מתמטיקה בדידה
תרגולים

שי שכטר

25 ביולי 2017

תקציר

חוברת זו מכילה רשימות תרגולים מקורס מתמטיקה בדידה שניתן במחלקה למתמטיקה באוניברסיטת בן גוריון בשנה"ל תשס"ז 2017, עם המרצה ד"ר אינה אנטובה־איזנבוד. לתיקונים והצעות לשיפור החוברת ניתן ליצור קשר עם שי במייל ־ shais1985@gmail.com.

תוכן עניינים

פרק 1

תרגול 1

1.1 כלים בסיסיים

הכלי הבסיסי ביותר לצורך ספירה של מספר האיברים בקבוצה הוא העתקות, ובפרט העתקות חח"ע ועל. ניזכר בעובדה הבאה שראינו בקורס בלוגיקה ותה"ק.

עובדה יהיו A, B קבוצות סופיות. אז $|A| = |B|$ אס"ס קיימת פונקציה חח"ע ועל $\varphi : A \to B$. בפרט $|A| = n$ אס"ס קיימת העתקה חח"ע ועל $\varphi : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$.

תרגיל 1 תהא A קבוצה סופית מעוצמה n ו־$m \in \mathbb{Z}$. נסמן

$$\mathbf{P}_m(A) = \{B \subseteq A \mid |B| = m\}.$$

הראו כי $|\mathbf{P}_m(A)| = |\mathbf{P}_{n-m}(A)|$.

פתרון. אם $m < 0$ אז, מכיוון שאין קבוצות מגודל שלילי, מתקיים כי $\mathbf{P}_m(A) = \varnothing$, וכן, מכיוון ש־$A$ לא יכולה להכיל תתי־קבוצות מגודל הגדול מגודל A, גם $\mathbf{P}_{n-m}(A) = \varnothing$. לכן השוויון מתקיים במקרה זה. בדומה, השוויון מתקיים אם $m > n$.

נניח כעת ש־$0 \le m \le n$ ונגדיר העתקה $\varphi : \mathbf{P}_m(A) \to \mathbf{P}_{n-m}(A)$ ע"י $\varphi(B) = A \setminus B$. נשים לב כי φ אכן שולחת קבוצה מגודל m אל קבוצה מגודל $n - m$ ועל־כן מוגדרת היטב. נראה כי φ חח"ע ועל.

- ההעתקה φ חח"ע. נניח כי $B \neq B'$ הן שתי תתי־קבוצות של A מגודל m. מכיוון שלא אפשרי ש־$B \subsetneq B'$ קיים $b \in B \setminus B'$. אזי $b \in A \setminus B' = \varphi(B')$ ו־$b \notin A \setminus B = \varphi(B)$ ולכן $\varphi(B) \neq \varphi(B')$. כלומר $B \neq B'$.
- ההעתקה φ על. בהינתן $C \in \mathbf{P}_{n-m}(A)$ נסמן $B = A \setminus C$. אז $|B| = |A| - |C| = m$ ו־$\varphi(B) = A \setminus (A \setminus C) = C$ שכן,
$$c \in C \iff c \in A \text{ ו־} c \notin A \setminus C \iff c \in A \setminus (A \setminus C).$$

■

1.1.1 עקרון שובך היונים

עיקרון בהינתן שובך בעל k תאים ו־n יונים, אם $n > k$ וכל היונים בשובך, אז יש תא שבו שתי יונים.
למעשה, ניתן לומר קצת יותר. קיים תא בו נמצאות יותר מ־$\frac{n}{k}$ יונים.

ניסוח מתמטי

משפט 1 נניח כי A, B קבוצות סופיות כך ש־$|A| > |B|$. אז לא קיימת פונקציה חח"ע $f : A \to B$.
במקרה זה מתקיים כי לכל $f : A \to B$ קיים $b \in B$ כך שהקבוצה $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$ (קדם־התמונה של b) הוא מעוצמה גדולה מ־$\frac{|A|}{|B|}$.

