ספירת הצגות של חבורות

חפירות במדבר

שי שכטר

אוניברסיטת בן גוריון בנגב

16 ביולי 2017

בואו נספור משהו!

שאלה.
יהיו d, n שלמים חיוביים. כמה תתי־חבורות מאינדקס n קיימות בחבורה $(\mathbb{Z}^d, +)$?

שאלה.
יהיו d, n שלמים חיוביים. כמה תתי־חבורות מאינדקס n קיימות בחבורה $(\mathbb{Z}^d, +)$?

נסמן ב־$a_n(\mathbb{Z}^d)$ את מספר תתי־החבורות של $\mathbb{Z}^d$ מאינדקס n. **פונקציית זיטא של תתי־החבורות של** $\mathbb{Z}^d$ מוגדרת להיות

$$\zeta_{\mathbb{Z}^d}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\mathbb{Z}^d) n^{-s} = \sum_{A \le_{\mathtt{fi}} \mathbb{Z}^d} \left|\mathbb{Z}^d : A\right|^{-s}.$$

לדוגמה, אם $d = 1$ אז $a_n(\mathbb{Z}^d) = 1$ לכל n ו־

$$\zeta_{\mathbb{Z}}(s) = \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

היא פונקציית זיטא של רימן.

ספירת הצגות של חבורות

לדוגמה, אם $d = 1$ אז $a_n(\mathbb{Z}^d) = 1$ לכל n ו־

$$\zeta_{\mathbb{Z}}(s) = \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

היא פונקציית זיטא של רימן.

משפט.

$$\zeta_{\mathbb{Z}^d}(s) = \zeta(s) \cdot \zeta(s-1) \cdots \zeta(s-d+1)$$

כאשר $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \zeta_{\mathbb{Z}}(s) = \zeta(s)$ היא פונקציית זיטא של רימן.

הוכחה ראשונה. אינדוקציה על d.

הוכחה ראשונה. אינדוקציה על d. המקרה $d=1$ כבר ידוע לנו.

טענת עזר. קיימת העתקה **על**

$$\Phi : \{\text{תתי־חבורות של } \mathbb{Z}^d\} \to \{\text{תתי־חבורות של } \mathbb{Z}\} \times \{\text{תתי־חבורות של } \mathbb{Z}^{d-1}\}$$

המקיימת כי $\#\Phi^{-1}(X,Y) = |\mathbb{Z} : X|^{d-1}$ אם X ו־Y הן מאינדקס סופי.
בנוסף, אם $A \le \mathbb{Z}^d$ מאינדקס סופי ו־$A = \Phi(X,Y)$ אז

$$\left|\mathbb{Z}^d : A\right| = |\mathbb{Z} : X| \cdot \left|\mathbb{Z}^{d-1} : Y\right| .$$

הגדרת הפונקציה Φ.

1. $e_1, \ldots, e_d$ בסיס של $\mathbb{Z}^d$ (למשל־ הבסיס הסטנדרטי),
2. $Z_1 = \mathbb{Z}e_1 \simeq \mathbb{Z}$,
3. $Z_2 = \mathbb{Z}e_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}e_d \simeq \mathbb{Z}^{d-1}$.

הגדרת הפונקציה Φ.

1. $e_1, \dots, e_d$ בסיס של $\mathbb{Z}^d$ (למשל- הבסיס הסטנדרטי),
2. $Z_1 = \mathbb{Z}e_1 \simeq \mathbb{Z}$,
3. $Z_2 = \mathbb{Z}e_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_d \simeq \mathbb{Z}^{d-1}$.

