תרגיל 4- סדרות מתכנסות
חדו"א : סדרות וטורים

1

נתונה הסדרה המתכנסת
$$a_n = \frac{n+2}{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. נחשו את גבול הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
2. נסמן את גבול הסדרה ב־L. עבור כל אחד מערכי ε הבאים, מצאו ערך $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־$|a_n - L| < \varepsilon$ לכל $n > n_0$.
   (א) $\varepsilon = 0.1$,
   (ב) $\varepsilon = 0.05$,
   (ג) $\varepsilon = 0.01$.

2

השתמשו בהגדרת הגבול כדי להוכיח כי $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{2n-1} = \frac{3}{2}$, כלומר־ בהינתן $\varepsilon > 0$ מצאו ערך $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים כי $\left|\frac{3n+5}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$.

3

1. נתונה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת לגבול חיובי $L > 0$. הוכיחו כי קיים אינדקס n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים כי $a_n > 0$.
   רמז: נסו לבחור את ערך ε בצורה מושכלת, והשתמשו בהגדרת הגבול.
2. נתונה סדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ בה לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $b_n > 0$. נניח כי הסדרה מתכנסת לגבול T. הוכיחו כי $T \geq 0$.
   נסו להניח בשלילה כי מסקנת התרגיל שגויה, ולהשתמש בסעיף 1.
3. בסעיף 2, האם ניתן להראות כי $T > 0$? אם כן, הוכיחו זאת. אם לא, הציגו דוגמה נגדית.

4

נתונה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת לגבול L. הוכיחו כי סדרת הריבועים $\left\{a_n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול L^2.
(*) נסו להכליל עובדה זה עבור הסדרה $\left\{a_n^k\right\}_{n=1}^{\infty}$, כאשר $k \in \mathbb{N}$ הוא קבוע. רמז: ניתן לפתור את התרגיל ע"י שימוש בנוסחה $x^k - y^k = (x-y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots xy^{k-2} + y^{k-1})$.

5 *

נתונות סדרות מתכנסות $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ עם $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ ו־$T = \lim_{n\to\infty} b_n$.
נגדיר סדרה חדשה ע"י $c_n = \max\{a_n, b_n\}$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו כי $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $R = \max\{L, T\}$.