הוכחה. נסמן $|A| = n$ ו־$|B| = k$ ונוכיח באינדוקציה על n. אם $n = 1$ אז מההנחה כי $k < n$ בהכרח מתקיים כי $B = \varnothing$ ולכן אין פונקציות $f : A \to B$ והטענה מתקיימת באופן ריק. נניח כי הטענה נכונה עבור A מגודל $n-1$. תהא $f : A \to B$ פונקציה ונבחר $a \in A$ שרירותי. אם $\left|f^{-1}(a)\right| > \frac{n}{k}$ אין מה להוכיח. אחרת, נתבונן בקבוצות $A' = A \setminus a$ ו־$B' = B \setminus f^{-1}(b)$, עם הפונקציה $g = f|_{B'}$. אז g מוגדרת היטב, כי תמונת כל איבר ב־B' נמצאת ב־A', ו־$|A'| = n-1$. מהנחת האינדוקציה, קיים $a' \in A'$ כך ש־$\left|g^{-1}(a')\right| > \frac{|A'|}{|B'|} \geq \frac{n-1}{k-1}$. נשים לב כי מהגדרת B' מתקיים $f^{-1}(a') = g^{-1}(a')$. כמו כן, חישוב ישיר תוך שימוש בהנחה כי $n > k$, מראה כי $\frac{n-1}{k-1} > \frac{n}{k}$, ולכן $\left|f^{-1}(a')\right| > \frac{n}{k}$, כנדרש. ■

תרגיל 2 למסיבה הגיעו $n \geq 2$ אנשים. הראו כי קיימים שני אנשים במסיבה שלחצו ידיים לאותו מספר של אנשים.

פתרון. נסמן ב־A את קבוצת האנשים במסיבה ונגדיר פונקציה $f : A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ המתאימה ל־$a \in A$ את מספר האנשים שהוא לחץ את ידו. נשים לב כי, מכיוון שאדם לא יכול ללחוץ את ידו של עצמו, לכל $a \in A$ מתקיים כי $f(a) \leq n-1$.

- מקרה א'. נניח כי כל אדם במסיבה לוחץ את ידו של מישהו אחר. אז בפרט $f(a) > 0$ לכל $a \in A$ ולכן תמונת f מוכלת בקבוצה $\{1, 2 \ldots, n-1\}$ שגודלה $n-1$. מכיוון שתחום הקבוצה A הוא מעוצמה n, לפי שובך יונים, הפונקציה f אינה חח"ע ולכן יש $a, a' \in A$ שונים כך ש־$f(a) = f(a')$.
- מקרה ב'. נניח כי קיימים שני אנשים $a, a' \in A$ שלא לוחצים ידיים לאף אדם במסיבה. אז $f(a) = f(a') = 0$.
- **מקרה ג'**. נניח כי יש אדם בודד $a \in A$ במסיבה שלא לחץ את ידו של אף אדם אחר. אז בפרט גם אף אדם אחד לא לחץ את ידו של a ולכן לכל $a' \in A \setminus \{a\}$ מתקיים כי $f(a') \leq n-2$. נובע כי תמונת f מוכלת בקבוצה $\{0, 1, \ldots, n-2\}$ ושוב־ מכיוון שגודל קבוצה זו הוא $n-1$ לפי עיקרון שובך היונים f איננה חח"ע.

■

1.1.2 עקרונות בסיסיים בשאלות ספירה

העקרון האדיטיבי נניח כי נתונה קבוצה סופית A ונניח כי קיימות תתי־קבוצות B, C כך ש־$B \cap C = \varnothing$ ו־$A = B \cup C$. אז

$$|A| = |B| + |C| .$$

הערה ניתן גם להכליל את העיקרון האדיטיבי למקרה בו $B \cap C \neq \varnothing$ (עקרון ההכלה וההדחה). נדון בזה בהמשך.