הפונקציה Φ מוגדרת ע"י "חיתוך ומריחה"

$$\Phi(A) = (A \cap Z_1, (A + Z_1) \cap Z_2).$$

ספירת הצגות של חבורות

חפירות במדבר

ספירת הצגות של חבורות

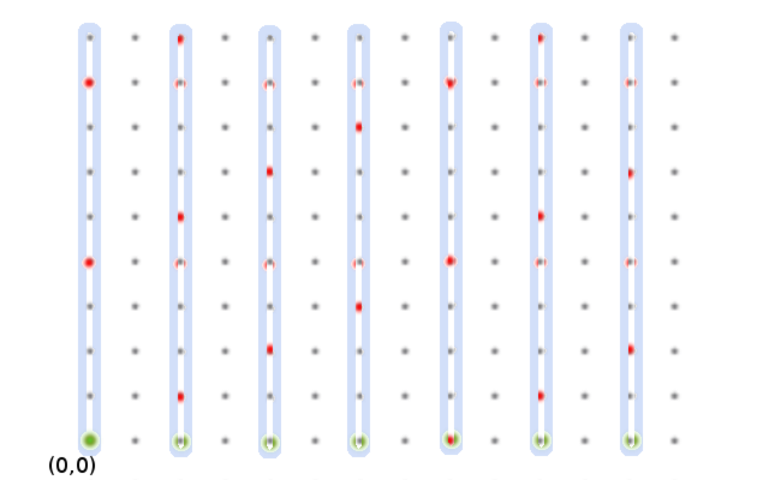
חפירות במדבר

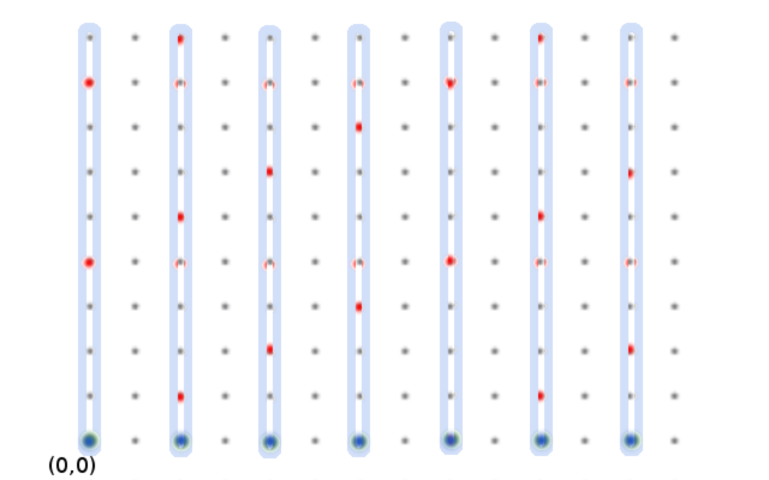
ספירת הצגות של חבורות

חפירות במדבר

ספירת הצגות של חבורות

חפירות במדבר




(0,0)

מקבלים

$$\begin{aligned}
\zeta_{\mathbb{Z}^d}(s) &= \sum_{A \le_{\mathtt{fi}} \mathbb{Z}^d} \left|\mathbb{Z}^d : A\right|^{-s} \\
&= \sum_{A \le_{\mathtt{fi}} \mathbb{Z}^d} |Z_1 : A \cap Z_1|^{-s} \cdot |Z_2 : (A + Z_1) \cap Z_2|^{-s} \\
&= \sum_{X \le_{\mathtt{fi}} Z_1} \sum_{Y \le_{\mathtt{fi}} Z_2} \left|\Phi^{-1}(X,Y)\right| |Z_1 : X|^{-s} \cdot |Z_2 : Y|^{-s} \\
&= \sum_{X \le_{\mathtt{fi}} Z_1} |Z_1 : X|^{-s+d-1} \cdot \sum_{Y \le_{\mathtt{fi}} Z_2} |Z_2 : Y|^{-s} \\
&= \zeta_{\mathbb{Z}}(s-d+1)\zeta_{\mathbb{Z}^{d-1}}(s)
\end{aligned}$$

והמשפט נובע.

הוכחה שנייה. אלגברה לינארית + ε.

הוכחה שנייה. אלגברה לינארית + ε.

$$\mathbb{Z}^d \geq H \text{ מאינדקס סופי } \iff H \text{ חופשית מדרגה } d\,,$$

כלומר, תת־חבורה מאינדקס סופי ב־$\mathbb{Z}^d$ נקבעת ע"י בחירת קבוצה בלתי תלוייה לינארית בגודל d ב־$\mathbb{Z}^d$.

