geq 3$ ויהא X מצולע בן $n+1$. למשל



נמספר את הקודקודים לפי כיוון כלשהו, ונתבונן במצולע X' המתקבל ע"י חיבור הצלע ה־1 עם הצלע ה־n. במצולע זה יש n קודקודים, ולפי הנחת האינדוקציה, יש בו $\frac{n(n-3)}{2}$ אלכסונים. כמו כן, במצולע X, כל אלכסון מקיים את אחת משתי התכונות הבאות:

1. מופיע כאלכסון במצולע X', או
2. הינו אחד האלכסונים היוצאים מהקודקוד $n+1$.

מהקודקוד $n+1$ יוצאים $n-2$ אלכסונים (אחד לכל אחת מהצלעות $2, 3, \ldots, n-1$) ולכן מספר האלכסונים הכללי הוא

$$\text{אלכסונים ב־}X' + \text{אלכסונים היוצאים מ־}(n+1) = \frac{n(n-3)}{2} + (n-2) = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

כנדרש.

■

תרגול 4

אינדוקציה ואינדוקציה שלמה
מבוא לקומבינטוריקה

קבוצות אינדוקטיביות

הערה הטבעיים הם קבוצה אינדוקטיבית. כלומר שאינה ריקה וסגורה תחת פעולת העוקב.

משפט נניח כי A היא תת־קבוצה של $\mathbb{N}$ שמקיימת

א. $0 \in \mathbb{N}$,

ב. $\forall x(x \in A \to (x+1) \in A)$.

אז $A = \mathbb{N}$.

הגדרה שקולה לקבוצה אינדוקטיבית. נניח כי $A \subseteq \mathbb{N}$ היא קבוצה המקיימת

(⋆) $$\forall x \left((\forall y < x(y \in A)) \to x \in A \right).$$

אז $A = \mathbb{N}$.

הערה שימו לב כי אם A מקיימת את (⋆) אז בהכרח $0 \in A$ (לבדוק כי ההיגד $\forall y < 0(y \in A)$ הוא אמיתה לוגית, ולכן בהכרח גם $x \in A$ חייב להתקיים.

תרגיל 1 (מצאו את השקר!) מספרי פיבונצ'י מוגדרים ע"י הנוסחה הבאה $F_1 = F_2 = 1$ ולכל $n \geq 1$ מתקיים

$$F_{n+2} = \ F_{n+1} + F_n.$$

טענה. כל מספרי פיבונצ'י הם זוגיים.
נסמן

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{זוגי } F_n\}.$$

נבחר $n \in \mathbb{N}$ ונניח כי לכל $m < n$ מתקיים כי $F_m \in A$. בפרט, עבור $m = n-1, n-2$ המספרים F_{m-1} ו־F_{m-2} זוגיים ולכן $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ גם הוא זוגי! הראינו, אם כן, כי A אינדוקטיבית ולכן $A = \mathbb{N}$.

פתרון. הרישא $\forall m < n(m \in A)$ איננה מתקיימת **לאף** $n \geq 1$, ולכן לא ניתן להשתמש בה כדי להוכיח את הסיפא, כי $n \in A$. ■

תרגיל 2 (מצאו את השקר!) הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$

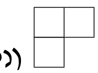
$$1+2+\ldots+n=\frac{n^2+n-2}{2}$$

<u>הוכחה</u> באינדוקציה שלמה, נניח כי לכל $m<n$ מתקיים כי $1+2+\ldots+m=\frac{m^2+m-2}{2}$. בפרט, הטענה נכונה עבור $m=n-1$ ואז

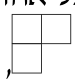
$$\begin{aligned}1+2+\ldots+n=1+\ldots+n-1+n&=\frac{(n-1)^2+(n-1)-2}{2}+n\\&=\frac{n^2-2n+1+n-1-2+2n}{2}=\frac{n^2+n-2}{2}\end{aligned}$$

כנדרש.

פתרון. המעבר $m-1\in A \to m\in A$ שהשתמשנו בו אינו תקף במקרה בו $m=0$. כדי להוכיח את הטענה במקרה $m=0$ אין ברירה אלא לבדוק את הטיעון באופן ישיר במקרה זה. קל לוודא כי עבור $m=0$ הטענה היא שקרית. ■

תרגיל 3 נתונה פיצה מגודל $2^n\times 2^n$. הראו כי אם נסיר מהפיצה ריבוע בודד ניתן יהיה לחלק אותה לחתיכות מגודל 3 מהצורה  (וניתן לסובב את החתיכות).

פתרון. נסמן ב־A את קבוצת המספרים הטבעיים $n\in\mathbb{N}$ המקיימים כי ניתן לחלק כל פיצה מגודל $2^n\times 2^n$ עם חתיכה אחת חסרה לחתיכות מהצורה הנתונה. נראה כי A אינדוקטיבית. מכיוון שבמקרה בו $n=0$, כל פיצה מגודל $2^0\times 2^0$ מכילה פרוסה יחידה, ברור כי $0\in A$.

יהא $n\in A$. נוכיח כי $n+1\in A$. לצורך כך נבחר פיצה מגודל $2^{n+1}\times 2^{n+1}$ ונחסיר ממנה ריבוע אחד. נחלק את פיצה ל־4 פיצות בגודל שווה, כלומר ארבעה פיצות מגודל $2^n\times 2^n$. נשים לב כי החתיכה שהחסרנו לקוחה בדיוק מאחד מרבעי הפיצה הגדולה. נוציא מכל אחד מהרבעים הנותרים את הפרוסה הקרובה ביותר מרכז הפיצה הגדולה. בפעולה זו הוצאנו 3 פרוסות שכנות בצורת , עד כדי סיבוב בזווית מהקבוצה $\{0,\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\}$ ולכן פעולה זו שקולה לבחירת חתיכה מהצורה הראשונה. כעת נותרנו עם 3 פיצות מגודל $2^n\times 2^n$ שלכל אחת מהן פרוסה חסרה. מהנחת האינדוקציה ביכולתנו לחלק פיצות אלה לפרוסות מהצורה הרצויה. כנדרש.

■

קומבינטוריקה בסיסית

מושג העוצמה

קבוצה A היא מעוצמה n אם קיימת התאמה $f:\{1,\ldots,n\}\to A$ כך שלכל $i\in\{1,\ldots,n\}$ מתאימים איבר **יחיד** $f(i)\in A$, וכך שכל איברי A נספרים באופן זה. במקרה זה נסמן $|A|=n$. בחלק הקודם של תרגול זה ראינו כי עבור הקבוצה $A=\{1,\ldots,n\}$ מתקיים כי $|\mathbf{P}(A)|=2^n$. עובדה זו נכונה גם לכל קבוצה A מעוצמה n.

עקרונות בסיסיים בספירה

העקרון האדטיבי נניח כי A ו־B קבוצות סופיות **זרות** (כלומר $A\cap P=\varnothing$). אז

$$|A\cup B|=|A|+|B|\,.$$

העקרון האדטיבי המוכלל אומר כי לכל זוג קבוצות A,B מתקיים כי

$$|A\cup B|=|(A\setminus B)\cup B|=|(A\setminus(A\cap B))\cup B|=|A|-|A\cap B|+|B|\,.$$

תרגיל 1 הראו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ הקבוצה $\mathbf{P}(\{1,2,\ldots,n\})$ היא בת 2^n איברים.

פתרון. נסמן $A = \{n \mid |\mathbf{P}(\{1,\ldots,n\})| = 2^n\}$. מכיוון ש־$\mathbf{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ מתקיים כי $|\mathbf{P}(\varnothing)| = 2^0 = 1$ ולכן $0 \in A$. נניח כי $n-1 \in A$ ונתבונן בקבוצה $\{1,\ldots,n\}$. נגדיר חלוקה של $\mathbf{P}(\{1,\ldots,n\})$ ע"י

$$\mathbf{P}(\{1,\ldots,n\}) = \underbrace{\{A \mid A \subseteq \{1,\ldots,n\} \wedge n \in A\}}_{=\mathcal{P}_1} \cup \underbrace{\{A \mid A \subseteq \{1,\ldots,n\} \wedge n \notin A\}}_{=\mathcal{P}_2}.$$

נשים לעובדות הבאות:

- $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \varnothing$.
- הקבוצה $\mathcal{P}_1$ זהה לקבוצה $\mathbf{P}(\{1,\ldots,n-1\})$ ולכן גודלה הוא 2^{n-1}.
- לכל $X \in \mathcal{P}_2$ מתקיים כי $X \cup \{n\} \in \mathcal{P}_1$ וכי $X, X' \in \mathcal{P}_2$ מקיימים כי $X = X'$ אם ורק אם $X \cup \{n\} = X' \cup \{n\}$. כמו כן, לכל $Y \in \mathcal{P}_1$ מתקיים כי $X = Y \setminus \{n\} \in \mathcal{P}_2$ והוא האיבר (היחיד) ב־$\mathcal{P}_2$ המקיים כי $X \cup \{n\} = Y$.

  מכל זה נובע כי $|\mathcal{P}_1| = |\mathcal{P}_2| = 2^{n-1}$.

בפרט, מהנאמר לעיל ומהעיקרון האדיטיבי נובע כי

$$|\mathbf{P}(\{1,\ldots,n\})| = |\mathcal{P}_1| + |\mathcal{P}_2| = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

$\blacksquare$

תרגול 5

קומבינטוריקה בסיסית (המשך)

מושג העוצמה

תזכורת קבוצה A היא מעוצמה n אם קיימת התאמה $f:\{1,\dots,n\}\to A$ כך שלכל $i\in\{1,\dots,n\}$ מתאימים איבר יחיד $f(i)\in A$ וכך שכל איברי A נספרים באופן זה. במקרה זה נסמן $|A|=n$. בחלק הקודם של תרגול זה ראינו כי עבור הקבוצה $A=\{1,\dots,n\}$ מתקיים כי $|\mathbf{P}(A)|=2^n$. עובדה זו נכונה גם לכל קבוצה A מעוצמה n.

הגדרה מנייה של קבוצה סופית A היא פונקציה חח"ע ועל $f:\{1,\dots,n\}\to A$. כלומר, פונקציה f המתאימה לכל מספר טבעי $i\in\{1,\dots,n\}$ איבר יחיד $f(i)\in A$ כך שלכל $a\in A$ יש i המקיים כי $f(i)=a$.

הערה המטרה הבסיסית שלנו בחלק זה של הקורס היא לייצג שאלות ספירה בסיסיו בתור שאלות מהצורה "מהי עצמתה של הקבוצה A", כאשר A היא קבוצת האיברים המקיימים את התנאי שאנחנו מעוניינים לספור.

עקרונות בסיסיים בספירה

העקרון הכפלי

הגדרה (זוג סדור) זוג של איברים a,b עם חשיבות לסדר. מסומן בד"כ ב-$\langle a,b\rangle$ או (a,b).

הגדרה (מכפלה קרטזית) בהינתן 2 קבוצות A,B המכפלה הקרטזית של A ו-B מוגדרת להיות

$$A\times B \overset{\text{הגדרה}}{=\!=} \{\langle a,b\rangle \mid a\in A,\ b\in B\}.$$

דוגמה

$$\begin{aligned}
A&=\{2,3,1\},\ B=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\\
A\times B&=\{\langle 2,\varnothing\rangle,\langle 3,\varnothing\rangle,\langle 1,\varnothing\rangle,\langle 2,\{\varnothing\}\rangle,\langle 3,\{\varnothing\}\rangle,\langle 1,\{\varnothing\}\rangle\}\\
B\times A&=\{\langle \varnothing,2\rangle,\langle \varnothing,3\rangle,\langle \varnothing,1\rangle,\langle \{\varnothing\},3\rangle,\langle \{\varnothing\},2\rangle,\langle \{\varnothing\},1\rangle\}
\end{aligned}$$

שאלה האם $A\times B=B\times A$? האם גדלי הקבוצות זהים?

משפט (העקרון הכפלי) נניח כי $X\subseteq A\times B$ היא קבוצה (יחס) בה לכל $x\in A$ קיימים בדיוק m איברים $b_1,\dots,b_m\in B$ שונים כך ש-$\langle x,b_1\rangle,\dots,\langle x,b_m\rangle\in X$. אז $X=|A|\cdot m$.

תרגיל 1 כמה מספרים דו־ספרתיים קיימים בהם שתי הספרות שונות? (אנחנו מזהים בין המספר 9 ו־09, למשל).

פתרון. את אוסף המספרים הדו־ספרתיים ניתן לזהות עם אוסף הזוגות $\{0,\ldots,9\}\times\{0,\ldots,9\}$. לכל בחירה של ספרת אחדות יש בדיוק 9 דרכים לבחור מספר דו־ספרתי שספרת העשרות שלו שונה. לכן מספר המספרים הנדרש הוא $9\cdot|\{0,\ldots,9\}|=90$. ■

תרגיל 2 בכיתה עם 32 בנות כל בן מכיר 8 בנות וכל בת מכירה 5 בנים. בהנחה כי היכרות היא יחס סימטרי, כמה בנים יש בכיתה?

פתרון. מספר ההיכרויות הוא $32\cdot 5=8\cdot n$. לכן $n=20$. ■

העקרון האדטיבי

נניח כי A ו־B קבוצות סופיות **זרות** (כלומר $A\cap P=\varnothing$). אז

$$|A\cup B|=|A|+|B|\,.$$

העקרון האדטיבי המוכלל אומר כי לכל זוג קבוצות A,B מתקיים כי

$$|A\cup B|=|(A\smallsetminus B)\cup B|=|(A\smallsetminus(A\cap B))\cup B|=|A|-|A\cap B|+|B|\,.$$

המקדם הבינומי

שאלה נתונה קבוצה מגודל n. כמה תתי־קבוצות יש ל־A מגודל k לאיזשהו k נתון?

כמה מקרים טריוויאליים

1. אם $k>n$ או $k<0$ אז התשובה היא 0.
2. אם $k=0$ או $k=n$ אז התשובה היא 1, כי יש קבוצה ריקה אחת, וב־A יש רק תת־קבוצה אחת מגודל n, שהיא A עצמה.

סימון בהינתן מספרים טבעיים n,k נרשום $\binom{n}{k}$ כדי לסמן את מספר תתי־הקבוצות של קבוצה מגודל n שהן מגודל k.

הערה למרות שהסימון $\binom{n}{k}$ נראה מוזר במקרים בהם $0>k$ או $n>k$ נכון (ובעתיד גם מקל על חישובים) להגדיר במקרה זה $\binom{n}{k}=0$.

לבינתיים נתעלם מהידע הקודם שלנו לגבי הערך של המספר $\binom{n}{k}$ ונוכיח את הטענה הבאה

טענה א (זהות פסקל) יהיו $n,k\in\mathbb{N}$. אז

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\,.$$

הוכחה. ניקח $A=\{1,\dots,n+1\}$ ונספור את מספר תתי־הקבוצות של A מגודל k. את המקרים בהם $k=0$ או $k\geq n+1$ ניתן לוודא ע"י חישוב ישיר

$$1=\binom{n+1}{0}=\binom{n}{0}+\binom{n}{-1}=1+0 \tag{5.1}$$

$$1=\binom{n+1}{n+1}=\binom{n}{n+1}+\binom{n}{n}=0+1 \tag{5.2}$$

$$0=\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=0+0. \qquad (k>n+1) \tag{5.3}$$

נניח כעת כי $1\leq k\leq n$ ונסמן

$$\mathbf{P}_k(A)=\{X\subseteq A\mid |X|=k\},\quad |\mathbf{P}_k(A)|=\binom{n+1}{k}.$$

תהא $\mathcal{B}=\{X\in\mathbf{P}_k(A)\mid n+1\notin X\}$ ו־ $\mathcal{C}=\mathbf{P}_k(A)\setminus\mathcal{B}$. נשים לב כי $\mathcal{B}$ היא פשוט הקבוצה $\mathbf{P}_k(\{1,2,\dots.n\})$, כי היא פשוט מורכבת מכל תתי הקבוצות של A מגודל k שהן גם תתי קבוצות של $\{1,\dots,n\}$. לכן $|\mathcal{B}|=|\mathbf{P}_k(\{1,\dots,n\})|=\binom{n}{k}$.

מה לגבי $\mathcal{C}$? מהגדרה $\mathcal{C}=\{X\subseteq A\mid |X|=k\wedge n+1\in X\}$. נשים לב כי לכל $X\in\mathcal{C}$ הקבוצה $X'=X\setminus\{n+1\}$ היא תת־קבוצה של $\{1,\dots,n\}$ מגודל $k-1$. כמו כן, לכל קבוצה $X'\in\mathbf{P}_{k-1}(\{1,\dots,n\})$, הקבוצה $X=X'\cup\{n+1\}$ היא מגודל k, והינה איבר ב־$\mathcal{C}$. נובע מכך כי

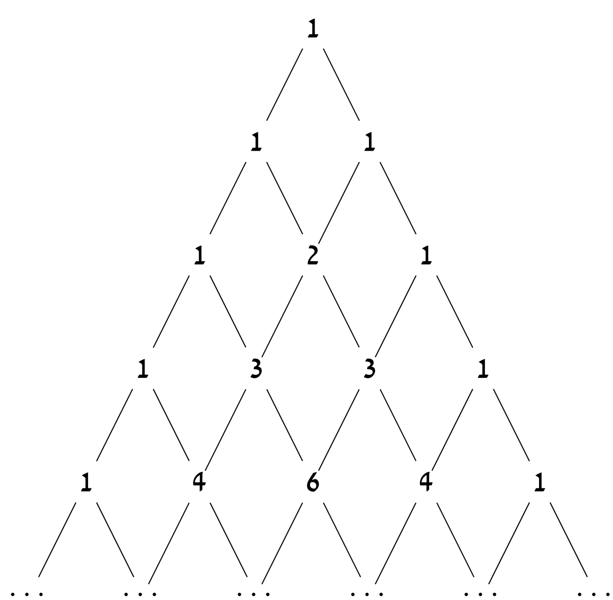
$$|\mathcal{C}|=|\mathbf{P}_{k-1}(\{1,\dots,n\})|=\binom{n}{k-1}.$$

מכיוון ש־$\mathcal{B}$ ו־$\mathcal{C}$ זרות, ואיחודן שווה ל־$\mathbf{P}_k(A)$, לפי העיקרון האדיטיבי נקבל

$$\binom{n+1}{k}=|\mathbf{P}_k(A)|=|\mathcal{B}|+|\mathcal{C}|=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}.$$

■

משולש פסקל



משפט (המשפט הבינומי) יהיו $a,b \in \mathbb{R}$ ו־$n \in \mathbb{N}$. אזי

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

הוכחה. בתרגול הבא. ∎

טענה ב (זהות מקל ההוקי)

$$\binom{n+1}{k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k-1}$$

הוכחה.

$$.\mathbf{P}_k(\{1,\ldots,n+1\}) = \bigsqcup\{\{X \in \mathbf{P}_k(\{1,\ldots,n+1\}) \mid \max X = j\} \mid j = 1,\ldots,n+1\}$$

וכן $\{X \in \mathbf{P}_k(\{1,\ldots,n+1\}) \mid \max X = j\} = \{Y \cup \{j\} \mid Y \subseteq \{1,\ldots,j-1\}\}$, וקבוצה זו בעוצמה זהה לקבוצה $\mathbf{P}_{k-1}(\{1,\ldots,j-1\})$. הטענה נובעת ע"י שינוי אינסדקסים. ∎

על כבשים ומחיצות

תרגיל 3 נתון אב ולו 15 כבשים.

א. מה מספר הדרכים לחלק 15 כבשים ל־4 בנים?

ב. מה מספר הדרכים, אם נדרש בנוסף שכל בן מקבל לפחות כבשה אחת?

פתרון.

1. מספר הדרכים לחלק 15 כבשים ל־4 בנים הוא כמספר הדרכים לחלקן ל־4 תאים. מספר הדרכים לבצע חלוקה זו הוא כמספר הדרכים לסדר את 15 הכבשים בשורה ולהציב ביניהן 3 מחיצות. מכיוון שאין חשיבות לסדר הכבשים, מספר הדרכים לבצע זאת הוא כמספר הדרכים לבחור 3 מקומות מתוך $15+3=18$, ולהציב בהם מחיצות וכבשים בשאר המקומות. מספר הדרכים לבצע זאת הוא $\binom{18}{3}$.
2. נתחיל בלתת כבשה אחת לכל בן. כעת נותרו לנו 11 כבשים, שכל חלוקה שלהן ל־4 בנים מאפשרת לנו לחלק את 15 הכבשים ל־4 הבנים כך שכל בן מקבל לפחות כבשה אחת. בדומה הסעיף הקודם, מספר הדרכים לבצע זאת הוא $\binom{11+3}{3} = \binom{14}{3}$.

∎

תרגול 6

קומבינטוריקה בסיסית (המשך)

המקדם הבינומי

משפט (המשפט הבינומי) יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ו־$n\in\mathbb{N}$. אזי

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

הוכחה.

1. הוכחה אלגברית. באינדוקציה,

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\right)=a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^kb^{n+1-k}+b^{n+1}.$$

2. הוכחה קומבינטורית. נרשום

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{\text{פעמים } n}=\sum_{k,m\in\mathbb{N}}c_{k.m}a^kb^m.$$

מכיוון שכל האיברים בביטוי הם מכפלות של a ו־b ניתן לכתוב את האיבר $(a+b)^n$ כמו באגף שמאל. נשים לב כי איבר מהצורה a^kb^m מתקבל ע"י בחירה של a k פעמים ובחירה של b m פעמים מבין הסוגריים. בפרט, מתקיים כי $m+k=n$, כמספר הפעמים ש־$a+b$ מופיע ב־$(a+b)^n$, ו־$c_{m,k}=\binom{n}{k}=\binom{n}{m}$ אם $m+k=n$ ו־$c_{m,k}=0$ אחרת.

■

תרגיל 1 נתונים $n,k\in\mathbb{N}$. הראו כי לכל $m\leq n+k$ מתקיים

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{j}\binom{k}{m-j}=\binom{n+k}{m}.$$

פתרון. **הוכחה אלגברית.** חשבו את המקדם של x^m בפולינום $(1+x)^n \cdot (1+x)^k$ בשתי דרכים. לפי המשפט הבינומי, אם נפתח את $(1+x)^{n+k}$ נקבל כי המקדם של x^m הוא $\binom{n+k}{m}$. מצד שני, אם נפתח קודם את הביטויים $(1+x)^k$ ו־$(1+x)^n$ ורק אז נכפול נקבל

$$(1+x)^n (1+x)^k = \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^k\right) \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i\right) = \sum_{i=0}^{n+k} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \binom{k}{i-j}\right) x^i$$

והתוצאה נובעת ע"י כך שנציב $i = m$.

הוכחה קומבינטורית. בכמה דרכים ניתן לבחור ועד בן m תלמידים מתוך קבוצה של n בנים ו־k בנות? אם לא נתייחס למגדר של חברי הועד, התשובה היא פשוט $\binom{n+k}{m}$. לחילופין, אם נספור את מספר האפשרויות ליצור ועד בן m חברים שבו 0 בנים, מספר האפשרויות עם בן אחד, מספר האפשרויות עם שני בנים וכן הלאה, ונסכום, נקבל כי מספר האפשרויות ליצור ועד שכזה הוא

$$.\sum_{j=0}^{m} \binom{n}{j} \binom{k}{m-j}$$

■

תרגיל 2 הוכיחו את הזהות

$$.\sum_{j=0}^{n} j \cdot \binom{n}{j} = n2^{n-1}$$

פתרון. **אלגברי.** נתבונן בפולינום $f(x) = (1+x)^n$. לפי המשפט הבינומי $f(x) = (1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j$. נגזור את שני האגפים

$$\frac{d}{dx} f(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} j \binom{n}{j} x^{j-1}$$

שימו לב ש־$x^0 = 1$ ולכן גזירה שלו הופכת אותו ל־0 ולא ל־x^{-1}. כעת נציב $x = 1$ ונקבל את התוצאה.

קומבינטורי. נתבונן בקבוצה

$$.\mathcal{A} = \{\langle x, X\rangle \mid X \in \mathbf{P}(\{1,\ldots,n\}) \wedge x \in X\}$$

נחשב את גודל הקבוצה $\mathcal{A}$ בשתי דרכים. נשים לב כי $\mathcal{A} \subseteq \{1,\ldots,n\} \times \mathbf{P}(\{1,\ldots,n\})$. כמו כן, נשים לב כי לכל $x \in \{1,\ldots,n\}$ קיימות $2^{n-1} = |\mathbf{P}(\{1,\ldots,n\} \setminus \{x\})|$ אפשרויות לבחור קבוצה $X \subseteq \{1,\ldots,n\}$ המכילה את x. אכן־ בחירה של X כזו שקולה לבחירה של תת־קבוצה $Y \subseteq \{1,\ldots,n\}$ שאינה מכילה את x וקביעת $X = Y \cup \{x\}$. מספר הדרכים לבחור את $Y \in \mathbf{P}(\{1,\ldots,n\} \setminus \{x\})$ הוא פשוט 2^{n-1}. מהעיקרון הכפלי מקבלים כי $|\mathcal{A}| = |\{1,\ldots,n\}| \cdot 2^{n-1} = n2^{n-1}$.

לחילופין, נגדיר לכל $j = 1,\ldots,n$ קבוצה $\mathcal{A}_j = \{\langle x, X\rangle \in \mathcal{A} \mid |X| = j\}$. נשים לב כי הקבוצות $\mathcal{A}_j$ זרות בזוגות ומהוות חלוקה של $\mathcal{A}$. לכן, לפי העיקרון החיבורי, $|\mathcal{A}| = \sum_{j=1}^{n} |\mathcal{A}_j|$. יהא $j = 1,\ldots,n$ קבוע. נשים לב כי לכל $X \subseteq \{1,\ldots,n\}$ מעוצמה j מתקיים כי מספר האיברים $x \in \{1,\ldots,n\}$ המקיימים כי $\langle x, X\rangle \in \mathcal{A}_j$ הוא בדיוק j (אלה הם בדיוק איברי X). מהעיקרון הכפלי מקבלים $|\mathcal{A}_j| = j \cdot |\{X \subseteq \{1,\ldots,n\} \mid |X| = j\}| = j\binom{n}{j}$. נסכום ונקבל

$$.n2^{n-1} = |\mathcal{A}| = \sum_{j=1}^{n} |\mathcal{A}_j| = \sum_{j=1}^{n} j \binom{n}{j}$$

■

המקדם המולטינומי

תרגיל 1 מספר המילים שניתן לייצר עם אותיות המילה MISSISSIPI.

פתרון. אפשרות לפתרון: כל מילה שנרכיב מאותיות המילה מיסיסיפי תהיה באורך 10, ויהיו בה:

- 4 פעמים S,
- 4 פעמים I,
- פעם אחת P,
- ופעם אחת M.

מכיוון שהמילה לא משתנה תחת התמרה של ה־S־ים או של ה־I־ים, מציאה של מילה באורך 10 המורכבת מהאותיות שציינו לעיל שקולה לבחירה של 4 מקומות מתוך 10 (להצבת S), ואז בחירה של 4 מקומות מבין 6 המקומות הנותרים (להצבת I) ולבסוף בחירת מקום אחד מ־2 ל־M, מקום אחד מאחד להצבת P. בסה"כ

$$\binom{10}{4}\binom{6}{4}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \frac{10!6!2!1!}{4!6!4!2!1!1!1!0!} = \frac{10!}{4!4!1!1!} \overset{\text{הגדרה}}{=\!=} \binom{10}{4,4,1,1}$$

■

תרגיל 2 חשבו את המקדם של $a^5b^2c^3$ בביטוי $(a+b+c)^{10}$.

