תרגיל 6- כלים בחישוב גבולות

חדו"א : סדרות וטורים

בתרגיל זה, אתם מתבקשים לכתוב הוכחות מלאות ומדוייקות למשפטים המרכזיים שלמדנו עד כה. מטרת תרגיל זה היא להעמיק את ההבנה התיאורטית של החומר ואימון יכולת הכתיבה המתמטית. מסיבה זו הדגש הטכני הורד ממנו.

באפשרותכם להסתמך על סיכומי ההרצאות או על מקורות נוספים, אך מומלץ מאוד לנסות להימנע מכך ולהתעמק בהבנת הטיעונים ככל האפשר.

להלן המשפטים שאתם מתבקשים להוכיח.

1

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת לגבול L. הוכיחו כי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא חסומה.
הראו כי אם גבול הסדרה L הוא גדול מ-0, אז קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש-$a_n > 0$ לכל $n > n_0$.

2 משפט חשבון גבולות

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות, ו-$L, T \in \mathbb{R}$ גבולותיהן, בהתאמה. כלומר

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = T.$$

אזי

1. הסדרה $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומתקיים $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = L + T$.
2. הסדרה $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומתקיים $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = L \cdot T$.
3. נניח בנוסף כי $T \neq 0$ וכי $b_n \neq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אזי, הסדרה $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{T}$.

3 כלל הסנדביץ'

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו-$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ שלוש סדרות. נניח כי קיים מספר $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים

$$a_n \le b_n \le c_n.$$

נניח בנוסף כי הסדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו-$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות לגבול **משותף**, כלומר קיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L.$$

אזי הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ו-$\lim_{n\to\infty} b_n = L$ גם כן.