הוכחה שנייה. אלגברה לינארית + ε.

$$H \le \mathbb{Z}^d \text{ מאינדקס סופי } \iff H \text{ חופשית מדרגה } d,$$

כלומר, תת־חבורה מאינדקס סופי ב־$\mathbb{Z}^d$ נקבעת ע"י בחירת קבוצה בלתי תלוייה לינארית בגודל d ב־$\mathbb{Z}^d$.
נגדיר, $\mathbf{M}^*_d(\mathbb{Z}) = \mathbf{M}_d(\mathbb{Z}) \cap \mathbf{GL}_d(\mathbb{Q})$. קיבלנו התאמה על

$$\mathbf{M}^*_d(\mathbb{Z}) \to \{\text{תתי־חבורות מאינדקס סופי של } \mathbb{Z}^d\}$$
$$x \mapsto \mathrm{Row}-\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(x)$$

החבורה שבציור מיוצגת ע"י המטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ וגם ע"י המטריצה $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, למשל.

החבורה $\mathbf{GL}_d(\mathbb{Z})$, המורכבת ממטריצות הפיכות עם כניסות שלמות עם דטרמיננטה ± 1 פועלת על הקבוצה $\mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})$ ע"י כפל משמאל.

החבורה $\mathbf{GL}_d(\mathbb{Z})$, המורכבת ממטריצות הפיכות עם כניסות שלמות עם דטרמיננטה ± 1 פועלת על הקבוצה $\mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})$ ע"י כפל משמאל.

1. לכל $g \in \mathbf{GL}_d(\mathbb{Z})$ ו־$x \in \mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})$

$$\mathrm{Row}-\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(gx) = \mathrm{Row}-\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(x).$$

החבורה $\mathbf{GL}_d(\mathbb{Z})$, המורכבת ממטריצות הפיכות עם כניסות שלמות עם דטרמיננטה ± 1 פועלת על הקבוצה $\mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})$ ע"י כפל משמאל.

1. לכל $g \in \mathbf{GL}_d(\mathbb{Z})$ ו־$x \in \mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})$

$$\mathrm{Row}-\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(gx) = \mathrm{Row}-\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(x).$$

2. לכיוון השני, אם ל־$x_1, x_2 \in \mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})$ יש את אותו מרחב שורות מעל $\mathbb{Z}$ אז יש מטריצה $g \in \mathbf{GL}_d(\mathbb{Z})$ כך ש־$gx_1 = x_2$.

החבורה $\mathbf{GL}_d(\mathbb{Z})$, המורכבת ממטריצות הפיכות עם כניסות שלמות עם דטרמיננטה ± 1 פועלת על הקבוצה $\mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})$ ע"י כפל משמאל.

1. לכל $g \in \mathbf{GL}_d(\mathbb{Z})$ ו־$x \in \mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})$

$$\mathrm{Row}-\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(gx) = \mathrm{Row}-\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(x).$$

2. לכיוון השני, אם ל־$x_1, x_2 \in \mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})$ יש את אותו מרחב שורות מעל $\mathbb{Z}$ אז יש מטריצה $g \in \mathbf{GL}_d(\mathbb{Z})$ כך ש־$gx_1 = x_2$.

3. לכל מטריצה $x \in \mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})$ קיימת מטריצה **יחידה** מהצורה

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,d} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,d} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{d,d} \end{pmatrix},$$

עם $0 \le a_{i,j} < a_{j,j}$ **לכל** $1 \le i < j \le n$,

ו־$g \in \mathbf{GL}_d(\mathbb{Z})$ כך ש־gx היא המטריצה הנ"ל.

