

חדו"א וטורים

התכנית להרחבת הסמכה ל-5 יחידות מתמטיקה

מבחן מועד א'

3 בינואר 2017

הוראות למבחן-

1. חלק א'- השאלות 1 ו-2 הן חובה, ומשקלן הכולל הוא 60 נקודות.
2. חלק ב'- עליכם לבחור אחת מבין השאלות 3 ו-4, משקלן הוא 25 נקודות.
3. חלק ג'- עליכם לבחור לענות על אחת מבין השאלות 5 ו-6, ומשקלן הוא 25 נקודות.
4. חלק ד'- שאלת אתגר, שמשקלה 25 נקודות.
5. סמנו בטבלה למטה את השאלות שבחרתם. שאלות שלא יסומנו לא ייבדקו.
6. אורך המבחן שעתיים.
7. חומר עזר- השימוש במחשבון מותר.
מצורף דף נוסחאות לטופס.

בהצלחה!

שאלה	בחירה
4	
5	
6	
7	

חלק א

שאלה 1

(30 נק.) הוכיחו את המשפט הבא-

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות עם $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ו- $T = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. אזי הסדרה $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $L \cdot T$.

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

שאלה 2

הגדירו במדויק את המונחים הבאים.

1. (15 נק') סדרה חסומה. _____

2. (15 נק') סדרה מתכנסת במובן הרחב. _____

חלק ב

שאלה 3

(25 נק')

1. הראו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים אי השוויון $4 \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \leq 4 \cdot \sqrt[n]{2}$.

2. חשבו $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$.

שאלה 4

(25 נק') נתונה הסדרה ההנדסית $4, 3.6, 3.24, \dots$. מצאו ערך $n \in \mathbb{N}$ מינימלי כך שהסכום החלקי $S_n = a_1 + \dots + a_n$ יהיה גדול מ-36. הראו כי לא קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו סכום זה גדול מ-40.

חלק ג

שאלה 5

(25 נק') הוכיחו כי הסדרה

$$a_n = \frac{n^3}{2n^2 + 1}$$

מתכנסת במובן הרחב ל- $+\infty$.

שאלה 6

(25 נק') חשבו את הגבול הבא

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{2n^2 - n} - \frac{n^2}{2n + 3} \right)$$

חלק ד

(25 נק') השתמשו באי השוויון $(1 + \frac{1}{n})^n < e$ לכל $n \in \mathbb{N}$ כדי להראות כי לכל מספר טבעי $\alpha > 1$ הסדרה

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{a^2}\right) \left(1 + \frac{1}{a^3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a^n}\right)$$

מתכנסת.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

נוסחאות

סכום סדרה חשבונית

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

סכום סדרה הנדסית

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

הבינום של ניוטון

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

נוסחאות כפל מקוצר

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= (x - y)(x + y) \\x^3 - y^3 &= (x - y)(x^2 + xy + y^2)\end{aligned}$$

פתרון משוואה ריבועית

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

נוסחאות טריגונומטריות

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \sin(\beta) \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)}$$