תרגיל 5־ כלים בחישוב גבולות

חדו"א : סדרות וטורים

1

יהא $c > 1$ מספר נתון. בתרגיל זה נוכיח את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = 1 .$$

1. **אי שוויון ברנולי:** יהא $x \geq -1$ נתון. נוכיח באינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$(1+x)^n \geq 1+nx .$$

בסיס האינדוקציה־ המקרה $n=1$ הוא מיידי־ מה שצריך להוכיח הוא כי

$$1+x = (1+x)^1 \geq 1+1\cdot x = 1+x$$

וזה מתקיים תמיד.

הנחת האינדוקציה־ נניח כי עבור $n \in \mathbb{N}$ נתון מתקיים כי $(1+x)^n \geq 1+nx$.

צעד האינדוקציה־ נוכיח את המקרה $n+1$ כלומר כי $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) && \\
&\geq (1+nx)\cdot(1+x) && \text{מהנחת האינדוקציה} \\
&= 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x && \text{מכיוון ש־} nx^2 \geq 0
\end{aligned}$$

כנדרש.

אי השוויון לא נכון כאשר $x < -1$. למשל, עבור $x=-4$ ו־$n=3$ מתקיים כי

$$-27 = (1+(-4))^3 < 1+3\cdot(-4) = -11$$

2. יהא $\varepsilon > 0$ שרירותי. עלינו למצא $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $c < 1+n\varepsilon$. כלומר, אנו דורשים כי $n > \frac{c-1}{\varepsilon}$. לצורך כך מספיק לנו לדרוש כי $n_0 \geq \frac{c-1}{\varepsilon}$.

3. יהא $\varepsilon > 0$ שרירותי. לפי הסעיף הקודם קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים

$$c < 1+n\varepsilon .$$

לפי אי־שוויון ברנולי, מכיוון ש־$\varepsilon > 0$, אנו יודעים כי $(1+\varepsilon)^n \geq 1+n\varepsilon$ ולכן

$$c < 1+n\varepsilon \leq (1+\varepsilon)^n .$$

ע"י הוצאת שורש n־י משני אגפי המשוואה (שני האגפים חיוביים) נקבל כי

$$c^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon$$

כנדרש.

4. נניח כי $c^{\frac{1}{n}} \leq 1$ לאיזשהו $n \in \mathbb{N}$. ע"י העלאה בחזקת n של שני האגפים מקבלים כי $c = (c^{\frac{1}{n}})^n \leq 1^n = 1$, בסתירה להנחה $c > 1$.

5. יהא $\varepsilon > 0$ שרירותי. מסעיף ב' קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים כי $c^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$. כמו כן, מסעיף ג' מקבלים כי $c^{\frac{1}{n}} > 1 > 1 - \varepsilon$. נובע כי לכל $n > n_0$ מתקיים כי

$$\left|c^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon$$

ומכאן הגבול $\lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = 1$.

2

ראשית נשים לב כי העובדה ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ גוררת את הגבול $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. אכן, לכל $\varepsilon > 0$ יש $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים כי $|a_n| < \varepsilon$, ולכן גם $||a_n| - 0| < \varepsilon$.

בנוסף, אם $M > 0$ הוא חסם של b_n (כלומר $|b_n| < M$ לכל $n \in \mathbb{N}$) אזי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$-M\,|a_n| < b_n \cdot a_n < M\,|a_n| \,.$$

מכיוון שהסדרות באגף הימני והשמאלי ביותר מתכנסות ל־0 (לפי חשבון גבולות והעובדה ש־$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$) ממשפט הסנדביץ' נובע כי הסדרה $a_n b_n$ גם היא מתכנסת ל־0.