במקרה בו $x \in \mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})$ היא משולשית עליונה קל לוודא כי

$$\left|\mathbb{Z}^d : \mathrm{Row}-\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(x)\right| = |\det(x)| .$$

ספירת הצגות של חבורות

חפירות במדבר

במקרה בו $x \in \mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})$ היא משולשית עליונה קל לוודא כי

$$\left|\mathbb{Z}^d : \mathrm{Row}-\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(x)\right| = \left|\det(x)\right| .$$

מקבלים כי

$$\begin{aligned}
\zeta_{\mathbb{Z}^d}(s) &= \sum_{H \leq_{\mathtt{fi}} \mathbb{Z}^d} \left|\mathbb{Z}^d : H\right|^{-s} \\
&= \sum_{[x] \in \mathbf{GL}_d(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})} \left|\mathbb{Z}^d : \mathrm{Row}-\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(x)\right|^{-s} \\
&= \sum_{[x] \in \mathbf{GL}_d(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})} \left|\det(x)\right|^{-s} \\
&= \sum_{a_{1,1}=1}^{\infty} \sum_{a_{2,2}=1}^{\infty} \cdots \sum_{a_{d,d}=1}^{\infty} \underbrace{a_{2,2} \cdot a_{3,3}^2 \cdots a_{d,d}^{d-1}}_{\star} \cdot a_{1,1}^{-s} \cdot a_{2,2}^{-s} \cdot \ldots \cdot a_{d,d}^{-s} \\
&= \zeta(s) \cdot \zeta(s-1) \cdots \zeta(s-d+1)
\end{aligned}$$

מה למדנו?

מה למדנו?

1. בהינתן $n, d \in \mathbb{N}$, ניתן לחלץ נוסחה מפורשת לערך $a_n(\mathbb{Z}^d)$. למשל, עבור $d = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\mathbb{Z}^2) n^{-s} = \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot n^{-s}\right)}_{=\zeta(s)} \cdot \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n^{-s}\right)}_{=\zeta(s-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k \mid n} k\right) n^{-s}.$$

הקושי לחלץ ביטוי מפורש נהיה מהותי יותר כאשר d גדל.

מה למדנו?

1. בהינתן $n, d \in \mathbb{N}$, ניתן לחלץ נוסחה מפורשת לערך $a_n(\mathbb{Z}^d)$. למשל, עבור $d = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\mathbb{Z}^2) n^{-s} = \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot n^{-s}\right)}_{=\zeta(s)} \cdot \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n^{-s}\right)}_{=\zeta(s-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k|n} k\right) n^{-s}.$$

הקושי לחלץ ביטוי מפורש נהיה מהותי יותר כאשר d גדל.

הפונקציה $\zeta_{\mathbb{Z}^d}(s)$ היא הולומורפית על חצי המישור $\{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > d\}$ ובעלת קוטב בנקודה $s_0 = d$. בפרט, מתקיים כי לכל $\epsilon > 0$

$$\sum_{n=1} a_n(\mathbb{Z}^d) = O(N^{d+\epsilon}).$$

למעשה, במקרה זה ניתן להגיד אפילו יותר על קצב הגידול של הסדרה $(\sum_{n=1}^{N} a_n)$.

משפט. לכל $d \in \mathbb{N}$ קיים קבוע c_d כך ש

$$\sum_{n=1}^{N} a_n(\mathbb{Z}^d) \sim c_d \cdot N^d$$

כאשר הסימון $f(N) \sim g(N)$ פירושו $\frac{f(N)}{g(N)} \xrightarrow{N\to\infty} 1$.

למשל, עבור $d = 2$ מתקיים כי $\sum_{n=1}^{N} a_n(\mathbb{Z}^2) \sim \frac{\pi^2}{12} N^2$.

בואו נדבר על חבורות!

ספירת הצגות של חבורות

ננסה להכליל את מה שהוכחנו בסעיף הקודם לחבורות כלליות.
תהא G חבורה. נרצה להגיד את הסדרה $a_n(G)$ באופן דומה למקרה של $\mathbb{Z}^d$. יש כמה שאלות שעלינו לשאול את עצמנו לפני כן.

ננסה להכליל את מה שהוכחנו בסעיף הקודם לחבורות כלליות.
תהא G חבורה. נרצה להגיד את הסדרה $a_n(G)$ באופן דומה למקרה של $\mathbb{Z}^d$. יש כמה שאלות שעלינו לשאול את עצמנו לפני כן.

