# ספירת הצגות של חבורות

חפירות במדבר

שי שכטר

אוניברסיטת בן גוריון בנגב

16 ביולי 2017

## בואו נספור משהו!

חפירות במדבר

#### שאלה.

יהיו n שלמים חיוביים. כמה תתי־חבורות מאינדקס n קיימות יהיו בחבורה  $(\mathbb{Z}^d,+)$  בחבורה

חפירות במדבר

שאלה.

 $\mathbb{Z}^d$  ספירת תתי־חבורות של

יהיו תאינדקס אלמים תתי־חבורות מאינדקס חיוביים. כמה להיו יהיו שלמים חיוביים. כמה בחבורה  $(\mathbb{Z}^d,+)$  בחבורה

נסמן ב־ $a_n(\mathbb{Z}^d)$  את מספר תתי־החבורות של  $\mathbb{Z}^d$  מאינדקס את מספר מספר תתי־החבורות של מוגדרת להיות  $\mathbb{Z}^d$ 

$$.\zeta_{\mathbb{Z}^d}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\mathbb{Z}^d) n^{-s} = \sum_{A \le t_1 \mathbb{Z}^d} \left| \mathbb{Z}^d : A \right|^{-s}$$

לדוגמה, אם d=1 אז  $a_n(\mathbb{Z}^d)=1$  לכל

$$\zeta_{\mathbb{Z}}(s) = \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

ספירת הצגות של חבורות

היא פונקציית זיטא של רימן.

לכל  $a_n(\mathbb{Z}^d)=1$  אז d=1 לכל לדוגמה, אם לדוגמה

$$\zeta_{\mathbb{Z}}(s) = \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

היא פונקציית זיטא של רימן.

### משפט.

$$\zeta_{\mathbb{Z}^d}(s) = \zeta(s) \cdot \zeta(s-1) \cdots \zeta(s-d+1)$$

. כאשר זיטא איטא פונקציית היא פונקציית 
$$\zeta(s)=\zeta_{\mathbb{Z}}(s)=\sum_{s=1}^{\infty}n^{-s}$$
 כאשר

	ספירת הצגות של חבורות	דוגמה
שי שכטר 26 שקופית 4 מתוך	חפירות במדבר	$\mathbb{Z}^d$ ספירת תתי־חבורות של

d אינדוקציה על אינדוקציה על

הוכחה ראשונה. אינדוקציה על d=1 המקרה d=1 כבר ידוע לנו.

### **טענת עזר.** קיימת העתקה **על**

 $\Phi: \{\mathbb{Z}^d$  אתי־חבורות של  $\{\mathbb{Z}^d \times \{\mathbb{Z}^{d-1}\}$  אתי־חבורות של אורים של  $\{\mathbb{Z}^d \times \{\mathbb{Z}^{d-1}\}\}$ 

המקיימת כי  $X : \mathbb{Z} : X = \#\Phi^{-1}(X,Y) = |\mathbb{Z}:X|^{d-1}$  אם X ו־ סופי.

אז  $A=\Phi(X,Y)$ בנוסף, אם  $A<\mathbb{Z}^d$  מאינדקס סופי

$$|\mathbb{Z}^d : A| = |\mathbb{Z} : X| \cdot |\mathbb{Z}^{d-1} : Y|$$

שי שכטר

שקופית 5 מתוך 26

### $\Phi$ הגדרת הפונקציה

- (למשל־ הבסיס הסטנדרטי), בסיס של  $e_1,\ldots,e_d$  .1
  - , $Z_1=\mathbb{Z} e_1\simeq \mathbb{Z}$  .2
  - $Z_2 = \mathbb{Z}e_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}e_d \simeq \mathbb{Z}^{d-1}$  3

## הגדרת הפונקציה $\Phi$ .

- (למשל־ הבסיס הסטנדרטי), בסיס של  $e_1,\dots,e_d$  .1
  - , $Z_1=\mathbb{Z} e_1\simeq \mathbb{Z}$  .2
  - $Z_2 = \mathbb{Z}e_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}e_d \simeq \mathbb{Z}^{d-1}$  3

"הפונקציה  $\Phi$  מוגדרת ע"י "חיתוך ומריחה  $\Phi$ 

$$.\Phi(A) = (A \cap Z_1, (A + Z_1) \cap Z_2)$$

ספירת הצגות של חבורות של חבורות ספירת תתי חבורות של  $\mathbb{Z}^d$ 

(0,0)