פתרון. נתבונן במכפלה

$$\underbrace{(a+b+c)\cdot(a+b+c)\cdot\ldots\cdot(a+b+c)}_{\text{עשר פעמים}}$$

המונום $a^5b^2c^3$ יכול להתקבל ע"י בחירת a ב־5 מתוך הגורמים, b בשניים מתוכם ו־c בשלוש מתוכם, וכל בחירה כזו תורמת תוספת של $+1$ למקדם. מספר הדרכים לבצע בחירה זו היא $\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{3} = \frac{10!}{5!3!2!}$. ■

הגדרה (המקדם המולטינומי) נתון $m\in\mathbb{N}$ ומספרים $n_1,\ldots,n_k\in\mathbb{N}$ כך ש־$n_1+\ldots+n_k=m$. המקדם הבינומי $\binom{m}{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ מוגדר ע"י

$$\binom{m}{n_1,\ldots,n_k} = \frac{m!}{n_1!\cdots n_k!}.$$

<u>האנלוגיה למקדם הבינומי.</u> בהינתן מספרים $m_1,\ldots,m_k\in\mathbb{N}$ כך ש־$m_1+\ldots+m_k=n$, הערך $\binom{n}{m_1,m_2,\ldots,m_k}$ הוא מספר הדרכים לחלק את n ל־k תתי־קבוצות זרות בגדלים $m_1,m_2,\ldots,m_k$ בהתאמה. (מה קורה במקרה של $k=2$?)

תרגיל 3 נתונים 4 שקים, כאשר בשק הראשון 5 כדורים אדומים, בשני 5 כדורים כחולים, בשלישי 5 כדורים לבנים וברביעי 5 כדורים צהובים.

1. בכמה דרכים ניתן לבחור לסדרם בשורה?
2. בכמה דרכים ניתן לסדר 5 מהם בשורה? כתבו נוסחת סכימה וכן נוסחה סגורה.

פתרון.

1. מכיוון שאנחנו לא מבדילים בין סידורים שונים של כדורים באותו צבע, מספר הדרכים לסדר את 20 הכדורים בשורה הוא כמספר הדרכים לחלק את הקבוצה $\{1,\ldots,20\}$ (קבוצת המקומות בשורה) ל־4 קבוצות בגודל 5. מספר זה, לפי הגדרת המקדם המולטינומי, הוא

$$.\binom{20}{5,5,5,5} = \frac{20!}{5!5!5!5!} = 11732745020$$

2. במקרה זה אנחנו צריכים לחלק את הקבוצה $\{1,\ldots,5\}$ ל־4 קבוצות זרות (אולי ריקות) ולהציב בהן את הכדורים בצבעים המתאימים. נשים לב כי אין לנו הגבלות מבחינת גדלי תתי־הקבוצות, מכיוון שיש לנו 5 כדורים מכל צבע.

לכל בחירה של 4 שלמים אי־שליליים $i_1,\ldots,i_4$ המקיימים $i_1+\cdots+i_4=5$, מספר הדרכים לחלק הקבוצה $\{1,\ldots,5\}$ ל־4 תתי־קבוצות בגדלים $i_1,\ldots,i_4$ הוא $\binom{5}{i_1,i_2,i_3,i_4}$ ולכן מספר הדרכים הכולל לסדר 5 כדורים בשורה הוא

$$.\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3,i_4\in\mathbb{N}\\ i_1+\cdots+i_4=5}} \binom{5}{i_1,i_2,i_3,i_4} = \sum_{i_1=0}^{5}\sum_{i_2=0}^{5-i_1}\sum_{i_3=0}^{5-i_1-i_2}\sum_{i_4=0}^{5-i_1-i_2-i_3}\binom{5}{i_1,i_2,i_3,i_4}$$

מצד שני־ פתרון אחר לשאלה הוא פשוט לשאול בכמה דרכים ניתן ליצור סדרה באורך 5 שאיבריה הם הצבעים אדום, כחול,לבן וצהוב (מכיוון שאין לנו הגבלנו הנובעות ממספר הכדורים בשקים). מספר הדרכים לבצע זאת הוא 4^5.

■

משפט (המשפט המולטינומי)

$$.\ (x_1+x_2+\ldots+x_m)^n = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_m\in\mathbb{N}\\ i_1+\cdots+i_m=n}} \binom{n}{i_1,\ldots,i_m} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_m^{i_m}$$

פתרון משוואות מעל השלמים

תרגיל 1 כמה פתרונות יש למשוואה $x_1+x_2+\cdots+x_5=25$ כש $x_1,\ldots,x_5\in\mathbb{N}$? מה מספר הפתרונות כאשר

- $x_1,\ldots,x_5$ שלמים אי־שליליים,
- $x_2>2, x_3>0, x_4>2$.

הוכחה. מספר הפתרונות למשוואה $x_1+\cdots+x_5=25$ עם $x_1,\ldots,x_5\in\mathbb{N}$ הוא כמספר הדרכים לסדר 25 כבשים וביניהן $5-1=4$ מחיצות. מספר הדרכים לעשות זאת הוא כמספר הדרכים לבחור 4 מקומות בשורה מתוך $25+4=29$, והוא $\binom{29}{4}=\frac{26\times27\times28\times29}{4!}$.

כדי לפתור את השאלה השנייה נגדיר החלפות משתנה:

$$.y_1=x_1,\ y_2=x_2-3,\ y_3=x_3-1,\ y_4=x_4-3,\ y_5=x_5$$

נציב ראשית את החלפת המשתנה במשוואה הנתונה כדי לקבל

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = \underbrace{y_1}_{x_1}+\underbrace{y_2+3}_{x_3}+\underbrace{y_3+1}_{x_3}+\underbrace{y_4+3}_{x_4}+\underbrace{y_5}_{x_5}=25$$

או, לאחר העברת אגפים

$$.y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=18$$

נשים לב כי כל פתרון של המשוואה האחרונה עם $y_1,\ldots,y_5\geq 0$ נותן פתרון יחיד של המשוואה $x_1+\cdots+x_5=25$ עם התנאים הנתונים. מספר הפתרונות הזה הוא $\binom{18+4}{4}$. ■

תרגול 7

יחסים ויחסי שקילות

יחסים

הגדרה יהיו A ו־B קבוצות. יחס מ־A ל־B הוא פשוט תת־קבוצה R של המכפלה הקרטזית $A \times B$.

הערה 1. במקרה בו $A = B$ אומרים פשוט ש־R הוא יחס על A.

2. היחס R כפי שהגדרנו אותו לעיל הוא יחס דו־מקומי (או בינארי). באופן דומה ניתן להגדיר גם יחסים רב־מקומיים להיות תתי־הקבוצות של מכפלות קרטזיות של מספר גדול יותר של קבוצות.

3. במקרה של יחס דו־מקומי הסימון aRb הוא נפוץ, כדי לציין כי $\langle a,b\rangle \in R$.

הגדרה יהא $R \subseteq A \times B$ יחס. התחום של R הוא תת־הקבוצה $\{a \in A \mid \exists b \in B(\langle a,b\rangle \in R)\}$ של A. הטווח (ולעתים גם נקרא התמונה של R) של R הוא תת־הקבוצה B המוגדרת ע"י $\{b \in B \mid \exists a \in A(\langle a,b\rangle \in R)\}$.
סימונים $\mathrm{Dom}(R)$ - התחום ו־$\mathrm{Rng}(R)$ - הטווח.

תרגיל 1 מצאו את התחום והטווח של היחסים הבאים

1. $A = \{1,2,4\},\ B = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, ו־$R = \{\langle 1,\varnothing\rangle, \langle 1,\{\varnothing\}\rangle, \langle 4,\{\varnothing\}\rangle\}$.
2. $A = B = \mathbb{N}$ ו־$(n,m) \in R$ אס"ם $n = m+2$.
3. $A = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ אוסף הסדרות על קבוצת המספרים הממשיים ו־$B = \mathbb{R}$. נגדיר יחס R $\langle (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, c\rangle \in R$ אס"ם הסדרה $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ חסומה מלעיל ע"י c.
4. תהא $A = B = \{1,2,\ldots,n\}$ ונגדיר $R = \{\langle a,b\rangle \mid a-b \in A\}$.

פתרון.

1. תחום- $\{1,4\}$, טווח $B = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.
2. תחום- $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$, טווח $\mathbb{N}$.
3. תחום- אוסף הסדרות החסומות מלעיל, טווח $\mathbb{R}$.
4. במקרה זה $R = \{\langle i,j\rangle \mid i,j \in A,\ i > j\}$ ולכן $\mathrm{Dom}(R) = \{2,\ldots,n\},\ \mathrm{Rng}(R) = \{1,\ldots,n\}$.

■

פעולות על יחסים

חיתוך ואיחוד יחסים. מתקבלים פשוט ע"י האיחוד והחיתוך של היחסים כתתי־קבוצות של $A \times B$.
היחס ההופכי. בהינתן יחס R בין A ל־B ניתן להגדיר את היחס ההופכי $R^{-1} = \{genb, a \in B \times A \mid \langle a, b\rangle \in A\}$.
שימו לב כי $\mathrm{Dom}(R) = \mathrm{Rng}(R^{-1})$ ו־$\mathrm{Rng}(R) = \mathrm{Dom}(R^{-1})$.
הרכבת יחסים. יהיו A, B, C קבוצות ו־$R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ יחסים. ההרכבה $R \circ S \subseteq A \times C$ מוגדרת ע"י הקבוצה

$$\{\langle a, c\rangle \mid \exists b \in B(\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, c\rangle \in S)\}.$$

הערה במקומות שונים בספרות, הרכבת יחסים נכתבת בסדר הפוך, כאשר היחס שתיארנו לעיל ייכתב כ־$S \circ R$ ולא $R \circ S$. צורת כתיבה זו מכונה לפעמים "כתיב פונקציונלי" של הרכבת יחסים, והיא תהיה בשימוש בקורס בשלב מאוחר יותר, כאשר נדון במקרה של יחסים שהינם פונקציות.

יחסי שקילות

הגדרה (יחס שקילות) יחס R על קבוצה A נקרא יחס שקילות אם R הוא מקיים

- <u>רפלקסיביות</u> אם $Id_A \subseteq R$.
- <u>סימטריות</u> אם $R^{-1} \subseteq R$. כלומר, אם לכל $a, b \in A$ מתקיים

$$\langle a, b\rangle \in R \iff \langle b, a\rangle \in R.$$

- <u>טרנזיטיביות</u> אם $R \circ R \subseteq R$. כלומר, אם לכל $a, b, c \in A$ מתקיים

$$\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, c\rangle \in R \Rightarrow \langle a, c\rangle \in R.$$

דוגמה
1. השוויון (יחס הזהות).
2. היחס הטריוויאלי $R = A \times A$.
3. יחס שוויון מודולו 7 בשלמים.

תרגיל 1 דוגמאות על $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:
1. $R_1 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$,
2. $R_2 = R_1 \cup \mathrm{id}_A$,
3. $R_3 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$,
4. $R_4 = R_3 \cup \mathrm{id}_A$.

מי מהם יחס שקילות? האם ניתן להפוך אותם ליחס שקילות ע"י הוספת זוגות ליחס?

פתרון.

1. היחס R_1 הוא סימטרי. הוא איננו רפלקסיבי ואינו טרנזיטיבי, שכן $1R_12$ ו־$2R_11$ אבל $\langle 1,1\rangle \notin R_1$. לכן אינו יחס שקילות. המקרה הבא עונה לשאלה האם ניתן להפוך את R_1 ליחס שקילות.

2. היחס R_2 הוא יחס שקילות.

3. היחס R אינו יחס שקילות, שכן $\langle 1,3\rangle \in R$ ו־$\langle 3,1\rangle \in R$ (כלומר, אינו סימטרי). כמו כן, הוא אינו טרנזיטיבי.

4. היחס R_4 רפלקסיבי אך הוא אינו סימטרי ואינו טרנזיטיבי. ניתן להפכו לסימטרי ע"י הוספת הזוג הסדור $\langle 3,1\rangle$. לאחר מכן ניתן להפכו לטרנזיטיבי ע"י הוספת הזוגות $\langle 2,3\rangle$ ו־$\langle 3,2\rangle$.

■

תרגיל 2 נגדיר יחסים R,S על הקבוצה $\mathbb{Z}$ ע"י

- aRb אם $5 \mid a-b$,
- aSb אם $5 \mid a+b$.

הראו כי R יחס שקילות, ו־S אינו יחס שקילות. בדקו את $R\cap S, R\cup S$ ו־$R\circ S$.

פתרון.

1. $\underline{R}$.

- **רפלקסיביות** לכל $a \in \mathbb{Z}$ מתקיים כי $a-a=0$ ובפרט מתחלק ב־5.
- **סימטריות** יהיו $a,b \in \mathbb{Z}$. נניח כי aRb, כלומר $a-b=5k$ לאיזשהו $k \in \mathbb{Z}$. אזי $b-a=-5k$ וגם הוא מתחלק ב־k ולכן bRa.
- **טרנזיטיביות** יהיו $a,b,c \in \mathbb{Z}$ ונניח כי aRb ו־bRc. אז $a-b=5k$ ו־$b-c=5r$ לאיזשהם $r,k \in \mathbb{Z}$. אז

$$a-c=(a-b)+(b-c)=5k+5r=5(k+r)$$

ובפרט מתחלק ב־5. לכן aRc.

2. $\underline{S}$. S אינו יחס שקילות שכן אינו רפלקסיבי. למשל, עבור $a=1$ מתקיים כי $a+a=1$ ובפרט אינו מתחלק ב־5.

שימו לב־ S הינו עדיין יחס סימטרי. אם aSb אז $a+b$ מתחלק ב־5 ולכן גם $b+a$, כלומר bSa.

האם S טרנזיטיבי? לא. אם היה טרנזיטיבי אז לכל $a \in \mathbb{Z}$ מתקיים כי $aS(5-a)$ ולכן גם $(5-a)Sa$, אך aSa לא בהכרח מתקיים.

3. $\underline{R\cup S}$.

- **רפלקסיביות** מתקיימת, שכן $Id_{\mathbb{Z}} \subseteq R \subseteq R\cup S$.
- **סימטריות** מתקיימת שכן R ו־S שניהם סימטריים. נניח כי $\langle a,b\rangle \in R\cup S$ אזי $\langle a,b\rangle \in R$ או $\langle a,b\rangle \in S$. במקרה הראשון מתקיים כי $\langle b,a\rangle \in R$ ובשני $\langle b,a\rangle \in S$ ובכל מקרה $\langle b,a\rangle \in R\cup S$.
- **טרנזיטיביות** נניח כי $\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle \in R\cup S$. נוכיח טרנזיטיביות לפי חלוקה למקרים.

(א) **אם** $\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle \in R$ אז מטרנזיטיביות R מתקיים כי $\langle a,c\rangle \in R$.

(ב) **אם** $\langle a,b\rangle \in R$ **ו־**$\langle b,c\rangle \in S$ נרשום $a-b=5k$ ו־$b+c=5r$ עבור $r,k \in \mathbb{Z}$. אז $a+c=(a-b)+(b+c)=5(k+r)$ ולכן $\langle a,c\rangle \in S \subseteq S\cup R$.

(ג) **אם** $\langle a,b\rangle \in S$ **ו־**$\langle b,c\rangle \in R$ המקרה דומה למקרה הקודם.

(ד) **אם** $\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle\in S$ נרשום $a+b=5k,b+c=5r$ עבור $r,k\in\mathbb{Z}$. אז

$$a-c=(a+b)-(b+c)=5(k-r)$$

ובפרט aRc. לכן $\langle a,c\rangle\in R\cup S$.

4. $\underline{R\cap S}$. היחס אינו יחס שקילות שכן אינו רפלקסיבי. למשל $\langle 1,1\rangle\in R\setminus S$ ולכן $\langle 1,1\rangle\notin R\cap S$.
5. $\underline{R\circ S}$

הערה בהינתן יחסים E,F על קבוצה A מגדירים את <u>ההרכבה</u> $E\circ F$ להיות אוסף הזוגות

$$E\circ F\overset{\text{הגדרה}}{=\!=}\{\langle a,b\rangle\in A\times A\mid \exists c\in A(aEc\wedge cFb)\}.$$

<u>מתי $\langle a,b\rangle\in R\circ S$?</u> אם קיים $c\in\mathbb{Z}$ כך ש־aRc ו־cSb. כלומר כך ש־$a-c$ ו־$b+c$ מתחלקים ב־5.

טענה $R\circ S=S$. **הוכחה.**

$\supseteq$ נניח כי aSb. אז עבור $c=a$ מתקיים כי aRa ו־aSb ולכן $\langle a,b\rangle\in R\circ S$.

$\subseteq$ נניח כי $\langle a,b\rangle\in R\circ S$. אזי יש $c\in\mathbb{Z}$ כך ש־aRc ו־cSb. נרשום $a-c=5k$ ו־$c+b=5r$. אז

$$a+b=a-c+c+b=5(k+r)$$

ולכן $a+b$ מתחלק ב־5 ובפרט aSb. קיבלנו כי $R\circ S\subseteq S$.

■

חלוקות ומנות

תהא A קבוצה ועליה יחס **שקילות** E. ניזכר כי מחלקות השקילות של E ב־A מוגדרות ע"י

$$a/E=[a]_E=\{b\in A\mid aEb\}.$$

נשים לב לעובדה הבאה

טענה ג נניח כי E הוא יחס שקילות על A. אז

1. מחלקות השקילות של E מוגדרות היטב, כלומר־ אם $a,b\in A$ מקיימות aEb אז $[a]_E=[b]_E$.
2. אם $[a]_E\neq[b]_E$ אז $[a]_E\cap[b]_E=\varnothing$.
3. לכל $a\in A$ יש $b\in A$ כך ש־$a\in[b]_E$.

הוכחה.

1. מכיוון ש־E יחס סימטרי, מספיק להראות כי אם aEb אז $[b]_E\subseteq[a]_E$. ניקח $c\in[a]_E$. אז לפי הגדרה aEc. כמו כן, מההנחה מתקיים כי aEb ולכן bEa ולכן, מטרנזיטיביות bEc.
2. אם $c\in[a]_E\cap[b]_E$ אז aEc וכן cEb ולכן aEb. מהסעיף הקודם זה אומר ש־$[a]_E=[b]_E$.

3. מרפלקסיביות, לכל $a \in A$ מתקיים $a \in [a]_E$.

■

למעשה, מה שהוכחנו הוא כי כל יחס שקילות על A מגדיר **חלוקה** של A, כלומר־ אוסף תתי קבוצות $\mathcal{E}$ **לא ריקות** כך ש־$A = \bigcup \mathcal{E}$ וכך ש־$x \cap y = \varnothing$ בכל מקרה בו $x, y \in \mathcal{E}$, עם $x \neq y$.
מצד שני־ גם הטענה הבאה נכונה.

טענה ד תהא A קבוצה ונניח כי $\mathcal{E}$ אוסף של תתי־קבוצות לא ריקות כך ש־$x \cap y$ כאשר $x, y \in \mathcal{E}$ ו־$x \neq y$, וכך ש־$A = \bigcup \mathcal{E}$. אז קיים יחס שקילות E על A כך ש־

$$\{[a]_E \mid a \in A\} = \mathcal{E}.$$

הוכחה. נסמן $\mathcal{E} = \{A_i \mid i \in I\}$. נגדיר $E \subseteq A \times A$ ע"י $\langle a, b\rangle \in E$ אם"ם קיים $i \in I$ כך ש־$a \in A_i$ וגם $b \in A_i$, או במילים אחרות $E = \bigcup\{A_i \times A_i \mid i \in I\}$. נוכיח ש־$E$ יחס שקילות:

- **רפלקסביות.** אם $a \in A$ אז יש $i \in I$ כך ש־$a \in A_i$ ולכן $\langle a, a\rangle \in E$, כלומר aEa.
- **סימטריות.** אם $a, b \in A$ מקיימים aEb, אז יש $i \in I$ כך ש־$a \in A_i$ וגם $b \in A_i$ ולכן גם $\langle a, b\rangle \in E$ וגם $\langle b, a\rangle \in E$. מכאן ש־$bEa$.
- **טרנזיטיביות.** נניח כי aEb ו־bEc, אז יש $i, j \in I$ כך ש־$a, b \in A_i$ ו־$b, c \in A_j$. מכיוון ש־$b \in A_i \cap A_j$, ו־$A_i \cap A_j = \varnothing$ אלא אם כן $i = j$, נובע כי $i = j$ ולכן מתקיים כי aEc.

לבסוף נשים לב שלפי הגדרה, אם $a \in A_i \subseteq A$ עבור $i \in I$ אז $[a]_E = A_i$, שכן לפי הגדרה

$$b \in [a]_E \iff aEb \iff b \in A_i.$$

■

תרגיל 1 תהא $A = \mathbf{P}(\{1, \ldots, 100\})$. נגדיר יחס על A ע"י

$$xRy \iff \sum_{a \in x} a = \sum_{b \in y} b.$$

הראו כי R הוא יחס שקילות וחשבו את מחלקות השקילות של R.

פתרון. הוכחת הרפלקסיביות, סימטריות והטרנזיטיביות ברורות. מחלקות השקילות של R הם

$$\{\{x \subseteq \{1, \ldots, 100\} \mid \sum_{a \in x} a = n\} \mid n \in \{1, \ldots, \sum_{i=1}^{100} i = \binom{101}{2}\}\}.$$

■

תרגול 8

המשך יחסי שקילות

חלוקות ומנות

חלוקות ומחלקות שקילות

הגדרה תהא A קבוצה ו־E יחס שקילות על A. בהינתן $a \in A$, מחלקת השקילות של a ביחס E היא

$$a/E = [a]_E = \{b \in A \mid bEa\}.$$

תזכורת כל יחס שקילות E על A מגדיר חלוקה של A לתתי־קבוצות לא ריקות, הנתונות ע"י מחלקות השקילות של A. כלומר־

- לכל $a \in A$, $a/E \neq \varnothing$ ו־$A = \bigcup\{a \in A \mid a/E\}$,
- $a/E = b/E$ אס"ס aEb,
- אם $a/E \neq b/E$ אז $a/E \cap b/E = \varnothing$.

הגדרה תהא A קבוצה ויהא E יחס שקילות על A. מרחב המנה A/E מוגדר להיות אוסף מחלקות השקילות של E ב־A.

דוגמה נגדיר יחס E על קבוצת האנשים בעולם A ע"י

$$aEb \iff a \text{ ו־} b \text{ גרים באותה שכונה}.$$

אז E הוא בבירור יחס שקילות (בדקו זאת!). מהו מרחב המנה A/E?

$$A/E = \{\{\text{האנשים שגרים בשכונה ד', ב"ש}\}, \{\text{האנשים שגרים ברמת־דוד, חיפה}\}, \{\text{האנשים שגרים בברוקלין , ניו־יורק}\}, \ldots\}$$

$$\simeq \{\text{קבוצת השכונות}\}$$

תרגיל 1 נגדיר יחס E על הקבוצה $A = \mathbb{C}$ ע"י $z_1 E z_2$ אס"ס $|z_1| = |z_2|$. הראו כי E הינו יחס שקילות על $\mathbb{C}$. מהי מחלקת השקילות של i? חשבו את קבוצת המנה A/E.

פתרון. ניזכר כי עבור $z = x + iy \in \mathbb{C}$ הערך המוחלט של z מוגדר להיות $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. ההוכחה כי E הינו יחס שקילות היא מיידית, ומושארת כתרגיל.

$$i/E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = |i| = 1\} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

כלומר־ מחלקת השקילות של i היא אוסף הנקודות $x + iy$ הנמצאות במרחק 1 מהנקודה $0 \in \mathbb{C}$.

באופן כללי יותר, לכל $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ נגדיר קבוצה

$$.T_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$$

אז לכל $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ מתקיים כי $T_r = r/E$. כמו כן, לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים כי $z/E = T_{|z|}$. לכן מרחב המנה A/E הוא אוסף המעגלים $\{T_r \mid r \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$. ■

תרגיל 2 נגדיר יחס E על הקבוצה $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{\langle 0,0\rangle\}$ ע"י

$$.\langle x_1, y_1\rangle E \langle x_2, y_2\rangle \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}(x_1 = \lambda x_2 \wedge y_1 = \lambda y_2)$$

הראו כי E הוא יחס שקילות. מהי מחלקת השקילות של $\langle 0,1\rangle$? חשבו את קבוצת המנה A/E.

פתרון.

- **רפלקסיביות.** לכל $x = \langle x_1, y_1\rangle$ מתקיים כי $1 \cdot x = x$ ולכן xEx.
- **סימטריות.** יהיו $x = \langle x_1, y_1\rangle$ ו־$x' = \langle x_2, y_2\rangle$ כך ש־xEx'. אז יש $\lambda \in \mathbb{R}$ כך ש־$x = \lambda x'$. נשים לב כי בהכרח $\lambda \neq 0$, שכן $x = \lambda x' \neq \langle 0,0\rangle$ (כי $\langle 0,0\rangle \notin A$). לכן $x' = \frac{1}{\lambda}x$ ועל כן $x'Ex$.
- **טרנזיטיביות.** נניח כי $x, x', x'' \in A$ מקיימים כי xEx' ו־$x'Ex''$. אז יש $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ כך ש־$x = \lambda x'$ ו־$x' = \mu x''$. אז $x = \lambda x' = (\lambda\mu)x''$ ולכן xEx''.

מחלקת השקילות של $\langle 0,1\rangle$ היא

$$.\langle 0,1\rangle/E = \{\langle x,y\rangle \mid \exists\lambda \in \mathbb{R} \mid \langle 0,1\rangle = \langle \lambda x, \lambda y\rangle\} = \{\langle 0,y\rangle \mid y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = Span_{\mathbb{R}}\{\langle 0,1\rangle\} \setminus \{\langle 0,0\rangle\}$$

כל מחלקת שקילות שאינה $\langle 0,1\rangle/E$, מכילה איבר יחיד מהצורה $\langle 1,x\rangle$ לאיזשהו $x \in \mathbb{R}$. כדי להוכיח זאת נשים לב כי אם $\langle y_1, y_2\rangle \in A \setminus \langle 0,1\rangle/E$, אז $\langle y_1, y_2\rangle \neq \langle 0,0\rangle$ וגם $\langle y_1, y_2\rangle \notin Span_{\mathbb{R}}\{\langle 0,1\rangle\}$ ולכן בפרט $y_1 \neq 0$ ו־$\langle y_1, y_2\rangle E \langle 1, \frac{y_2}{y_1}\rangle$, ומחלקת השקילות של $\langle y_1, y_2\rangle$ מכילה את האיבר $\langle 1,x\rangle$ עבור $x = \frac{y_2}{y_1}$. בנוסף, אם $\langle 1,x\rangle$ ו־$\langle 1,x'\rangle$ הם שני איברים במחלקת השקילות $\langle y_1, y_2\rangle/E$ אז בפרט $\langle 1,x\rangle E \langle 1,x'\rangle$ ולכן קיים $\lambda \in \mathbb{R}$ כך ש־

$$1 = \lambda \quad \wedge \quad x = \lambda x' = x'$$

ולכן $\langle 1,x\rangle = \langle 1,x'\rangle$. מצאנו אם כך קבוצת המנה A/E ניתנת לתיאור באופן הבא

$$A/E = \{\langle 1,x\rangle/E \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{\langle 0,1\rangle/E\}$$

כאשר הקבוצות המתוארות לעיל הן זרות, והנציגים בקבוצה שבצד ימין מגדירים מחלקות שקילות שונות $\langle 1,x\rangle/E \neq \langle 1,x'\rangle/E$ כאשר $x \neq x'$. ■

הגדרת באמצעות נציגים

לעתים קרובות נרצה להגדיר פעולות על מרחבי מנה. כדי לבצע זאת, במקרים רבים נגדיר את הפעולות ע"י בחירה של נציג, מתן ערך כלשהו לנציג עצמו, והגדרת הערך של הפעולה על כל מחלקה השקילות לפי ערך הנציג. במקרה וזה מה שברצוננו לעשות־ עלינו להראות כי ההגדרה שביצענו **אינה תלוייה בבחירת הנציג**, כלומר־ שאם היינו מחליפים את הנציג שלקחנו בנציג שונה, היינו מקבלים בדיוק את אותה ההגדרה.