1. האם מספר תתי־החבורות של G מאינדקס סופי הוא סופי לכל n?

ספירת הצגות של חבורות

חפירות במדבר

ננסה להכליל את מה שהוכחנו בסעיף הקודם לחבורות כלליות.
תהא G חבורה. נרצה להגיד את הסדרה $a_n(G)$ באופן דומה למקרה של $\mathbb{Z}^d$. יש כמה שאלות שעלינו לשאול את עצמנו לפני כן.

1. האם מספר תתי־החבורות של G מאינדקס סופי הוא סופי לכל n?

2. נניח כי $a_n(G)$, מספר תתי־החבורות של G מאינדקס סופי, הוא סופי לכל $n \in \mathbb{N}$. באילו תנאים הסדרה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(G) n^{-s}$ מתכנסת באיזשהו תחום ב־$\mathbb{C}$?

ננסה להכליל את מה שהוכחנו בסעיף הקודם לחבורות כלליות.
תהא G חבורה. נרצה להגיד את הסדרה $a_n(G)$ באופן דומה למקרה של $\mathbb{Z}^d$. יש כמה שאלות שעלינו לשאול את עצמנו לפני כן.

1. האם מספר תתי־החבורות של G מאינדקס סופי הוא סופי לכל n?

2. נניח כי $a_n(G)$, מספר תתי־החבורות של G מאינדקס סופי, הוא סופי לכל $n \in \mathbb{N}$. באילו תנאים הסדרה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(G) n^{-s}$ מתכנסת באיזשהו תחום ב־$\mathbb{C}$?

3. למה בעצם להתמקד דוקא בסדרה $a_n(G)$? האם יכול להיות שהכללה יותר טבעית של $a_n(\mathbb{Z}^d)$ היא, למשל תתי־חבורות **נורמליות** של G? אולי יש הכללות אפשריות אחרות?

ספירת הצגות של חבורות

ננסה להכליל את מה שהוכחנו בסעיף הקודם לחבורות כלליות.
תהא G חבורה. נרצה להגיד את הסדרה $a_n(G)$ באופן דומה למקרה של $\mathbb{Z}^d$. יש כמה שאלות שעלינו לשאול את עצמנו לפני כן.

1. האם מספר תתי־החבורות של G מאינדקס סופי הוא סופי לכל n?
   $\rightsquigarrow$ מתקיים עבור חבורות נוצרות סופית.
2. נניח כי $a_n(G)$, מספר תתי־החבורות של G מאינדקס סופי, הוא סופי לכל $n \in \mathbb{N}$. באילו תנאים הסדרה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(G) n^{-s}$ מתכנסת באיזשהו תחום ב־$\mathbb{C}$?
3. למה בעצם להתמקד דוקא בסדרה $a_n(G)$? האם יכול להיות שהכללה יותר טבעית של $a_n(\mathbb{Z}^d)$ היא, למשל תתי־חבורות **נורמליות** של G? אולי יש הכללות אפשריות אחרות?

נסה להכליל את מה שהוכחנו בסעיף הקודם לחבורות כלליות.
תהא G חבורה. נרצה להגיד את הסדרה $a_n(G)$ באופן דומה למקרה של $\mathbb{Z}^d$. יש כמה שאלות שעלינו לשאול את עצמנו לפני כן.

1. האם מספר תתי־החבורות של G מאינדקס סופי הוא סופי לכל n?

   $\leadsto$ מתקיים עבור חבורות נוצרות סופית.

2. נניח כי $a_n(G)$, מספר תתי־החבורות של G מאינדקס סופי, הוא סופי לכל $n \in \mathbb{N}$. באילו תנאים הסדרה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(G) n^{-s}$ מתכנסת באיזשהו תחום ב־$\mathbb{C}$?

   $\leadsto$ גידול פולינומיאלי של הסדרה $a_n(G)$, חבורות פתירות.

