

רשימת משפטים והגדרות למבחן

משפטים

משפט 1 (נוסחת סכום סדרה חשבונית) תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חשבונית בעלת הפרש d . אזי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$a_1 + \dots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = n \cdot \left(a_1 + \frac{d}{2}(n-1) \right)$$

משפט 2 (נוסחת סכום סדרה הנדסית) תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה הנדסית בעלת יחס $q \neq 1$. אזי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$a_1 + \dots + a_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

משפט 3 (משפט חשבון גבולות) יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות עם $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $T = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ אזי

1. הסדרה $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $L + T$,

2. הסדרה $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $L \cdot T$,

3. אם $T \neq 0$ אז הסדרה $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $\frac{L}{T}$.

משפט 4 (כלל הסנדביץ') יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

נניח בנוסף כי הסדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות לגבול משותף L (כלומר $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$). אזי גם הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול L .

משפט 5 (התכנסות סדרות מונוטוניות וחסומות) תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית וחסומה. אזי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת.

משפט 6 (מבחן ההשוואה לטורים חיוביים) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \leq b_n$. נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס.

הגדרות

1. סדרה חשבונית
2. סדרה הנדסית
3. גבול של סדרה
4. סדרה חסומה
5. חסם מלעיל/מלרע של קבוצה
6. סופרמום/אינפימום של קבוצה
7. סדרה מונוטונית
8. סדרה מתכנסת במובן הרחב
9. סכום חלקי של טור מספרים
10. טור מתכנס