העקרון הכפלי נתונה קבוצה סופית A ונניח כי קיימת קבוצה B מגודל m כך שלכל $b \in B$ ניתן להתאים k איברים $a_1^b, \ldots, a_k^b$ בצורה בלתי־תלויה (כלומר כך ש־$\{a_1^b, \ldots, a_k^b\} \cap \{a_1^{b'}, \ldots, a_k^{b'}\} = \varnothing$ כאשר $b \neq b'$) וכך שכל איברי A נספרים כך. אז $|A| = m \cdot k$.

תרגיל 3 במסעדה 7 מנות ראשונות, 10 מנות עיקריות ו־3 קינוחים. אדם נכנס למסעדה ושוקל אם לקחת מנה ראשונה וגם קינוח או רק אחד מהם, אך בכל מקרה ייקח מנה ראשונה אחת. כמה אפשרויות יש לו להזמין?

פתרון.

- מקרה א' אם הזמין או מנה ראשונה או קינוח, אך לא את שניהם: יש 10 אפשרויות למנה עיקרית, ולכל אפשרות כזו יש 10 אפשרויות מתאימות לבחור מנה עיקרית או קינוח. מכיוון שהבחירות הללו בלתי־תלויות, יש בסה"כ 100 אפשרויות.
- מקרה ב' אם הזמין מנה ראשונה וגם קינוח, יש $10 \times 7 \times 3$ אפשרויות לבחור מנה עיקרית, קינוח ומנה ראשונה. בסה"כ 210 אפשרויות.

מכיוון שהבחירות למעלה הן בלתי־תלויות (קבוצת ההזמנות האפשרויות במקרה א' וב' זרות) לפי אדיטיביות, מספר המקרים הוא 310. ■

1.1.3 עקרון ההכלה וההדחה

יהיו A, B, C קבוצות סופיות.

שתי קבוצות $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

שלוש קבוצות $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

מקרה כללי נניח כי $A_1, \ldots, A_n$ קבוצות סופיות נתונות. אז

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| = \sum_{\varnothing \neq J \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|J|+1} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|.$$

תרגיל 4 חשבו את מספר המספרים בין 1 ל־600 שאינם מתחלקים ב־$3, 5, 7$.

פתרון. נסמן $X = \{1, 2, \ldots, 600\}$ ולכל $k \in \mathbb{Z}$ נסמן ב־A_k את קבוצת המספרים בין 1 ל־600 המתחלקים ב־k. אנחנו מעוניינים לחשב את $|X \setminus (A_3 \cup A_5 \cup A_7)|$. נשים לב כי $|X| = 600$ ולכל $k \in \mathbb{Z}$, $|A_k| = \lfloor \frac{600}{k} \rfloor$ וכי $A_m \cap A_n = A_{\gcd(m,n)}$ לכל $m, n \in \mathbb{Z}$. לפי הכלה והדחה:

$$\begin{aligned} |A_3 \cup A_5 \cup A_7| &= |A_3| + |A_5| + |A_7| - |A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_7| - |A_5 \cap A_7| + |A_3 \cap A_5 \cap A_7| \\ &= |A_3| + |A_5| + |A_7| - |A_{15}| - |A_{21}| - |A_{35}| + |A_{105}| \\ &= 325 \end{aligned}$$

לכן $|X \setminus (A_3 \cup A_5 \cup A_7)| = 600 - 325 = 275$. ■

תרגיל 5 1. חשבו את מספר הפתרונות במספרים שלמים אי־שליליים למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$.

2. חשבו את מספר הפתרונות למשוואה זו בהם $0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 \le 8$.

פתרון. אוסף הפתרונות בשלמים אי־שליליים למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ הוא נמצא בהתאמה חח"ע ועל אוסף הסידורים של 20 כדורים לבנים ו־3 כדורים שחורים. בהינתן סידור שכזה, למשל

$$\circ\circ\ldots\circ\bullet\circ\ldots\circ\bullet\circ\ldots\circ\bullet\circ\ldots\circ\circ$$

ניקח את x_1 להיות מספר הכדורים הלבנים עד השחור הראשון, את x_2 להיות מספר הכדורים הלבנים בין השחור השני והשלישי וכן הלאה. מובן כי כל סידור שכזה נותן פתרון יחיד למשוואה $x_1 + \ldots + x_4 = 20$, וכי כל פתרון למשוואה מגדיר סידור של 23 הכדורים. מכיוון שהסידור של הכדורים נקבע ע"י בחירה של 3 מקומות להצבה של שלושת הכדורים השחורים, מספר הפתרונות למשוואה הוא $\binom{23}{3} = 1771$.