דוגמה (כפל וחיבור של מספרים רציונליים.) המספרים הרציונליים ניתנים להגדרה כקבוצת המנה של $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ תחת היחס E המוגדר ע"י $(m,n)E(m',n')$ אס"ם $mn' = nm'$. תחת היחס הזה, המספר $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ מזוהה עם מחלקת השקילות של הזוג $(a,b) \in A$.

החיבור והכפל מוגדר על מחלקות השקילות ע"י

$$[(a,b)] \oplus [(c,d)] = [(ad+bc, bd)] \quad , \quad [(a,b)] \odot [(c,d)] = [(ac,bd)].$$

נראה כי פעולות אלה אינן תלויות בבחירת הנציגים. נניח כי $(a,b)E(a',b')$ ו־$(c,d)E(c',d')$. כדי להוכיח כי פעולת החיבור אינה תלויה בבחירת הנציגים עלינו להראות כי $(ad+bc, bd)E(a'd'+b'c', b'd')$, כלומר־

$$(a'd'+b'c')bd = (ad+bc)b'd' \quad \Longleftrightarrow \quad (a'b)\cdot(d'd) + (b'b)\cdot(c'd) \overset{\text{מהגדרת } E}{=} (ab')\cdot(dd') + (bb')(cd') = (ad+bc)b'd'$$

כנדרש. באופן דומה־

$$[(ac,bd)] = [(a'c', b'd')] \quad \Longleftrightarrow \quad acb'd' = (ab')\cdot(cd') = (a'b)\cdot(c'd) = (a'c')\cdot(bd)$$

כנדרש.

תרגיל 3 נתונים $A = \mathbb{R}[x]$ אוסף הפולינומים מעל $\mathbb{R}$ ו־E היחס המוגדר ע"י fEg אס"ם $f-g$ פולינום המתחלק ב־x^2+1. הראו כי E יחס שקילות הראו כי פעולות החיבור והכפל הרגילים על פולינומים מגדירים פעולות שאינן תלויות בבחירת הנציגים על מרחב המנה A/E.

פתרון. ההוכחה כי E הוא יחס שקילות מיידית (מושארת כתרגיל). נניח כי fEf' ו־gEg'. אז $(f+g)-(f'+g') = (f-g)+(f'-g')$ ולכן מתחלק ב־x^2+1. לגבי כפל נשים לב כי

$$fg - f'g' = fg - fg' + fg' - f'g' = f\underbrace{(g-g')}_{x^2+1\text{ מתחלק ב־}} + \underbrace{(f-f')}_{x^2+1\text{ מתחלק ב־}}g'$$

ולכן גם כן מתחלק ב־x^2+1. קיבלנו כי הפעולות

$$[f] \oplus [g] = [f+g] \quad , \quad [f] \odot [g] = [f \cdot g]$$

מוגדרות היטב ואינן תלויות בבחירת הנציגים. ■

תרגול 9

יחסי סדר חלקיים

יחסי סדר וקבוצות סדורות חלקית

הגדרה יחס R על קבוצה A נקרא יחס סדר חלקי אם הוא

- רפלקסיבי ($\mathbf{Id}_A \subseteq R$),
- טרנזיטיבי ($R \circ R \subseteq R$), ו־
- אנטי־סימטרי ($R^{-1} \cap R = \mathbf{Id}_A$).

הגדרות שקולות לאנטי־סימטריות:

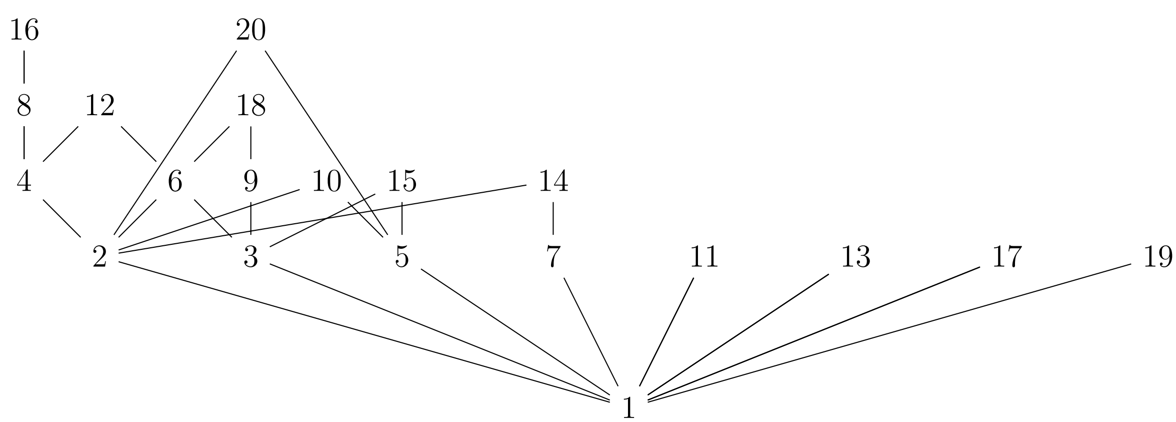
- אם aRb וגם bRa אז $a = b$,
- אם $a \neq b$ אז $\neg(aRb)$ או $\neg(bRa)$,
- אם $a \neq b$ וגם aRb אז בהכרח $\neg(bRa)$.

הגדרה (איבר מקסימלי, מקסימום, איבר מינימלי, מינימום) תהא (A, R) קס"ח, איבר $a \in A$ נקרא מקסימלי (מירבי) אם מתקיים $\forall x \in A(aRx \to a = x)$. האיבר נקרא מקסימום אם $\forall x \in A(xRa)$. נשים לב כי, מאנטי־סימטריות, מקסימום ב־A הוא בהכרח איבר מקסימלי. איבר מקסימלי, לעומת זאת, אינו בהכרח מקסימום.

בדומה מגדירים איבר מינימלי (מזערי) להיות $a \in A$ המקיים כי $\forall x \in A(xRa \to x = a)$ ומינימום הוא איבר a המקיים כי $\forall x \in A(aRx)$.

תרגיל 1 שרטטו את הקס"ח $(\{1, \ldots, 20\}, |_{\upharpoonright\{1,\ldots,20\}})$. מה האיברים המינימליים/מקסימליים? האם יש מקסימום/מינימום?

פתרון.



האיברים $11, 12, \ldots, 20$ כולם מקסימליים ואינם מקסימום. האיבר 1 הוא מינימום ולכן גם מינימלי. ■

הגדרה בהינתן קס"ח (A,R) וקבוצה $B \subseteq A$, היחס המצומצם $R_{\upharpoonright B}$ נתון ע"י הקבוצה $R \cap B \times B$.

תרגיל 2 הוכיחו או הפריכו. יהא (A,R) קס"ח.

1. נניח $B \subseteq A$. אז $(B, R_{\upharpoonright B})$ גם היא קס"ח.
2. נניח $S \subseteq R$. אז (A,S) גם קס"ח.
3. נניח $S \subseteq R$ מקיימת כי $\mathrm{id}_A \subseteq S$ ו־$S \circ S \subseteq S$. אז (A,S) קס"ח.
4. נניח כי S יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי על A. אז S יחס סדר אס"ס $S \cup S^{-1}$ יחס שקילות על A.

פתרון.

1. נכון. רפלקסיביות ברורה, מכיוון ש־$\mathrm{id}_B \subseteq B \times B$, $\mathrm{id}_B \subseteq R$. כמו כן, אם $b_1, b_2 \in B$ מקיימים כי $b_1 R_{\upharpoonright B} b_2,\ b_2 R_{\upharpoonright B} b_1$ אז $b_1 R b_2$ ו־$b_2 R b_1$, ומאנטיסימטריות R מקבלים כי $b_1 = b_2$. נניח כי $b_1, b_2, b_3 \in B$ מקיימים כי $b_1 R_{\upharpoonright B} b_2,\ b_2 R_{\upharpoonright B} b_3$. אז $b_1 R b_3$ וכן $\langle b_1, b_3\rangle \in B \times B$ ולכן $b_1 R_{\upharpoonright B} b_3$.
2. לא נכון. למשל, עבור $\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 1,2\rangle\}$, $A = \{1,2\}$ ו־$S = \varnothing$.
3. נכון. ההנחות אומרות כי S רפלקסיבי ואנטיסימטרי. בנוסף, אם $b_1, b_2 \in B$ מקיימים כי $b_1 S b_2$ ו־$b_2 S b_1$. מכיוון ש־$S \subseteq R$ מתקיים כי $b_1 R b_2$ ו־$b_2 R b_1$ ולכן $b_1 = b_2$.
4. לא נכון. למשל, עבור $A = \{1,2,3\}$ ו־$S = A \times A$. אז $S = S \cup S^{-1}$ מכיוון ש־S סימטרי, ו־S אינו יחס סדר.

■

יחסי סדר מלאים

הגדרה יחס סדר חלקי R על קבוצה A נקרא מלא (או קווי) אם מתקיים כי לכל $x, y \in A$ מתקיים כי xRy או yRx. (במלים אחרות $R \cup R^{-1} = A^2$).

תרגיל 3 נניח כי A קבוצה ו־R יחס סדר מלא על A. נניח כי S יחס סדר חלקי על A וכי $R \subseteq S$. אז $R = S$.
הסיקו כי יחסים מלאים הינם איברים מקסימליים בקבוצת הסדרים החלקיים על A, עם יחס ההכלה.

פתרון. עלינו להראות כי $S \subseteq R$. יהיו $a, b \in A$ כך ש־aSb, ונניח בשלילה כי $\langle a,b\rangle \notin R$. מכיוון ש־$R$ יחס מלא מתקיים בהכרח כי bRa ומכיוון ש־$R \subseteq S$ מתקיים כי bSa, ומכיוון ש־S יחס סדר חלקי, בהכרח $a = b$. אבל אז aRb מתקיים מכיוון ש־R רפלקסיבי. סתירה. ■

תרגיל 4 יהא $A = \mathbb{R}[x]$ אוסף הפולינומים ממעלה קטנה או שווה מ־2.

1. נגדיר יחס R על A ע"י fRg אס"ס $f(x) - g(x) \geq 0$ לכל $x > 0$. הראו כי R יחס סדר על A. האם R יחס סדר מלא?
2. נגדיר יחס סדר T על A ע"י fTg אס"ס קיים $x_0 \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > x_0$, $f(x) - g(x) \geq 0$. הראו כי T הינו יחס סדר מלא על A המעדן את R.

פתרון.

1. רפלקסיביות וטרנזיטיביות ברורים. נניח כי fRg וכן gRf. אז $f(x) = g(x)$ לכל $x > 0$ ובפרט הפולינום $f - g$ מתאפס באינסוף מקומות ולכן שווה לפולינום האפס. לכן $f = g$ ו־R אנטיסימטרי.

   R אינו מלא, למשל־ עבור $f(x) = x$ ו־$g(x) = 1$ מתקיים כי $\langle f,g\rangle \notin R$, שכן (למשל) $f(\frac{1}{2}) - g(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} < 0$, וכן $\langle g,f\rangle \notin R$, שכן (למשל) $f(2) - g(2) = 1 > 0$.

2.
- רפלקסיביות מתקיימת שכן לכל $f \in A$ ולכל $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(x) = 0 \geq 0$.
- טרנזיטיביות מתקיימת, שכן אם fTg ו־gTh אז יש $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ כך ש

$$\forall x > x_2 \left(g(x) - h(x) \geq 0\right) \quad , \quad \forall x > x_1 \left(f(x) - g(x) \geq 0\right).$$

ניקח $x_0 = \max\{x_1, x_2\}$. אז לכל $x > x_0$ מתקיים כי $f(x) - h(x) = f(x) - g(x) + g(x) - h(x) \geq 0$.

- נניח כי $f, g \in A$ מקיימים כי fTg וכן gTf. אזי קיימים $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ כך ש־$f(x) - g(x) \geq 0$ לכל $x > x_1$ וכן $g(x) - f(x) \geq 0$ לכל $x > x_2$. נובע כי עבור $x_0 = \max\{x_1, x_2\}$ מתקיים כי לכל $x > x_0$, $f(x) - g(x) = 0$. מכאן שהפולינום $f - g$ מתאפס באינסוף נקודות (כל התחום (x_0, ∞)) ולכן שווה לפולינום האפס. מכאן ש־$f = g$ והיחס T אנטיסימטרי.
- נראה כי T יחס מלא. ניקח $f, g \in A$ שרירותיים. נניח בשלילה כי $\langle f, g\rangle, \langle g, f\rangle \notin T$. אז, לפי שלילת הגדרת T, לכל $x_0 \in \mathbb{R}$ קיימים $x_1, x_2 > x_0$ כך ש־$f(x_1) - g(x_1) < 0$ ו־$g(x_2) - f(x_2) < 0$. ממשפט ערך הביניים, קיים $y \in (\min\{x_1, x_2\}, \max\{x_1, x_2\})$ כך ש־$f(y) - g(y) = 0$. כלומר־ הראינו את העובדה הבאה:

טענה ה לכל $x_0 \in \mathbb{R}$ קייס $y > x_0$ כך ש־$f(y) - g(y) = 0$.

כעת, נוכל להשתמש בטענה כדי להוכיח כי $f - g$ מתאפס באינסוף נקודות ב־$\mathbb{R}$. אכן, אם נניח בשלילה כי $f - g$ מתאפס במספר סופי של נקודות נוכל לקחת $\{y_1, \ldots, y_d\} \subseteq \mathbb{R}$ אוסף **כל** הנקודות שבהן $f - g$ מתאפס. אז עבור $x_0 = \max\{y_1, \ldots, y_d\}$, לפי הטענה, קיים $y > x_0$ כך ש־$f(y) - g(y) = 0$. אך $y \notin \{y_1, \ldots, y_d\}$, שכן הוא גדול ממש מהאיבר הגדול ביותר בקבוצה. סתירה

נובע מכך ש־$f - g$ מתאפס באינסוף נקודות ולכן שווה לפולינום האפס. בפרט $f = g$ ולכן, מרפלקסיביות T, $\langle f, g\rangle \in T$ וגם $\langle g, f\rangle$. סתירה.

- נראה כי T מעדן את היחס R. לצורך כך עלינו להראות כי אם fRg אז fTg. עובדה זו נובעת, מכיוון שאם fRg ניתן לקחת $x_0 = 0$ ואז לכל $x > x_0$ מתקיים כי $f(x) - g(x) \geq 0$, ולכן fTg.

■

תרגיל 5 נשתמש בסימונים של הסעיף הקודם, ונגדיר $B \subseteq A$ להיות הקבוצה $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ של פולינומים ממעלה קטנה או שווה מ־2. יהא $L = T_{\upharpoonright B}$.

נגדיר יחס נוסף S על B ע"י

$$\begin{aligned}&(a_2x^2 + a_1x + a_0)S(b_2x^2 + b_1x + b_0) \\ &\qquad \iff (a_2 \leq b_2) \land ((a_2 = b_2) \to (a_1 \leq b_1)) \land (((a_2 = b_2) \land (a_1 = b_1) \to (a_0 \leq b_0))\end{aligned}$$

(כלומר־ S הוא היחס הלקסיקוגרפי על A, תחת הזיהוי $A \to \mathbb{R}^3 : a_0 + a_1x + a_2x^2 \mapsto (a_0, a_1, a_2)$). הראו כי S הוא יחס סדר מלא על B וכי S שווה ל־L.

פתרון.

- רפלקסיביות ברורה מהגדרה.
- טרנזיטיביות־ אם $a_0 + a_1x + a_2x^2 S b_0 + b_1x + b_2x^2$ ו־$b_0 + b_1x + b_2x^2 S c_0 + c_1x + c_2x^2$ אז $a_2 \leq b_2 \leq c_2$ וכן אם $a_2 = b_2 = c_2$ אז $a_1 \leq b_1 \leq c_1$ ואם בנוסף גם $a_1 = b_1 = c_1$ אז $a_0 \leq b_0 \leq c_0$, כנדרש.
- אנטי־סימטריות־ אם $a_0 + a_1x + a_2x^2 S b_0 + b_1x + b_2x^2$ וגם $b_0 + b_1x + b_2x^2 S a_0 + a_1x + a_2x^2$ אז

$$\begin{aligned}
&a_2 \leq b_2 \land b_2 \leq a_2 && \Rightarrow && a_2 = b_2 \\
&a_2 = b_2 \to (a_1 \leq b_1 \land (b_1 \leq a_1) && \Rightarrow && a_1 = b_2 \\
&(a_2 = b_2 \land a_1 = b_1) \to (a_0 \leq b_0 \land b_0 \leq a_0). && \Rightarrow && a_0 = b_0
\end{aligned}$$

לכן $a_0 + a_1x + a_2x^2 = b_0 + b_1x + b_2x^2$.

כדי להראות כי $S = L$, לפי התרגיל הקודם מספיק להראות כי $S \subseteq L$. נניח כי aLb עבור $a(x) = a_0 + x_1x + a_2x^2$, $b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$. נסמן $a(x) - b(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$. נשים לב כי המקדם המוביל של $a - b$ הוא בהכרח חיובי, אחרת $\lim_{x\to+\infty} a(x) - b(x) = -\infty$ והיחס L לא מתקיים. אם $c_2 > 0$ אז $a_2 > b_2$ ולכן aSb. אחרת, אם $c_2 = 0$ בהכרח $a_2 = b_2$. נניח כי $c_1 > 0$ אז $a_1 > b_1$ ושוב aSb. לבסוף אם $c_1 = 0$ אז $a_1 = b_1$ ובהכרח $c_0 > 0$ ולכן aSb. ■

תרגול 10

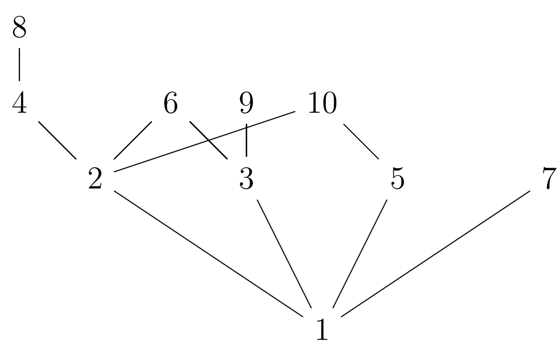
יחסי־סדר חלקיים (המשך)

יחסי סדר וקבוצות סדורות חלקית

שרשראות ואנטי־שרשראות

תהא (A,R) קס"ח. תת־קבוצה $B \subseteq A$ נקראת **שרשרת** אם $(B, R_{\upharpoonright B})$ קס"ח קווית. B נקראת **שרשרת מקסימלית** אם היא לכל $C \subseteq A$ המכילה את B, אם C היא שרשרת אז $B = C$.

דוגמה



השרשראות המקסימליות הן

$$\{8,4,2,1\},\ \{6,2,1\},\ \{6,3,1\},\ \{9,3,1\},\ \{10,2,1\},\ \{10,5,1\},\ \{7,1\}.$$

הגדרה תת־קבוצה $A \subseteq B$ היא <u>אנטי־שרשרת</u> אם $R_{\upharpoonright B} = \mathrm{id}_B$, כלומר, לכל $x,y \in B$ כך ש־y ־ $x \neq$ מתקיים $\langle x,y\rangle,\ \langle y,x\rangle \notin R$.

B נקראת <u>אנטי־שרשרת מקסימלית</u> אם כל תת־קבוצה C המכילה את B והינה אנטי־שרשרת מקיימת כי $C = B$.

תרגיל 1 תהא (A,R) קס"ח סופית. הראו כי כל שרשרת מקסימלית ב־A מכילה איבר מקסימלי ואיבר מינימלי של A.

הראו כי קבוצת האיברים המקסימלים של A היא אנטי־שרשרת מקסימלית. האם בהכרח קבוצת המקסימליים מהווה אנטי־שרשרת מגודל מקסימלי?

פתרון. תהא $C \subseteq A$ שרשרת. מכיוון ש־$(C, R_{\upharpoonright C})$ קבוצה סדורה קווית וסופית, קיים בה מקסימום (של C). נסמן מקסימום זה ב־x ונטען כי בהכרח x מקסימלי ב־A. אחרת, מהגדרת איבר מקסימלי, אם x אינו מקסימלי ב־A, קיים איבר $y \in A$ כך ש־$x \neq y$ ו־xRy. נטען כי הקבוצה $C \cup \{y\}$ במקרה זה היא שרשרת המכילה את C ולא שווה לה. לצורך כך עלינו להראות כי הצמצום של R ל־$C \cup \{y\}$ הינו מלא. ניקח $z_1, z_2 \in C \cup \{y\}$. אם $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ אז מכיוון ש־C שרשרת מתקיים כי z_1Rz_2 או z_2Rz_1. במקרה בו $z_1 = y$ ו־$z_2 \in \mathbb{C}$ מתקיים כי z_2Rx, מכיוון ש־x מקסימום ב־C, ו־xRz_1, מבחירת $z_1 = y$. מטרנזיטיביות, מתקיים כעת כי z_2Rz_1. באופן דומה, במקרה בו $z_2 = y$ מקבלים כי z_1Rz_2. לכן $C \cup \{y\}$ שרשרת, בסתירה למקסימליות C.

העובדה כי קבוצת המקסימליים הינה אנטי־שרשרת מתקיימת מכיוון שאם $x_1, x_2 \in A$ שניהם מקסימליים ו־x_1Rx_2, אז ממקסימליות x_1 מתקיים כי $x_1 = 2$. נסמן ב־X את קבוצת האיברים המקסימליים של A, ונניח בשלילה כי X אינה אנטי־שרשרת מקסימלית. אז קיים $y \in A \setminus X$ כך ש־$X \cup \{y\}$ היא אנטי־שרשרת. מהגדרה, מכיוון ש־$y \notin X$, מתקיים כי y אינו איבר מקסימלי ב־A. תהא $C \subseteq A$ שרשרת מקסימלית ב־A המכילה את y (שרשרת מקסימלית כזו בהכרח קיימת מכיוון שקבוצת השרשראות המכילות את y אינה ריקה, ומוכלת ב־$\mathbf{P}(A)$ ולכן סופית; בפרט מכילה איבר מקסימלי ביחס ההכלה). לפי הסעיף הקודם, הקבוצה C מכילה איבר מקסימלי, ומכיוון שהסדר על C מלא, בהכרח איבר זה ניתן להשוואה עם y, בסתירה להנחה כי $X \cup \{y\}$ אנטי־שרשרת.

קבוצת המקסימליים אינה בהכרח אנטי־שרשרת מאורך מקסימלי. למשל, ביחס $(\mathbf{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ קבוצת המקסימליים מכילה איבר בודד (מכיוון ש־$\mathbb{N}$ הוא מקסימום), אבל יש בקס"ח אנטי־שרשראות אינסופיות־ למשל קבוצת היחידונים. ∎

תרגיל 2 תהא $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ונגדיר על A יחס $\prec$ ע"י

$$\langle a, b\rangle \prec \langle c, d\rangle \iff (a \le b) \wedge (c \le d)$$

הראו כי $\prec$ יחס סדר חלקי, וכי בקבוצה A כל אנטי־שרשרת היא סופית. הראו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ יש ב־A אנטי־שרשרת מקסימלית מגודל n.

הערה תרגיל זה לא הוצג בתרגול האחרון מפאת חוסר זמן. הוא מוסף כאן לצורך העשרה, מומלץ (מאוד!) לנסות לפתור לבד לפני קריאת הפתרון.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ddots\ \ \iddots & & \ddots\ \ \iddots & & \ddots\ \ \iddots & & \ddots\ \ \iddots & & \ddots\ \ \iddots \\
\langle 4,0\rangle & & \langle 3,1\rangle & & \langle 2,2\rangle & & \langle 1,3\rangle & & \langle 0,4\rangle \\
& \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup & \\
& \langle 3,0\rangle & & \langle 2,1\rangle & & \langle 1,2\rangle & & \langle 0,3\rangle & \\
& & \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup & & \\
& & \langle 2,0\rangle & & \langle 1,1\rangle & & \langle 0,2\rangle & & \\
& & & \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup & & & \\
& & & \langle 1,0\rangle & & \langle 0,1\rangle & & & \\
& & & & \diagdown\ \diagup & & & & \\
& & & & \langle 0,0\rangle & & & &
\end{array}$$

הוכחה. תהא $X \subseteq A$ אנטי־שרשרת כלשהי. נשים לב לעובדות הבאות:

1. לכל $\langle x, y\rangle, \langle x', y'\rangle \in X$ מתקיים כי $x = x'$ אם"ם גם $y' = y$. אכן, אם $x = x'$ ו־$y = y'$ אז בהכרח מתקיים כי $y \le y'$ או $y' \le y$, שכן היחס $\le$ על $\mathbb{N}$ הוא מלא. בפרט, במצב זה מתקיים כי $\langle x, y\rangle \prec \langle x', y'\rangle$ או $\langle x', y'\rangle \prec \langle x, y\rangle$, בסתירה להנחה כי X אנטי שרשרת.

2. אם $\langle x, y\rangle, \langle x', y'\rangle \in X$ מקיימים כי $x < x'$ אז בהכרח $y' < y$. אחרת, מתקיים כי $x < x'$ וגם $y \le y'$, ולכן $\langle x, y\rangle \prec \langle x', y'\rangle$. שוב, סתירה להנחה כי X אנטי שרשרת.

מהעובדה הראשונה נובע כי לא קיימים איברים שונים ב־X שלהם קוארדינטה ראשונה זה. בפרט, ניתן להשתמש בעובדה כי הטבעיים סדורים היטב כדי למנות את איברי X בתור $\{\langle x_0, y_0\rangle, \langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle, \ldots\}$ כך ש־$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$. מהעובדה השנייה נובע כי בהכרח במצב זה מתקיים כי $y_0 > y_1 > y_2 > \ldots$. מכיוון שבמספרים הטבעיים אין שרשרת יורדת אינסופית, נובע כי בהכרח הקבוצה X סופית.

לגבי הטענה השנייה בתרגיל־ לכל $n \in \mathbb{N}$, הקבוצה $\{\langle 0, n-1\rangle, \langle 1, n-2\rangle, \ldots, \langle n-2, 1\rangle, \langle n-1, 0\rangle\}$ היא אנטי־שרשרת מגודל n. ∎

משפט דילוורת' וחברים

הגדרה (גובה של איבר) תהא $(P,\leq)$ קס"ח סופית. הגובה של איבר $a\in P$ הוא המקסימום $h_P(a)$ של גודל שרשרת $\{a_1,a_2\ldots,a_m\}$ של איברים שונים כך ש־ $a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_m\leq a$. כלומר

$$.h_P(a)=\max\{m\in\mathbb{N}\mid\exists a_1,\ldots,a_m(a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_m\leq a)\}$$

הגובה של הקס"ח $(P,\leq)$ הוא הגובה המקסימלי של איבר ב־P.

הערה לחילופין ניתן להגדיר את הגובה של P בתור גודל השרשרת הארוכה ביותר ב־P. נהוג גם להגדיר את הרוחב של P בתור הגודל של האנטי־שרשרת הארוכה ביותר ב־P.