שי שכטר

שקופית 6 מתוך 26





שי שכטר

שקופית 6 מתוך 26

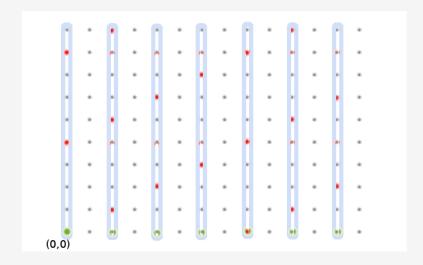
אות של חבורות של הפרת הצגות של חבורות פפירת תתי חבורות של  $\mathbb{Z}^d$ 

שי שכטר שקופית 6 מתוך 26



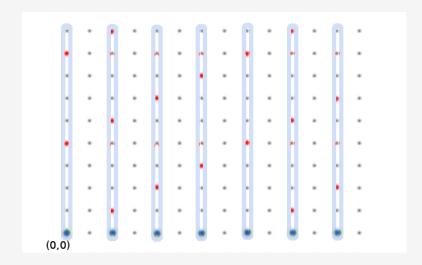
**ספירת הצגות של חבורות** של חבורות מספירת חתי חרובות של <sup>7</sup>

ספירת תתי חבורות של  $\mathbb{Z}^d$  חפירות במדבר חפירות של מתוך 26



ספירת הצגות של חבורות

דוגמה שי שכטר  $\mathbb{Z}^d$  ספירת תתי חבורות של חפירות במדבר שקופית 6 מתוך 26



מקבלים

$$\begin{split} \zeta_{\mathbb{Z}^d}(s) &= \sum_{A \leq_{\mathrm{fi}} \mathbb{Z}^d} \left| \mathbb{Z}^d : A \right|^{-s} \\ &= \sum_{A \leq_{\mathrm{fi}} \mathbb{Z}^d} \left| Z_1 : A \cap Z_1 \right|^{-s} \cdot \left| Z_2 : (A + Z_1) \cap Z_2 \right|^{-s} \\ &= \sum_{X \leq_{\mathrm{fi}} Z_1} \sum_{Y \leq_{\mathrm{fi}} Z_2} \left| \Phi^{-1}(X, Y) \right| \left| Z_1 : X \right|^{-s} \cdot \left| Z_2 : Y \right|^{-s} \\ &= \sum_{X \leq_{\mathrm{fi}} Z_1} \left| Z_1 : X \right|^{-s + d - 1} \cdot \sum_{Y \leq_{\mathrm{fi}} Z_2} \left| Z_2 : Y \right|^{-s} \\ &= \zeta_{\mathbb{Z}}(s - d + 1) \zeta_{\mathbb{Z}^{d - 1}}(s) \end{split}$$

והמשפט נובע.

د	חהיוור ויבמוור פל וודוווו	<u>דוגמה</u>
,	חפירות במדבר	$\mathbb{Z}^d$ ספירת תתי־חבורות של

חמוכת בעות ועל חבוכת

שי שכטר שקופית 8 מתוך 26

 $\varepsilon$  + אלגברה לינארית אלגברה

שי שכטר

 $\varepsilon$  + אלגברה לינארית

 $H < \mathbb{Z}^d$  מאינדקס סופי  $H < \mathbb{Z}^d$ 

כלומר, תת־חבורה מאינדקס סופי ב־ $\mathbb{Z}^d$  נקבעת ע"י בחירת קבוצה בלתי תלוייה לינארית  $\mathbb{Z}^{d}$ בגודל d ב־ שי שכטר

 $\varepsilon$  + אלגברה לינארית

 $H<\mathbb{Z}^d$  מאינדקס סופי  $H<\mathbb{Z}^d$ 

כלומר, תת־חבורה מאינדקס סופי ב־ $\mathbb{Z}^d$  נקבעת ע"י בחירת קבוצה בלתי תלוייה לינארית  $\mathbb{Z}^{d}$ בגודל d ב-

נגדיר,  $\mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z}) = \mathbf{M}_d(\mathbb{Z}) \cap \mathbf{GL}_d(\mathbb{Q})$ , קיבלנו התאמה על

