תרגיל 3־ סדרות הנדסיות וגבולות

חדו"א : סדרות וטורים

1

סדרה זו נתונה ע"י הנוסחה $a_n = 4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$ ונוסחת הסכום של n האיברים הראשונים היא

$$S_n = \frac{4 \cdot (1 - 0.9^n)}{1 - 0.9} = 40 \cdot (1 - 0.9^n)$$

$$\begin{aligned} S_n > 36 &\iff 1 - 0.9^n > \frac{36}{40} = 0.9 \\ &\iff 0.9^n < 0.1 \\ &\iff n \ln(0.9) < \ln(0.1) \\ n &>= \frac{\ln(0.1)}{\ln(0.9)} \approx 21.854\ldots \end{aligned}$$

ולכן $n = 22$ הוא המינימלי כך ש־$S_n > 36$.

אם היינו מנסים לפתור את המשוואה $S_n > 40$ היינו מגיעים לאי־השוויון

$$S_n = 40(1 - 0.9^n) > 40 \iff 1 - 0.9^n > 1 \iff -0.9^n > 0$$

ולאי־שוויון זה אין פתרון, שכן אגף שמאל של המשוואה הוא שלילי.

2

נתונה סדרה חיובית כלשהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

1. נתון כי $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, עבור d כלשהו. נחשב־

$$\frac{1}{2}(a_n + a_{n+2}) = \frac{1}{2}(a_1 + (n-1)d + a_1 + (n+1)d) = \frac{1}{2}(2a_1 + 2nd) = \frac{1}{2} \cdot 2a_{n+1} = a_{n+1}.$$

2. נתון כעת $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ לאיזשהו $q \neq 0$. אז מחישוב מקבלים

$$\sqrt{a_n a_{n+2}} = \sqrt{a_1 \cdot q^{n-1} \cdot a_1 \cdot q^{n+1}} = \sqrt{a_1^2 q^{2n}} = |a_{n+1}|.$$

3. מכיוון ששני אגפי אי־השוויון חיוביים, אי־השוויון נשמר אם נעלה את שני האגפים בריבוע. מקבלים

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \iff (x+y)^2 \geq 4xy \iff x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \iff (x-y)^2 \geq 0$$

ואי־השוויון הימני ביותר נכון תמיד, והוא מהווה שוויון אם"ם $x = y$.

4. נתונה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית, ונתון לנו כי היא גם חשבונית וגם הנדסית. מסעיף (1), מכיוון שהסדרה היא חשבונית, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}.$$

מסעיף (2), מכיוון שהסדרה הנתונה היא הנדסית, מתקיים כי

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n a_{n+2}}.$$

כלומר, הראינו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$\sqrt{a_n a_{n+2}} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}.$$

מסעיף (3) מקבלים ש־$a_n = a_{n+2}$ לכל n. בפרט

$$q^2 = \frac{a_{n+2}}{a_n} = 1$$

ולכן $q = \pm 1$ ומכיוון שנתון כי הסדרה חיובית נובע כי $q = 1$ והסדרה קבועה.

3

נתון מספר בעל פיתוח עשרוני עם מחזור בן 3 ספרות

$$x = 0.144144144\ldots.$$

נשים לב כי x הוא הסכום האינסופי של הסדרה

$$a_n = 0.144 \cdot (0.001)^{n-1}.$$

כלומר

$$x = 0.144 + 0.000144 + 0.000000144 + \ldots = a_1 + a_2 + a_3 \ldots$$

מצד שני, לפי נוסחת סכום אינסופי של סדרה הנדסית מקבלים כי

$$x = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = 0.144 \cdot \frac{1}{1-0.001} = \frac{0.144}{0.999} = \frac{144}{999}$$

אם נחור לשאלה לגבי $x = 0.999\ldots$ מקבלים כי

$$x = 0.9999\ldots = 0.9 \cdot \frac{1}{1-0.1} = \frac{0.9}{0.9} = 1$$

כלומר $1 = 0.999\ldots$.

4

הוכיחו את הגבולות הבאים עפ"י הגדרת הגבול.

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{5n-4}{n^2+1} = 0$.

ניקח $\varepsilon > 0$ שרירותי. עלינו למצא $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים כי

$$\left|\frac{5n-4}{n^2+1}\right| < \varepsilon.$$

נשים לב כי הביטוי באגף שמאל הוא חיובי לכל n, לכן אין צורך בערך המוחלט. כמו כן, מפיתוח הביטוי ניתן לראות כי

$$\frac{5n-4}{n^2+1} < \frac{5n}{n^2+1} < \frac{5n}{n^2} = \frac{5}{n},$$

לכן מספיק לנו למצא n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים כי

$$\frac{5}{n} < \varepsilon,$$

ולצורך כך מספיק לקחת כל $n_0 > \frac{5}{\varepsilon}$ (למשל את $n_0 = \lceil \frac{5}{\varepsilon} \rceil + 1$).

