תרגיל 5- כלים בחישוב גבולות
חדו"א : סדרות וטורים

בשיעור האחרון למדנו שני משפטים מרכזיים בנושא חישוב הגבולות. המשפטים הם **משפט חשבון גבולות** ו**כלל הסנדביץ'**.[1] להלן ניסוחם

משפט חשבון גבולות

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות, ו־$L, T \in \mathbb{R}$ גבולותיהן, בהתאמה. כלומר

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = T.$$

אזי

1. הסדרה $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומתקיים $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = L + T$.
2. הסדרה $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומתקיים $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = L \cdot T$.
3. נניח בנוסף כי $T \neq 0$ וכי $b_n \neq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אזי, הסדרה $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{T}$.

כלל הסנדביץ'

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו־$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ שלוש סדרות. נניח כי קיים מספר $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

נניח בנוסף כי הסדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו־$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות לגבול **משותף**, כלומר קיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש־

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L.$$

אזי הסדרה $\{b_n\}_{n=1}6^{\infty}$ מתכנסת ו־$\lim_{n\to\infty} b_n = L$ גם כן.

בשיעורים הבאים לא נחזור על הוכחת המשפטים, ומומלץ מאוד ללמוד את הוכחותיהם. מספר מקורות מומלצים מצורפים בהודעה בלוח הקורס.

בחלק מהשאלות בתרגיל זה נשתמש במשפטים אלו.

1

יהא $c > 1$ מספר נתון. בתרגיל זה נוכיח את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = 1.$$

1. הוכיחו את **אי שוויון ברנולי**. כלומר, הראו כי לכל $x \geq 0$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
   רמז: אינדוקציה.
   אתגר: הוכיחו את אי־השוויון עבור $x \geq -1$. האם הוא נכון כאשר $x < -1$?
2. יהא $\varepsilon > 0$ שרירותי. הראו כי קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים כי $c < 1 + n \cdot \varepsilon$.
3. השתמשו באי"ש ברנולי כי להראות כי קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים כי $c^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$.
4. הראו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $c^{\frac{1}{n}} > 1$.
   רמז: נסו להניח בשלילה כי הטענה שגויה, והעלו את אי השוויון בחזקה מתאימה.
5. הוכיחו את הגבול הנתון.

[1] במקורות שונים נקרא משפט חשבון גבולות גם אריתמטיקה של גבולות, וכלל הסנדביץ' נקרא לעיתים משפט הסנדביץ', או באנגלית The Squeeze Theorem.

2

נתונות סדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו־ $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש־

- הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־0.
- הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ הינה חסומה.

הוכיחו כי הסדרה $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת גם היא ל־0.
האם מסקנת המשפט נכונה אם נוותר על אחת ההנחות? אם כן־ הוכיחו זאת. אחרת, מצאו דוגמא נגדית.

3

השתמשו בחשבון גבולות ובכלל הסדביץ כדי לחשב את הגבולות הבאים־

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^5+3n+1}{n^6+24n^5-2n^3+11n}$
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n}$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+15}{3^n-\sin(n)}$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{100^n}{n!}$. תזכורת: $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$.

4

1. הראו כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים אי השוויון

$$4 \le \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n} \le 4\cdot\sqrt[n]{2}.$$

2. חשבו $\lim_{n\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$.

5 *

סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נתונה ע"י כלל הנסיגה

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2} \\ a_{n+1} &= \sqrt{2+a_n}, \qquad\qquad n = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

כלומר

$$a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}$$

כאשר הספרה 2 מופיעה n פעמים בביטוי.

1. הוכיחו כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n < 2$.
2. הוכיחו כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקים $a_n > 2-2^{-n+1}$.
3. חשבו את גבול הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

רמז: אינדוקציה.