תרגיל 2- סדרות הנדסיות
חדו"א : סדרות וטורים

1

בסעיפים הבאים נתונים שלושת האיברים הראשונים של סדרה הנדסית. כתבו נוסחה מפורשת לאיברי הכללי של הסדרה.

(א) $2, \frac{1}{4}, \frac{1}{32}, \ldots$,

(ב) $13, -39, 117, \ldots$,

(ג) $4, x+1, 2x-1, \ldots$. בסעיף זה נדרש בנוסף למצא את שני ערכי x האפשריים.

2

הגשת שאלה זו נדחתה לשבוע הבא.

נתונה הסדרה ההנדסית $4, 3.6, 3.24, \ldots$. מצאו ערך $n \in \mathbb{N}$ מינימלי כך שהסכום החלקי $S_n = a_1 + \ldots + a_n$ יהיה גדול מ־18.

3

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חשבונית לא־קבועה. נניח בנוסף כי האיברים a_3, a_4, a_6 הם שלושה איברים ראשונים של סדרה הנדסית.

מצאו נוסחה כללית לאיברי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, תחת ההנחה כי $a_1 = 1$. מצאו תת־סדרה של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתחילה ב־$a_3, a_4, a_6, \ldots$ אשר הינה סדרה הנדסית.

4 *

נתונה סדרה הנדסית **לא קבועה** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מהצורה $a_n = a_1 q^{n-1}$ לכל $n \in \mathbb{N}$. עבור $N \in \mathbb{N}$ נתון, הוכיחו את נוסחת סכום N האיברים הראשונים-

$$S_N = a_1 + \ldots + a_N = \frac{a_1(1-q^N)}{1-q}.$$

הדרכה- ניתן לפתור את התרגיל ע"י אינדוקציה, או לחילופין, נסו לכתוב את הביטוי $S_N - q \cdot S_N$ באופן מפורש ולהסיק מכך את הנוסחה.

5 *

נזכר כי סדרת פיבונאצ'י מוגדרת ע"י כלל הנסיגה- $\mathrm{Fib}_1 = \mathrm{Fib}_2 = 1$ ו־$\mathrm{Fib}_n = \mathrm{Fib}_{n-1} + \mathrm{Fib}_{n-2}$ לכל $n \geq 2$.

יהא $\varphi \in \mathbb{R}$ מספר המקיים את המשוואה $\varphi^2 = \varphi + 1$ [1]. בתרגיל זה אנו נחקור את הסדרות ההנדסיות $\{\varphi^n\}_{n=1}^{\infty}$ ו־$\left\{\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

1. הראו באינדוקציה כי לכל $n \geq 2$ מתקיים כי $\varphi^n = \mathrm{Fib}_n \varphi + \mathrm{Fib}_{n-1}$, כאשר $\{\mathrm{Fib}_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת פבונצ'י.

[1] ע"י פתרון המשווא הריבועית $x^2 - x - 1 = 0$ ניתן לוודא כי $\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. הערך המספרי המפורש של φ אינו קריטי לתרגיל זה.

2. נסמן $\psi = -\frac{1}{\varphi}$. הראו כי $\psi^2 = \psi + 1$ גם כן מתקיים והסיקו מכך את הנוסחא $\psi^n = \mathrm{Fib}_n\psi + \mathrm{Fib}_{n-1}$.
3. הראו כי $\varphi + \psi = 1$.
4. הסיקו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיימת המשוואה

$$\mathrm{Fib}_n = \varphi^n + \psi^n = \varphi^n + \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n.$$