הערה לחילופין, במקום לנסות לנחש חסם עליון לסדרה הנתונה כפי שעשינו כאן, ניתן לעבוד בצורה ישירה יותר ולפתור את אי השוויון

$$\frac{5n-4}{n^2+1} < \varepsilon$$

ע"י פיתוח ישיר, ופתרון של אי השוויון ממעלה שניה ב־n־

$$\varepsilon \cdot n^2 + (\varepsilon - 5)n + 4 > 0.$$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+9\cdot(-1)^n}{n^2+24n+3} = 7$.

ניקח $\varepsilon > 0$ שרירותי, ונרצה למצא $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים

$$\left|\frac{7n^2+9(-1)^n}{n^2+24n+3} - 7\right| < \varepsilon.$$

נשים לב כי

$$\left|\frac{7n^2+9(-1)^n}{n^2+24n+3} - 7\right| = \left|\frac{-168n-21+9(-1)^n}{n^2+24n+3}\right| \leq \frac{168n+30}{n^2+24n+3}$$

כאשר אי־השוויון האחרון נכון בגלל אי־שוויון המשולש. ע"י הקטנת המכנה ניתן לקבל כי

$$\left|\frac{7n^2+9(-1)^n}{n^2+24n+3} - 7\right| \leq \frac{168n+30}{n^2+24n+3} < \frac{168n+30}{n^2} = \frac{168}{n} + \frac{30}{n^2}$$

לכן, מספיק לבחור n_0 כך ש־ $\frac{168}{n_0} < \varepsilon$ וגם־$\frac{30}{n_0^2} < \varepsilon$, כלומר $n_0 > \frac{168}{\varepsilon}$ וגם $n_0 > \sqrt{\frac{30}{\varepsilon}}$. ניתן למשל לקחת את $n_0 = \max\left\{\lceil \frac{168}{\varepsilon} \rceil + 1, \lceil \sqrt{\frac{30}{\varepsilon}} \rceil + 1\right\}$.

3. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$

נשים לב כי ע"י הכפלה וחילוק בביטוי הצמוד ניתן לקבל

$$\left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| = \left|\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| < \left|\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

כאשר אי־השוויון האחרון נכון כי הקטנו את המכנה. כעת ניקח $\varepsilon > 0$ שרירותי, כמו בסעיפים הקודמים. עלינו למצא $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים

$$\left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| < \varepsilon.$$

לפי אי השוויון שרשמנו למעלה, אם ניקח $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־$\frac{1}{2\sqrt{n_0}} < \varepsilon$ אזי לכל $n > n_0$ מתקיים

$$\left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n_0}} < \varepsilon$$

כנדרש. מספיק לקחת לצורך כך $n_0 > \left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2$.

5 *

נתונה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת לגבול L. נגדיר סדרה חדשה ע"י $b_n = \frac{1}{n}\left(a_1 + \ldots + a_n\right)$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו כי b_n מתכנסת גם היא ל־L.

נקח $\varepsilon > 0$ שרירותי. עלינו להראות כי קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים כי

$$\left|\frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n) - L\right| < \varepsilon .$$

נשים לב כי

$$\left|\frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n) - L\right| = \left|\frac{a_1 + \ldots + a_n - n \cdot L}{n}\right| \leq \frac{|a_1 - L| + |a_2 - L| + \ldots + |a_n - L|}{n} .$$

מהנתון כי $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, קיים מספר $n_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_1$ מתקיים כי $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. בפרט, מתקיים כי

$$\begin{aligned}\frac{|a_1 - L| + |a_2 - L| + \ldots + |a_n - L|}{n} &= \frac{|a_1 - L|}{n} + \ldots + \frac{|a_{n_1} - L|}{n} + \frac{|a_{n_1+1} - L|}{n} + \ldots + \frac{|a_n - L|}{n} \\ &< \frac{|a_1 - L|}{n} + \ldots + \frac{|a_{n_1} - L|}{n} + \frac{(n - n_1)\varepsilon}{2n}\end{aligned}$$

כמו כן, הקבוצה $\left\{\frac{|a_1 - L|}{n}, \ldots, \frac{|a_n - L|}{n}\right\}$ היא סופית, ובפרט חסומה ע"י איזשהו מספר $M > 0$. נבחר $n_2 \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $\frac{M}{n_2} < \frac{\varepsilon}{2n_1}$. אזי, מאי־השוויון למעלה והבחירה של n_2, אנו מקבלים כי אם $n > \max\{n_1, n_2\}$, אזי מתקיים כי

$$\begin{aligned}\frac{|a_1 - L| + |a_2 - L| + \ldots + |a_n - L|}{n} &< \frac{|a_1 - L|}{n} + \ldots + \frac{|a_{n_1} - L|}{n} + \frac{(n - n_1)\varepsilon}{2n} \\ &< \underbrace{\frac{M}{n} + \ldots + \frac{M}{n}}_{\text{גורמים}} + \frac{(n - n_1)\varepsilon}{n} \\ &< n_1 \cdot \frac{\varepsilon}{2n_1} + \varepsilon \cdot \frac{n - n_1}{2n} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

כנדרש.