 $\mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z}) o \{\mathbb{Z}^d$  תתי־חבורות מאינדקס סופי של  $x \mapsto \text{Row} - \text{Span}_{\mathbb{Z}}(x)$ 

## ספירת הצגות של חבורות

שי שכטר שקופית 9 מתוך 26

ספירת תתי־חבורות של  $\mathbb{Z}^d$  ספירת תתי־חבורות של



למשל. א
$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$
 וגם ע"י המטריצה ( $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ , למשל. מיוצגת ע"י המטריצה החבורה

			<u>דוגמה</u>
$\mathbb{Z}^d$	של	תתי־חבורות	ספירת

חפירות במדבר

שי שכטר שקופית 10 מתוך 26

 $\pm 1$  המורכבת ממטריצות עם כניסות הפיכות ממטריצות המורכבת המורכבת, החבורה , $\mathbf{GL}_d(\mathbb{Z})$  החבורה ע"ז כפל שמאל. ע"ז כפל משמאל.

ספירת הצגות של חבורות

שי שכטר

 $\pm 1$  החבורה ( $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$  המורכבת ממטריצות הפיכות עם כניסות שלמות עם דטרמיננטה . פועלת על הקבוצה  $\mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})$  משמאל פועלת על הקבוצה

 $x \in \mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})$ ו  $g \in \mathbf{GL}_d(\mathbb{Z})$  .1

 $\operatorname{Row} - \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}(gx) = \operatorname{Row} - \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}(x)$ 

שי שכטר

 $\pm 1$  החבורה ,GL המורכבת ממטריצות הפיכות עם כניסות המות המורכבת המורכבת המורכבת החבורה ,GL ע"י כפל שמאל. א"י כפל משמאל.

 $x \in \mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})$ ו־ $g \in \mathbf{GL}_d(\mathbb{Z})$  .1

 $.\text{Row} - \text{Span}_{\mathbb{Z}}(gx) = \text{Row} - \text{Span}_{\mathbb{Z}}(x)$ 

יש את אותו מרחב שורות מעל  $\mathbb{Z}$  אז יש אז  $x_1,x_2\in \mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})$  .2 מטריצה  $gx_1=x_2$  כך ש־ $g\in \mathbf{GL}_d(\mathbb{Z})$ 

 $\mathbb{L}^{1}$ רוובורר  $\mathfrak{GL}_d(\mathbb{Z})$ רומות עם היננטר אוני רופיכות עם הקבוצה  $\mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})$  ע"י כפל משמאל.

$$x \in \mathbf{M}^*_d(\mathbb{Z})$$
 1. לכל

$$\operatorname{Row} - \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}(gx) = \operatorname{Row} - \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}(x)$$

- על  $\mathbb Z$  אז יש את אותו מרחב אורות מעל  $x_1,x_2\in \mathbf M_d^*(\mathbb Z)$  אז יש ג לכיוון השני, אם לד $g_1=x_2$  כך ש־ $g\in \mathbf{GL}_d(\mathbb Z)$ 
  - מטריצה אחידה קיימת  $x \in \mathbf{M}^*_d(\mathbb{Z})$  מטריצה לכל 3.

$$0,1 \leq i < j \leq n$$
 לכל  $0 \leq a_{i,j} < a_{j,j}$  עם  $\left( egin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,d} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,d} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{d,d} \end{matrix} 
ight)$ 

.לי המטריצה הע"ל. עד פד פד  $g\in\mathbf{GL}_d(\mathbb{Z})$ ו־

ספירת הצגות של חבורות	דוגמה
חפירות במדבר	$\mathbb{Z}^d$ ספירת תתי־חבורות של

ות במדבר

שי שכטר

שקופית 11 מתוך 26

במקרה בו עליונה משולשית משולשית  $x\in\mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})$  במקרה בו

 $|\mathbb{Z}^d : \operatorname{Row} - \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}(x)| = |\det(x)|$ 

# דוגמה ספירת הצגות של חבורות של חבורות ספירת תתי־חבורות של $\mathbb{Z}^d$

שי שכטר שקופית 11 מתוך 26  $x\in \mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})$  במקרה בו  $x\in \mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})$  היא משולשית עליונה קל לוודא כי

$$|\mathbb{Z}^d : \operatorname{Row} - \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}(x)| = |\det(x)|$$