משפט (דילוורת' Dillworth) תהא $(P,\leq)$ קס"ח מרוחב m. אז קיימות שרשראות $C_1,\ldots,C_m\subseteq P$ כך ש־ $C_i\cap C_j=\varnothing$ לכל $i\neq j$ וכך ש־$P=C_1\cup C_2\cup\ldots\cup C_m$.

משפט (דילוורת' הדואלי) תהא $(P,\leq)$ קס"ח מגובה m. אז קיימות אנטי־שרשראות $X_1,X_2,\ldots,X_m$, זרות בזוגות, כך ש־$P=X_1\cup\ X_2\cup\ldots\cup X_m$.

תרגיל 3 תהא $(P,\leq)$ קס"ח סופית, ונניח כי $|P|=n$. הראו כי לפחות אחד משני התנאים הבאים מתקיים:

1. הגובה של P גדול או שווה מ־$\lfloor\sqrt{n-1}\rfloor+1$, או
2. הרוחב של P גדול או שווה מ־$\lfloor\sqrt{n-1}\rfloor+1$.

פתרון. אם התנאי (1) מתקיים, אין מה להוכיח. אחרת, בהכרח מתקיים כי גובה P קטן מ־$\lfloor\sqrt{n-1}\rfloor+1$. נניח בשלילה כי הרוחב של P קטן או שווה ל־$\lfloor\sqrt{n-1}\rfloor$. לפי משפט דילוורת' הדואלי, ניתן למצא אנטי־שרשרות $X_1,\ldots,X_m$, כאשר m קטן מהגובה של P, כך ש־$X_i\cap X_j=\varnothing$ לכל $i\neq j$ וכך ש־$P=X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_m$. אז

$$.\left|X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_m\right|\leq m\cdot\lfloor\sqrt{n-1}\rfloor<(\lfloor\sqrt{n-1}\rfloor)^2<n$$

בסתירה להנחה. ■

תרגיל 4 הראו כי בכל קבוצה של 5 מספרים טבעיים קיימים 3 מספרים x,y,x כך ש־$x\mid y$ ו־$x\mid z$ או כך ש־x,y,z שאינם מחלקים זה את זה.

פתרון. תהא P קבוצה מגודל 5, ו־R הצמצום של היחס $\mid$ לקבוצה P. לפי התרגיל הקודם, בקבוצה P יש שרשרת באורך $\sqrt{4}+1=3$ או אנטי־שרשרת באורך 3. ■

קדמי־סדר

הגדרה תהא A קבוצה. יחס R על A נקרא קדם סדר אם R הינו רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

משפט תהא A קבוצה עם קדם סדר R. אז $E=R\cap R^{-1}$ יחס שקילות, היחס $\overline{R}$ המוגדר על קבוצת המנה A/E ע"י

$$a/E\overline{R}b/E\iff aRb$$

אינו תלוי בבחירת הנציגים ב־A/E ומהווה יחס סדר חלקי על A/E.

דוגמה תהא $A=\mathbf{P}(\mathbb{N})$, ונגדיר יחס R על A ע"י

$$.xRy\quad\iff\quad|x|\leq|y|$$

אז R הוא קדם סדר על A. מהו $R\cap R^{-1}$? מה קבוצת המנה?

תרגיל 5 תהא $A=\mathbb{R}[x]$ קבוצת פולינומים במקדמים ממשיים. נגדיר יחס R על A ע"י fRg אס"ס $f(0)-g(0)\geq 0$.
הראו כי R הוא קדם־סדר על A ואינו יחס סדר חלקי.
חשבו את קבוצת המנה $A/(R\cap R^{-1})$ ובטאו את היחס $\overline{R}$ עליה.

פתרון. רפלקסיביות וטרנזיטיביות מיידיים מההגדרה. R אינו אנטי־סימטרי מכיוון שxRx^2 וכן x^2Rx, אבל $x\neq x^2$.
היחס $E=R\cap R^{-1}$ מוגדר ע"י fEg אס"ם $f(0)\leq g(0)$ וגם $g(0)\leq f(0)$, כלומר אס"ם $f(0)=g(0)$. מחלקות השקילות של E הן כל הקבוצות מהצורה $\lambda/E=\{f\in A\mid f(0)=\lambda\}$ לכל $\lambda\in\mathbb{R}$ ומתקיים כי

$$\lambda_1/E\overline{R}\lambda_2/E \iff \lambda_1\leq\lambda_2$$

כאשר הסדר מימין הוא הסדר הסטנדרטי על הממשיים. ■

תרגיל 6 נגדיר יחס על הקבוצה $A=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ע"י $\langle a,b\rangle R\langle c,d\rangle$ אס"ס $ab\mid cd$. הראו כי R קדם־סדר. חשבו את יחס השקילות $E=R\cap R^{-1}$ ואת קבוצת המנה A/E.

פתרון.

- רפלקסיביות ברורה.
- נניח $\langle a,b\rangle R\langle c,d\rangle$ ו־$\langle c,d\rangle R\langle e,f\rangle$. אז קיימים $q_1,q_2\in\mathbb{N}$ כך ש־$cd=q_1ab$ ו־$ef=q_2cd=(q_1q_2)ab$. לכן $\langle a,b\rangle R\langle e,f\rangle$.
- היחס אינו אנטי־סימטרי. למשל־ $\langle 1,4\rangle R\langle 2,2\rangle$ ו־$\langle 2,2\rangle R\langle 1,4\rangle$, ושני האיברים אינם שווים.

היחס $E=R\cap R^{-1}$ מוגדר ע"י $ab=cd \iff \langle a,b\rangle(R\cap R^{-1})\langle c,d\rangle$ וכל מחלקת שקילות בקבוצה A/E מכילה איבר בודד מהצורה $\langle 1,x\rangle$ עבור $x\in\mathbb{Z}$, ואם $\langle 1,x\rangle E\langle 1,x'\rangle$ אז $x=x'$. בסה"כ מקבלים כי A/E מזדהה עם הקבוצה $\mathbb{Z}$ דרך ההתאמה $x\mapsto\langle 1,x\rangle$ ו־$\langle 1,x\rangle/ES\langle 1,x'\rangle/E$ אס"ם $x\mid x'$.

■

תרגול 11

פונקציות ותמורות

פונקציות

הגדרה יהיו A,B קבוצות. יחס $f \subseteq A \times B$ נקרא <u>פונקציה</u> מתקיים התנאי הבא

$$\text{(חד־ערכיות)} \quad \forall b_1, b_2 \in B\,((\langle a, b_1\rangle \in f \wedge \langle a, b_2\rangle \in f) \to (b_1 = b_2)).$$

הערה 1. במקרים רבים דורשים בנוסף כי $\mathrm{Dom}(f) = A$, כלומר כי לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ כך ש־$\langle a.b\rangle \in f$. במקרה זה האובייקט שהוגדר לעיל נקרא <u>פונקציה חלקית</u> על A.

2. התחום והטווח של הפונקציה f הם התחום והתמונה של f כיחס, כלומר

$$\mathrm{Dom}(f) = \{a \in A \mid \exists b \in B,\ \langle a, b\rangle \in f\},\ \mathrm{Rng}(f)\{b \in B \mid \exists a \in A,\ \langle a, b\rangle \in f\}.$$

סימון. אם $\langle a, b\rangle \in f$ נרשום $b = f(a)$. אם $\mathrm{Dom}(f) \subseteq A,\ \mathrm{Rng}(f) \subseteq B$ נרשום $f : A \to B$.

הגדרה (שוויון פונקציות) פונקציות f,g הן שוות אם הן שוות כיחסים. עובדה זו שקולה לכך ש־$\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$ ולכל $x \in \mathrm{Dom}(f)$, $f(x) = g(x)$.

הגדרה (הרכבת פונקציות) אם $f : A \to B$ ו־$g : B \to C$ פונקציות, אז

$$g \circ f = \{\langle x, z\rangle \in A \times C \mid \exists y \in B(f(x) = y \wedge g(y) = z\} = \{\langle x, z\rangle \mid g(f(x)) = z\}.$$

נשים לב כי המעבר הימני ביותר אפשרי, מכיוון שאם y כזה קיים, הוא <u>יחיד</u>.
נשים לב כי הסימון $g \circ f$ הוא הפוך מהסימון שהגדרנו לגבי יחסים כלליים. הסיבה לכך היא הנוחות היחסית של צורת הכתיבה

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

דוגמאות

יהיו $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרות ע"י $f(x)=\sin(x),\ g(x)=3x^2+5$.

$$\begin{aligned} g\circ f &= \{\langle x,z\rangle \mid \exists y\in\mathbb{R}(f(x)=y\wedge g(y)=z)\}\\ &= \{\langle x,z\rangle \mid \exists y(y=\sin(x)\wedge z=g(\sin(x))=3\sin(x)^2+5\}\\ &= \{\langle x,3\sin(x)^2+5\rangle \mid x\in\mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

$$g\circ f(x)=3\sin(x)^2+5$$

$$\begin{aligned} f\circ g &= \{\langle x,z\rangle \mid \exists y\in\mathbb{R}(g(x)=y\wedge f(y)=z\}\\ &= \{\langle x,z\rangle \mid \exists y(y=3x^2+5\wedge z=g(y)=\sin(3x^2+5))\}\\ &= \{\langle x,\sin(3x^2+5)\rangle \mid x\in\mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$f\circ g(x)=\sin(3x^2+5)$$

הגדרה (פונקציה הופכית) תהא $f:A\to B$. פונקציה $g:B\to A$ נקראת הופכית משמאל של f אם מתקיים כי $g\circ f(x)=x$ לכל $x\in A$. במקרה זה מסמנים $g=f^{-1}$.

באופן דומה, ניתן להגדיר את המושג של פונקציה הופכית מימין. במקרה בו f הפיכה מימין ומשמאל אומרים כי פשוט כי f הפיכה.

דוגמה נגדיר $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י

$$g(x)=\begin{cases}\log|x| & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases} \quad \text{ו-} \quad f(x)=\exp(x).$$

אז, לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x)=\exp(x)>0$ ולכן $g\circ f(x)=\log(f(x))=\log(\exp(x))=x$ ולכן g הופכית משמאל של f. מצד שני g <u>אינה</u> הופכית מימין של f, שכן לכל $x<0$ מתקיים כי

$$f\circ g(x)=\exp(\log|x|)=|x|\neq x$$

וכן $f\circ g(0)=\exp(0)=1\neq 0$.

תרגיל 1 נניח כי $f:A\to B$ פונקציה על ו-$g_1,g_2:B\to A$ הופכיות משמאל של f. אז $g_1=g_2$.

האם הטענה נכונה במקרה בו f אינה על?

תרגיל 2 לפי הגדרת שוויון פונקציות, עלינו להראות כי לכל $b\in B$ מתקיים כי $g_1(b)=g_2(b)$. יהא $b\in B$ כלשהו. מכיוון ש-f על קיים $a\in A$ כך ש-$f(a)=b$. מכיוון ש-g_1 ו-g_2 הופכיות של f משמאל מתקיים כי

$$g_1(b)=g_1(f(a))=a=g_2(f(a))=g_2(b).$$

אם f אינה על הטענה אינה נכונה. למשל, ניקח $A=\{0,1\}$, $B=\mathbb{N}$ ו-$f=\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,1\rangle\}$. אז

$$g_2(b)=\begin{cases} b & \text{אם } b=0,1\\ 1 & \text{אחרת}\end{cases} \quad \text{ו-} \quad g_1(b)=\begin{cases} b & \text{אם } b=0,1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

הן שתי פונקציות שונות המהוות הופכיות משמאל ל-f.

תרגיל 3 יהיו f_1 ו־f_2 פונקציות הפיכות משמאל. הראו כי $f_1 \circ f_2$ הפיכה משמאל גם כן, וכי אם g_1 ו־g_2 הן הופכיות משמאל של f_1 ו־f_2 בהתאמה, אז $g_2 \circ g_1$ היא הופכית משמאל של $f_1 \circ f_2$.

פתרון. נניח A, B ו־C כך ש־$f_1 : A \to B$ ו־$f_2 : B \to C$. אז לכל $x \in A$ מתקיים כי

$$(g_2 \circ g_1) \circ (f_1 \circ f_2)(x) = g_s \circ (g_1 \circ f_1)(f_2(x)) = g_2(f_2(x)) = x$$

ולכן $g_2 \circ g_1$ היא הופכית משמאל של $f_1 \circ f_2$. ■

פונקציות חח"ע ועל

הגדרה (פונקציה חח"ע, פונקציה על) פונקציה $f : A \to B$ נקראת <u>חח"ע</u> (באנגלית injective או $\mathrm{one-to-one}$) אם מתקיים התנאי

$$\forall a_1, a_2(f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2).$$

הפונקציה נקראת <u>על</u> (באנגלית surjective או onto) אם $B = \mathrm{Rng}(f)$, כלומר־ לכל $b \in B$ יש $a \in A$ כך ש־$f(a) = b$.

הערה פונקציה f היא חח"ע אס"ם היא הפיכה מימין. היא הפיכה משמאל אס"ם היא הפיכה מימין (תרגיל 5, שאלה 5).
בפרט, כדי להוכיח כי f חח"ע ועל (בהתאמה־ חח"ע, על) מספיק להראות כי ל־f יש הופכית מימין ומשמאל (בהתאמה־ מימין, משמאל).

דוגמה כמה דוגמאות.

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $f(n) = n + 1$.
   - <u>חח"ע</u>. שכן לכל $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ כך ש־$f(n_1) = f(n_2)$ מתקיים כי $n_1 + 1 = n_2 + 1$ ולכן $n_1 = n_2$.
   - <u>אינה על</u>. שכן לא קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו $f(n) = n + 1 = 0$, כלומר $0 \notin \mathrm{Im}(f)$.
2. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $f(a, b) = a$.
   - <u>אינה חח"ע</u>. למשל $f(1, 0) = f(1, 1) = 1$.
   - <u>על</u>. שכן לכל $a \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $f(a, 0) = a$, למשל, ובפרט $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{N}$.
3. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $f(a, b) = 2^a 3^b$.
   - <u>חח"ע</u>. יהיו $\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ כך ש־$f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$. בה"כ נניח כי $a_1 \leq a_2$, ונתבונן בשוויון

     $$f(a_1, b_1) = 2^{a_1} 3^{b_1} = 2^{a_2} 3^{b_2} = f(a_2, b_2).$$

     מההנחה כי $a_1 \leq a_2$, ניתן לחלק את שני האגפים ב־2^{a_1} ולקבל

     $$3^{b_1} = 2^{a_2 - a_1} 3^{b_2}.$$

     מכיוון שאגף שמאל בשוויון האחרון אי־זוגי, גם אגף ימין אי־זוגי, ולכן $a_2 - a_1 = 0$ בהכרח. נותרנו עם השוויון $3^{b_1} = 3^{b_2}$, שממנו נובע כי $b_1 = b_2$, מחח"ע של פונקציית האקספוננט.
   - <u>אינה על</u>. למשל $7 \notin \mathrm{Im}(f)$, מכיוון שאינו מתחלק ב־2 ולא ב־3.
4. הפונקציה $f : \mathbf{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\} \to \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $f(A) = \min(A)$.
   - <u>אינה חח"ע</u>. למשל $f(\{0\}) = f(\{0, 1\}) = 0$.

- <u>על.</u> שכן לכל ערך $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $f(\{n\}) = \min\{n\} = n$, ולכן $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{N}$.

הערה במקרה בו A סופית ניתן גם להשתמש בעובדה כי $|A| < 2^{|A|} = |\mathbf{P}(A)|$, לכל עוצמה אפשרית של A. הפתרון הזה נכון, אך דורש הסברים לגבי הקשר בין גדלי הקבוצות לאפשרות לקיום פונקציות על ביניהן.

תרגיל 4 נתונות פונקציות $f, g, h : \mathbf{P}(\mathbb{Q}) \to \mathbf{P}(\mathbb{Q})$ המוגדרות ע"י

$$h(x) = x \triangle \mathbb{Z} \quad , \quad g(x) = x \cap \mathbb{Z} \quad , \quad f(x) = x \cup \mathbb{Z}.$$

מי מביניהם חח"ע? מי מביניהם על? חשבו את תמונת f. חשבו את הפונקציה ההופכית במידה וקיימת.

פתרון.

- <u>f</u>.
  - לא חח"ע. למשל $f(\varnothing) = f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
  - לא על, שכן כל קבוצה בתמונת f מכילה את $\mathbb{Z}$. בפרט- למשל, $\varnothing \notin \mathrm{Im}(f)$.
  - $\mathrm{Im}(f) = \{x \in \mathbb{Q} \mid \mathbb{Z} \subseteq x\}$.
- <u>g</u>.
  - לא חח"ע. למשל $g(\varnothing) = g(\{\frac{1}{2}\}) = \varnothing$.
  - לא על, שכן לכל קבוצה $x \in \mathbf{P}(\mathbb{Q})$ מתקיים כי $g(x) \subseteq \mathbb{Z}$. בפרט- למשל, $\{\frac{1}{2}\} \notin \mathrm{Im}(g)$.
- <u>h</u>.
  - חח"ע. יהיו $X, Y \in \mathbf{P}(\mathbb{Q})$ כך ש-$h(X) = h(Y)$. נראה כי $X = Y$. יהא $x \in X$ שרירותי. אם $x \in \mathbb{Z}$ אז $x \in X \cap \mathbb{Z}$ ולכן $x \notin h(X) = h(Y)$ ובפרט $x \notin (Y \setminus \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} \setminus Y)$. מכיוון ש-$x \in \mathbb{Z}$ לפי ההנחה, בהכרח מתקיים כי $x \in Y$, אחרת $x \in \mathbb{Z} \setminus Y \subseteq h(Y)$.
    לחילופין, אם $x \notin \mathbb{Z}$ אז $x \in X \setminus \mathbb{Z} \subseteq h(X) = h(Y)$ ולכן $x \in h(Y)$. אם נניח בשלילה ש-$x \notin Y$ נקבל כי בהכרח $x \in \mathbb{Z} \setminus Y$, וזו סתירה להנחה.
    הוכחה מקוצרת.

$$\begin{array}{lll} & h(X) = X \triangle \mathbb{Z} = Y \triangle \mathbb{Z} = h(Y) & \\ \Rightarrow & (X \triangle \mathbb{Z}) \triangle \mathbb{Z} = (Y \triangle \mathbb{Z}) \triangle \mathbb{Z} & \\ \Rightarrow & X \triangle (\mathbb{Z} \triangle \mathbb{Z}) = Y \triangle (\mathbb{Z} \triangle \mathbb{Z}) & \text{(אסוציטיביות ההפרש הסימטרי)} \\ \Rightarrow & X = X \triangle \varnothing = Y \triangle \varnothing = Y & \end{array}$$

  - על. לכל $X \in \mathbf{P}(\mathbb{Q})$ מתקיים כי $X = h(X \triangle \mathbb{Z}) = h(h(X))$. עובדה זו גם מראה לנו כי h היא הפונקציה ההופכית של עצמה מימין ומשמאל.

■

תמורות

הגדרה תהא A קבוצה. תמורה f על A היא פונקציה חח"ע ועל $f : A \to A$. קבוצת התמורות על A מסומנות לרוב ב־$Sym(A)$.

סימון נפוץ בהינתן קבוצה סופית A ותמורה $f : A \to A$ נוהגים לרשום את פעולת התמורה f בצורה

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_N \\ f(a_1) & f(a_2) & \dots & f(a_N) \end{pmatrix}.$$

סימון זה נוח במיוחד במקרה של $A = \{1, \dots, N\}$. שימו לב שאין סדר ספציפי לפיו מסדרים את האיברים בשורה העליונה (בפרט־ אין חובה לרשמם לפי הסדר הטבעי).

דוגמה

1. לכל קבוצה A, הפונקציה $f = \mathrm{id}_A$ היא תמורה. כמו כן־ אם f, g הן תמורות על A אז f^{-1} ו־$f \circ g$ הינן תמורות על A גם כן.
2. עבור $A = \{1, 2, 3\}$ הפונקציות $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle\}$ ו־$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}$ הן תמורות.
3. על הקבוצה $A = \mathbb{N}$ נגדיר פונקציה

$$f(a) = \begin{cases} a+2 & \text{זוגי } a \\ a-2 & a>1 \text{ ,אי־זוגי } a \\ 0 & a=1 \end{cases}.$$

אז f היא תמורה על A.

הגדרה תמורה f על A נקראת <u>מעגלית</u> אם קיים (או באופן שקול, לכל) $x \in A$ הקבוצה $A = \{x, f(x), \dots, f^n(x), \dots\}$. באופן שקול, f היא תמורה מעגלית אם ניתן להגדיר יחס מלא R על הקבוצה A כך ש־aRb אס"ם $a \le \max A$ וקיים $i \in \mathbb{N}$ כך ש־$f^i(a) = b$ ואם $f(\max A) = \min A$.

בהינתן A ו־$f \in Sym(A)$, תת־קבוצה $A_0 \subseteq A$ נקראת <u>מעגל</u> של A אם לכל $a \in A_0$, $f(a) \in A_0$, ואם $f_{|A_0}$, הצמצום של f ל־A_0, היא תמורה מעגלית על A_0.

תמורה $f \in Sym(A)$ נקראת <u>ציקלית</u> אם קיים מעגל $A_0 \subseteq A$ כך שלכל $b \notin A_0$ מתקיים כי $f(b) = b$.

סימון. בהינתן ציקלוס f על קבוצה סופית A, עם מעגל A_0 מגודל $k > 1$, ניתן לסמנו בצורה מקוצרת ע"י

$$f = \begin{pmatrix} a_0 & f(a_0) & f^2(a_0) & \dots & f^{k-1}(a_0) \end{pmatrix}$$

כאשר $a_0 \in A_0$ הוא איבר כלשהו.

הערה לעתים קרובות, בהרכבת תמורות נהוג להשמיט את הסימן $\circ$ מהכתיבה.

משפט תהא $f \in Sym(A)$. אז קיימות תמורות <u>ציקליות</u> $f_1, \dots, f_r \in Sym(A)$ כך ש־

$$f = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_r.$$

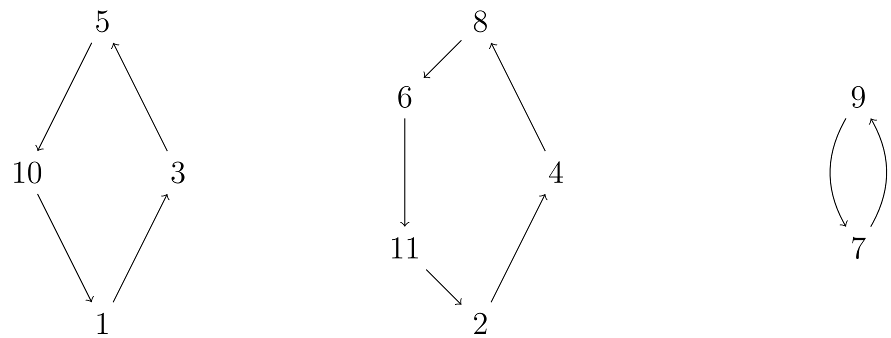
דוגמה

1. עבור $A = \{1, \dots, 5\}$, התמורה $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ היא ציקלוס עם מעגל מגודל 4, וניתנת לתיאור כ־$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

2. ניקח $A=\{1,\dots,11\}$ ו־

$$.f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 8 & 10 & 11 & 9 & 6 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

פעולת f ניתנת לתיאור ע"י הדיאגרמה הבאה־



בפרט, הקבוצות $\{1,3,5,10\},\{,2,4,6,8,11\}$ ו־$\{7,9\}$ הן המעגלים של A והתמורה f ניתנת לייצוג כ־

$$f=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4 & 8 & 6 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 9\end{pmatrix}$$

3. התמורה $f(a)=\begin{cases} a+2 & a \text{ זוגי} \\ a-2 & a>1 \text{ ,} a \text{ אי־זוגי} \\ 0 & a=1 \end{cases}$ היא מעגלית על $A=\mathbb{N}$.

תרגיל 1 נתונה תמורה מעגלית f על קבוצה A ו־$\sigma\in Sym(A)$ תמורה נוספת. הראו כי $\sigma\circ f\circ\sigma^{-1}$ גם היא תמורה מעגלית.

פתרון. לכל $x\in A$ מתקיים כי $\sigma f\sigma^{-1}(\sigma(x))=\sigma(f(x))$. בפרט, אם נסמן $h=\sigma f\sigma^{-1}$ אז

$$\{\sigma(x),h(\sigma(x)),h^2(\sigma(x)),\dots\}=\{\sigma(x),\sigma(f(x)),\sigma(f^2(x)),\dots\}=\sigma\left(\{x,f(x),\dots\}\right)=\sigma(A)=A$$

ולכן h גם היא מעגלית. $\blacksquare$

תרגול 12

תורת הגרפים

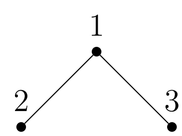
הגדרות בסיסיות

הגדרה גרף לא־מכוון G הוא זוג $\langle V, E\rangle$ בו V היא קבוצה, הנקראת קבוצת הקודקודים של G, ו־$E \subseteq \mathbf{P}(V)$ היא אוסף של תתי־קבוצות מהצורה $\{v_1, v_2\}$ עבור $v_1, v_2 \in V$. הקבוצה E נקראת קבוצת הצלעות של G. הגרף נקרא פשוט או ללא־לולאות אם $|e| = 2$ לכל $e \in E$.

גרף מכוון מוגדר באופן דומה, כאשר $G = \langle V, E\rangle$ עם V קבוצת קודקודים ו־$E \subseteq V^2$.

הערה ההגדרות של גרף מיועדות כדי לתת פורמליזציה מתמטית לרעיון של "אוסף נקודות עם קווים (מכוונים או לא מכוונים) ביניהם". קיימות בספרות דרכים נוספות להגדיר את אותו המושג, והרבה ואריאנטים־ למשל כדי לאפשר ריבוי של צלעות בין שני קודקודים. אנחנו לא נתעסק בהגדרות אלה בקורס.

למשל, עבור $V = \{1, 2, 3\}$ ו־$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ מקבלים



.

גרף **מכוון** מוגדר בדומה, כלומר זוג $G = \langle V, E\rangle$ בו V היא קבוצה לא־ריקה ו־$E \subseteq V \times V$ היא אוסף של זוגות סדורים.

הגרף (מכוון או לא מכוון) נקרא **פשוט** או **ללא לולאות** אם אף קודקוד אינו מחובר לעצמו בצלע, כלומר $\{v\} \notin E$ (או $\langle v, v\rangle \notin E$ בגרף מכוון) לכל $v \in V$.

הגדרה (תת־גרף ותת־גרף מושרה) יהא $G = \langle V, E\rangle$ גרף לא־מכוון. תת־גרף של G הוא גרף $G' = \langle V', E'\rangle$ כך $V \subseteq V'$ ו־$E' \subseteq E \cap \mathbf{P}(V')$. תת־גרף מושרה הוא תת־גרף G' של G, בו מתקיים $e \in E \cap \mathbf{P}(V') \iff e \in E'$.

הגדרה (דרגה של קודקוד) הדרגה של קודקוד $v \in V$ היא מספר הקודקודים $v' \in V$ כך ש־$\{v, v'\} \in E$.

תרגיל 1 אבי וליאת מגיעים למסיבת לחיצות ידיים ביחד עם שלושה זוגות נוספים. לאורך המסיבה אף אדם לא לחץ את ידו של עצמו או של בן/בת זוגו, וכל לחיצת יד התרחשה פעם אחת בלבד. בסוף המסיבה שאלה ליאת את שבע האנשים האחרים עם כמה אנשים הם לחצו ידיים במהלך המסיבה וקיבלה 7 תשובות שונות.

