תרגיל 7- חסמים וסדרות מונוטוניות
חדו"א : סדרות וטורים

1

יהיו $A, B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות וחסומות מלרע.

1. הראו כי $\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$.
2. הראו כי $\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf(A), \inf(B)\}$.

2

נתונה קבוצה חסומה A ומספר $S \in \mathbb{R}$ המקיים את התנאים הבאים

1. S היא חסם עליון של A, כלומר- לכל $a \in A$ מתקיים כי $a < S$,
2. לכל $\varepsilon > 0$ קיים איבר $a \in A$ כך ש-$a > S - \varepsilon$.

הוכיחו כי $S = \sup(A)$. הדרכה: השתמשו באופן ישיר בהגדרת הסופרמום.

3

עבור $A, B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל. נגדיר קבוצה חדשה

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b \text{ קיימים } a \in A \text{ ו-} b \in B \text{ כך ש-}\}.$$

1. הראו כי אם $a \in A$ ו-$b \in B$ אז $a + b \leq \sup(A) + \sup(B)$.
2. הראו כי לכל $\varepsilon > 0$ קיימים $a \in A$ ו-$b \in B$ כך ש-$a + b > \sup(A) + \sup(B) - \varepsilon$.
3. הסיקו כי $\sup(C) = \sup(A) + \sup(B)$.
4. נגדיר $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a \cdot b \text{ קיימים } a \in A \text{ ו-} b \in B \text{ כך ש-}\}$. מצאו דוגמה המוכיחה כי הנוסחה
$$\sup(D) = \sup(A) \cdot \sup(B)$$
איננה נכונה. רמז: נסו לבחון מקרים בהם $B = \{-1\}$.

4

בסעיפים הבאים נתונות תת-קבוצות של $\mathbb{R}$. בדקו האם הקבוצות הנתונות הן חסומות מלעיל ומלרע ומצאו את הסופרמום והאינפימום שלהן.

1. $A = [2, 2.5)$.
2. $A = \left\{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.
3. $A = \left\{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. $A = \left\{\frac{m}{n} \mid 0 \leq m < n,\ m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

5

ניזכר כי סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקראת **מונוטונית עולה** אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} \geq a_n$ **ומונוטונית עולה ממש** אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} > a_n$. באופן דומה, הסדרה נקראת **מונוטונית יורדת** אם לכל $n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} \leq a_n$ **ומונוטונית יורדת ממש** אם $a_{n+1} < a_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

בתרגיל הבא נתונות לכם סדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ואם נדרשים לבדוק האם a_n מונוטונית עולה, מונוטונית עולה ממש, מונוטונית יורדת, מונוטונית יורדת ממש, או שאינה אף אחד מהן.

ניתן להשתמש באינדוקציה, או בהשוואה ישירה של איברים עוקבים בסדרה.

1. $a_n = \frac{1}{n}$.
2. $a_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n+1}$.
3. $a_n = \frac{2}{n(n+1)}\left(1+2+\ldots+n\right)$.

   רמז: נסו קודם לבדוק את ערכי $a_1, a_2, a_3, \ldots$. האם מצאתם חוקיות? נסו להוכיח אותה.
4. $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.