מקבלים כי

$$\zeta_{\mathbb{Z}^d}(s) = \sum_{H \leq_{\mathrm{fi}} \mathbb{Z}^d} |\mathbb{Z}^d : H|^{-s}$$

$$= \sum_{[x] \in \mathbf{GL}_d(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})} |\mathbb{Z}^d : \mathrm{Row} - \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(x)|^{-s}$$

$$= \sum_{[x] \in \mathbf{GL}_d(\mathbb{Z}) \backslash \mathbf{M}_d^*(\mathbb{Z})} |\det(x)|^{-s}$$

$$= \sum_{a_{1,1}=1}^{\infty} \sum_{a_{2,2}=1}^{\infty} \dots \sum_{a_{d,d}=1}^{\infty} \underbrace{a_{2,2} \cdot a_{3,3}^2 \cdots a_{d,d}^{d-1}}_{\star} \cdot a_{1,1}^{-s} \cdot a_{2,2}^{-s} \cdot \dots \cdot a_{d,d}^{-s}$$

$$= \zeta(s) \cdot \zeta(s-1) \cdots \zeta(s-d+1)$$

# מה למדנו?

שי שכטר

שקופית 12 מתוך 26

## מה למדנו?

d=2 ניתן לחלץ ניסחה מפורשת לערך . $a_n(\mathbb{Z}^d)$  למשל, ניתן לחלץ נוסחה מפורשת .1

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\mathbb{Z}^2) n^{-s} = \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot n^{-s}\right)}_{=\zeta(s)} \cdot \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n^{-s}\right)}_{=\zeta(s-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k|n} k\right) n^{-s}$$

. הקושי לחלץ ביטוי מפורש נהיה מהותי יותר כאשר d גדל.

## מה למדנו?

d=2 ניתן לחלץ נוסחה מפורשת לערך. למשל, עבור  $a_n(\mathbb{Z}^d)$  בהינתן,  $d\in\mathbb{N}$ 

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\mathbb{Z}^2) n^{-s} = \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot n^{-s}\right)}_{=\zeta(s)} \cdot \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n^{-s}\right)}_{=\zeta(s-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k|n} k\right) n^{-s}$$

הקושי לחלץ ביטוי מפורש נהיה מהותי יותר כאשר d גדל.

ובעלת  $\{s\in\mathbb{C}\mid\Re(s)>d\}$  ובעלת על חצי המישור היא הולומורפית היא הולומורפית ובעלת  $\epsilon > 0$  קוטב בנקודה  $s_0 = d$  בפרט, מתקיים כי

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m(\mathbb{Z}^d) = O(N^{d+\epsilon})$$

 $(\sum_{m=1}^N a_m)$  ממעשה, במקרה זה ניתן להגיד אפילו יותר על קצב הגידול של הסדרה

משפט. לכל  $d\in\mathbb{N}$  קיים קבוע משפט.

$$\sum_{n=1}^{N} a_n(\mathbb{Z}^d) \sim c_d \cdot N^d$$

 $\frac{f(N)}{g(N)} \xrightarrow{N \to \infty} 1$  פירושו  $f(N) \sim g(N)$  כאשר הסימון

$$\sum_{n=1}^N a_n(\mathbb{Z}^2) \sim rac{\pi^2}{12} N^2$$
 למשל, עבור  $d=2$  מתקיים כי

חפירות במדבר

# בואו נדבר על חבורות!

ספירת הצגות של חבורות	ספירת תתי־חבורות
חפירות במדבר	ניסוח כללי

ננסה להכליל את מה שהוכחנו בסעיף הקודם לחבורות כלליות.

שי שכטר

שקופית 15 מתוך 26

תהא של למקרה למקרה למקרה באופן  $a_n(G)$  הסדרה את להגיד להגיד להגיד מחבורה. נרצה להגיד את הסדרה למקרה של מחבורה. שאלות שעלינו לשאול את עצמנו לפני כן.

ניסוח כללי

ננסה להכליל את מה שהוכחנו בסעיף הקודם לחבורות כלליות.

תהא C חבורה. נרצה להגיד את הסדרה  $a_n(G)$  באופן דומה למקרה של C יש כמה שאלות שעלינו לשאול את עצמנו לפני כן.

n מאינדקס סופי הוא סופי לכל G מאינדקס חופי הוא סופי לכל n

ננסה להכליל את מה שהוכחנו בסעיף הקודם לחבורות כלליות.