עם כמה אנשים לחצה ליאת ידיים במסיבה? מה לגבי אבי?

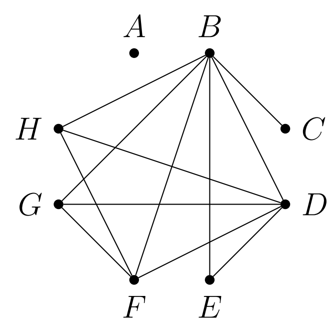
פתרון. נגדיר גרף $G = \langle V, E\rangle$ שקודקודיו הוא אורחי המסיבה ו־$\{v, u\} \in E$ אם"ם v ו־u לחצו ידיים במהלך המסיבה. לפי התנאים הנתונים, הגרף הנתון הוא פשוט, לא־מכוון וללא לולאות. כמו כן, מכיוון שאף אדם במסיבה לא לוחץ ידיים עם עצמו או עם בן/בת־זוגו, דרגות הקודקודים בגרף חסומות בין 0 ל־6. מהנתון כי ליאת קיבלה 7 תשובות שונות, מקבלים כי דרגות הקודקודים בגרף הן $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, d_L)$ כאשר d_L היא הדרגה של ליאת.

נשים לב כי, מכיוון שכל קודקוד בגרף חייב לקיים כי הוא אינו שכן של עצמו, אינו שכן של בן/בת זוגו ואינו שכן של הקודקוד מדרגה 0, נובע כי כל קודקוד בגרף הוא מדרגה ≤ 6 וכי אי־שוויון זה הוא חזק אלא אם כן בן הזוג של הקודקוד הוא מדרגה 0. לכן קיבלנו כי הקודקוד מדרגה 6 והקודקוד מדרגה 0 הם בהכרח זוג.

נשים לב בנוסף כי הקודקוד מדרגה 6 **בהכרח** מחובר בצלע לקודקוד מדרגה 1 (כי הוא מחובר לכל הקודקודים מלבד עצמו ובן/בת זוגו). נובע כי כל הקודקודים שאינם אחד מהקודקודים מדרגה $0,1$ או 6 יכולים להיות לכל היותר מחוברים ל־5 קודקודים (לא לעצמם, לא לבן/בת זוגם ולא לקודקוד מדרגה 1) וכי המקרה היחיד שבו קודקוד יכול להיות מדרגה 5 היא אם הוא בן זוגו של הקודקוד מדרגה 1.

לבסוף, מכיוון שגם הקודקוד מדרגה 5 וגם הקודקוד מדרגה 6 בהכרח מחוברים לקודקוד מדרגה 2, נובע בהכרח כי בן/בת זוגו של הקודקוד מדרגה 2 הוא מדרגה 4, באותו אופן כמו קודם, ולבסוף־ נובע כי שני הקודקודים שנותרו הם בהכרח מדרגה 3, והם בהכרח זוג. מכיוון שדרגת הקודקוד של ליאת היא בהכרח היחיד שמופיעה פעמיים בסדרת הדרגות, נובע כי ליאת ואבי שניהם מיוצגים על ידי קודקודים מדרגה 3 ולחצו ידיים ל־3 אנשים.

נציג את הגרף המתואר בשאלה.



$$\begin{cases}\deg(A)=0\\ \deg(B)=6\\ \deg(C)=1\\ \deg(D)=5\\ \deg(E)=2\\ \deg(F)=4\\ \deg(G)=\deg(H)=3\end{cases}.$$

■

טיולים ומסלולים

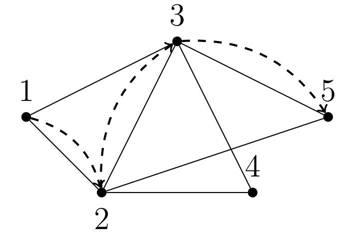
הגדרה (טיול, מסלול, מסלול פשוט מעגל) <u>טיול</u> באורך n על גרף $G=\langle V,E\rangle$ הוא n־יה סדורה $(v_1,\ldots,v_n)$ של קודקודים, כך שלכל $i=1,\ldots,n-1$, $\{v_i,v_{i+1}\}\in E$.

<u>מסלול</u> (או <u>מסילה</u>) הוא טיול בו אף צלע לא מופיעה פעמיים.

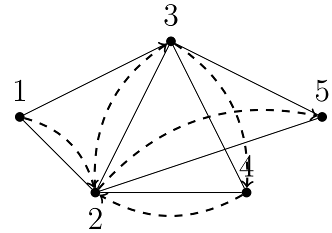
<u>מסלול פשוט</u> הוא מסלול בו אף קודקוד לא מופיע פעמיים.

<u>מעגל</u> הוא טיול בו $v_0=v_n$, מעגל פשוט הוא מסלול פשוט שהוא גם מעגל.

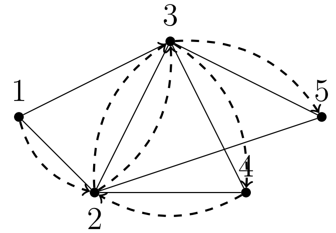
דוגמה



מסלול פשוט $(1,2,3,5)$



מסלול לא פשוט $(1,2,3,4,2,5)$



טיול שאינו מסלול $(1,2,3,4,2,3,5)$

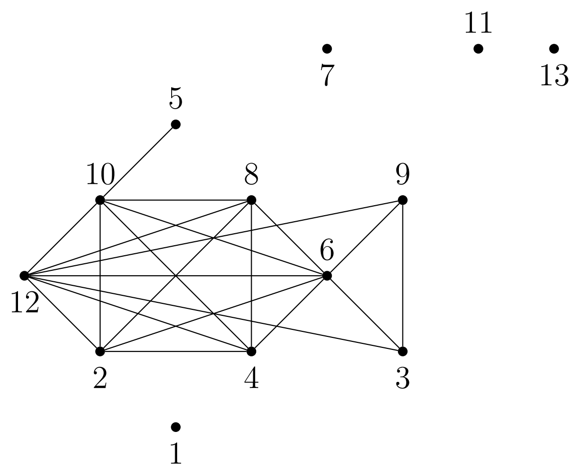
הגדרה רכיב קשירות בגרף $G=\langle V,E\rangle$ הוא תת־קבוצה $V'\subseteq V$ כך שלכל $v_1,v_2\in V'$ קיים טיול ב־G בין v_1 ל־v_2.

הגרף נקרא <u>קשיר</u> אם הוא מורכב מרכיב קשירות יחיד.

הגדרה שקולה לקשירות גרף $G=\langle V,E\rangle$ נקרא קשיר אם לא קיימות תתי־קבוצות לא ריקות $V_1,V_2\subseteq V$, כך ש־$V_1\cap V_2=\varnothing$ וכך ש־$V=V_1\cup V_2$, המקיימות כי עבור $E_i=E\cap\mathbf{P}(V_i)$ ($i=1,2$) מתקיים כי $E=E_1\cup E_2$. במלים אחרות־ אם לא ניתן לחלק את הגרף G לאיחוד זר של שני תתי־גרפים מושרים זרים G_1 ו־G_2, כאשר $G_i=\langle V_i,E_i\rangle$, ל־$i=1,2$.

תרגיל 2 נתון גרף על הקבוצה $V=\{1,2,3,\ldots,13\}$ **עם צלע בין** v_1 **ל־**v_2 **אס"ם** $\gcd(v_1,v_2)>1$. מהם רכיבי הקשירות של הגרף? ציירו את הגרף.

פתרון. כל המספרים הזוגיים נמצאים באותו רכיב קשירות, וכן כל המספרים המתחלקים ב־3, כל אלה המתחלקים ב־5, המתחלקים ב־7, ב־11 וב־13. בנוסף, מכיוון ש־6 נמצא ברכיב הקשירות של 3 וכן של 2, מקבלים ש**כל** המספרים המחלקים ב־3 או ב־2 נמצאים באותו רכיב קשירות. באותו אופן, מכיוון ש־10 מתחלק ב־5 וגם ב־2, $\{5,10\}$ נמצאים באותו רכיב קשירות. שאר האיברים הם **מבודדים**.



■

ספירת צלעות וקודקודים

טענה 1 (נוסחת אוילר) בהינתן גרף $G=\langle V,E\rangle$ לא מכוון מתקיים

$$\sum_{v\in V}\deg(v)=2\,|E|\,.$$

הוכחת הטענה היא פשוט ספירה כפולה של מספר הצלעות בגרף.

הערה ניתן להכליל את נוסחת אוילר גם למקרה של גרפים מכוונים. לצורך כך נדרשת ההגדרה של דרגת הכניסה ודרגת היציאה של כל קודקוד, שלא נתעסק בה בשלב זה.

תרגיל 3 נתונה קבוצת הקודקודים $V=\{1,2,\ldots,7\}$.

1. האם קיים גרף G על V בו לכל קודקוד יש דרגה 5?
2. האם קיים גרף על V שסדרת הדרגות שלו היא $(1,1,2,2,2,4,4)$?
3. האם קיים גרף על V שסדרת הדרגות שלו היא $(1,1,2,2,3,5,6)$?

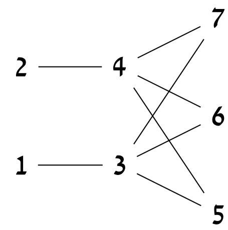
פתרון.

1. לא, מכיוון שבגרף שכזה היה מתקיים

$$\sum_{v\in V}\deg(v)=5\cdot 7=35$$

ובפרט אינו זוגי.

2. כן, למשל



3. במקרה זה מתקיים כי $\sum_{v\in V}\deg(v)=1+1+2+2+3+5+6=20$ וערך זה הוא אכן זוגי. עדיין, נראה שגרף כזה לא קיים. נניח בשלילה כי $G=\langle V,E\rangle$ הוא גרף עם סדרת הדרגות הנתונה. בפרט קיים קודקוד בעל דרגה 6, ועד כדי שינוי סדר הקודקודים, ניתן להניח כי $\deg(1)=6$. בנוסף, קיימים שני קודקודים שדרגתם היא בדיוק 1, שנסמנם v_1,v_2, והם מחוברים רק ל־1.

כמו כן, מההנחה, קיים קודקוד v_3 שדרגתו היא 5. מצד שני, קבוצת השכנים של קודקוד כזה בהכרח מוכל בקבוצה $V\setminus\{v_1,v_2,v_3\}$ שגודלה הוא 4. סתירה.

■

תרגיל 4 יהא $G=\langle V,E\rangle$ גרף פשוט לא מכוון עם $|V|\geq 2$ ו־$|E|<|V|-1$. הראו כי G אינו קשיר.

פתרון. באינדוקציה על $n=|V|$. אם $n=2$ אז ב־G יש שני קודקודים ואין צלעות, ולכן G לא קשיר. נניח כי הטענה נכונה עבור $|V|=n$ ונוכיח ל־$n+1$.

נשים לב כי אם ב־G יש קודקוד מדרגה 0 אז אין מה להוסיף, כי הגרף לא יכול להיות קשיר במקרה זה. אחרת, נטען כי בהכרח יש ב־G קודקוד מדרגה 1. אחרת, לכל $v\in V$ מתקיים כי $\deg v\geq 2$ ולכן

$$2\left|E\right|=\sum_{v\in V}\deg(v)\geq 2\left|V\right|>2\left|E\right|+2$$

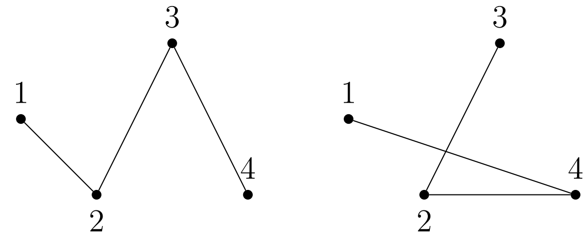
בסתירה. ניקח $v_0\in V$ קודקוד מדרגה 1, ונתבונן בגרף $G'=\langle V',E'\rangle$ עם $V'=V\setminus\{v_0\}$ ו־$E'=\{e\in E\mid v_0\notin e\}$. אז, מההנחה כי $\deg(v_0)=1$ מתקיים כי $|E'|=|E|-1$ ולכן $|E'|<|V'|-1=|V|-2$. הנחת האינדוקציה נכונה לגבי הגרף G' ולכן G' אינו קשיר. מכיוון ש־v_0 יכול להיות שייך רק לרכיב קשירות אחד של G (מכיוון שהוא מחובר רק לצלע אחת), נובע כי גם G לא קשיר. ■

איזומורפיזם של גרפים

הגדרה בהינתן גרפים $G=\langle V,E\rangle$ ו־$G'=(V',E')$, איזומורפיזם $f:G\to G'$ הוא פונקציה $f:V\to V'$ המקיימת כי

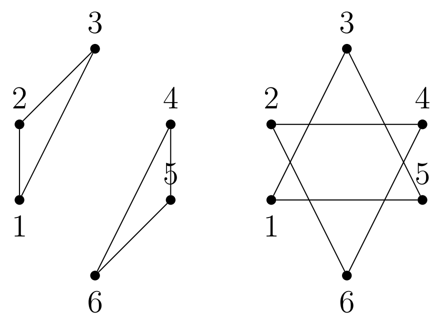
$$\{f(v_1),f(v_2)\}\in E' \iff \{v_1,v_2\}\in E.$$

דוגמה א.



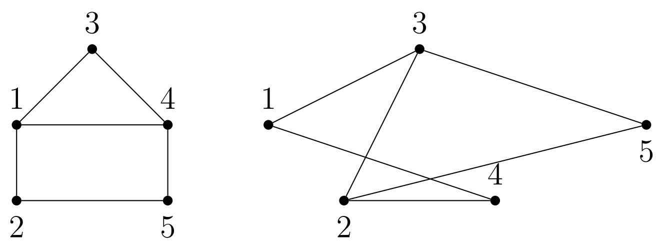
ע"י האיזומורפיזם $f = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,2\rangle\}$

ב.



ע"י האיזומורפיזם $f : \{1,\ldots,6\} \to \{1,\ldots,6\}$ המוגדר ע"י $f(2)=5,\ f(5)=2$ ו־$f(i)=i$ לכל $i \neq 2,5$.

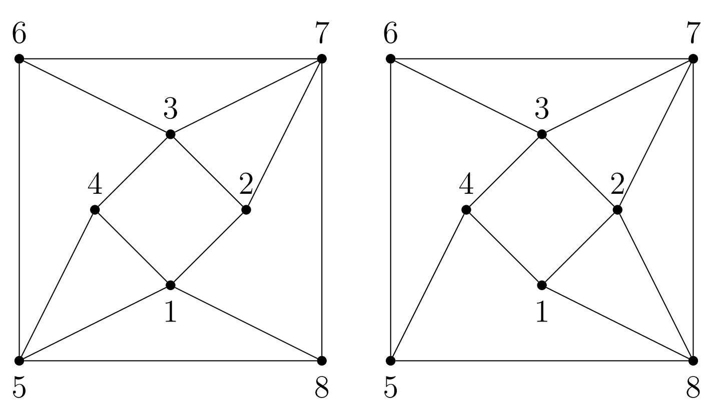
ג.



ע"י האיזומורפיזם $f : \{1,\ldots,5\} \to \{1,\ldots,5\}$ הנתון ע"י

$f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(3)=5,\ f(4)=3, f(5)=1$.

תרגיל 5 האם הגרפים הבאים איזומורפיים?



פתרון. נסמן ב־$G_1 = (V_1, E_1)$ את הגרף הימני וב־$G_2 = (V_2, E_2)$ את הגרף השמאלי. נניח בשלילה כי $f : G_1 \to G_2$ הוא איזומורפיזם בין הגרפים. נתבונן בקודקוד $7 \in V_1$. דרגתו בגרף G_1 היא 4 ולכן $f(7)$ גם כן מדרגה 4, שכן איזומורפיזם משמר דרגות, ועל כן $f(7) \in \{1, 3, 5, 7\}$. כמו כן, נשים לב כי בגרף G_1 לקודקוד 7 יש 3 שכנים מדרגה 4, שהם $2, 3$ ו־8.

מצד שני, בחינה של כל האפשרויות ל־$f(7)$ מראה כי לאף אחד מהם אין 3 שכנים (שונים) מדרגה 4, כפי שניתן לראות בטבלה הבאה־

קודקוד ב־G_2	דרגה	שכנים	דרגות השכנים
1	4	2,4,5,8	3,3,4,3
3	4	2,4,6,7	3,3,3,4
5	4	1,4,6,8	4,3,3,3
7	4	2,3,6,8	3,4,3,3

ומכיוון שאיזומורפיזם חייב לשמר שכנויות ודרגות, בהכרח לא יכול להתקיים כי f הוא איזומורפיזם. ■

הערה שימו לב כי בשאלה הקודמת, הגרפים G_1 ו־G_2 הם שניהם קשירים, בעלי אותו מספר קודקודים ואותה סדרת דרגות! לכן, אף אחד מהמאפיינים הללו אינו מספיק על־מנת להוכיח איזומורפיזם של גרפים.

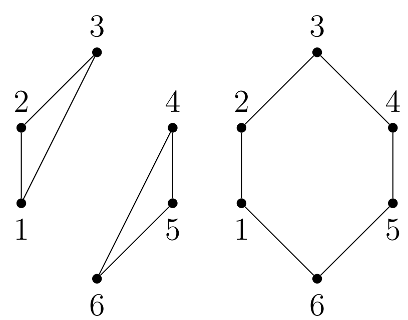
הגדרה (גרף רגולרי) גרף $G = \langle V, E\rangle$ נקרא k־<u>רגולרי</u> אם $\deg(v) = k$ לכל $v \in V$.

הגדרה (גרף משלים) הגרף המשלים לגרף פשוט ולא מכוון $G = \langle V, E\rangle$ הוא הגרף $G' = \langle V', E'\rangle$ בו $V = V'$ ו־

$$(v \neq u) \wedge (\{v, u\} \notin E) \iff \{v, u\} \in E'.$$

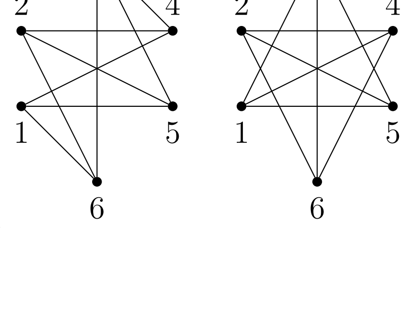
תרגיל 6 רשמו את כל הגרפים ה־2 רגולריים (עד כדי איזומורפיזם) על 6 קודקודים. כמה צלעות קיימים בגרף כזה? ענו אותה שאלה לגבי 3־רגולריים.

פתרון. גרף 2־רגולרי הוא איחוד של מעגלים. לכן, עד כדי איזומורפיזם, כל הגרפים ה־2־רגולריים הם



.

הגרפים ה־3־רגולריים הם בדיוק הגרפים המשלימים לגרפים ה־2 רגולריים.



.

■

עצים

הגדרה (עץ) גרף לא מכוון $G = \langle V, E\rangle$ נקרא עץ אם הוא פשוט, קשיר וללא מעגלים.

טענה 7 יהא $G = \langle V, E\rangle$ גרף פשוט עם $|V| \geq |E|$, V ו־E קבוצות סופיות. אז G מכיל בהכרח מעגל.

הוכחה. נגדיר $\mathcal{A} = \{(v_1, \ldots, v_r) \mid v_1, \ldots, v_r \in V \wedge \forall i = 1, \ldots, r-1(\{v_i, v_{i+1}\} \in E)\}$ את קבוצת המסלולים ב־G, ונגדיר על $\mathcal{A}$ יחס $\prec$ ע"י $(v_1, \ldots, v_r) \prec (u_1, \ldots, u_{r'})$ אם"ם קיים אינדקס i_0 כך ש־$v_i = u_{i_0+i}$ לכל $i = 1, \ldots, r$. כלומר־ אם $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{A}$ שני מסלולים, אז $\gamma_1 \prec \gamma_2$ אם"ם המסלול γ_1 הוא תת־מסלול של γ_2.

- **מקרה א'.** נניח כי בקבוצה $\mathcal{A}$ אין איבר מקסימלי. בפרט, נובע כי קיימים ב־$\mathcal{A}$ מסלולים מאורך לא חסום, ולכן בפרט קיים מסלול מאורך $r \geq n+1$, כאשר $n = |V|$, שנסמנו $(v_1, \ldots, v_r)$. מכיוון ש־$\{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq V$, לפי שובך היונים קיימים $i < j$ כך ש־$v_i = v_j$ ואז $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j)$ הוא מעגל ב־G.
- **מקרה ב'.** נניח כי $\mathcal{A}$ מכילה איבר מקסימלי $\gamma = (v_1, \ldots, v_r)$. מהגדרה מתקיים כי $\{v_1, v_2\} \in E$. אם $2 < i \leq r$ כך ש־$\{v_1, v_i\} \in E$ אז המסלול $(v_1, \ldots, v_i, v_1)$ הוא מעגל וסיימנו.

  אחרת, נטען כי בהכרח $\deg v = 1$. אכן אם קיים $u \neq v_2$ כך ש־$\{v_1, u\} \in E$ אז בהכרח $u \notin \{v_1, \ldots, v_r\}$ ואז $(u, v_1, \ldots, v_r)$ הוא מסלול ארוך יותר מ־γ, בסתירה למקסימליות. במקרה זה נתבונן בגרף $G' = \langle V', E'\rangle$ כאשר $V' = V \setminus \{v_1\}$ ו־$E' = E \setminus \{\{v_1, v_1\}\}$. גרף זה מקיים כי $|E'| = |E| - 1 \geq |V| - 1 = |V'|$. נשתמש באינדוקציה שלמה כדי להסיק כי ב־G' יש מעגל ולכן גם ב־G.

■

מסקנה בעץ $G = \langle V, E\rangle$ מתקיים כי $|E| = n - 1$.

הוכחה. החסם $|E| \leq n-1$ נובע מהטענה הקודמת. מצד שני, אם $E < |n-1|$, לפי תרגיל קודם G אינו קשיר. לכן $|E| = n - 1$. ■

תרגיל 1 יהי $G = \langle V, E\rangle$ עץ (גרף פשוט קשיר ללא מעגלים), $|V| \geq 2$. נתון כי בעץ זה דרגת כל קודקוד הינה אי־זוגית.

1. הוכיחו כי מספר הקשתות בעץ G הוא אי־זוגי.
2. ציירו דוגמא לעץ כזה.

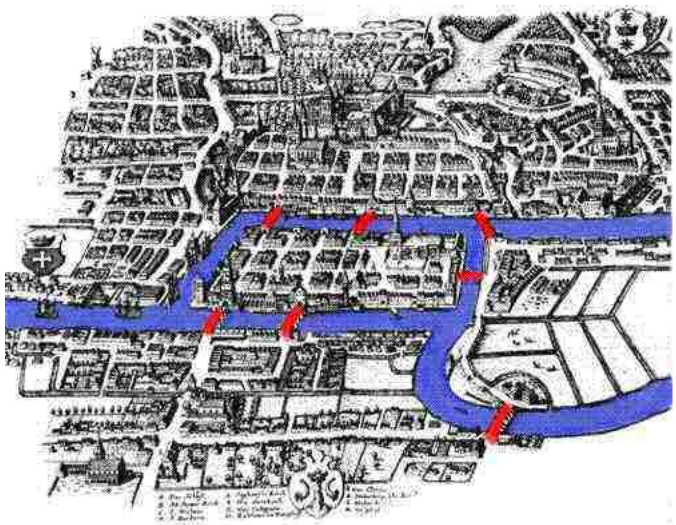
פתרון.

1. $|V| = |E| + 1$.
2. $\bullet - \bullet$.

■

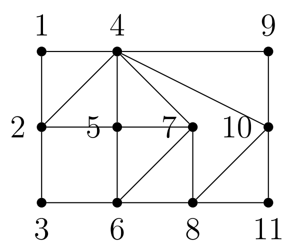
מסלולי ומעגלי אוילר

הגדרה (מעגל/מסלול אוילר) מסלול אוילר בגרף $G=\langle V,E\rangle$ הוא מסלול העובר בכל צלעות הגרף פעם אחת בלבד (ויכול לחזור על קודקודים). מעגל אוילר הוא מסלול אוילר שהוא גם מעגל.



משפט (אוילר) בגרף G יש מעגל אוילר אס"ס G קשיר ודרגת כל קודקודי G היא זוגית.
בגרף G יש מסלול אוילר אס"ס מספר הקודקודים בעלי דרגה היא זוגית הוא 2.

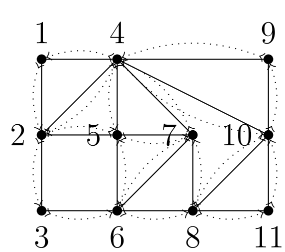
תרגיל 1 בדקו אם בגרף הבא קיים מעגל אוילר, ומצאו אותו במידה וכן.



פתרון. הגרף בבירור קשיר, ובדיקה ישירה מראה כי דרגת כל קודקוד היא זוגית:

$$\deg(1)=\deg(3)=\deg(9)=\deg(11)=2,\ \deg(2)=\deg(4)=\deg(5)=\deg(6)=\deg(8)\,\deg(10)=4\,.$$

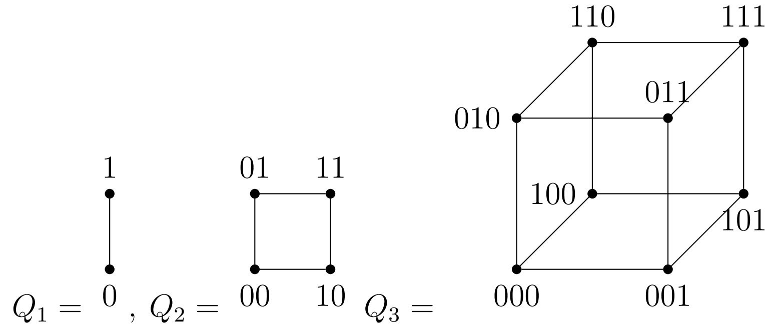
הנה דוגמה למעגל אוילר:

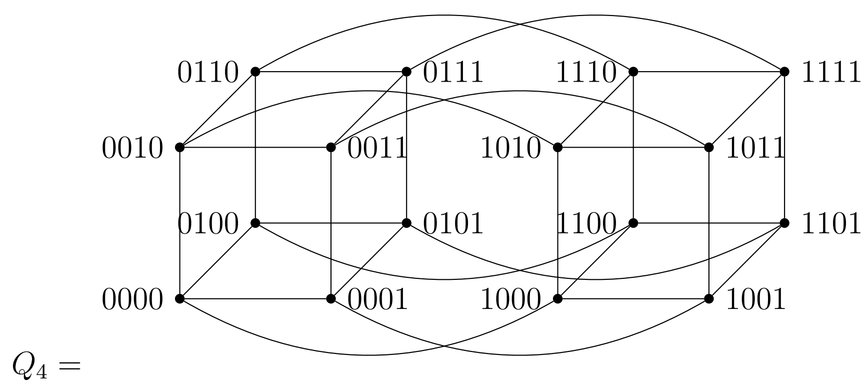


■

הערה (משפט אוילר לגרפים מכוונים) נניח כי $G = \langle V, E \rangle$ הוא גרף מכוון, ונסמן ב־d^+ את דרגת הכניסה וב־d^- את דרגת היציאה. אז ב־G יש מעגל אוילר (מוגדר באותו אופן) אס"ס דרגת הכניסה של כל קודקוד שווה לדרגת היציאה ממנו.

