תרגיל 4- סדרות מתכנסות
חדו"א : סדרות וטורים

1

נתונה הסדרה המתכנסת

$$.a_n = \frac{n+2}{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

1. $.\frac{1}{2}$
2. נשים לב כי

$$\left|\frac{n+2}{2n-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2(n+2)-(2n-1)}{2(2n-1)}\right| = \left|\frac{5}{4n-2}\right| = \frac{5}{4n-2}$$

כאשר הערך המוחלט הוסר בשוויון האחרון, מכיוון שהביטוי חיובי לכל $n \geq 1$. כעת, מחישוב ישיר מקבלים כי

$$.\frac{5}{4n-2} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{5}{4\varepsilon} + \frac{1}{2}$$

מכאן, אם נמצא n_0 מינימלי כך ש-$n_0 \geq \frac{5}{4\varepsilon} + \frac{1}{2}$ אזי לכל $n > n_0$ מתקיים כי $n > n_0 \geq \frac{5}{4\varepsilon} + \frac{1}{2}$ ולכן $.\left|\frac{n+2}{2n-1} + \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$

.

(א) עבור $\varepsilon = 0.1$ ניקח $n_0 = \frac{5}{4\cdot 0.1} + \frac{1}{2} = 13$, לפי הנוסחה.

(ב) עבור $\varepsilon = 0.05$, ניקח $.n_0 = \frac{5}{0.05\cdot 4} + \frac{1}{2} = 25.5$

(ג) עבור $\varepsilon = 0.01$, ניקח $.n_0 = \frac{5}{0.01\cdot 4} + \frac{1}{2} = 125.5$

2

יהא $\varepsilon > 0$ שרירותי. עלינו למצא $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים כי

$$\left|\frac{3n+5}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$$

נשים לב כי $\frac{3n+5}{2n-1} - \frac{3}{2} = \frac{2(3n+5)-3(2n-1)}{2(2n-1)} = \frac{13}{2(2n-1)}$, ולכן עלינו למצא n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $.\left|\frac{13}{2(2n-1)}\right| < \varepsilon$
מכיוון שעבור $n > n_0$ מתקיים כי

$$\frac{13}{2(2n-1)} < \frac{13}{2(2n_0-1)}$$

ומכיוון שהערכים משני צידי האי־שוויון הם חיוביים, מספיק לנו לבחור n_0 כך ש־$\frac{13}{2(2n_0-1)} < \varepsilon$, כלומר

$$.n_0 > \frac{1}{2}\left(\frac{2}{13\varepsilon} + 1\right)$$

3

1. ניקח $\varepsilon = L > 0$. אז מהגדרת הגבול יש n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים כי $|a_n - L| < \varepsilon$ ובפרט
$$0 = L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon = 2L.$$
כלומר a_n חיובי לכל $n > n_0$.

2. תהא $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים חיוביים המתכנסת לגבול T. נניח בשלילה כי $T < 0$. בדומה לתרגיל הקודם, אם ניקח $\varepsilon = -T > 0$, יש $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים
$$|b_n - T| < \varepsilon,$$
ולכן
$$2T = T - \varepsilon < b_n < T + \varepsilon = 0.$$
כלומר, ההנחה כי $T < 0$ גוררת כי לכל $n > n_0$ מתקיםי כי $b_n < 0$, וזו סתירה להנחה כי $\{b_n\}$ היא סדרה חיובית.

3. אם $b_n > 0$ לכל n זה עדיין לא מחייב כי גבול הסדרה הינו גדול מ־0. למשל, הסדרה $b_n = \frac{1}{n}$ הינה חיובית אך גבולה הוא 0.