ספירת תתייחבורות

תהא G חבורה. נרצה להגיד את הסדרה  $a_n(G)$  באופן דומה למקרה של שאלות שעלינו לשאול את עצמנו לפני כו.

n מאינדקס סופי הוא סופי לכל G מאינדקס חופי הוא סופי לכל n

 $a_n(G)$ . נניח כי  $a_n(G)$ , מספר תתי־החבורות של G מאינדקס סופי, הוא סופי לכל .2  ${}_{n-1}^\infty$  מתכנסת באיזשהו ב־ $\sum_{n=1}^\infty a_n(G)n^{-s}$  באילו תנאים באילו

ננסה להכליל את מה שהוכחנו בסעיף הקודם לחבורות כלליות.

תהא G חבורה. נרצה להגיד את הסדרה  $a_n(G)$  באופן דומה למקרה של  $\mathbb{Z}^d$ . יש כמה שאלות שעלינו לשאול את עצמנו לפני כו.

- n מאינדקס סופי הוא סופי לכל G מאינדקס חופי הוא סופי לכל n
- $a_n(G)$ . נניח כי  $a_n(G)$ , מספר תתי־החבורות של G מאינדקס סופי, הוא סופי לכל .2  $\mathbb{C}$ ב תחום באיזשהו מתכנסת באיזשהו  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(G) n^{-s}$  באילו תנאים באילו
- . למה בעצם להתמקד דוקא בסדרה  $a_n(G)$ י האם יכול להיות שהכללה יותר טבעית $a_n(G)$ של G אולי של תתי־חבורות נורמליות אפשריות הכללות אפשריות היא, למשל תתי־חבורות  $a_n(\mathbb{Z}^d)$ אחרות?

ננסה להכליל את מה שהוכחנו בסעיף הקודם לחבורות כלליות.

תהא חבורה. נרצה להגיד את הסדרה  $a_n(G)$  באופן הסדרה של הגיד את חבורה. נרצה להגיד את שלינו לפני כן.

- n מאינדקס סופי הוא סופי לכל G מאינדקס חופי לכל מספר תתי־החבורות של
  - מתקיים עבור חבורות נוצרות סופית. 🗠
- $n\in\mathbb{N}$  מספר תתי־החבורות של G מאינדקס סופי, הוא סופי לכל, מספר תתי־החבורות בי $\mathbb{C}$  מתכנסת באיזשהו מתכנסת ב $\sum_{n=1}^\infty a_n(G)n^{-s}$
- . למה בעצם להתמקד דוקא בסדרה  $!a_n(G)$  האם יכול להיות שהכללה יותר טבעית של  $!a_n(G)$  היא, למשל תתי־חבורות נורמליות של !G אולי יש הכללות אפשריות מחרות:

ננסה להכליל את מה שהוכחנו בסעיף הקודם לחבורות כלליות.

תהא חבורה. נרצה להגיד את הסדרה  $a_n(G)$  באופן הסדרה של הגיד את חבורה. עצמנו לפני כן. שאלות שעלינו לשאול את עצמנו לפני כן.

- n מספר תתי־החבורות של G מאינדקס סופי הוא סופי לכל n
  - א מתקיים עבור חבורות נוצרות סופית. ↔
- $n\in\mathbb{N}$  מספר תתי־החבורות של G מאינדקס סופי, הוא סופי לכל , $a_n(G)$  .2 נניח כי  $\mathbb{C}^\infty$  מחכנסת באיזשהו מתכנסת ב $\sum_{n=1}^\infty a_n(G)n^{-s}$ 
  - . תבורות פתירות, וחברה , $a_n(G)$  הסדרה של פולינומיאלי פתירות  $\leadsto$
- יותר טבעית יותר אם יכול להיות אהכללה יותר טבעית יותר אפשריות למה בעצם להתמקד דוקא בסדרה יותר  $a_n(\mathbb{Z}^d)$  של  $a_n(\mathbb{Z}^d)$  היא, למשל תתי־חבורות נורמליות של  $a_n(\mathbb{Z}^d)$  אחרות:

#### חפירות במדבר

ננסה להכליל את מה שהוכחנו בסעיף הקודם לחבורות כלליות.