תרגיל 2 גרף היפר־קוביה n מימדי מוגדר ע"י $Q_n = \langle V, E \rangle$ כאשר V היא אוסף הסדרות באורך n על $0, 1$ ושני קודקודים מחוברים בצלע אם הסדרות המגדירות אותם נבדלות באיבר אחד. הנה כמה מקרים בסיסיים.





נמלה קוונטית מטיילת על קוביה n מימדית מקודקוד לקודקוד, כך שאין באפשרותה לחזור על צלע יותר מפעם אחת בשום שלב. בהנחה כי הנמלה מתחילה את מסלולה בנקודה $\mathbf{0}$, הראו כי באפשרותה לעבור בכל הקודקודים אס"ס n מספר זוגי או $n = 1$.

פתרון. נשים לב כי בגרף Q_n הוא קשיר ו־n־רגולרי. הוכחת קשירות הגרף־ תרגיל לבית (אינדוקציה על n). בהינתן קודקוד $v = (a_1, \ldots, a_n)$ של Q_n, קבוצת השכנים של v היא בדיוק

$$\{(1 - a_1, a_2, , a_3 \ldots, a_n),\ (a_1, 1 - a_2, a_3, \ldots, a_n), \ldots, (a_1, a_2, a_3, \ldots, 1 - a_n)\}$$

והיא מכילה n קודקודים.

לפי משפט אוילר, מעגל אויילר קיים אם"ם כל הקודקודים מדרגה זוגית, מה שאפשרי אם"ם n זוגי. מסלול אוילר קיים אם"ם מספר הקודקודים מדרגה אי־זוגית הוא 2 או 0, מה שמתקיים בגרף Q_1. ■

העשרה - האלגוריתם של פרופר (Prüfer)

שאלה חשובה בתורת הגרפים היא־

בהינתן קבוצת נקודות $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, כמה עצים ניתן להגדיר על קבוצת הקודקודים V?

האלגוריתם של פרופר עונה על השאלה באופן הבא.

משפט יהא $G = (V, E)$ עץ על הקבוצה $V = \{1, \ldots, n\}$. אז קיימת סדרה <u>יחידה</u> $(i_1, \ldots, i_{n-2})$ באורך $n - 2$ על איברים $\{1, \ldots, n\}$ המתאימה לעץ G. לכיוון השני, כל תת־סדרה באורך $n - 2$ על הקבוצה $\{1, \ldots, n\}$ מגדירה עץ $G = \langle V, E \rangle$ על הקבוצה $\{1, \ldots, n\}$.

מסקנה מהמשפט הוא משפט קיילי

משפט מספר העצים על הקבוצה $\{1, \ldots, n\}$ הוא n^{n-2}.

הוכחת המשפט של פרופר הוא בצורה אלגוריתמית. לכל עץ על הקבוצה $\{1, \ldots, n\}$ נגדיר סדרה באורך $n - 2$ באופן הבא:

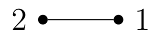
1. נסרוק את העץ ונמצא בו קודקוד מדרגה מינימלית ובעל ערך מינימלי.
2. לפי הטענה, דרגה זו היא 1 וערך הקודקוד הוא קטן מ־n (אחרת היה רק קודקוד אחד מדרגה 1).
3. נוסיף לסדרה את הערך המופיע בקודקוד (היחיד) המחובר לקודקוד שבחרנו.
4. נסיר את הקודקוד שבחרנו ונפעיל שוב את האלגוריתם על העץ המתקבל.

האלגוריתם מסתיים כאשר אנחנו נותרים עם עץ בגודל 1. נשים לב כי בצורה זו אנחנו מקבלים סדרה באורך $n - 1$, ולא $n - 2$. מצד שני, מכיוון שבכל שלב של האלגוריתם עלינו לבחור להסיר אחד מתוך **שני** קודקודים מדרגה 1, ובכל מקרה אנו מסירים את הקודקוד עם הערך הנמוך יותר, בשום שלב באלגוריתם לא מוסר הקודקוד ה־n־י. הסדרה המתקבלת אחרי הפעלת האלגוריתם בהכרח מסתיימת ב־n. בפרט, ניתן למחוק אותו ולהישאר עם סדרה באורך $n - 2$.

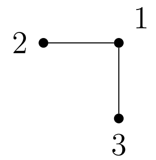
נבנה העתקה בכיוון ההפוך על מנת להסיק כי בניה זו היא חח"ע ועל. תהא $(v_1, \ldots, v_{n-2})$ סדרה באורך $n - 2$ על הקבוצה $\{1, \ldots, n\}$. נתחיל בבניית הגרף ע"י כך שנגדיר קודקוד v עם המספר הראשון המופיע בסדרה הנתונה. נמצא את המספר המינימלי i_0 שלא מופיע בסדרה. מספר זה בהכרח קיים, כי הסדרה הנתונה קצרה יותר ממספר האיברים בקבוצה $\{1, \ldots, n\}$. נגדיר קודקוד v_{i_0} עם המספר i_0. נוציא מ־v_{i_0} צלע ונחבר למספר הראשון שמופיע בסדרה. נקצץ את המספר הראשון מהסדרה ונחזור על התהליך, עד לתומה של הסדרה.

דוגמה כדי לבנות את העץ המקודד ע"י הסדרה $(1, 1, 1, 6, 1, 5)$ נתחיל בלהגדיר את הקודקוד 1, שהוא המספר הראשון המופיע בסדרה. בכל שלב נמצא את הערך הקטן ביותר שלא מופיע בסדרה, ונבנה קודקוד עם מספר זה. נוסיף קודקוד נוסף שערכו המספר הראשון בסדרה ונחבר אותו לקודקוד החדש. נמחק את האיבר הראשון בסדרה ונחזור על התהליך, כאשר בכל שלב נוסיף קודקוד עבור הערך הקטן ביותר שלא מופיע בסדרה ולא התווסף בשום שלב עד כה.

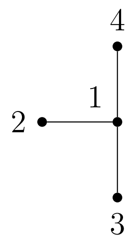
הבנייה מתקבלת באופן הבא:



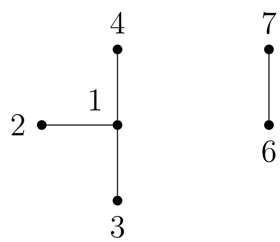
שלב א' סדרה $(1,1,1,6,1,5)$ עץ



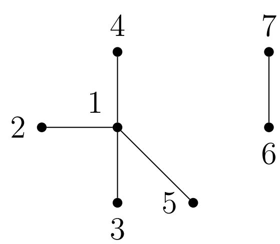
שלב ב' סדרה $(1,1,6,1,5)$ עץ



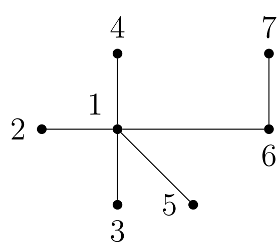
שלב ג' סדרה $(1,6,1,5)$ עץ



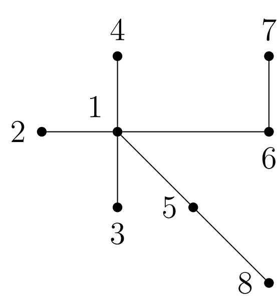
שלב ד' סדרה $(6,1,5)$ עץ



שלב ה' סדרה $(1,5)$ עץ



שלב ו' סדרה (5) עץ



שלב ז' סדרה $\varnothing$ עץ

תרגול 13

משפט רמזי ונוסחאות נסיגה

משפט רמזי

משפט רמזי על צלעות בגרף

שאלה יהא $k \in \mathbb{N}$ מספר טבעי. האם קיים מספר טבעי $\mathbb{N}$ כך שלכל גרף $G = \langle V, E \rangle$ עם $|V| = N$ בהכרח יש ב־G קליקה (תת־קבוצה שהגרף המושרה עליה הוא מושלם) מגודל k?

התשובה לשאלה זו היא כמובן לא. לכל $N \in \mathbb{N}$ נוכל לקחת למשל את הגרף המורכב מ־N קודקודים וללא צלעות, וזה בהכרח לא יכיל קליקה מגודל k, אלא אם כן $k = 0, 1$. **אבל**, נשים לב כי במקרה הספציפי הזה, כאשר N נהיה גדול מספיק הגרף בהכרח מכיל **קבוצה חופשית** (או אנטי־קליקה) מגודל k. אם כן, שאלה יותר סבירה היא האם קיים מספר N כך גרף בעל N קודקודים קיימת בגרף קליקה מגודל k או קבוצה חופשית מגודל k?

דוגמה 1. עבור $k = 0, 1, 2$ מתקיים כי כל גרף מגודל $N = k$ מכיל בהכרח קליקה או קבוצה חופשית מגודל k.

2. עבור $k = 3$ מתקיים כי כל גרף מגודל $N = 6$ מכיל קליקה או קבוצה־חופשית מגודל 3. כדי להוכיח זאת, ניקח $G = \langle V, E \rangle$ גרף עם $V = \{v_1, \ldots, v_6\}$ ונתבונן בקודקוד v_1. נחלק את ההוכחה לשני מקרים לפי דרגת v_1.

- <u>אם $\deg_G v_1 \geq 3$</u>, נניח בה"כ כי הקודקודים המחוברים ל־v_1 הם v_2, v_3, v_4. אם יש $2 \leq i < j \leq 4$ כך ש־$\{v_i, v_j\} \in E$ אז הקבוצה $\{v_1, v_i, v_j\}$ מהווה קליקה מגודל 3. אחרת, הקבוצה $\{v_2, v_3, v_4\}$ היא קבוצה חופשית מגודל 4.
- <u>אם $\deg_G v_1 < 3$</u> נוכל להתבונן בגרף המשלים של G המוגדר ע"י $G^c = \langle V, E' \rangle$ כאשר V היא אותה קבוצת קודקודים כמו ב־G ו־

$$\{v_i, v_j\} \in E' \iff (v_i \neq v_j) \wedge (\{v_i, v_j\} \notin E).$$

אז $\deg_{G^c} v_1 \geq 3$, ולפי הסעיף הקודם בגרף G^c יש קליקה או קבוצה חופשית מגודל 3. מהגדרת הגרף המשלים, קבוצה זו מהווה קבוצה חופשית או קליקה בהתאמה בגרף G.

3. עבור $k = 4$ ידוע כי $N = 18$ עובד.

סימון בהינתן $k \in \mathbb{N}$ ו־$n \in \mathbb{N}$, הסימון

$$n \to \{k\}_2^2$$

אומר כי לכל גרף על n קודקודים, קיימת בגרף קליקה מגודל k או קבוצה חופשית מגודל k.

פירוש לסימון עבור $k, i, j \in \mathbb{N}$ הסימון $\{k\}_j^i$ מייצג מספר N כך שאם נתבונן באוסף תתי־הקבוצות של $\{1, \ldots, N\}$ מגודל i, ונחלק להם j תוויות (צבעים) בהכרח קיימת תהיה קבוצה של k איברים ב־N שכל תתי־הקבוצות שלה מגודל i שנצבעות באותו צבע.

במקרה הספציפי שלנו אנחנו מדברים על המקרה בו $i = 2$, כלומר אנחנו מתבוננים בצלעות על גרף בן N קודקודים, ומחלקים להם אחת משתי תוויות־ הזוג $\{v, u\}$ נמצא בגרף או הזוג $\{v, u\}$ לא נמצא בגרף. (לחילופין ניתן לחשוב על זה כצביעה של קודקודים בגרף מלא על N קודקודים בצבע שחור או בצבע שקוף).

הסימון $n \to \{k\}_j^i$ אומר ש־n הוא מספר בו מובטח כי לכל צביעה של אוסף תתי־הקבוצות מגודל i של קבוצה מגודל n ב־j צבעים, בהכרח קיימת תת־קבוצה מגודל k של $\{1, \ldots, n\}$ שכל תתי־הקבוצות שלה מגודל i נצבעות באותו צבע.

משפט (רמזי לגרפים) יהא $k \in \mathbb{N}$ ו־$N \in \mathbb{N}$ המספר המינימלי המקיים כי $N \to \{k\}_2^2$. אז $2^{k/2} \le N \le 2^{2k}$.

החסם העליון במשפט רמזי (העשרה)

עבור מספרים $i, j \in \mathbb{N}$ נסמן ב־$R(i,j)$ את המספר המינימלי עבורו בכל גרף מגודל $R(i,j)$ יש קליקה מגודל i או קבוצה חופשית מגודל j. המשפט שציינו קודם אומר פשוט ש־$R(k,k)$ הוא המספר המינימלי המקיים $R(k,k) \to \{k\}_2^2$.

אין בטענה הזו כמובן שום תוכן מעבר לסימון. אנחנו נשתמש בסימון זה כדי להגיע לחסם עליון קרוב מאוד ל־2^{2k} בדרך אחרת.

טענה ח לכל $i, j \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $R(i,j) \le R(i-1,j) + R(i,j-1)$.

הוכחה. עלינו להראות כי בכל גרף מגודל $N = R(i-1,j) + R(i,j-1)$ יש בהכרח קליקה מגודל i או קבוצה חופשית מגודל j. ניקח $G = \langle V, E\rangle$ מגודל N, ונבחר קודקוד $v_0 \in V$ כלשהו. נסמן

$$M = \{u \in V \setminus \{v_0\} \mid \{u, v_0\} \in E\},\ K = \{u \in V \setminus \{v_0\} \mid \{u, v_0\} \notin E\}.$$

נשים לב כי, מכיוון ש־$M, K, \{v_0\}$ קבוצות זרות ו־$M \cup K \cup \{v_0\} = V$ בהכרח מתקיים כי $|M| \ge R(i-1,j)$ או $|K| \ge R(i,j-1)$. אחרת, אם שני הגדלים קטנים, אז

$$N = |M| + |K| + 1 \le (R(i-1,j) - 1) + (R(i,j-1) - 1) + 1 = N - 1$$

בסתירה. במקרה בו $|K| \ge R(i,j-1)$, הגרף המושרה על K מכיל בהכרח קבוצה חופשית מגודל $j-1$. מכיוון שאף אחד מאיברי K אינו מחובר בצלע ל־v_0, מקבלים כי הקבוצה $K \cup \{v_0\}$ היא חופשית מגודל j. אחרת, באותו אופן, מכיוון שכל איברי M מחוברים בצלע ל־v_0, בהכרח הגרף המושרה על $M \cup \{v_0\}$ מכיל קליקה מגודל i. ■

טענה ט לכל $i, j \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $R(i,j) \le \binom{i+j-2}{i-1}$.

הוכחה. באינדוקציה על $i+j$, עם שימוש בנוסחת פסקל. במקרה בו $i+j=1$ קל לחשב כי $R(i,0) = R(0,j) = 0$ וכי במקרה בו $i+j=2$ מתקיים

$$R(0,2) = R(2,0) = \binom{0}{1} = 0 \text{ ו־ } R(1,1) = 1 \le \binom{0}{0} = 1.$$

נניח כי הטענה נכונה לכל i, j כך ש־$i+j=n$ וניקח i, j עם $i+j = n+1$. אז

$$\begin{aligned} R(i,j) &\le R(i-1,j) + R(i,j-1) && \text{(הטענה קודמת)}\\ &\le \binom{i-1+j-2}{j-1} + \binom{i+j-1-2}{j-1-1} && \text{(הנחת האינדוקציה)}\\ &= \binom{i+j-2}{j-1} = \binom{i+j-2}{i-1}. && \text{(זהות פסקל)}\end{aligned}$$

■

מסקנה לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$\begin{aligned} R(k,k) &\le \binom{2k-2}{k-1} = \frac{(2k-2)!}{(k-1)!^2}\\ &= \frac{1\cdot 2\cdots(2k-3)\cdot(2k-2)}{(1\cdot 2\cdots(k-1))\,(1\cdot 2\cdots(k-1))}\\ &= \frac{2^{k-1}\cdot(1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-3))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(k-1)} = 2^{2(k-1)}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-3}{2k-2}\right) \le 2^{2k}\end{aligned}$$

נוסחאות נסיגה

הגדרה בהינתן סדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ אנו אומרים כי $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ מקיימת נוסחת נסיגה מסדר r אם קיימת פונקציה $f(t_0,\dots,t_{r-1})$ וערכים $\gamma_0,\dots,\gamma_{r-1}$ כך ש־

$$a_0=\gamma_0\,,\quad a_1=\gamma_1\,,\quad \dots \quad ,a_{r-1}=\gamma_{r-1}$$

ו־ $a_{n+r}=f(a_n,\dots,a_{n+r-1})$ לכל $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

תרגיל 1 (מגדלי האנוי) חשבו את המספר המינימלי של שלבים הנדרשים על מנת לפתור בעיית מגדלי האנוי עם n דיסקיות.

פתרון. נסמן ב־a_n את מספר השלבים המינימלי הנדרש כדי לפתור בעיית האנוי עם n דיסקיות. מובן כי $a_1=1$. כמו כן, בהינתן מגדל האנוי בגודל n נוכל להעבירו למקל השני באופן הבא־

1. נפעיל את האלגוריתם ל־$n-1$ הדיסקיות העליונות כדי להעבירן למקל השלישי. מספר השלבים המינימלי לכך הוא a_{n-1}.

2. נעביר את הדיסקית הרחבה ביותר למקל השני־ שלב אחד נוסף.

3. נעביר את $n-1$ הדיסקיות מהמקל השלישי למקל השני־ a_{n-1} שלבים.

קיבלנו כי מספר השלבים המינימלי הנדרש כדי לפתור את בעיית האנוי הוא $a_n=2a_{n-1}+1$. **שאלה למחשבה:** למה זה מינימלי?

המספר המדוייק ניתן לחישוב באופן ישיר:

$$a_n=(a_n-2a_{n-1})+2(a_{n-1}-a_{n-2})+2^2(a_{n-2}-a_{n-3})+\dots+2^{n-1}(a_2-a_1)+2^n a_1=2\cdot 2^n=2^{n+1}$$

■

תרגיל 2 בכמה דרכים ניתן לרצף לוח $n\times 3$ בעזרת משבצות 1×2 ו־2×2 שניתן לסובב.

פתרון. נסמן ב־a_n את מספר הדרכים לרצף לוח $n\times 3$ במשבצות 1×2, 2×2 ו־2×1. נחלק את אוסף הריצופים האפשריים לפי סוג המרצפת המונחת בתא השמאלי עליון.

1. אם בתא זה מונחת מרצפת 2×2, אין לנו ברירה אלא להניח מתחתיה מרצפת 1×2 ואז נותרו $(n-2)\times 3$ שיש לרצף עם אותן משבצות. מספר הריצופים שבהם מונחת מרצפת 2×2 בפינה זו הוא a_{n-2}.

2. נניח שבתא השמאלי עליון מונחת מרצפת 1×2. מכיוון שבמקרה זה אנחנו חייבים להניח בשורה התחתונה מרצפת בגובה 1 אין ברירה אלא להניח שם מרצפת 2×1. מה ניתן לעשות מכאן? יש הרבה אפשרויות לרצף את הלוח שנותר, ובינתיים לא כדאי לנסות לחשב אותן ישירות. נסמן לבינתיים ב־b_{n-1} את מספר הדרכים לרצף חדר בגודל $(n-1)\times 3$ שבו יש פינה אחת חסרה. מספר הדרכים לרצף את החדר $n\times 3$ כאשר בפינה השמאלית עליונה יש מרצפת 1×2 הוא b_{n-1}.

3. נניח כעת כי בפינה השמאלית עליונה מונחת מרצפת 2×1. מקרה זה גם כן מתפצל ל־3 לפי סוג המשבצת שמונחת מתחת למשבצת השמאלית עליונה.

   אם במשבצת זו מונחת משבצת 2×2 נותר לנו לרצף חדר $(n-2)\times 3$ ומספר האפשרויות לבצע זאת הוא a_{n-2}. אם המשבצת שמתחת למשבצת השמאלית עליונה היא 1×2 אין לנו ברירה אלא להניח עוד משבצת 1×2 מתחתיה ושוב נותרים לנו a_{n-2} דרכים להשלים את הריצוף. לבסוף, אם מונחת במקום השמאלי ביותר מתחת למשבצת השמאלית עליונה משבצת 2×1 נותר לנו לרצף לוח $(n-1)\times 3$ עם המרצפות הנתונות, ומספר הדרכים לבצע זאת הוא b_{n-1}. קיבלנו כי מספר הריצופים הנמצאים במקרה זה הוא $2a_{n-2}+b_{n-1}$.

בסה"כ קיבלנו את הנוסחה $a_n = 2b_{n-1} + 3a_{n-2}$.

במקום לחשב את b_n ישירות, נשים לב כי גם סדרה זו מקיימת נוסחת נסיגה. אם נחלק את הריצופים האפשריים לפי המשבצות הנמצאות בעמודה בה חסרה משבצת נקבל כי הריצופים בהם מונחת שם משבצת 2×2 או 2×1 תורמים כל אחד b_{n-2} ריצופים אפשריים, ואלה שבהם מונחת שם מרצפת 1×2 תורמים a_{n-1} ריצופים. לכן קיבלנו

$$b_n = 2b_{n-2} + a_{n-1}$$

מהנוסחה ל־a_n ניתן לבודד את b_{n-1} ולקבל $b_{n-1} = \frac{a_n - 3a_{n-2}}{2}$ ולהציב לנוסחה ל־b_n

$$\frac{a_{n+1} - 3a_{n-1}}{2} = \frac{a_{n-1} - 3a_{n-3}}{2} + a_{n-1}$$

או, אחרי פיתוח

$$a_{n+4} = 6a_{n+2} - 3a_n.$$

זו נוסחה מסדר 4, לכן עלינו לחשב את 4 תנאי ההתחלה. $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 5, a_3 = 0$. ■

תרגול 14

נוסחאות נסיגה לינאריות והומוגניות
עקרון ההכלה וההדחה

משוואות נסיגה לינאריות הומוגניות

הפולינום האופייני ונוסחאות סגורות

נוסחת נסיגה נתונה ע"י $\alpha_r a_{n+r} + \alpha_{r-1} a_{n+r-1} + \ldots \alpha_0 a_n = 0$ לכל n ו־$a_i = \gamma_i$ עבור $i = 1, \ldots, r$. למשל, במקרה של סדרה פיבונצי הסדרה נתונה ע"י $a_0 = a_1 = 1$ ו־$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ לכל n. נגדיר את ה**פולינום האופייני** של הסדרה ע"י

$$.p(t) = \alpha_r t^r + \alpha_{r-1} t^{r-1} + \ldots + \alpha_0$$

אנחנו נתעסק רק במקרה בו הפולינום p מתפצל (מעל המרוכבים) למכפלה של r גורמים לינאריים **שונים**, $p(t) = \prod_{i=1}^{r}(t-\lambda_i)$. אז, קיימים $A_1, \ldots, A_r$ כך ש־ $a_n = A_1\lambda_1^n + \ldots + \lambda_r^n$.

תרגיל 1 נתונה נוסחת נסיגה ע"י

$$.a_0 = 1,\ a_1 = 3, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$$

מצאו נוסחה סגורה לאיבר ה־n־י של a_n.

פתרון. הפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה הוא $p(t) = t^2 - t - 6 = (t+2)(t-3)$ לכן קיימים $A, B \in \mathbb{C}$ כך ש־$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-3)^n$. מה ערכים אלו?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \iff \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן $A = \frac{6}{5}$ ו־$B = -\frac{1}{5}$. ■

תרגיל 2 נתונה נוסחת נסיגה ע"י

$$.a_0 = \ldots = a_4 = 2, \quad a_{n+4} = 2a_{n+3} + 2a_{n+1} + a_n$$

מצאו נוסחה סגורה לאיבר ה־n־י של a_n.

פתרון. הפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה הוא $p(t) = t^4 - 2t^3 - 2t - 1$. נשים לב כי $p(i) = p(-i) = 0$ ולכן הפולינום $p(t)$ מתחלק ב־(t^2+1), ומקבלים

$$.p(t) = (t^2+1)(t^2-2t-1) = (t-i)(t+i)(t-(1+\sqrt{2}))(t-(1-\sqrt{2}))$$

המשוואה המתקבלת היא מהצורה

$$a_n = A(-i)^n + Bi^n + C(1+\sqrt{2})^n + D(1-\sqrt{2})^n$$

נציב ערכים ב־$n = 0, 1, 2, 3$.

$$\begin{cases} A+B+C+D = 2 \\ -Ai + Bi + C(1+\sqrt{2}) + D(1-\sqrt{2}) = 2 \\ -A - B + C(3+2\sqrt{2}) + D(3-2\sqrt{2}) = 2 \\ Ai - Bi + C(7+5\sqrt{2}) + D(7-5\sqrt{2}) = 2 \end{cases}$$

מכאן ניתן לחלץ את ערכי A, B, C, D ע"י דירוג. ■

תרגיל 3 מצאו נוסחה סגורה (ללא חלוקה למקרים) לסדרה

$$a_n = n \pmod r$$

כאשר $n \pmod r$ מסמן את המספר היחיד $0 \le i \le r-1$ כך ש־$n-i$ מתחלק ב־r.

פתרון. ניתן לתאר את הסדרה הנתונה ע"י נוסחת הנסיגה $a_{n+r} = a_n$ לכל $n \ge 0$, עם תנאי ההתחלה הנתונים. הפולינום האופייני של הסדרה הוא $t^r - 1 = 0$ והוא מתפרק, מעל המרוכבים, למכפלה של גורמים לינארים שונים $\prod_{i=0}^{r-1}(t-\xi^i)$ כאשר $\xi = e^{2i\pi/r}$ הוא שורש יחידה פרימיטיבי מסדר r. הסדרה הנתונה היא מהצורה

$$a_n = A_0 + A_1\xi^n + A_2\xi^{2n} + \ldots + A_{r-1}\xi^{(r-1)n}.$$

כדי לחשב את הערכים $A_0, \ldots, A_{r-1}$ נציב את הערכים $n = 0, \ldots, r-1$ ונקבל את המשוואה הלינארית

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \ldots & \xi^{r-1} \\ 1 & \xi^2 & \xi^4 & \ldots & \xi^{2(r-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \xi^{r-1} & \xi^{2(r-1)} & \ldots & \xi^{(r-1)(r-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

מציאת הופכי של מטריצת ונדרמונדה היא, בד"כ, משימה לא פשוטה. במקרה הספציפי הנתון, ניתן למצא את המטריצה ההופכית יחסית בקלות (ראו הערה למטה), ולהשתמש בה כדי לחשב את הערכים של $A_0, \ldots, A_{r-1}$.

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{r-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \xi^{r-1} & \xi^{r-2} & \ldots & \xi^1 \\ 1 & \xi^{2(r-1)} & \xi^{2(r-2)} & \ldots & \xi^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \xi^{(r-1)(r-1)} & \xi^{(r-1)(r-2)} & \vdots & \xi^{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

כלומר

$$A_i = \frac{1}{r}\sum_{j=0}^{r-1} \xi^{i(r-j)} = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} \xi^{ij}$$

ו־$a_n = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=1}^{r} \xi^{ij+n}$.

הערה כדי לוודא את נוסחת ההופכי לדטרמיננטת ונדרמונדה מספיק לנו לחשב את המכפלה

$$\begin{pmatrix}1 & \xi^j & \xi^{2j} & \dots & \xi^{(r-1)j}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \xi^i\\ \xi^{2i}\\ \vdots\\ \xi^{(r-1)i}\end{pmatrix} = \sum_{l=0}^{r-1}\xi^{l(i+j)} = \begin{cases} r & i+j=r\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

וידוא זה ניתן לעשות ע"י הכפלת המשוואה ב-$\xi^{(i+j)}$ ולראות כי הוא לא משפיע על הערך באגף שמאל, לכן אם $\xi^{i+j}\neq 1$ בהכרח הערך באגף שמאל שווה ל־0.