כדי לפתור את הסעיף השני, נסמן, לכל $i = 1, \ldots, 4$ ב־A_i את אוסף הפתרונות למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ עם $x_i \ge 9$ ו־$x_j \ge 0$ לכל $j \neq i$. אנחנו מעוניינים לחשב את גודל המשלים של $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ בתוך קבוצת הפתרונות למשוואה. בכוונתנו להשתמש בעיקרון ההכלה וההדחה לצורך כך. נחשב את גדלי החיתוכים של הקבוצות A_i.

- $|A_i|$. מכיוון ש־$|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4|$ מספיק לנו לחשב את $|A_1|$. נגדיר $x_1' = x_1 - 9$ ונשים לב כי $x_1 \geq 9$ אם"ם $x_1' \geq 0$, וכי $x_1 + \ldots + x_4 = 20$ אם"ם

$$x_1' + x_2 + x_3 + x_4 = 11.$$

כמו בסעיף הקודם, מספר הפתרונות למשוואה זו הוא $\binom{11+3}{3} = \binom{14}{3} = 364$.

- $|A_i \cap A_j|$ $(i \neq j)$. בדומה למקרה הקודם, מספיק לנו לחשב את $|A_1 \cap A_2|$ (ובשאר המקרים מספר הפתרוות זהה). נגדיר $x_1' = x_1 - 9$ ו־$x_2' = x_2 - 9$. מספר הפתרונות למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ עם $x_1, x_2 \geq 9, x_3, x_4 \geq 0$ זהה למספר הפתרונות למשוואה

$$x_1' + x_2' + x_3 + x_4 = 2$$

והוא $\binom{5}{3} = 10$.

- $|A_i \cap A_j \cap A_k|$ $(i \neq j \neq k)$ ו־$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$. נשים לב כי אם שלוש מהמשתנים $x_1, \ldots, x_4$ הם גדולים או שווים ל־9 אז סכומם גדול או שווה ל־27, ובפרט אין פתרונות למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ עם יותר משני משתנים הגדולים או שווים מ־9. לכן מספר הפתרונות במקרים אלה הוא 0.

מהכלה והדחה, קיבלנו כי

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= \sum_{i=1}^{4} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| + |A_1 \cap \ldots \cap A_4| \\ &= 4\,|A_1| - \binom{4}{2}\,|A_1 \cap A_2| + 0 = 1396\end{aligned}$$

ובסה"כ מספר הפתרונות הוא 375. ■

פרק 2

תרגול 2

2.1 עקרון ההכלה וההדחה

משפט 2 (ההכלה וההדחה) בהינתן $n \in \mathbb{N}$ וקבוצות סופיות $A_1, \ldots, A_n$ מתקיים כי

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|J|+1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

הערה שתי הנוסחאות במשפט למעלה זהות ונשתמש בהן בהתאם לְמה שנוח בהקשר של השאלה.

תרגיל 1 1. כמה העתקות על ישנן מקבוצה בת n איברים לקבוצה בת m איברים? מצאו נוסחה כללית ורשמו את תוצאת החישוב עבור $n = 5, 4$ ו־$m = 4$.