תהא תבורה. נרצה להגיד את הסדרה  $a_n(G)$ החדרה את להגיד של חבורה. ערכה תהא חבורה. נרצה לפני לפני מאלינו שאלינו שאלינו את עצמנו לפני כן.

- n מאינדקס סופי הוא סופי לכל G מאינדקס חופי לכל .1
  - א מתקיים עבור חבורות נוצרות סופית. ↔
- $n\in\mathbb{N}$  מספר תתי־החבורות של G מאינדקס סופי, הוא סופי לכל , גניח כי גניח כי , מספר תתי־החבורות של .2  $\sum_{n=1}^\infty a_n(G)n^{-s}$  מתכנסת באיזשהו תחום ב־ $\sum_{n=1}^\infty a_n(G)$ 
  - . תבורות פתירות,  $a_n(G)$  הסדרה של פולינומיאלי פולינומיאלי של הסדרה הסדרה אידול פולינומיאלי
- מה בעצם התמקד דוקא בסדרה  $a_n(G)$  האם יכול להיות שהכללה יותר טבעית .3 של היא, למשל תתי־חבורות נורמליות של G אולי יש הכללות אפשריות מחרות:

$$\zeta_G^{\triangleleft}(s),\ \zeta_G^i(s),\ \hat{\zeta_G}(s) \hookleftarrow$$

תתי־חבורות	ספירת
$\tau$	חרורות

## **ספירת הצגות של חבורות** חפירות במדבר

שקופית 16 מתוך 26

שי שכטר

לצורך נוחיות, בהמשך החלק הזה נצטמצם למשפחה קטנה יותר של חבורות־

חבורות נוצרות סופית ונילפוטנטיות.

 $\mathcal{T}$  חבורות אלו נקראות לעתים חבורות

לצורך נוחיות, בהמשך החלק הזה נצטמצם למשפחה קטנה יותר של חבורות־

חבורות נוצרות סופית ונילפוטנטיות.

 $\mathcal{T}$  חבורות אלו נקראות לעתים חבורות דוגמה חשובה לחבורה שכזו היא **חבורת הייזנברג** 

$$, \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

 $\langle x,y,z \mid [x,y]=z, [z,x]=[z,y]=1 \rangle$  הנתונה גם ע"י ההצגה

שי שכטר

לצורך נוחיות, בהמשך החלק הזה נצטמצם למשפחה קטנה יותר של חבורות־

חבורות נוצרות סופית ונילפוטנטיות.

 $\mathcal{T}$  חבורות אלו נקראות לעתים **חבורות** 

דוגמה חשובה לחבורה שכזו היא **חבורת הייזנברג** 

$$, \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

 $(x,y,z \mid [x,y]=z, [z,x]=[z,y]=1)$  הנתונה גם ע"י ההצגה

$$.\zeta_G(s) = \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(2s-2)\zeta(2s-3)}{\zeta(3s-3)}$$

תכונה מאוד חשובה של פונקציית רימן, שנורשת באופן מיידי לפונקציה היא הפירוק תכונה מאוד שלה שלה למכפלת אוילר.

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ ראשוני}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

תכונה מאוד חשובה של פונקציית רימן, שנורשת באופן מיידי לפונקציה  $\zeta_{\mathbb{Z}^d}(s)$ , היא הפירוק שלה ל**מכפלת אוילר**.

$$\zeta(s) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

בפרט, נובע ש

$$\zeta_{\mathbb{Z}^d}(s) = \prod_{p} \zeta_{\mathbb{Z}^d,p}(s), \quad \zeta_{\mathbb{Z}^d,p}(s) = \frac{1}{(1-p^{-s})\cdot (1-p^{-s+1})\cdots (1-p^{-s+d-1})}$$

p אטוני מתקבלת מהטור  $\sum_{k=0}^{\infty}a_{p^k}(\mathbb{Z}^d)p^{-ks}$ , לכל ראשוני  $\zeta_{\mathbb{Z}^d,p}(s)$ 

משפט. [Grunewald, Segal, Smith, '88] משפט. [Grunewald, Segal, Smith, '88] תהא תהא חבורה נילפוטנטית נוצרת סופית, ונסמן בי $a_n(G)$  את מספר תתי־החבורות של G מאינדקס n לכל n לכל n מאינדקס n לכל n פונקציית האיטא הסופרת תתי־חבורות של  $\zeta_G(s)=\sum_{n=1}^\infty a_n(G)n^{-s}$ 

