פתרון תרגיל 1- סדרות חשבוניות

חדו"א 1: סדרות וטורים

1

בסעיפים הבאים נתונות סדרות חשבוניות. מצאו את האיבר ה־8 וה־10 בסדרות הנתונות, והציגו נוסחה לאיבר הכללי של הסדרה.

1. $a_n = 8 + 3(n-1) = 5 + 3n$. בתרגיל המקורי נפלה טעות דפוס- האיבר השלישי היה אמור להיות 14.
2. $a_n = 8 + (n-1)\cdot(-3) = 11 - 3n$.
3. $a_n = 21 + 9(n-1) = 12 + 9n$.

2

בתרגיל המקורי נפלה טעות דפוס, והאיבר האמצעי היה אמור להיות $\frac{1}{2}k^2$ ולא k^2.

מההנחה כי הסדרה הינה חשבונית נובע כי ההפרש בין כל שני מספרים עוקבים בסדרה הוא קבוע. בפרט

$$\frac{1}{2}k^2 - 1 = 6k - 12 - \frac{1}{2}k^2,$$

השקול לעובדה כי

$$k^2 - 6k + 11 = 0.$$

ע"י נוסחת שורשים מוודאים כי פתרונות המשוואה הם $k = 5$ או $k = 6$.

3

נתונה סדרה חשבונית בעלת איבר ראשון 4 והפרש $\frac{1}{2}$.

1. $S_{20} = \frac{20}{2}\cdot(2a_1 + (20-1)d) = 10\cdot\left(8 + \frac{19}{2}\right) = 175$.
2. $S_{100} = \frac{100}{2}\left(8 + \frac{49}{2}\right) = 1625$.

4

מהנתון $S_{20} = S_{22}$. נציב בנוסחת הסכום-

$$S_{20} = \frac{10}{2}\left(2a_1 + 19\cdot(-2)\right) = \frac{11}{2}\left(2a_1 + 21\cdot(-2)\right) = S_{22}.$$

מכאן מקבלים כי $a_1 = 41$.

5 *

נרשום $a_n = a_1 + d(n-1)$, $b_n = b_1 + (n-1)e$, לכל $n \in \mathbb{N}$. נרשום את המכפלה באופן מפורש־

$$\begin{aligned}
a_{n+1}b_{n+1} - a_n b_n &= (a_1 + nd)(b_1 + ne) - (a_1 + (n-1)d)(b_1 + (n-1)e) \\
&= a_1 b_1 + n(db_1 + ea_1) + n^2 de - a_1 b_1 - (n-1)(db_1 + ea_1) - (n-1)^2 de \\
&= (db_1 + ea_1) + \left(n^2 - n^2 + 2n - 1\right) de \\
&= (db_1 + ea_1 + de) + (n-1) \cdot 2de
\end{aligned}$$