תרגיל 9- המספר e, סדרות מתכנסות במובן הרחב
חדו"א : סדרות וטורים

1

נגדיר סדרה

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^n}.$$

1. הראו כי $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
2. הסיקו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי
$$1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{n+1}{n}.$$
רמז: השתמשו באי־השוויון לגבי הסדרות המתכנסות ל־e שהוכחנו בכיתה.
3. הסיקו כי הסדרה a_n מונוטונית עולה, ומקיימת $a_n \leq n \cdot e$ לכל $n \in \mathbb{N}$ (רמז: אינדוקציה).
4. השתמשו במסקנות הקודמות ובגבול $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ שהוכחנו בכיתה, על מנת להראות כי
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e\sqrt[n]{n!}}{n} = 1.$$

2

נתונה סדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו־$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שהסדרה $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$. האם בהכרח אחת מהסדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ או $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$? אם כן־ הוכיחו זאת, אחרת־ מצאו דוגמה הסותרת את הטענה.

האם הטענה נכונה אם נניח בנוסף כי $a_n, b_n \geq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$?

3

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$, וכך ש־$a_n \neq 0$ לכל n. הראו כי הסדרה $\left\{b_n = \frac{1}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־0.

האם הטענה ההפוכה גם נכונה? בדקו האם קיימת סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל־0 כך שהסדרה $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ איננה מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$. האם סדרה כזו קיימת אם נניח בנוסף כי $a_n > 0$ לכל n?

4

בדקו מי מהסדרות הבאות מונוטונית עולה/יורדת ומי מהן מתכנסת במובן הרחב ל־$\pm\infty$. במידה והסדרה אכן מתכנסת, הוכיחו זאת לפי הגדרת התכנסות במובן הרחב.

1. $a_n = n!$.

2. $a_n = (-n)^n$.
3. $a_n = \ln\left(\frac{1}{n}\right)$.
4. $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{2}\right) e^n$.

5 (* תרגיל זה אינו חובה להגשה)

בתרגיל זה מובאות סדרות שונות. בדקו מי מהן מונוטונית עולה/יורדת, מי מהן חסומה, מי מהן מתכנסת ומי מהן מתכנסת במובן הרחב. אין חובה להגיש תרגיל זה, והוא מיועד לתרגול שלכם לנושא הסדרות.

1. $a_n = \sqrt{n^2 - n} - n$
2. $a_n = \frac{1+x+x^2+\ldots+x^n}{1+y+y^2+\ldots+y^n}$ כאשר $0 < x < y < 1$.
3. $a_n = \sin(n) \cdot (0.999)^n$.
4. $a_n = n^{(-1)^n}$.
5. $a_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{2n}$.
6. $a_n = \frac{n!}{2^n}$.

6 * אי־שוויון הממוצעים

בתרגיל זה נוכיח את העובדה הבאה

משפט 1 יהא $m \in \mathbb{N}$ ויהיו $x_1, \ldots, x_m$ מספרים אי־שליליים. אז

$$\sqrt[m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_m} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_m}{m} .$$

1. הראו כי אי־שוויון הממוצעים נכון עבור $m = 2$.
2. הראו כי אם קיים $m \in \mathbb{N}$ עבורו אי־שווין הממוצעים נכון, אז אי־השוויון נכון גם עבור סדרות באורך $2m$. הסיקו כי אי־שוויון הממוצעים נכון לסדרות באורך 2^k, לכל $k \in \mathbb{N}$.
3. הוכיחו את אי־שוויון הממוצעים לכל $m \in \mathbb{N}$, תחת ההנחה הנוספת כי $x_i \leq 1$ לכל i, באופן הבא־
   (א) יהיו $m, n \in \mathbb{N}$ שרירותיים כך ש־$m \leq n$. בהינתן סדרה $x_1, \ldots, x_m$ באורך m, נרחיב את הסדרה לסדרה באורך n ע"י כך שנקבע
   $$x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 1.$$
   (ב) הראו כי $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_m \cdot x_{m+1} \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \sqrt[m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_m}$ (השתמשו כאן בהנחה הנוספת לגבי ערכי x_i).
   (ג) הראו כי $\frac{x_1+\ldots+x_m}{m} \leq \frac{x_1+\ldots+x_m+x_{m+1}+\ldots+x_n}{n}$.
   (ד) הסיקו את אי־שוויון הממוצעים במקרה הנדון בו $0 \leq x_i \leq 1$ לכל i. רמז: השתמשו במסקנות מהסעיפים הקודמים עבור $n = 2^k$, לאיזשהו $k \in \mathbb{N}$ מתאים.

4. בהינתן $m \in \mathbb{N}$ וסדרת מספרים אי־שליליים $x_1, \ldots, x_m$, נבחר מספר $M > 0$ כך ש־$\max\{x_1, \ldots, x_m\} \leq M$, ונסמן $y_i = \frac{x_i}{M}$ לכל $i = 1, \ldots, m$. הראו כי

$$\frac{x_1 + \ldots x_m}{m} = M\frac{y_1 + \ldots + y_m}{m} \qquad \text{ו־} \qquad \sqrt[m]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_m} = M\sqrt[m]{y_1 \cdot \ldots \cdot y_m}\,.$$

5. הסיקו את אי־שוויון הממוצעים בגירסתו הכללית.