 $\zeta_{G,p}(s) = \zeta_{G,p}(s)$  כאשר כאשר,  $\zeta_{G}(s) = \prod_{p \in G,p} \zeta_{G,p}(s)$  בירוק אוילר. 1

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{p^k}(G) p^{-ks}$$

2. רציונליות. יתר על כן, לכל ראשוני p קיימת פונקציה רציונלית.  $\zeta_{G,p}(s)=W_p(p,p^{-s})$  כך ש־ $W_p(t_1,t_2)\in\mathbb{Q}(t_1,t_2)$ 

שי שכטר

שקופית 19 מתוך 26

פירוק אוילר עבור חבורות סופיות נובע מהמשפט הבא.

משפט. תהא G חבורה נילפוטנטית סופית. אז

$$G \simeq \prod_p G_p$$
ראשוני

G של היחידה של היסילוב היחידה של  $G_p$  היא תכלל האשוני

שי שכטר 26 מתוך 19 מתוך 10 מתוך 10 מתוך 10 מתוך 10 מתוך 10 מתוך 10 מתוך

פירוק אוילר עבור חבורות סופיות נובע מהמשפט הבא.

משפט. תהא G חבורה נילפוטנטית סופית. אז

$$G\simeq\prod_{p}G_{p}$$
ראשוני

G איא היא תרחבורת  $G_p$  היא של היחידה של כאשר לכל ראשוני

כדי להרחיב את המשפט לחבורות אינסופיות יש צורך לבצע השלמות טופולוגיות.

- $G \longleftrightarrow G$  ההשלמה הפרו־סופית של  $G \longleftrightarrow \widehat{G}$
- G של p־סילוב של  $\widehat{G}$  של של הפרו־p חבורת  $\Phi$

מתקיים

$$.\zeta_G(s) = \zeta_{\widehat{G}}(s) \quad , \quad \zeta_{G,p}(s) = \zeta_{\widehat{G}_p}(s)$$

שי שכטר שקופית 20 מתוך 26

אדית.  $\phi$  מתבצע ע"י שימוש בכלים מאינטגרציה ב $\chi_{G,p}(s)$  מתבצע שימוש - החישוב של הפונקציות

לדוגמה

מתבצע ע"י שימוש בכלים מאינטגרציה  $\gamma$ ־אדית.  $\zeta_{G,p}(s)$  החישוב של הפונקציות -

$$.\zeta_{\mathbb{Z}^d,p}(s) = 1 + (1-p^{-s})^{-1} \cdot \int_{X(\mathbb{Z}_p^d)} \left| \det(\mathbf{x}) \right|^{-s} d\mu(\mathbf{x}),$$

$$X(\mathbb{Z}_p^d) = \mathbf{M}_d(\mathbb{Z}_p) \setminus p\mathbf{M}_d(\mathbb{Z}_p)$$
 כאשר

החישוב של הפונקציות  $\zeta_{G,p}(s)$  מתבצע ע"י שימוש בכלים מאינטגרציה  $\bullet$  לדוגמה

$$.\zeta_{\mathbb{Z}^d,p}(s) = 1 + (1-p^{-s})^{-1} \cdot \int_{X(\mathbb{Z}_p^d)} |\det(\mathbf{x})|^{-s} d\mu(\mathbf{x}),$$

$$X(\mathbb{Z}_p^d) = \mathbf{M}_d(\mathbb{Z}_p) \setminus p\mathbf{M}_d(\mathbb{Z}_p)$$
 כאשר

נובע ל $\zeta_{G,p}(s)=W_p(p,p^{-s})$  כך ש־ $W_p(t_1,t_2)$  נובע פונקציה הרציונליות של אינטגרלים Denef and Macintyre ממשפט של אינטגרלים המספרים ה-p-אדיים.

