תרגיל 8- סדרות מונוטוניות וחסומות

חדו"א : סדרות וטורים

1

נתונה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ע"י כלל הנסיגה הבא

$$a_1 = \frac{3}{2}$$
$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2}, \quad n \geq 2 \text{ לכל}.$$

1. נוכיח באינדוקציה כי $1 \leq a_n \leq 2$ לכל $n \in \mathbb{N}$. המקרה $n = 1$ נתון. נניח כי $1 \leq a_n \leq 2$ עבור n נתון ונוכיח כי $1 \leq a_{n+1} \leq 2$. אכן, מנוסחת הנסיגה $a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2}$ ומכיוון ש-$1 \leq a_n \leq 2$ (מתוך הנחת האינדוקציה) מתקיים כי

$$1 = \sqrt{3 \cdot 1 - 2} \leq \sqrt{3a_n - 2} \leq \sqrt{3 \cdot 2 - 2} = \sqrt{4} = 2.$$

2. הביטוי $\sqrt{3x - 2}$ מוגדר רק בתחום בו $3x - 2 \geq 0$, כלומר כאשר $x \geq \frac{2}{3}$. בנוסף, אנו רוצים לבדוק מתי $x \leq \sqrt{3x - 2}$. מכיוון שבתחום ההגדרה של אי-השוויון הערך x הוא חיובי, ניתן להעלות את אי-השוויון בריבוע מבלי לשנות את התוצאה הסופית, ואז עלינו לפתור את אי השוויון

$$x^2 \leq 3x - 2$$

או בצורה שקולה, את $x^2 - 3x + 2 \leq 0$. פיתוח המשוואה הריבועית נותן פרבולה "מחייכת" (כלומר, עם ערכים חיוביים לא חסומים) החותכת את הצירים בנקודות $x = 1$ ו-$x = 2$, ולכן אי השוויון הנתון מתקיים בתחום $1 \leq x \leq 2$.

3. נחשב את $a_n - a_{n+1} = a_n - \sqrt{3a_n - 2}$. מסעיף (2) אנו יודעים כי ערך זה הוא שלילי אם $1 \leq a_n \leq 2$. מסעיף (1) אנו יודעים כי התנאי $1 \leq a_n \leq 2$ נכון לכל $n \in \mathbb{N}$, ובפרט לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n < a_{n+1}$.

4. הראינו כי הסדרה a_n היא מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ע"י 1, ולכן מתכנסת.

נחשב את גבולה, אותו נסמן $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. נשים לב כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_{n+1}^2 = 3a_n - 2$. בפרט, אותה המשוואה צריכה להתקיים גם בגבול, כלומר

$$L^2 = \left(\lim_{n\to\infty} a_{n+1}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} (3a_n - 2) = 3L - 2$$

כלומר- הערך L צריך להיות פתרון של המשוואה הריבועית $L^2 - 3L + 2 = 0$. כפי שכבר בסעיף (2), הפתרונות למשוואה זו הן 1 ו-2. מכיוון ש-$a_1 = \frac{3}{2} > 1$ ומכיוון ש-a_n סדרה עולה, זה מחייב כי $L = 2$.

2

נתונה הסדרה

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

נשים לב כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} - \ldots - \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{2n^2 + 2n + 2n^2 + n - 4n^2 - 6n - 2}{n(2n+1)(2n+2)} = \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)} < 0 \end{aligned}$$

ולכן הסדרה מונוטונית יורדת. בנוסף, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\frac{1}{2} = \underbrace{\frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{\text{פעמים } n} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \leq \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{\text{פעמים } n} = 1$$

ולכן $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

באופן (אולי) מפתיע, גבול הסדרה הוא $\ln(2)$. ההוכחה הפשוטה ביותר המוכרת לי היא ע"י שימוש באינטגרלים, שלא למדנו בקורס. יש גם הוכחה ישירה ע"י שימוש בסדרות ובאי־השוויון

$$\frac{1}{n} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n+1}$$

אך זו אינה הוכחה קלה.

מטרת התרגיל העיקרית היתה להראות דוגמה של מקרה בו הוכחת קיום הגבול היא פשוטה יחסית, אך מציאת הגבול עצמו יכולה להיות משימה קשה.

3

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} \\ &= \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \cdot \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \\ &\geq \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \cdot \left(1 + \frac{n+1}{n^2+2n}\right) && \text{(אי"ש ברנולי)} \\ &\geq \left(\frac{n+1}{n+2}\right)\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+2n}\right) \\ &= \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

(*) נשים לב כי הסדרה b_n מקיימת כי

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot (1+\frac{1}{n}) \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

מכיוון ש־b_n סדרה מונוטונית יורדת, נובע כי לכל $n \in \mathbb{N}$

$$.\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \leq b_n \leq b_1 = 4$$

כלומר, הראינו (ללא חישוב מפורש) כי הסדרה $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ היא חסומה, ומכיוון שגם מונוטונית עולה, היא בהכרח מתכנסת.

4

הוכיחו את התכנסות הגבולות הבאים.

1. נסמן $a_n = \frac{n!}{n^n}$. ראשית נשים לב ש־$0 < a_n = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{n\cdot n\cdot n} \leq \frac{n\cdot n\cdot \ldots \cdot n}{n\cdot n\cdot \ldots \cdot n} = 1$ ולכן הסדרה הנתונה חסומה. בנוסף,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \leq \frac{1}{2}$$

מכיוון ש־$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מונוטונית עולה. בפרט הסדרה הנתונה מונוטונית יורדת ולכן מתכנסת.

2. נסמן $a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{1}{2^n}\right)$. מהגדרתה ברור כי $0 < a_n < 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$ (a_n היא מכפלה של גורמים חיוביים וקטנים מ־1). כמו כן,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) < 1$$

ולכן הסדרה מונוטונית יורדת וחסומה.

3. נסמן $a_n = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}$. בהתאם להדרכה, נשים לב כי לכל $n \geq 2$ מתקיים

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \geq \frac{1}{n^2}$$

נציב זאת בסדרה ונקבל,

$$a_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \leq 1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 1+1-\frac{1}{n} \leq 2$$

כלומר, הסדרה a_n חסומה. כמו כן, מכיוון ש־$a_{n+1}-a_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ לכל n, אנו מקבלים כי הסדרה a_n היא מונוטונית עולה ולכן מתכנסת.