4

יהא $\varepsilon > 0$ שרירותי. עלינו למצא n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $\left|a_n^2 - L^2\right| < \varepsilon$. נשים לב כי
$$\left|a_n^2 - L^2\right| = |(a_n - L)(a_n + L)| \le |a_n - L|\left(|a_n| + |L|\right)$$
כאשר אי השוויון הימני ביותר הוא תוצאה של אי שוויון המשולש. כמו כן, בכיתה הראינו כי סדרה מתכנסת היא חסומה, כלומר קיים $M > 0$ כך ש־$|a_n| < M$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

מכיוון ש־a_n מתכנסת לגבול L יש $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים
$$|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{|L| + M}$$
ולכן
$$\left|a_n^2 - L^2\right| \le |a_n - L|\left(|a_n| + |L|\right) \le \frac{\varepsilon}{M + |L|} \cdot (M + |L|) = \varepsilon$$
כנדרש.

עבור הסדרה a_n^k, נשים לב כי מתקיים
$$\left|a_n^k - L^k\right| = |a_n - L| \cdot \left|a_n^{k-1} + a_n^{k-2}L + \ldots L^{k-1}\right| \le |a_n - L|\left(|a_n|^{k-1} + |a_n|^{k-2}|L| + \ldots + |L|^{k-1}\right)$$
לכל $n \in \mathbb{N}$. אם ניקח $M > 0$ חסם עליון של a_n כמו במקרה הקודם אז הראינו כי
$$\left|a_n^k - L^k\right| \le |a_n - L|\left(M^{k-1} + M^{k-2}|L| + \ldots + M|L|^{k-2} + |L|^{k-1}\right).$$
מכיוון שהביטוי באגף ימין חיובי, ו־$\{a_n\}$ מתכנסת ל־L קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים כי
$$|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{M^{k-1} + M^{k-2}|L| + \ldots + |L|^{k-1}}$$
ולכן לכל $n > n_0$ מתקיים
$$\left|a_n^k - L^k\right| \le |a_n - L|\left(M^{k-1} + M^{k-2}|L| + \ldots + M|L|^{k-2} + |L|^{k-1}\right) < \varepsilon.$$

5 *

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו־$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות המתכנסות ל־L ו־T בהתאמה. נגדיר, לכל $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \max\{a_n, b_n\}$. נוכיח כי $\{c_n\}$ מתכנסת לגבול $R = \max\{L, T\}$.

נחלק למקרים־ $L = T$, $L > T$ ו־$L < T$.

1. נניח כי $R = T = L$. יהא $\varepsilon > 0$ שרירותי. קיימים $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_1$ מתקיים כי $|a_n - L| < \varepsilon$ ולכל $n < n_2$ מתקיים כי $|b_n - T| < \varepsilon$. מכיוון $R = T = L$, עבור $n_0 = \max n_1, n_2$, מתקיים כי לכל $n > n_0$

$$R - \varepsilon < a_n, b_n < R + \varepsilon$$

ובפרט, זה אומר שגם $R - \varepsilon < c_n < R + \varepsilon$ לכל $n > n_0$ ולכן $\{c_n\}$ מתכנסת ל־R.

2. נניח כי $L > T$ (ולכן $L = R$). עלינו להראות כי הסדרה $\{c_n\}$ מתכנסת ל־$L = R$. אנחנו נוכיח כי קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים כי $a_n > b_n$, ובפרט $c_n = a_n$ לכל $n > n_0$, והגבולות של $\{a_n\}$ ו־$\{c_n\}$ שווים.

נתבונן בערך $\varepsilon = \frac{L-T}{2} > 0$. אז יש $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_1$ מתקיים כי

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

ולכל $n > n_2$ מתקיים

$$T - \varepsilon < b_n < T + \varepsilon.$$

כמו כן, נשים לב כי

$$L - \varepsilon = L - \frac{L-T}{2} = \frac{L+T}{2} = T + \frac{L-T}{2} = T + \varepsilon.$$

בפרט, לכל $n > \max\{n_1, n_2\}$ מתקיים כי

$$b_n < T + \varepsilon = L - \varepsilon < a_n$$

ולכן עבור $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ מתקיים כי לכל $n > n_0$, $a_n > b >_n$ ולכן $c_n = a_n$.

בפרט, מכיוון שגבול הסדרה אינו משתנה ע"י שינוי של מספר סופי של איברים בסדרה (הוכיחו זאת כתרגיל), מקבלים כי

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

3. המקרה $L < T$ מוכח באופן זהה למקרה הקודם.