3. למה בעצם להתמקד דוקא בסדרה $a_n(G)$? האם יכול להיות שהכללה יותר טבעית של $a_n(\mathbb{Z}^d)$ היא, למשל תתי־חבורות **נורמליות** של G? אולי יש הכללות אפשריות אחרות?

ננסה להכליל את מה שהוכחנו בסעיף הקודם לחבורות כלליות.
תהא G חבורה. נרצה להגיד את הסדרה $a_n(G)$ באופן דומה למקרה של $\mathbb{Z}^d$. יש כמה שאלות שעלינו לשאול את עצמנו לפני כן.

1. האם מספר תתי־החבורות של G מאינדקס סופי הוא סופי לכל n?
   $\rightsquigarrow$ מתקיים עבור חבורות נוצרות סופית.
2. נניח כי $a_n(G)$, מספר תתי־החבורות של G מאינדקס סופי, הוא סופי לכל $n \in \mathbb{N}$. באילו תנאים הסדרה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(G) n^{-s}$ מתכנסת באיזשהו תחום ב־$\mathbb{C}$?
   $\rightsquigarrow$ גידול פולינומיאלי של הסדרה $a_n(G)$, חבורות פתירות.
3. למה בעצם להתמקד דוקא בסדרה $a_n(G)$? האם יכול להיות שהכללה יותר טבעית של $a_n(\mathbb{Z}^d)$ היא, למשל תתי־חבורות **נורמליות** של G? אולי יש הכללות אפשריות אחרות?
   $\rightsquigarrow$ $\zeta_G^{\triangleleft}(s),\ \zeta_G^{i}(s),\ \hat{\zeta_G}(s)$

ספירת הצגות של חבורות

חפירות במדבר

לצורך נוחיות, בהמשך החלק הזה נצטמצם למשפחה קטנה יותר של חבורות־

חבורות נוצרות סופית ונילפוטנטיות.

חבורות אלו נקראות לעתים **חבורות** $\mathcal{T}$.

לצורך נוחיות, בהמשך החלק הזה נצטמצם למשפחה קטנה יותר של חבורות־

חבורות נוצרות סופית ונילפוטנטיות.

חבורות אלו נקראות לעתים **חבורות** $\mathcal{T}$.
דוגמה חשובה לחבורה שכזו היא **חבורת הייזנברג**

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

הנתונה גם ע"י ההצגה $\langle x, y, z \mid [x, y] = z,\ [z, x] = [z, y] = 1 \rangle$.

ספירת הצגות של חבורות

חפירות במדבר

לצורך נוחיות, בהמשך החלק הזה נצטמצם למשפחה קטנה יותר של חבורות־

חבורות נוצרות סופית ונילפוטנטיות.

חבורות אלו נקראות לעתים **חבורות** $\mathcal{T}$.
דוגמה חשובה לחבורה שכזו היא **חבורת הייזנברג**

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

הנתונה גם ע"י ההצגה $\langle x, y, z \mid [x,y] = z,\ [z,x] = [z,y] = 1 \rangle$.

$$\zeta_G(s) = \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(2s-2)\zeta(2s-3)}{\zeta(3s-3)}.$$

תכונה מאוד חשובה של פונקציית רימן, שנורשת באופן מיידי לפונקציה $\zeta_{\mathbb{Z}^d}(s)$, היא הפירוק שלה ל**מכפלת אוילר**.

$$.\zeta(s) = \prod_{p \text{ ראשוני}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

תכונה מאוד חשובה של פונקציית רימן, שנורשת באופן מיידי לפונקציה $\zeta_{\mathbb{Z}^d}(s)$, היא הפירוק שלה ל**מכפלת אוילר**.

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ ראשוני}} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

בפרט, נובע ש

$$\zeta_{\mathbb{Z}^d}(s) = \prod_{p \text{ ראשוני}} \zeta_{\mathbb{Z}^d,p}(s), \quad \zeta_{\mathbb{Z}^d,p}(s) = \frac{1}{(1-p^{-s})\cdot(1-p^{-s+1})\cdots(1-p^{-s+d-1})}.$$

הפונקציה $\zeta_{\mathbb{Z}^d,p}(s)$ שהגדרנו מתקבלת מהטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_{p^k}(\mathbb{Z}^d)p^{-ks}$, לכל ראשוני p.