■

עקרון ההכלה וההדחה

יהיו A,B,C קבוצות סופיות.

שתי קבוצות $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$

שלוש קבוצות $|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$.

מקרה כללי נניח כי $A_1,\dots,A_n$ קבוצות סופיות נתונות. אז

$$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\left|\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right| = \sum_{\varnothing\neq J\subseteq\{1,\ldots,n\}}(-1)^{|J|+1}\left|\bigcap_{j\in J}A_j\right|.$$

תרגיל 4 חשבו את מספר המספרים בין 1 ל־600 שאינם מתחלקים ב־$3,5,7$.

פתרון. נסמן $X=\{1,2,\ldots,600\}$ ולכל $k\in\mathbb{Z}$ נסמן ב־A_k את קבוצת המספרים בין 1 ל־600 המתחלקים ב־k. אנחנו מעוניינים לחשב את $|X\setminus(A_3\cup A_5\cup A_7)|$. נשים לב כי $|X|=600$ ולכל $k\in\mathbb{Z}$, $|A_k|=\lfloor\frac{600}{k}\rfloor$ וכי $A_m\cap A_n = A_{\gcd(m,n)}$ לכל $m,n\in\mathbb{Z}$. לפי הכלה והדחה:

$$\begin{aligned}|A_3\cup A_5\cup A_7| &= |A_3|+|A_5|+|A_7|-|A_3\cap A_5|-|A_3\cap A_7|-|A_5\cap A_7|+|A_3\cap A_5\cap A_7|\\ &= |A_3|+|A_5|+|A_7|-|A_{15}|-|A_{21}|-|A_{35}|+|A_{105}|\\ &= 325\end{aligned}$$

לכן $|X\setminus(A_3\cup A_5\cup A_7)| = 600-325=275$. ■

תרגיל 5 1. חשבו את מספר הפתרונות במספרים שלמים אי־שליליים למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=20$.

2. חשבו את מספר הפתרונות למשוואה זו בהם $0\le x_1,x_2,x_3,x_4\le 8$.

פתרון. אוסף הפתרונות בשלמים אי־שליליים למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ הוא נמצא בהתאמה חח"ע ועל אוסף הסידורים של 20 כדורים לבנים ו־3 כדורים שחורים. בהינתן סידור שכזה, למשל

$$\circ\circ\ldots\circ\bullet\circ\ldots\circ\bullet\circ\ldots\circ\bullet\circ\ldots\circ\circ$$

ניקח את x_1 להיות מספר הכדורים הלבנים עד השחור הראשון, את x_2 להיות מספר הכדורים הלבנים בין השחור השני והשלישי וכן הלאה. מובן כי כל סידור שכזה נותן פתרון יחיד למשוואה $x_1 + \ldots + x_4 = 20$, וכי כל פתרון למשוואה מגדיר סידור של 23 הכדורים. מכיוון שהסידור של הכדורים נקבע ע"י בחירה של 3 מקומות להצבה של שלושת הכדורים השחורים, מספר הפתרונות למשוואה הוא $\binom{23}{3} = 1771$.

כדי לפתור את הסעיף השני, נסמן, לכל $i = 1, \ldots, 4$ ב־A_i את אוסף הפתרונות למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ עם $x_i \geq 9$ ו־$x_j \geq 0$ לכל $j \neq i$. אנחנו מעוניינים לחשב את גודל המשלים של $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ בתוך קבוצת הפתרונות למשוואה. בכוונתנו להשתמש בעיקרון ההכלה וההדחה לצורך כך. נחשב את גדלי החיתוכים של הקבוצות A_i.

- $|A_i|$. מכיוון ש־$|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4|$ מספיק לנו לחשב את $|A_1|$. נגדיר $x_1' = x_1 - 9$ ונשים לב כי $x_1 \geq 9$ אם"ם $x_1' \geq 0$, וכי $x_1 + \ldots + x_4 = 20$ אם"ם
$$x_1' + x_2 + x_3 + x_4 = 11.$$
כמו בסעיף הקודם, מספר הפתרונות למשוואה זו הוא $\binom{11+3}{3} = \binom{14}{3} = 364$.
- $|A_i \cap A_j|$ $(i \neq j)$. בדומה למקרה הקודם, מספיק לנו לחשב את $|A_1 \cap A_2|$ (ובשאר המקרים מספר הפתרוות זהה). נגדיר $x_1' = x_1 - 9$ ו־$x_2' = x_2 - 9$. מספר הפתרונות למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4 = 20$ עם $x_1, x_2 \geq 9, x_3, x_4 \geq 0$ זהה למספר הפתרונות למשוואה
$$x_1' + x_2' + x_3 + x_4 = 2$$
והוא $\binom{5}{3} = 10$.
- $|A_i \cap A_j \cap A_k|$ $(i \neq j \neq k)$ ו־$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$. נשים לב כי אם שלוש מהמשתנים $x_1, \ldots, x_4$ הם גדולים או שווים ל־9 אז סכומם גדול או שווה ל־27, ובפרט אין פתרונות למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ עם יותר משני משתנים הגדולים או שווים מ־9. לכן מספר הפתרונות במקרים אלה הוא 0.

מהכלה והדחה, קיבלנו כי

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= \sum_{i=1}^{4} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| + |A_1 \cap \ldots \cap A_4| \\ &= 4\,|A_1| - \binom{4}{2}|A_1 \cap A_2| + 0 = 1396\end{aligned}$$

ובסה"כ מספר הפתרונות הוא 375. ■

תרגיל 6 כמה העתקות על ישנן מקבוצה בת n איברים לקבוצה בת m איברים? מצאו נוסחה כללית ורשמו את תוצאת החישוב עבור $n = 5, 4$ ו־$m = 4$.

פתרון. תהא A קבוצה בת n איברים ו־B קבוצה בת m איברים. בהינתן תת קבוצה $C \subseteq B$ נסמן ב־S_C את אוסף הפונקציות $f : A \to C$. בתרגיל בית ראינו כי $|S_C| = |C|^n$. כדי לחשב את גודל קבוצת הפונקציות העל, נחשב את משלימתה שנתונה ע"י

$$S_B \setminus \left(\bigcup_{b \in B} S_{B \setminus \{b\}}\right).$$

מהכלה־הדחה מתקיים כי

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{b \in B} S_{B \setminus \{b\}}\right| &= \sum_{b \in B} \left|S_{B \setminus \{b\}}\right| - \sum_{\substack{b_1, b_2 \in B \\ b_1 \neq b_2}} \left|S_{B \setminus \{b_1, b_2\}}\right| + \ldots + (-1)^{k+1} \sum_{\substack{b_1, \ldots, b_k \in B \\ b_i \neq b_k}} \left|S_{B \setminus \{b_1, \ldots, b_k\}}\right| + \ldots + (-1)^{m+1} |S_\varnothing| \\ &= m \cdot (m-1)^n - \binom{m}{2} \cdot (m-2)^n + \ldots + (-1)^{k+1} \binom{m}{k} (m-k)^n + \ldots + (-1)^m \cdot 1^n + 0\end{aligned}$$

עבור $n=5$ ו־$m=4$ מקבלים כי

$$\left|\bigcup_{b\in B} S_{B\setminus\{b\}}\right| = 4\cdot 3^5 - \binom{4}{2}\cdot 2^5 + \binom{4}{3}1^5 = 784$$

ולכן מספר הפונקציות העל הוא $4^5 - 784 = 240$.
אותו חישוב עבור $n=m=4$ נותן כי

$$\left|\bigcup_{b\in B} S_{B\setminus\{b\}}\right| = 4\cdot 3^4 - \binom{4}{2}\cdot 2^4 + \binom{4}{3}1^4 = 232$$

ומספר הפונקציות העל הוא $4^4 - 232 = 24 = 4!$.

■

חלק II

תרגילי בית

תרגיל בית 1

לוגיקה ותורת קבוצות נאיבית

1. בדקו לכל אחד מהפסוקים הבאים אם הוא טאוטולוגיה (כלומר־ מי מהפסוקים הבאים בעל ערך אמת T לכל השמה של ערכי אמת במשתנים p ו־q).

(א) $(p \to q) \vee (p \to (q \wedge q))$.

(ב) $((p \wedge q) \to q) \to (p \to q)$.

(ג) $p \to (q \to (p \wedge q))$.

2. בסעיפים הבאים נתונים שני פסוקים במשתנים p, q ו־r בדקו אילו גרירות לוגיות מתקיימות בין שני הפסוקים בכל סעיף.

(א) $(\neg(\neg p) \wedge q) \vee (\neg p \vee \neg q)$ ו־$r \vee \neg(p \wedge q)$.

(ב) $p \vee q$ ו־$p \to (p \to q)$.

(ג) $(p \to q) \to r$ ו־$p \to (q \to r)$.

(ד) $\neg(p \leftrightarrow q)$ ו־$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

3. תהא A תת־קבוצה של $\mathbb{N}$. אילו מהתנאים הבאים גוררים כי $A = \varnothing$? הוכיחו זאת או הציגו קבוצה לא ריקה $A \subseteq \mathbb{N}$ המקיימת את התנאי.

(א) $\varnothing \subseteq A$.

(ב) $A \subseteq \varnothing$.

(ג) לכל קבוצה $B \subseteq \mathbb{N}$, $A \cap B = A$.

(ד) לכל קבוצה $B \subseteq \mathbb{N}$, $A \cap B = B$.

(ה) קיימת קבוצה $B \subseteq \mathbb{N}$ כך ש־$A \cap B = A$.

(ו) $x \in A \Rightarrow x \in A \cap (\mathbb{N} \setminus A)$.

4. בדקו מי מהפסוקים הבאים מתקיים במבנה הנתון.

(א) $\exists x \exists y \left(\neg (x = y) \wedge (\forall z\, (x = z) \vee (y = z))\right)$ ב־$\{0,1\}$.

(ב) $\exists x \exists y \left(\neg (x = y) \wedge (\forall z\, (x = z) \vee (y = z))\right)$ ב־ $\{0\}$.

(ג) $\exists x \exists y \left(\neg (x = y) \wedge (\forall z\, (x = z) \vee (y = z))\right)$ ב־ $\mathbb{N}$.

(ד) $\forall x\, (\exists y\, (x^2 = y))$ ב־$\mathbb{N}$.

(ה) $\forall x\, (\exists y\, (y^2 = x) \vee (y^2 = -x))$ ב־$\mathbb{R}$.

(ו) $\forall x \forall y\, ((x < y) \to (\exists z\, (x < z \wedge z < y)))$ ב־$\mathbb{Q}$.

(ז) $\forall x \forall y\, ((x < y) \to (\exists z\, (x < z \wedge z < y)))$ ב־$\mathbb{Z}$.

(ח*) $P(x)$ היא תכונה של איברים באיזשהו מבנה־ האם הטענה הבאה נכונה?

$$\exists x\left(P(x) \rightarrow \forall y P(y)\right).$$

נמקו, או תארו מבנה ובו תכונה P שלגביה הטענה לא נכונה.

5. נתונות קבוצה A וקבוצה של קבוצות $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. הוכיחו כי

$$A \cap \bigcup\{B_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup\{A \cap B_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

6. נתונות קבוצות A ו־B.

(א) האם מתקיים כי $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$?

(ב) האם מתקיים כי $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$?

(ג) האם קיימות קבוצות A ו־B כך ש־$A \neq B$ אבל $P(A) = P(B)$?

7. יהיו G,F קבוצות לא ריקות של קבוצות. לכל אחת מהטענות הבאות קבעו אם היא בהכרח נכונה והוכיחו את קביעתכם.

(א) אם $G \subseteq F$ אז $\bigcup F \subseteq \bigcup G$.

(ב) אם $G \subseteq F$ אז $\bigcup G \subseteq \bigcup F$.

(ג) אם $G \subseteq F$ אז $\bigcap F \subseteq \bigcap G$.

תרגיל בית 2

תורת קבוצות נאיבית ואינדוקציה

1. בהינתן קבוצות A, B בעולם ייחוס Ω נתון ההפרש הסימטרי של A ו־B מוגדר להיות

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

(א) הראו כי $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

(ב) הראו כי $A \triangle B = B \triangle A$.

(ג) הוכיחו כי לכל A, B, C מתקיים כי $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

(ד) הראו באינדוקציה כי לכל $n \geq 1$ ולכל אוסף קבוצות $A_1, \ldots, A_n$ מתקיים

$$A_1 \triangle (A_2 \triangle (\ldots \triangle (A_{n-1} \triangle A_n) \ldots)) = \{x \mid \text{מופיע במספר אי־זוגי של קבוצות מבין הקבוצות } A_1, \ldots, A_n \ x\}.$$

(ה) הראו כי לכל A, B, C מתקיים $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

הערה. ניתן להוכיח את הטענה באופן ישיר, או לחילופין להסיקה מסעיפים ב' וד'.

(ו) יהא $n \in \mathbb{N}$. הראו כי ניתן לסדר את איברי קבוצת החזקה $\mathbf{P}(\{1, \ldots, n\})$ במעגל כך ההפרש הסימטרי בין כל שני איברים סמוכים במעגל יהיה יחידון (כלומר־ קבוצה בעלת איבר בודד).

רמז. אינדוקציה. כדי לבצע את צעד האינדוקציה השתמשו בתיאור

$$\mathbf{P}(\{1, \ldots, n+1\}) = \{X \subseteq \{1, \ldots, n+1\} \mid n+1 \in X\} \cup \{X \subseteq \{1, \ldots, n\} \mid n+1 \notin X\}.$$

2. (א) הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(ב) הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ עם $n \geq 1$, ו־$a \neq 1$ מתקיים $1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

(ג) יהא $n \in \mathbb{N}$. סדרה סופית $a_1, \ldots, a_k$ של מספרים טבעיים תקרא סדרת־n אם סכום איבריה הוא n. הראו כי מספר סדרות ה־n, הוא 2^{n-1}, לכל $n \geq 1$.

לדוגמה. אוסף כל סדרות ה־4 הוא

$$\begin{array}{l} (1,3), (1,2,1), (1,1,2), (1,1,1,1), \\ (2,2), (2,1,1), \\ (3,1), \\ (4). \end{array}$$

רמז. השתמשו באינדוקציה שלמה ובסעיף (ב) של שאלה זו.

3. (א) נתונים 3^n מטבעות שמתוכם $3^n - 1$ הם בעלי משקל זהה ומטבע אחד מזוייף וקל מהשאר. הראו כי ניתן למצא את המטבע המזוייף בעזרת n שקילות באמצעות מאזני כפות.

(ב) מה הוא מספר השקילות המינימלי הנדרש במידה ולא ידוע כי המטבע המזוייף קל יותר, אלא רק שמשקלו שונה מהאחרים? הוכיחו את טענתכם.

(ג) נתונות $n+1$ משקולות במשקלים $1, 2, \ldots, 2^n$. הראו כי ניתן לבטא כל משקל שלם בתחום $1, 2, \ldots, 2^{n+1}-1$ בעזרת משקולות אלו.

(ד) נתונות $n+1$ משקולות במשקלים $1, 3, \ldots, 3^n$. הראו כי ניתן למדוד כל משקל שלם בתחום $1, 2, \ldots, \frac{3^{n+1}-1}{2}$ **באמצעות משקל כפות**, בעזרת משקולות אלו.

4. הוכיחו או הפריכו

(א) $A \times B = B \times A$.

(ב) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

(ג) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.

(ד) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(ה) $(A \times B) = \bigcup \{\{a\} \times B \mid a \in A\}$.

5. בהינתן א"ב בעל 22 אותיות שונות (הא"ב העברי), בכמה דרכים ניתן לבחור

(א) מילה באורך 10.

(ב) מילה באורך 10 בה כל האותיות **שונות.**

(ג) מילה באורך 10 המכילה את האות א'.

(ד) מילה שאורכה קטן מ־6.

(ה) מילה באורך 7 או 8.

(ו) פלינדרום באורך 15.

הערה (א) המילים הנספרות בשאלה זו אינן בהכרח בעלות משמעות מילולית כלשהי.

(ב) פלינדרום היא מילה הנראית זהה בקריאה מימין לשמאל ומשמאל לימין (כמו למשל "אבא").

6. בכיתה 4 בנים ו־7 בנות.

(א) בכמה דרכים ניתן לסדר את הבנים והבנות בשורה?

(ב) בכמה דרכים ניתן לסדרם כך שאין שני בנים סמוכים?

(ג) כיצד תשתנה התשובה אם נחליף את הבנות והבנים בכדורים שחורים ולבנים בהתאמה (**הערה**: מבחינת ספירה, אנחנו לא מבדילים בין שני כדורים מאותו הצבע, אך אנו כן מבדילים בין שני תלמידים מאותו המגדר).

(ד) בכמה דרכים ניתן לבחור ועד בן 3 תלמידים, המורכב מיו"ר, גזבר ומזכיר, מתוך הכיתה?

(ה) בכמה דרכים ניתן לבחור ועד בן 3 תלמידים בו כל התלמידים בעלי אותו תפקיד?

(ו) בכמה דרכים ניתן לבחור ועד בו בדיוק 2 בנים ובת אחת, ואשר לכל התלמידים בו אותו תפקיד?

תרגיל בית 3

קומבינטוריקה ויחסים

1. (א) בכמה מהמספרים השלמים בקטע $[3,000\ ,\ 8,000]$ כל הספרות שונות?
(ב) בכמה מהמספרים הזוגיים בקטע $[20,000\ ,\ 30,000]$ כל הספרות שונות?
(ג) חשבו את מספר המחלקים של $360,000$ ואת מספר המחלקים המשותפים של 20^{30} ו־10^{40}.

2. (א) כמה פתרונות במספרים שלמים ישנם למשוואה $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$ כאשר $n\in\mathbb{N}$ ו־$x_1,\ldots,x_k$ הם שלמים אי־שליליים.
(ב) כמה פתרונות במספרים שלמים ישנם למשוואה $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$ כאשר $n\in\mathbb{N}$ ו־$x_1,\ldots,x_k$ הם שלמים חיוביים.
(ג) מהו מספר הדרכים לסדר 5 כדורים לבנים ו־18 כדורים שחורים בשורה כאשר אין אף שני כדורים לבנים סמוכים?

3. (א) על מקרר מונחים מגנטים בצורת אותיות הא"ב העברי, המרכיבות את המילים **טווידלדי וטווידלדם**. תינוקת סקרנית מסדרת מחדש את אותיות המילה, ויוצרת מלים חדשות. כמה מלים ע"י שימוש בכל האותיות?
(ב) בכמה מהמילים הללו האות **ט** לא מופיעה פעמיים ברצף?
(ג) בכמה מהמלים הללו האות **ד** לא מופיעה פעמיים ברצף?
(ד) כעת נניח כי לרשות התינוקת שק ובו כמות גדולה מאוד של האותיות **ט,ו,י,ד,ל** ו־**מ**. כמה מלים שונות באורך 17 יכולה התינוקת ליצור?
(ה) השתמשו בסעיפים (א) ו־(ד) על מנת להסיק את השוויון

$$\sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_6\in\mathbb{N}\\ i_1+i_2+\cdots+i_6=17}}\frac{17!}{i_1!i_2!\cdots i_6!}=6^{17}.$$

הערה בשאלה 4 אנחנו לא מבחינים בין האותיות מ' סופית ומ' תחילית. כמו כן, אנחנו סופרים רק מלים ללא רווחים, המורכבות מכל האותיות הנתונות.

4. (א) נתונים שני מספרים טבעיים $n,k\in\mathbb{N}$.
i. מהו המקדם של x^k בפולינום $(1+x)^n$?
ii. הראו כי לכל n מתקיים השוויון

$$1+(1+x)+(1+x)^2+\ldots(1+x)^n=\frac{(1+x)^{n+1}-1}{x}.$$

רמז. תרגיל 2, שאלה 2(ב).

iii. הסיקו את נוסחת מקל ההוקי

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{j}{k}=\binom{n+1}{k+1} \qquad \text{לכל } n,k\in\mathbb{N}.$$

רמז. שוויון בין שני פולינומים מתקיים אס"ס מתקיים שוויון בין כל מקדמי הפולינומים.

(ב) תהא $X=\{1,\dots,n+1\}$ ולכל $j=0,\dots,n$ נגדיר

$$X_j=\{Y\subseteq X \mid (|Y|=k+1)\wedge(\max Y=j+1)\}.$$

i. הראו כי לכל $i\neq j$ מתקיים $X_i\cap X_j=\varnothing$ וכי

$$\bigcup\{X_j \mid j=0,\dots,n\}$$

הוא אוסף כל תתי הקבוצות של X מעוצמה $k+1$.

ii. הראו כי $|X_j|=\binom{j}{k}$.

iii. הסיקו את נוסחת מקל ההוקי

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{j}{k}=\binom{n+1}{k+1} \qquad \text{לכל } n,k\in\mathbb{N}.$$

5. **(א)** הראו כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים השוויון $1^2+2^2+\cdots+n^2=2\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}$. לצורך כך, חשבו בשני אופנים את גודל הקבוצה

$$C=\{\langle a,b,c\rangle \mid a,b,c\in\{1,\dots,n+1\},\ (a<b)\wedge(a<c)\}.$$

(ב) יהיו $n,k\in\mathbb{N}$. נסמן ב־ $A_{n,k}=\{\langle a_1,\dots,a_k\rangle \mid a_1,\dots,a_k\in\{1,\dots,n\}\}$ את אוסף הסדרות באורך k מעל הקבוצה $\{1,\dots,n\}$.

i. חשבו את עוצמת $A_{n,k}$.

ii. לכל מספר טבעי $1\leq j\leq k$ נגדיר קבוצה

$$A_{n,k}^{(j)}=\{\langle a_1,\dots,a_k\rangle\in A_{n,k} \mid |\{a_1,\dots,a_k\}|=j\}.$$

הראו כי $\left|A_{n,k}^{(j)}\right|=S_{k,j}\cdot\frac{n!}{(n-j)!}=S_{k,j}\cdot j!\cdot\binom{n}{j}$, כאשר $S_{k,j}\in\mathbb{N}$ הוא מספר הדרכים לחלק קבוצה מגודל k ל־j תתי קבוצות **לא ריקות וזרות**[1].

iii. הסיקו את השוויון

$$n^k=S_{k,1}\binom{n}{1}+2!S_{k,2}\binom{n}{2}+\cdots+k!S_{k,k}\binom{n}{k}$$

(ג) הסיקו מסעיף (ג) ומהשאלה הקודמת כי לכל $k\in\mathbb{N}$, $k>0$ מתקיים כי

$$1^k+2^k+\ldots+n^k=c_1\binom{n+1}{2}+c_2\binom{n+1}{3}+\cdots+c_k\binom{n+1}{k+1},$$

כאשר $c_j=j!\cdot S_{k,j}$, כמו בסעיף הקודם.

[1] המספרים $S_{k,j}$ נקראים **מספרי סטירלינג מן הסוג השני**. אין צורך לחשבם באופן מפורש על מנת לפתור את השאלה.

(ד) מצאו נוסחה סגורה (ללא Σ) לביטויים $\sum_{j=1}^{n} j^3$ ו-$\sum_{j=1}^{n} j^4$.

6. בדקו לכל אחד מהיחסים הבאים E אם הוא יחס שקילות על A, וחשבו את מחלקות השקילות במידה וכן.

(א) $A = \mathbb{N}$ ולכל $a, b \in A$, aEb אם 3 מחלק את $a + b$.

(ב) $A = \mathbb{N}$ ולכל $a, b \in A$, aEb אם 2 מחלק את $a - b$.

(ג) $A = \mathbf{P}(\mathbb{N}) \times \mathbf{P}(\mathbb{N})$ ולכל $\langle X, Y\rangle, \langle Z, W\rangle \in A$, $\langle X, Y\rangle E\langle Z, W\rangle$ אם $X \cup W = Y \cup Z$.

(ד) $A = \mathbb{R}$ ולכל $a, b \in A$, aEb אם $ab > 0$ או $a = b = 0$.

(ה) $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ולכל $a, b \in A$, aEb אם ab ריבוע של מספר שלם.

(ו) $A = \mathbf{P}(\mathbb{N})$ ולכל $X, Y \in A$, XEY אם $1 \notin X \triangle Y$.

(ז) $A = \mathbf{P}(\mathbb{N})$ ולכל $X, Y \in A$, XEY אם $X \triangle Y$ קבוצה אינסופית.

7. נגדיר יחסים S ו־T על קבוצת המספרים הטבעיים באופן הבא:

- xTy אם $x = y + 2$,
- xSy אם x ו־y שניהם זוגיים.

חשבו את היחסים $S \circ T$, $T \setminus S$, $T \cup S$, $T \cap S$ ו־$T \circ S$. אילו מהיחסים האלו הינם רפלקסיביים, סימטריים או טרנזיטיביים?

תרגיל בית 4

יחסי שקילות ויחסי סדר

הערה בהינתן יחס שקילות E על קבוצה A, נסמן ב־$[a]_E$ או ב־a/E את מחלקת השקילות של איבר $a \in A$.

1. נגדיר יחס E על הקבוצה $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ע"י $(m,n)E(m',n')$ אם"ם $m + n' = n + m'$.

(א) הראו כי E הינו יחס שקילות על A.

(ב) תארו את קבוצת המנה A/E.
הראו כי כל מחלקת שקילות מכילה איבר מהצורה $(m,0)$ או איבר מהצורה $(0,n)$.

(ג) נגדיר פעולה בינארית על הקבוצה A/E ע"י

$$[(m,n)]_E \oplus [(m',n')]_E = [(m+m', n+n')]_E.$$

הראו כי $\oplus$ אינה תלויית בבחירת הנציגים ומגדירה פעולה אסוציאטיבית על A/E.
הראו כי לכל $(m,n) \in A$ קיים $(m',n') \in A$ כך ש־$[(m,n)]_E \oplus [(m',n')]_E = [(0,0)]_E$.

2. נגדיר יחס E על הקבוצה $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ע"י

$$(x_1,x_2)E(y_1,y_2) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\, (x_1 = \lambda y_1 \wedge x_2 = \lambda y_2).$$

(א) הראו כי E הינו יחס שקילות על A.

(ב) תארו את קבוצת המנה A/E.
הראו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ קיימת מחלקת שקילות יחידה ב־A/E המכילה את הזוג $(1,x)$. האם קיימות מחלקות השקילות נוספות ב־A/E? תארו גם אותן.

(ג) יהא $f(x,y)$ פולינום מהצורה $f(x,y) = a_0y^d + a_1xy^{d-1} + \cdots + a_{d-1}x^{d-1}y + a_dx^d$, עבור $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ ו־$d \in \mathbb{N}$. הראו כי לכל $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ו־$\lambda \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^d f(x,y)$.

(ד) יהא $f(x,y)$ פולינום כמו בסעיף הקודם. נניח בנוסף כי $f(x,y)$ מגדירה פונקציה מוגדרת היטב על קבוצת המנה A/E. הראו כי $f(x,y)$ הינה פונקציה קבועה (כלומר $d = 0$ או $f = 0$).

3. נגדיר יחס E על הקבוצה $A = \mathbb{R}$ ע"י xEy אם"ם $x - y \in \mathbb{Z}$.

(א) הראו כי E הינו יחס שקילות על A.

(ב) תארו את קבוצת המנה A/E. מצאו קבוצת נציגים מלאה וללא חזרות לכל מחלקות השקילות ב־A/E.

(ג) הראו כי ההתאמה

$$\varphi([x]_E) = \sin(2\pi x)$$

הינה מוגדרת היטב על הקבוצה A/E ואינה תלוייה בבחירת הנציגים.