פתרון. תהא A קבוצה בת n איברים ו־B קבוצה בת m איברים. בהינתן תת קבוצה $C \subseteq B$ נסמן ב־S_C את אוסף הפונקציות $f : A \to C$. בתרגיל בית ראינו כי $|S_C| = |C|^n$. כדי לחשב את גודל קבוצת הפונקציות העל, נחשב את משלימתה שנתונה ע"י

$$S_B \setminus \left(\bigcup_{b \in B} S_{B \setminus \{b\}} \right).$$

מהכלה־הדחה מתקיים כי

$$\begin{aligned}\left| \bigcup_{b \in B} S_{B\setminus\{b\}} \right| &= \sum_{b \in B} \left| S_{B\setminus\{b\}} \right| - \sum_{\substack{b_1, b_2 \in B \\ b_1 \neq b_2}} \left| S_{B\setminus\{b_1,b_2\}} \right| + \ldots + (-1)^{k+1} \sum_{\substack{b_1,\ldots,b_k \in B \\ b_i \neq b_k}} \left| S_{B\setminus\{b_1,\ldots,b_k\}} \right| + \ldots + (-1)^{m+1} |S_\varnothing| \\ &= m \cdot (m-1)^n - \binom{m}{2} \cdot (m-2)^n + \ldots + (-1)^{k+1} \binom{m}{k} (m-k)^n + \ldots + (-1)^m \cdot 1^n + 0\end{aligned}$$

עבור[1] $n = 5$ ו־$m = 4$ מקבלים כי

$$\left| \bigcup_{b \in B} S_{B\setminus\{b\}} \right| = 4 \cdot 3^5 - \binom{4}{2} \cdot 2^5 + \binom{4}{3} 1^5 = 784$$

ולכן מספר הפונקציות העל הוא $4^5 - 784 = 240$.

[1] את העובדה כי מספר הדרכים לבחור k איברים מקבוצה בת m איברים הוא $\binom{m}{k}$ הראיתם בכיתה, ונראה שוב בתרגיל הבא.

אותו חישוב עבור $n=m=4$ נותן כי

$$\left|\bigcup_{b\in B} S_{B\setminus\{b\}}\right| = 4\cdot 3^4 - \binom{4}{2}\cdot 2^4 + \binom{4}{3}1^4 = 232$$

ומספר הפונקציות העל הוא $4^4-232=24=4!$.

■

2.2 יחסי שקילות והעתקות k ל־1

תזכורת יחס שקילות $\sim$ על קבוצה A הוא יחס (דו־מקומי) רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

יחס שקילות שכזה מגדיר חלוקה של A לתתי־קבוצות זרות $\{[a]\mid a\in A\}$ כאשר $[a]=\{b\in A\mid b\sim a\}$ היא מחלקת השקילות של האיבר a תחת $\sim$. לכיוון השני, כל חלוקה של A לתתי־קבוצות זרות ולא ריקות $A=\bigsqcup_{i\in I}A_i$ מגדיר יחס שקילות על A ע"י $a\sim b$ אם"ם a ו־b נמצאות באותה תת־קבוצה $A_i\subseteq A$. קבוצת מחלקות השקילות של A היא הקבוצה $\{[a]\mid a\in A\}$ והיא מסומנת ב־$A/\sim$. **שימו לב** כי הקבוצה $A/\sim$ אינה תת־קבוצה של A.

לעתים קרובות כאשר נבצע ספירה אנו מעוניינים לחשוב על מקרים שונים שיכולים להיספר כמקרים זהים. דוגמה לכך היא כאשר נרצה לספר איברים בקבוצה מבלי חשיבות לסדר, או כאשר נרצה לחשוב על שני סידורים כשקולים (למשל כאשר מושיבים אנשים סביב שולחן עגול). באופן פורמלי, הפעולה שאנו מבצעים במקרה זה היא להגדיר יחס שקילות $\sim$ על הקבוצה הנספרת A, תחתיו אנו אומרים כי איברים a ו־b הם שקולים אם אנו מחשיבים אותם כזהים בתהליך הספירה, ולספור את מספר האיברים בקבוצת מחלקות השקילות $A/\sim$.

תרגיל 1 תהא A קבוצה סופית מגודל $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ ויהא $0\leq m\leq n$. הראו כי מספר תתי־הקבוצות של A מגודל m הוא $\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$.