משפט. [Grunewald, Segal, Smith, '88]
תהא G חבורה נילפוטנטית נוצרת סופית, ונסמן ב־$a_n(G)$ את מספר תתי־החבורות של G מאינדקס n לכל $n \in \mathbb{N}$. תהא $\zeta_G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(G) n^{-s}$ פונקציית הזיטא הסופרת תתי־חבורות של G.

1. **פירוק אוילר.** $\zeta_G(s) = \prod_{p \text{ ראשוני}} \zeta_{G,p}(s)$, כאשר $\zeta_{G,p}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{p^k}(G) p^{-ks}$.
2. **רציונליות.** יתר על כן, לכל ראשוני p קיימת פונקציה רציונלית $W_p(t_1,t_2) \in \mathbb{Q}(t_1,t_2)$ כך ש־$\zeta_{G,p}(s) = W_p(p,p^{-s})$.

פירוק אוילר עבור חבורות סופיות נובע מהמשפט הבא.

משפט. תהא G חבורה נילפוטנטית **סופית**. אז

$$G \simeq \prod_{p \text{ ראשוני}} G_p$$

כאשר לכל ראשוני p, G_p היא תת־חבורת p־סילוב **היחידה** של G.

פירוק אוילר עבור חבורות סופיות נובע מהמשפט הבא.

משפט. תהא G חבורה נילפוטנטית **סופית**. אז

$$G \simeq \prod_{p \text{ ראשוני}} G_p$$

כאשר לכל ראשוני p, G_p היא תת־חבורת p־סילוב **היחידה** של G.

כדי להרחיב את המשפט לחבורות אינסופיות יש צורך לבצע השלמות טופולוגיות.

- $\widehat{G} \leftrightsquigarrow G$ ההשלמה הפרו־סופית של G,
- חבורת p־סילוב של $\widehat{G} \leftrightsquigarrow$ ההשלמה הפרו־p של G.

מתקיים

$$\zeta_{G,p}(s) = \zeta_{\widehat{G}_p}(s) \quad , \quad \zeta_G(s) = \zeta_{\widehat{G}}(s).$$

- החישוב של הפונקציות $\zeta_{G,p}(s)$ מתבצע ע"י שימוש בכלים מ**אינטגרציה p־אדית**.

- החישוב של הפונקציות $\zeta_{G,p}(s)$ מתבצע ע"י שימוש בכלים מ**אינטגרציה p־אדית**.
  לדוגמה

$$\zeta_{\mathbb{Z}^d,p}(s) = 1 + (1-p^{-s})^{-1} \cdot \int_{X(\mathbb{Z}_p^d)} |\det(\mathbf{x})|^{-s} \, d\mu(\mathbf{x}),$$

כאשר $X(\mathbb{Z}_p^d) = \mathbf{M}_d(\mathbb{Z}_p) \setminus p\mathbf{M}_d(\mathbb{Z}_p)$.

- החישוב של הפונקציות $\zeta_{G,p}(s)$ מתבצע ע"י שימוש בכלים מ**אינטגרציה** p**־אדית**.
  לדוגמה
  $$\zeta_{\mathbb{Z}^d,p}(s) = 1 + (1-p^{-s})^{-1} \cdot \int_{X(\mathbb{Z}_p^d)} |\det(\mathbf{x})|^{-s}\, d\mu(\mathbf{x}),$$
  כאשר $X(\mathbb{Z}_p^d) = \mathbf{M}_d(\mathbb{Z}_p) \setminus p\mathbf{M}_d(\mathbb{Z}_p)$.
- הקיום של פונקציה הרציונלית $W_p(t_1,t_2)$ כך ש־$\zeta_{G,p}(s) = W_p(p,p^{-s})$ נובע ממשפט של Denef and Macintyre מתורת המודלים, לגבי הרציונליות של אינטגרלים גדירים מעל המספרים ה־p־אדיים.