(ד) הראו כי הפעולה הבינארית $[x]_E \oplus [y]_E = [x+y]_E$ הינה מוגדרת היטב על A/E ואינה תלויה בבחירת הנציגים.

(ה) * הראו כי אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ היא פונקציה כלשהי המגדירה העתקה מוגדרת היטב $\overline{f} : A/E \to \mathbb{R}$ ע"י $\overline{f}([x]_E) = f(x)$, אזי f היא פונקציה מחזורית בעלת מחזור באורך 1 (כלומר $f(t+1) = f(t)$ לכל $t \in \mathbb{R}$).

4. יהיו E_1, E_2 יחסי שקילות על הקבוצה A.

(א) הראו כי $E_1 \cap E_2$ גם כן יחס שקילות על A.

(ב) תנו דוגמה ליחסי שקילות E_1, E_2 כך ש־$E_1 \cup E_2$ אינו יחס שקילות.

(ג) הראו כי $E_1 \cup E_2$ הינו יחס שקילות על A אם"ם לכל $a \in A$ מתקיים כי

$$a/E_1 \subseteq a/E_2 \quad \text{או} \quad a/E_2 \subseteq a/E_1.$$

(ד) **הגדרה** בהינתן חלוקות P_1, P_2 של A נאמר כי P_1 היא **עידון** של P_2 אם לכל $x \in P_1$ קיים $y \in P_2$ כך ש־$x \subseteq y$.

הראו כי $E_1 \subseteq E_2$ אס"ס החלוקה A/E_1 היא עידון של החלוקה A/E_2.

5. בסעיפים הבאים נתונה קבוצה A ויחס R על A. בדקו האם R הינו יחס סדר חלקי על R. בנוסף, בדקו האם היחס R הוא מלא.

במידה ומצאתם כי מדובר בקס"ח, מצאו את קבוצת האיברים המינימליים ואת קבוצת המקסימליים, ומצאו מינימום ומקסימום במידה ויש, או הוכיחו כי אין כאלה אחרת.

(א) $A = \mathbb{N}$ והיחס R מוגדר ע"י aRb אם"ם $a \geq b$.

(ב) $A = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ והיחס R מוגדר ע"י aRb אם"ם $a - b \in \mathbb{Q}$ ו־$a - b \leq 0$.

(ג) $A = \mathbb{C}$ והיחס R מוגדר ע"י aRb אם"ם קיים $\lambda \in \mathbb{C}$ כך ש־$a - b = \lambda^2$.

(ד) $A = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ אוסף הסדרות האינסופיות $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ עם $a_n \in \{0,1\}$ לכל n, והיחס R מוגדר ע"י $(a_n)_{n=0}^{\infty} R (b_n)_{n=0}^{\infty}$ אם"ם הסדרה $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ המוגדרת ע"י $c_n = \max\{a_n - b_n, 0\}$ מכילה לכל היותר 2 אחדות.

(ה) $A = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ כמו בסעיף הקודם, והיחס R מוגדר ע"י $(a_n)_{n=0}^{\infty} R (b_n)_{n=0}^{\infty}$ אם"ם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n \leq b_n$.

(ו) $A = \mathbf{P}(\mathbb{N})$ והיחס R מוגדר ע"י xRy אם"ם $x = y$ או שקיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$x = \{m \in y \mid m < n\}$.

(ז) $A = \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ והיחס R מוגדר ע"י aRb אם"ם קיים $q \in \mathbb{N}$ כך ש־$a = q \cdot b$.

6. תהיינה A ו־B קבוצות עם יחסי סדר חלקיים $\leq_A$ ו־$\leq_B$ בהתאמה. נגדיר את **היחס הלקסיקוגרפי** על הקבוצה $A \times B$ ע"י

$$\langle a,b \rangle \prec_{\mathsf{lex}} \langle a',b' \rangle \quad \iff \quad (a \leq_A a') \wedge ((a = a') \to (b \leq_B b'))$$

(א) הראו כי $\prec_{\mathsf{lex}}$ יחס סדר חלקי על $A \times B$.

(ב) הראו כי אם $(A, \leq_A)$ ו־$(B, \leq_B)$ יחסי סדר מלאים, אז גם $(A \times B, \prec_{\mathsf{lex}})$ סדר מלא.

7. יהא R יחס על הקבוצה $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ המוגדר ע"י התנאי

$$\langle a,b \rangle R \langle c,d \rangle \quad \iff \quad ad \leq bc.$$

(א) הראו כי היחס R רפלקסיבי וטרנזיטיבי, אבל אינו אנטי סימטרי.

(ב) יהא $E = R \cap R^{-1} \subseteq A \times A$ (כלומר aEb אם"ם aRb וגם bRa). הראו כי E יחס שקילות על A.

(ג) נגדיר יחס S על קבוצת המנה A/E ע"י הדרישה $[a]_E S [b]_E$ אם קיימים $a' \in [a]_E$ ו־$b' \in [b]_E$ כך ש־$a'Rb'$. הראו כי S הינו יחס סדר **קווי** על A/E.

(ד) הוכיחו את המשפט הכללי הבא.

משפט תהא A קבוצה ו־R יחס טרנזיטיבי ורפלקסיבי על A. אזי היחס $E = R \cap R^{-1}$ הינו יחס שקילות, והיחס S שהוגדר בסעיף (ג) הוא יחס סדר חלקי על קבוצת המנה A/E.

תרגיל בית 5

יחסי סדר ופונקציות

1. תהא B קבוצת המלים הבינאריות, כלומר

$$B = \{(x_0, \ldots, x_k) \mid k \in \mathbb{N} \text{ ו־} x_i \in \{0,1\} \text{ לכל } i = 0, \ldots, k\}.$$

נגדיר יחס על T על B באופן הבא: עבור $w_1, w_2 \in B$ מתקיים כי $w_1 T w_2$ אם"ם המילה w_1 היא רישא[1] של המילה w_2. למשל, $10111 T 101110011$ אבל $1011 \not T 11$.

(א) הראו כי T הינו יחס סדר חלקי על B.

(ב) הראו כי לכל $w \in B$, הקבוצה $B_{Tw} = \{w' \in B \mid w' T w\}$ היא סופית, וכי הצמצום של T לקבוצה B_{Tw} הוא יחס סדר מלא.

(ג) מי הם האיברים המקסימליים והמינימליים ביחס T?

(ד) תנו דוגמה לאנטי־שרשרת מקסימלית בגודל 5, ולאנטי־שרשרת מקסימלית אינסופית.

(ה) האם קיימת ב־B שרשרת מקסימלית באורך סופי?

2. תהא $(P, \prec)$ קס"ח סופית. היזכרו כי הגובה של איבר $a \in P$ מוגדר ע"י

$$h_P(a) = \max\{m \in \mathbb{N} \mid \text{הקבוצה } P_{\prec a} \text{ מכילה שרשרת מגודל } m+1\},$$

כאשר $P_{\prec a} = \{b \in P \mid b \prec a\}$.

(א) הראו כי לכל $k \in \mathbb{N}$ הקבוצה $\{a \in P \mid h_P(a) = k\}$ היא אנטי־שרשרת.

(ב) יהיו $m, n \in \mathbb{N}$. הראו כי אם $|P| = mn + 1$ אז בהכרח קיימת שרשרת באורך n או אנטי־שרשרת באורך m ב־$(P, \prec)$.

(ג) יהא $N = mn + 1$, כאשר $m, n \in \mathbb{N}$, ותהא $(a_i)_{i=1}^N$ סדרת מספרים ממשיים באורך N. נגדיר קבוצה $P = \{\langle a_i, i\rangle \mid i = 1, \ldots, N\} \subseteq \mathbb{R} \times \{1, \ldots, N\}$ ויחס $\prec$ על P ע"י

$$\langle a_i, i\rangle \prec \langle a_j, j\rangle \iff (i \le j) \land (a_i \le a_j).$$

i. הראו כי כל שרשרת ב־$(P, \prec)$ מגדירה תת־סדרה עולה של $(a_i)_{i=1}^N$.

ii. הראו כי כל אנטי־שרשרת ב־$(P, \prec)$ מגדירה תת־סדרה יורדת של $(a_i)_{i=1}^N$

(ד) הסיקו כי כל סדרה באורך $mn + 1$ מכילה בהכרח תת־סדרה עולה מאורך n או תת־סדרה יורדת מאורך m.

3. יהיו A ו־B קבוצות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

(א) תהא $f : A \to B$ פונקציה. היחס ההופכי $f^{-1} \subseteq B \times A$ גם הוא פונקציה.

[1] כלומר־ אם $w_1 = (x_0, \ldots, x_{k_1}),\ w_2 = (y_0, \ldots, y_{k_2}) \in B$ אז $w_1 T w_2$ אם"ם $k_1 \le k_2$ ו־$x_i = y_i$ לכל $i = 1, \ldots, k_1$.

(ב) תהא $f : A \to B$ פונקציה חח"ע. היחס ההופכי $f^{-1} \subseteq B \times A$ גם הוא פונקציה.

(ג) יהיו $f, g : A \to B$ פונקציות. היחס $f \cup g$ גם הוא פונקציה.

(ד) יהיו $f, g : A \to B$ פונקציות. היחס $f \cap g$ גם הוא פונקציה, שתחומה הוא תת־קבוצה של A.

(ה) יהא $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbf{P}(A)$ אוסף של תתי־קבוצות כך ש

- $A = \bigcup\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ וכך ש
- $A_i \cap A_j = \varnothing$ לכל $i \neq j$.

לכל $i \in \mathbb{N}$ תהא $f_i : A_i \to B$ פונקציה. אז היחס $f = \bigcup\{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ הוא פונקציה שתחומה הוא A.

4. יהיו A, B קבוצות ותהא $f : A \to B$ פונקציה. נגדיר פונקציה $F : \mathbf{P}(A) \to \mathbf{P}(B)$ ע"י

$$F(U) = \{v \in B \mid \exists u \in U(f(u) = v)\}.$$

(א) הראו כי אם $U_1, U_2 \subseteq A$ מקיימות כי $U_1 \subseteq U_2$ אז $F(U_1) \subseteq F(U_2)$.

(ב) הראו כי אם f חח"ע אז גם F חח"ע.

(ג) הראו כי אם f על אז גם F על.

5. תהא A קבוצה לא ריקה ו־$f : A \to A$ פונקציה.

(א) נניח כי $g : A \to A$ פונקציה כך ש־$f \circ g = \mathrm{id}_A$ היא פונקציית הזהות על A. הראו כי g חח"ע ו־f על.

(ב) הראו כי f פונקציה קבועה אם"ם לכל $g : A \to A$ מתקיים כי $f \circ g = f$.

(ג) הראו כי f חח"ע אם"ם לכל זוג פונקציות $g, h : A \to A$ מתקיים כי אם $f \circ g = f \circ h$ אז $g = h$.

(ד) הראו כי f על אם"ם לכל זוג פונקציות $g, h : A \to A$ מתקיים כי אם $g \circ f = h \circ f$ אז $g = h$.

6. תהא $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ הפונקציה המוגדרת ע"י

$$f(a, b) = \binom{a+b+1}{2} + a.$$

(א) ציירו את המכפלה הקרטזית $\{0, \ldots, 4\} \times \{0, \ldots, 4\}$ וציינו ליד כל נקודה בתמונה את ערך הפונקציה f בה. [2]

(ב) i. יהיו $m, n, c \in \mathbb{N}$ כך ש־$c \leq m$ ו־$m < n$. הראו כי $\binom{n+1}{2} > \binom{m+1}{2} + c$. **(רמז:** סכום סדרה חשבונית**).**

ii. יהיו $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ כך ש־$a + b \neq c + d$. הסיקו מהסעיף הקודם כי $f(a, b) \neq f(c, d)$.

iii. הראו כי f חח"ע.

(ג) i. הוכיחו כי לכל $\langle a, b \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ עם $b \neq 0$ מתקיים כי $f(a + 1, b - 1) = f(a, b) + 1$.

ii. הוכיחו כי לכל $a \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$ מתקיים כי $f(0, a) = f(a - 1, 0) + 1$.

iii. השתמשו בשני הסעיפים הקודמים, ובאינדוקציה, כדי להראות כי f פונקציה על.

7. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר קבוצה $A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid (2^n \mid x) \wedge (2^{n+1} \nmid x)\}$

(לדוגמה־ A_0 היא קבוצת המספרים האי־זוגיים החיוביים, ו־A_1 היא קבוצת הזוגיים שאינם מתחלקים ב־4).

(א) הראו כי $\bigcup\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ וכי $A_n \cap A_m = \varnothing$ לכל $n \neq m$.

---

[2] בגירסה קודמת של התרגיל נתבקשתם, בשל טעות דפוס, לצייר את המכפלה הקרטזית $\{1, \ldots, 5\} \times \{1, \ldots, 5\}$. לא יורדו נקודות למי שהגיש את ציור מכפלה זו במקום את המכפלה $\{0, \ldots, 4\} \times \{0, \ldots, 4\}$, אך מומלץ לבצע את התרגיל בגירסה זו (ערכים מ־0 והלאה) כדי להבין יותר את פעולת הפונקציה f.

(ב) הראו כי הפונקציה $f_n(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $f_n(x) = 2^n(2x+1)$ היא חח"ע.

(ג) הראו כי תמונת הפונקציה f_n היא הקבוצה A_n.

(ד) הוכיחו כי הפונקציה $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $h(n,m) = f_n(m) \in A_n$ היא חח"ע וכי תמונתה היא $\bigcup\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. מצאו פונקציה חח"ע ועל $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

תרגיל בית 6

תמורות ותורת הגרפים

1. תהא A קבוצה סופית ותהא $f \in Sym(A)$. נסמן ב־

$$\text{Fix}(f) = \{a \in A \mid f(a) = a\}$$

את קבוצת נקודות השבת של f.

(א) הראו כי לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $\text{Fix}(f^k) \supseteq \text{Fix}(f)$.

(ב) הוכיחו כי $\text{Fix}(f) = \text{Fix}(f^k)$ לכל $k \geq 1$ אם"ם $f = \text{id}_A$.

(ג) הסיקו כי לכל תמורה f על A קיים מספר $m \geq 1$ כך ש־$f^m = \text{id}_A$.
(רמז: התבוננו בקס"ח $\langle \mathcal{A}, \prec \rangle$, בו $\mathcal{A} = \{\text{Fix}(f^k) \mid k = 1, 2, \ldots\}$ ו־$\prec$ הוא הצמצום של יחס ההכלה ל־$\mathcal{A}$. מה תוכלו לומר על האיברים המקסימליים בקס"ח זה?)

(ד) האם המסקנה מהסעיף הקודם נכונה במקרה בו A אינה סופית?

2. תהא $A = \{1, \ldots, n\}$ עבור $n \geq 2$.

(א) כתבו את התמורה $(1, 2, \ldots, n) \in Sym(A)$ כהרכבת תמורות מהצורה (i, j) עבור $i, j \in A$.

(ב) הראו כי כל תמורה $f \in A$ יכולה להירשם כהרכבת תמורות מהצורה (i, j).
(הדרכה: בחנו ראשית את המקרה בו f היא תמורה ציקלית).

(ג) הראו כי כל חילוף $(i, j) \in Sym(A)$ ניתן לכתיבה ע"י הרכבה של חילופים מהצורה $(i, i+1)$.

(ד) הראו כי כל תמורה $f \in Sym(A)$ יכולה להירשם כהרכבה של תמורות מהקבוצה $\{(1, 2), (1, 2, \ldots, n)\}$.

3. (א) האם קיים גרף פשוט ולא מכוון על 11 קודקודים בעל סדרת דרגות $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$?

(ב) האם קיים גרף פשוט ולא מכוון על 11 קודקודים בעל סדרת דרגות $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$?

(ג) הוכיחו כי לכל גרף פשוט ולא מכוון G בעל מספר סופי קודקודים, קיימים שני קודקודים בעלי דרגות זהות.
(הדרכה: נסמן ב־n את מספר הקודקודים בגרף. בדקו כי דרגת כל קודקוד היא מספר שלם בין 0 ל $n-1$. לאחר מכן הוכיחו כי לא ייתכן שהמספרים 0, $n-1$ מופיעים בו־זמנית בסדרת הדרגות, והשתמשו בעקרון שובך היונים).

4. (א) הראו כי אם $G = \langle V, E \rangle$ הוא גרף פשוט וסופי כך שלכל $v \in V$, $\deg_G v \geq 2$, אז ב־G יש מעגל.

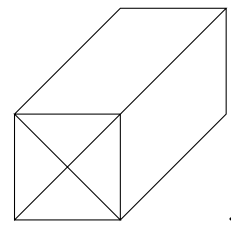
(ב) הסיקו כי בכל עץ סופי (כלומר־ גרף קשיר וללא מעגלים), על שני קודקודים לכל הפחות, יש לפחות שני קודקודים מדרגה 1.

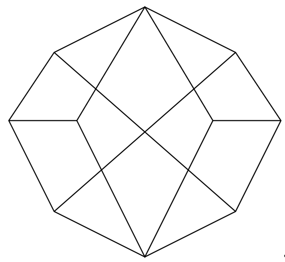
(ג) יהא $G = \langle V, E \rangle$ עץ על קבוצת קודקודים $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ ונסמן $d_i = \deg_G v_i$ לכל $i = 1, \ldots, m$. הראו כי $d_1 + \cdots + d_m = 2m - 2$.

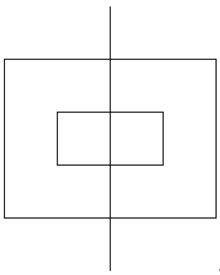
(ד) לכיוון השני, נניח כי $m \geq 2$ ו־$d_1, \ldots, d_m$ סדרת מספרים שלמים חיוביים כך ש־$d_1 + \ldots + d_m = 2m - 2$. הראו כי קיים עץ $G = \langle V, E \rangle$ על קבוצת קודקודים $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ כך ש־$d_i = \deg_G v_i$ לכל $1 \leq i \leq m$.

(**הדרכה**: ניתן להניח בה"כ כי $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_m$. הראו כי במקרה זה בהכרח מתקיים $d_m = 1$ ו־$d_1 \geq 1$, עם אי־שוויון חזק כאשר $m > 2$. לאחר מכן הוכיחו את הטענה באינדוקציה על אורך הסדרה, תוך התבוננות בסדרת המספרים $d_1 - 1, d_2, \ldots, d_{m-1}$).

5. (א) אילו מהציורים הבאים ניתן לצייר בעיפרון מבלי להרימו ומבלי לעבור יותר מפעם אחת על אף קו? הוכיחו טענותיכם.


.(i)


.(ii)


.(iii)

(ב) עבור כל אחד מהגרפים שבסעיף (א) רשמו את מספר הקווים הנוספים המינימלי (אולי 0) שיש להוסיף לשרטוט כדי שיהיה ניתן לציירו בעפרון מבלי להרימו ומבלי לעבור יותר מפעם אחת כל אף קו.

(ג) יהא $G = \langle V, E \rangle$ גרף קשיר ולא מכוון על n קודקודים. הראו כי ניתן לייצר ב־G מעגל אוילר ע"י הוספת לא יותר מ־$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$קודקודים. כלומר, הראו כי קיימת קבוצה V' כך ש־$V \subseteq V'$ ו־$|V' \setminus V| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, וקבוצת צלעות E' על V' כך ש־$E' \cap \mathbf{P}(V) = E$, וכך שהזוג $G' = \langle V', E' \rangle$ הוא גרף שיש בו מעגל אוילר.

(ד) האם ניתן למצא חסם טוב יותר מ־$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ על מספר הקודקודים שיש לצרף לגרף כדי ליצור בו מסילת אוילר?

6. יהא $G = \langle V, E \rangle$ גרף לא־מכוון עם קבוצת קודקודים $V = \{1, \ldots, N\}$. נגדיר את <u>מטריצת השכנויות</u> של G להיות $A_G = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbf{M}_n(\mathbb{Q})$ בה $a_{i,j} = 1$ אם $\{i, j\} \in E$ ו־$a_{i,j} = 0$ אחרת.

(א) ציירו את הגרף המתואר ע"י מטריצת השכנויות

$$.A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ב) הראו כי אם G גרף k־רגולרי, עבור $k \in \mathbb{N}$, אז קיים וקטור $v \in \mathbb{Q}^n$ כך ש־$A_G v = k \cdot v$.

(ג) הראו כי לכל $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, המספר המופיע בקוארדינטה ה־(i, j) במטריצה $(A_G)^m$ מתאר את מספר הטיולים באורך m מהקודקוד i אל הקודקוד j. (**רמז**: אינדוקציה).

תרגיל בית 7

תורת רמזי, נוסחאות נסיגה ליניאריות והומוגניות, כלל ההכלה וההדחה

הערה אלא אם כן מצויין אחרת, כל הגרפים המתוארים בתרגיל הינם פשוטים ולא מכוונים.

1. בהינתן $m,l \in \mathbb{N}$ מספרים טבעיים, נסמן ב־$R(m,l)$ את המספר הטבעי הקטן ביותר המקיים את התנאי הבא. לכל גרף $G = \langle V,E \rangle$ עם $|V| = R(m,l)$ בהכרח קיימת בגרף G קליקה מגודל m או קבוצה חופשית מגודל l.
   (א) הראו כי לכל $m,l \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $R(m,l) = R(l,m)$.
   (ב) הראו כי לכל $m \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $R(m,2) = m$.
   (ג) הוכיחו כי לכל $m,l \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $R(m,l) \leq R(m-1,l) + R(m,l-1)$ ע"י הצעדים הבאים.
      i. יהא $G = \langle V,E \rangle$ גרף עם $|V| = R(m-1,l) + R(m,l-1)$ ויהא $v_0 \in V$. נגדיר
      $$V_1 = \{u \in V \mid \{v_0,u\} \in E\} \quad \text{ו־} \quad V_2 = \{u \in V \mid \{v_0,u\} \notin E\}.$$
      הראו כי $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ ו־$V = V_1 \cup V_2 \cup \{v_0\}$.
      ii. הסיקו כי $|V_1| \geq R(m-1,l)$ או $|V_2| \geq R(m,l-1)$.
      iii. הראו כי לפחות אחד משני התנאים הבאים מתקיים.
      - הגרף המושרה על הקבוצה $V_1 \cup \{v_0\}$ מכיל קליקה מגודל m או קבוצה חופשית מגודל l; או
      - הגרף המושרה על הקבוצה $V_2 \cup \{v_0\}$ מכיל קליקה מגודל m או קבוצה חופשית מגודל l.
      iv. הסיקו את אי־השוויון $R(m,l) \leq R(m-1,l) + R(m,l-1)$.
   (ד) השתמשו בזהות פסקל ובאינדוקציה על מנת להסיק כי $R(m,l) \leq \binom{m+l-2}{m-1}$ לכל $m,l \in \mathbb{N}$.
   (ה) הסיקו כי
   $$\binom{2m-2}{m-1} \longrightarrow \{m\}_2^2.$$

2. כתבו כללי נסיגה (כולל תנאי התחלה!) לבעיות הבאות:
   (א) מספר סדרות באורך n על קבוצה $\{0,1\}$.
   (ב) מספר סדרות באורך n על קבוצה $\{0,1\}$ אשר אינן מכילות רצף של שני אפסים.
   (ג) מספר סדרות באורך n על קבוצה $\{0,1\}$ אשר אינן מכילות רצף של שלושה אפסים.
   (ד) מספר סדרות באורך n על קבוצה $\{2,0,1\}$ אשר אינן מכילות רצפים 00, 11, 22.
   (ה) מספר תת־קבוצות של $\{1,2,3,\ldots,n\}$ אשר אינן מכילות שני מספרים עוקבים.
   (ו) מספר הדרכים לרצף מלבן בגודל $n \times 2$ במרצפות בגודל 1×2, 2×1.
   (ז) מספר הדרכים לרצף מלבן בגודל $n \times 2$ במרצפות בגודל 1×1, 2×1.

3. מצאו נוסחאות סגורות לסדרות שמצאתם בסעיפים (א), (ב), (ד), (ה), (ו) ו־(ז). אמיצים מוזמנים לנסות גם את סעיף (ג).

4. (א) המספר $3+2\sqrt{2} \approx 5.82842712474619009\ldots$ הינו אי־רציונלי. בעזרת מחשבון, חשבו את ערכי $(3+2\sqrt{2})^n$ עבור $n = 2, 3, 4, 5$ והבחינו כי מספרים אלה נעשים קרובים יותר ויותר למספרים שלמים.

נסחו באופן פורמלי עובדה זו והוכיחו אותה. לצורך כך מומלצים הצעדים הבאים.

i. מצאו סדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ הנתונה ע"י נוסחת נסיגה שצורתה הסגורה היא $a_n = (3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n$.

ii. התבוננו בערכי $(3-2\sqrt{2})^n$ עבור $n = 1, 2, 3, \ldots$. מה תוכלו לומר לגביהם?

(ב) תהא $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרת מספרי פיבונצ'י, המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ ו־$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} f_{n+1}/f_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(ג) יהא k מספר טבעי כך ש־$\sqrt{k}$ אינו רציונלי. מצאו סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ של מספרים טבעיים, הנתונה ע"י נוסחת נסיגה, ומספר טבעי c כך ש־$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} - c = \sqrt{k}$.

רמז: $(t-c-\sqrt{k})(t-c+\sqrt{k}) = t^2 - 2ct + c^2 - k$.

5. יהא $n \in \mathbb{N}$.

(א) כמה פונקציות קיימות מהקבוצה $\{1,\ldots,n\}$ לעצמה?

(ב) כמה פונקציות חח"ע קיימות מהקבוצה $\{1,\ldots,n\}$ לעצמה?

(ג) יהא $0 \le k \le n$ מספר טבעי ותהא $A \subseteq \{1,\ldots,n\}$. כמה פונקציות קיימות מהקבוצה $\{1,\ldots,n\}$ לעצמה שתמונתן מוכלת בקבוצה A?

(ד) השתמשו בסעיף הקודם ובעיקרון ההכלה וההדחה כדי לחשב את מספר הפונקציות מהקבוצה $\{1,\ldots,n\}$ לעצמן שהינן על.

לצורך כך, הגדירו לכל $i \in \{1,\ldots,n\}$ קבוצה $A_i = \{f : \{1,\ldots,n\} \to \{,\ldots,n\} \mid i \notin \mathrm{Im}(f)\}$.

עבור $1 \le k \le n$ ומספרים $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$, השתמשו בסעיף הקודם כדי לחשב את גודל החיתוך $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$. השתמשו בכלל ההכלה וההדחה כדי לחשב את מספר הפונקציות מהקבוצה $\{1,\ldots,n\}$ לעצמה **שאינן** על, והסיקו מכך את המספר הנדרש.

(ה) הסיקו את השוויון

$$n! = n^n - \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j+1} \binom{n}{j} j^n.$$

6. השתמשו בכלל הכלה והדחה כדי להראות כי המספרים הראשוניים מהווים פחות מ־25 אחוזים מכלל המספרים מ־1 עד 10^5.

הנחייה: חשבו את כמות המספרים מ־1 עד N (עבור N גדול מאוד, כמו 10^5) שאינם מתחלקים בכל המספרים מ־2 עד 10. המספרים הראשוניים (מלבד $2, 3, 5, 7$) יהוו תת־קבוצה של קבוצה זו. [1]

[1] זהו חסם גס מאוד. בפועל, כמות המספרים הראשוניים בין 1 ל־N היא בערך $N/\ln(N)$ ("משפט הצפיפות של מספרים ראשוניים") ולכן עבור $N = 10^5$, המספרים הראשוניים מהווים כ־9.5 אחוזים מכלל המספרים מ־1 עד 10^5.