תהא G תבורה (du-Sautoy and Grunewald, '00) משפט. נילפוטנטית נוצרת סופית ואינסופית. יהא

$$lpha(G) = \inf\{s_0 \in \mathbb{R} \mid \Re(s) > s_0$$
 מתכנס בתחום  $\zeta_G(s)\}$ 

שי שכטר שקופית 21 מתוך 26 חפירות במדבר

משפט. [du-Sautoy and Grunewald, '00] תהא חבורה G חבורה נילפוטנטית נוצרת סופית ואינסופית. יהא

$$\alpha(G) = \inf\{s_0 \in \mathbb{R} \mid \Re(s) > s_0$$
 מתכנס בתחום  $\zeta_G(s)\}$ 

- $.\alpha(G) \in \mathbb{Q} \bullet$
- $\{s\in$  קיים  $\delta>0$  כך שלפונקציה  $\zeta_G(s)$  המשכה מרומורפית לתחום  $\mathbb{C}\mid s>lpha(G)-\delta\}$ 
  - כך ש $c \in \mathbb{R}_{>0}$  ו־ $c \in \mathbb{R}_{>0}$  כך ש

$$.\sum_{n=1}^{N} a_n(G) \sim c \cdot N^{\alpha(G)} \cdot (\log N)^b$$

שי שכטר שקופית 22 מתוך 26

סיכום קצר

 $\zeta_G(s)$  של אוילר פירוק פירוק נילפוטנטיות ילפוטנטיות סבורות של חבורות פירוק פירוק של

שי שכטר

שקופית 22 מתוך 26

- $\zeta_G(s)$  אוילר של פירוק פירוק הכונות על חבורות נילפוטנטיות פירוק אוילר  $\bullet$
- ביונליות רציונליות בפונקציות המקומיות  $\zeta_{G,p}(s)$  בפונקציות הצגה של הפונקציות המקומיות  $\phi$ [GSS] רקורסיביות (י).  $\leftarrow$

- $\zeta_G(s)$  של אוילר איילר בירוק פירוק הכונות נילפוטנטיות יילפוטנטיות סכונות של חבורות הכונות של
- ביונליות רציונליות המקומיות הצגה של הצגה אדי אדי די ביונליות המקומיות אדי אדי די דיונליות פורמליזם אדי אדי די דיונליות הפונקציות הצורסיביות אדי ביונליות הפונקציות הפונקציות הפונקציות רציונליות פורמליזם ביונליות הציונליות הפונקציות רציונליות המקומיות הפונקציות הציונליות הפונקציות הפונ
  - $\zeta_G(s)$  אינפורמציה לגבי Global to Local (there and back again) Global to Local (there and back again)

- $\zeta_G(s)$  של אוילר איילר בירוק פירוק הכונות נילפוטנטיות יילפוטנטיות סכונות של חבורות הכונות של
- פורמליזם qאדי אדי הצגה של הפונקציות המקומיות אדי דע ביונליות פורמליזם אדי אדי פורמליזם אדי הפונקציות הפונקציות המקומיות (י). [GSS]  $\hookleftarrow$ 
  - $\zeta_G(s)$  אינפורמציה לגבי Global to Local (there and back again) [dSG]
  - תרכה מדוייקת של תעיבהחבורות. הערכה הערכה אנליטיות הל $\zeta_G(s)$  הערכה הערכה תכונות אנליטיות של

# **ספירת הצגות של חבורות** חפירות במדבר

ספירת תתי־חבורות שאלות המשך

שי שכטר שקופית 23 מתוך 26

### מה הלאה?

 $W_p(t_1,t_2)$  שאלות לגבי אוניפורמיות של הפונקציות •

- $W_p(t_1,t_2)$  שאלות לגבי אוניפורמיות של הפונקציות
  - $\zeta_G(s)$  אנליטית לכל המישור של •

שי שכטר

שקופית 23 מתוך 26

ספירת תתייחבורות שאלות המשך

- $W_p(t_1,t_2)$  שאלות לגבי אוניפורמיות של הפונקציות
  - $\zeta_G(s)$  המשכה אנליטית לכל המישור של •
- משוואות פונקציונליות מקומיות? משוואה פונקציונלית גלובלית?

שי שכטר שקופית 23 מתוך 26

חפירות במדבר

- $W_p(t_1,t_2)$  שאלות לגבי אוניפורמיות של הפונקציות
  - $\zeta_G(s)$  אנליטית לכל המישור של •
- משוואות פונקציונליות מקומיות! משוואה פונקציונלית גלובלית!
  - . $Zen \bullet$

שי שכטר  $26 \ \mbox{ann} \ 24 \ \mbox{while}$ 

### שאלות?

שי שכטר 26 מתוך 25 שקופית

ודה!