ספירת הצגות של חבורות

חפירות במדבר

משפט. [du-Sautoy and Grunewald, '00] תהא G חבורה נילפוטנטית נוצרת סופית ואינסופית. יהא

$$\alpha(G) = \inf\{s_0 \in \mathbb{R} \mid \text{בתחום } \Re(s) > s_0 \text{ מתכנס } \zeta_G(s)\}.$$

ספירת הצגות של חבורות

חפירות במדבר

משפט. [du-Sautoy and Grunewald, '00] תהא G חבורה נילפוטנטית נוצרת סופית ואינסופית. יהא

$$\alpha(G) = \inf\{s_0 \in \mathbb{R} \mid \zeta_G(s) \text{ מתכנס בתחום } \Re(s) > s_0\}.$$

- $\alpha(G) \in \mathbb{Q}$.
- קיים $\delta > 0$ כך שלפונקציה $\zeta_G(s)$ **המשכה מרומורפית** לתחום $\{s \in \mathbb{C} \mid s > \alpha(G) - \delta\}$.
- בפרט, קיימים $b \in \mathbb{N}$ ו־$c \in \mathbb{R}_{>0}$ כך ש

$$\sum_{n=1}^{N} a_n(G) \sim c \cdot N^{\alpha(G)} \cdot (\log N)^b.$$

סיכום קצר

סיכום קצר

- תכונות של חבורות נילפוטנטיות $\leftsquigarrow$ פירוק אוילר של $\zeta_G(s)$.

סיכום קצר

- תכונות של חבורות נילפוטנטיות $\leftrightsquigarrow$ פירוק אוילר של $\zeta_G(s)$.
- פורמליזם p־ אדי $\leftrightsquigarrow$ הצגה של הפונקציות המקומיות $\zeta_{G,p}(s)$ כפונקציות רציונליות $\leftrightsquigarrow$ רקורסיביות (!). [GSS]

סיכום קצר

- תכונות של חבורות נילפוטנטיות $\rightsquigarrow$ פירוק אוילר של $\zeta_G(s)$.
- פורמליזם p־ אדי $\rightsquigarrow$ הצגה של הפונקציות המקומיות $\zeta_{G,p}(s)$ כפונקציות רציונליות $\rightsquigarrow$ רקורסיביות (!). [GSS]
- Global to Local (there and back again) $\rightsquigarrow$ אינפורמציה לגבי $\zeta_G(s)$. [dSG]

סיכום קצר

- תכונות של חבורות נילפוטנטיות $\leadsto$ פירוק אוילר של $\zeta_G(s)$.
- פורמליזם p־ אדי $\leadsto$ הצגה של הפונקציות המקומיות $\zeta_{G,p}(s)$ כפונקציות רציונליות $\leadsto$ רקורסיביות (!). [GSS]
- Global to Local (there and back again) $\leadsto$ אינפורמציה לגבי $\zeta_G(s)$. [dSG]
- תכונות אנליטיות של $\zeta_G(s)$ $\leadsto$ הערכה מדוייקת של קצב גידול תתי־החבורות.

מה הלאה?

מה הלאה?

- שאלות לגבי אוניפורמיות של הפונקציות $W_p(t_1, t_2)$.

מה הלאה?

- שאלות לגבי אוניפורמיות של הפונקציות $W_p(t_1, t_2)$.
- המשכה אנליטית לכל המישור של $\zeta_G(s)$?

מה הלאה?

- שאלות לגבי אוניפורמיות של הפונקציות $W_p(t_1, t_2)$.
- המשכה אנליטית לכל המישור של $\zeta_G(s)$?
- משוואות פונקציונליות מקומיות? משוואה פונקציונלית גלובלית?

מה הלאה?

- שאלות לגבי אוניפורמיות של הפונקציות $W_p(t_1, t_2)$.
- המשכה אנליטית לכל המישור של $\zeta_G(s)$?
- משוואות פונקציונליות מקומיות? משוואה פונקציונלית גלובלית?
- Zen.

שאלות?

תודה!