תרגיל 8- סדרות מונוטוניות וחסומות
חדו"א : סדרות וטורים

1

נתונה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ע"י כלל הנסיגה הבא

$$a_1 = \frac{3}{2}$$
$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2}, \quad n \geq 2 \text{ לכל}.$$

1. הוכיחו (באינדוקציה, או בכל דרך אחרת) כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $1 \leq a_n \leq 2$.
2. מצאו לאילו ערכי $x \in \mathbb{R}$ מתקיים אי השוויון

$$\sqrt{3x-2} - x \geq 0.$$

כלומר- מצאו את התחום בו אי־השוויון מתקיים, פתחו את אי־השוויון, והשתמשו בחקירת משוואות ריבועיות כדי לפתור את התרגיל.

3. השתמשו בסעיפים (1) ו־(2) על מנת להוכיח כי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מונוטונית עולה. רמז: חשבו את $a_{n+1} - a_n$ עבור $n \in \mathbb{N}$.
4. הוכיחו כי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומצאו את גבולה.

2

הראו כי הסדרה

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

היא חסומה מלעיל ומלרע ומונוטונית יורדת ועל כן מתכנסת. (*) האם תוכלו למצא את גבולה?

3

ניזכר כי בכיתה הוכחנו, ע"י שימוש באי־שוויון ברנולי, כי הסדרה $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ הינה מונוטונית עולה.
נגדיר

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

השתמשו בשיטות שהפעלנו על מנת להוכיח כי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מונוטונית עולה, כדי להוכיח כי $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מונוטונית יורדת. כלומר- עבור $n \in \mathbb{N}$ שרירותי, הוכיחו כי $\frac{b_n}{b_{n+1}} \geq 1$.
(*) השתמשו בתרגיל 2 על מנת לקבל הוכחה אלטרנטיבית לכך שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

4

הוכיחו את התכנסות הגבולות הבאים.

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$.
2. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.
3. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)$.

הדרכה־ הראו קודם כי לכל $n\geq 2$ מתקיים אי־השוויון $\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$ והשתמשו בעובדה זו כדי למצא חסם מלעיל לסדרה הנתונה.