כל אחת מהטענות בשאלה הכרחיות. אם $a_n = \frac{1}{n}$ ו־$b_n = (-1)^n \cdot n$ מקיימות כי a_n שואפת ל־0, b_n אינה חסומה, ו־$a_n b_n = \frac{1}{n} \cdot (-1)^n \cdot n = (-1)^n$ אינה מתכנסת. לחילופין, אם ניקח $a_n = 1$ ו־$b_n = (-1)^n$ אז a_n מתכנסת (אך לא ל־0) ו־b_n חסומה, אך מכפלתם לא מתכנסת.

3

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^5+3n+1}{n^6+24n^5-2n^3+11n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5(1+\frac{3}{n^4}+\frac{1}{n^5})}{n^6(1+\frac{24}{n}-\frac{2}{n^3}+\frac{11}{n^5})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1+3\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^4}{1+24\left(\frac{1}{n}\right)-2\left(\frac{1}{n}\right)^4+11\left(\frac{1}{n}\right)^5} = 0 \cdot 1 = 0$

2. הסדרה $a_n = \frac{1}{n}$ מתכנסת ל־0 והסדרה $b_n = \sin(n)$ חסומה. לכן, לפי תרגיל 2 גבול הסדרה $\frac{\sin(n)}{n}$ מתכנסת ל־0.

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+15}{3^n-\sin(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{15}{3^n}}{1-\frac{\sin(n)}{3^n}} = 0$

4. נסמן $C = \frac{100^{200}}{200!}$. נשים לב כי לכל $n > 200$ מתקיים כי

$$0 < \frac{100^n}{n!} = \frac{100^{200}}{200!} \cdot \frac{100}{201} \cdot \frac{100}{202} \cdot \ldots \cdot \frac{100}{n} \leq C \cdot \left(\frac{100}{201}\right)^{n-200}.$$

מכיוון שהסדרה באגף הימני ביותר מתכנסת ל־0, מכלל הסנדביץ, מקבלים כי הסדרה $\frac{100^n}{n!}$ מתכנסת ל־0.

4

1. הראו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים אי השוויון

$$4 \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \leq 4 \cdot \sqrt[n]{2}.$$

הערה־ טענת התרגיל אינה נכונה כאשר $n = 1$, ומדובר בטעות בתרגיל המקורי. אנו נוכיח את נכונות הטענה לכל $n \geq 2$.

נשים לב כי לכל $n \geq 2$

$$\sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} = \sqrt[n]{4^n \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} \leq \sqrt[n]{4^n} \cdot \sqrt[n]{1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{16}} \leq 4\sqrt[n]{2}$$

2. מתרגיל 1, ומחשבון גבולות, אנו יודעים כי $\lim_{n\to\infty} 4 \cdot \sqrt[n]{2} = 4$. העובדה כי $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + 3^n + 2^n} = 4$ נובעת כעת מכלל הסנדביץ ומהסעיף הקודם.

5 *

סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נתונה ע"י כלל הנסיגה

$$a_1 = \sqrt{2}$$
$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \qquad n = 2, 3, \ldots.$$

1. העובדה כי $a_1 = \sqrt{2} < 2$ ידועה. נניח באינדוקציה כי $a_n < 2$ ונוכיח כי $a_{n+1} < 2$. ואכן

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2.$$

2. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n > 2 - 2^{-n+1}$.

נשתמש שוב באינדוקציה. עבור $n = 1$ מתקיים כי

$$a_1 = \sqrt{2} \approx 1.414\ldots > 1 = 2 - 2^0.$$

נניח כי $a_n > 2 - 2^{-n+1}$. אז

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} > \sqrt{2(2 - 2^{-(n+1)+1})} = \sqrt{2}\sqrt{2 - 2^{-(n+1)+1}} > \sqrt{2 - 2^{-(n+1)+1}}\sqrt{2 - 2^{-(n+1)+1}} = 2 - 2^{-(n+1)+1}$$

כנדרש.

3. בסעיפים 1 ו־2 ראינו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$2 - 2^{-n+1} < a_n < 2.$$

מכלל הסנדביץ' נובע כי $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.