פתרון. נסמן ב־X את אוסף הסדרות ללא חזרות באורך m מעל איברי A. מכיוון שיש n אפשרויות לבחור איבר ראשון, $n-1$ אפשרויות לבחור איבר שני בסדרה וכן הלאה עד $n-m+1$ אפשרויות לבחור איבר m, מקבלים כי $|X|=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$. נגדיר יחס שקילות על X ע"י

$$(a_1,\ldots,a_m)\sim(b_1,\ldots,b_m)\iff\forall i\,(\exists j,\ a_i=b_j).$$

נגדיר העתקה Φ מהקבוצה $X/\sim$ לאוסף תתי־הקבוצות של A בגודל m ע"י $\Phi\left([(a_1,\ldots,a_m)]\right)=\{a_1,\ldots,a_m\}$. אז Φ חח"ע (כי אם לשתי סדרות יש אותה תמונה, אז הן שוות עד כדי שינוי סדר), ועל (כי לכל תת־קבוצה מגודל m ניתן למצא קדם־תמונה ע"י בחירת סידור של תת־הקבוצה).

לבסוף, בהינתן $(a_1,\ldots,a_m)\in X$ מתקיים כי מחלקת השקילות של $(a_1,\ldots,a_m)$ מורכבת מכל הסדרות ללא חזרות באורך m על $\{a_1,\ldots,a_m\}$, ולכן בגודל $m!$. לכן $|X/\sim|=|X|/|[(a_1,\ldots,a_m)]|=\frac{n!}{(n-m)!}\cdot\frac{1}{m!}$. ■

הגדרה (העתקות k ל־1) יהיו A,B קבוצות ו־$f:A\to B$ אנו אומרים כי f היא **סופית ל־1** אם לכל $b\in B$ הקבוצה $f^{-1}(b)=\{a\in A\mid f(a)=b\}$ היא סופית.

ההעתקה נקראת k ל־1 (עבור $k\in\mathbb{N}$ קבוע) אם $\left|f^{-1}(b)\right|=k$ לכל $b\in B$, כלומר־ קיימים $a_1,\ldots,a_k\in A$ שונים, כך ש־$f(a_i)=b$ לכל $i=1,\ldots,k$. הקבוצה $f^{-1}(b)$ נקראת קדם־התמונה של b תחת f, או הסיב של f מעל b.

במקרה בו נתונה לנו העתקה $f:A\to B$, ניתן להשתמש בה כדי להגדיר יחס שקילות על A דרך

$$a_1\sim a_2\iff f(a_1)=f(a_2).$$

במקרה הספציפי בו ידוע לנו כי f היא k ל־1 ועל B, מספר האיברים ב־B שווה למספר מחלקות השקילות ב־A תחת היחס שהגדרנו, ומכיוון שכל מחלקות השקילות הן מגודל k, נובע כי $|B|=\frac{|A|}{k}$.

תרגיל 2 א. נתון מצולע קמור בעל n קודקודים. כמה אלכסונים יש במצולע?

ב. נניח כי אין אף 3 אלכסונים במעגל שנחתכים בנקודה אחת. כמה קטעי אלכסונים יש בתוך המצולע?

פתרון. נסמן את קודקודים המצולע ב־$p_1, \ldots, p_n$ לפי כיוון השעון, ונסמן ב־Y את אוסף הזוגות (p_{i_1}, p_{i_2}) כך ש־$|i_1 - i_2| > 1$. או במילים אחרות, אוסף זוגות הקודקודים שאינם שווים ואינם סמוכים. לכל p_i יש $n-3$ קודקודים p_j כך ש־$(p_i, p_j) \in Y$ ולכן $|Y| = n(n-3)$. כמו כן, ההעתקה המתאימה לכל זוג ב־Y את האלכסון העובר בין קודקודיו היא 2 ל־1 מ־Y לאוסף האלכסונים. לכן מספר האלכסונים במצולע הוא $\frac{n(n-3)}{2}$.

נסמן ב־Z_1 את קבוצת הקודקודים של המצולע וב־Z_2 את קבוצת החיתוכים של אלכסונים במצולע. נשים לב כי כל נקודה ב־Z_2 מוגדרת באופן יחיד ע"י בחירה של ארבעה קודקודים של המצולע, וכל בחירה של ארבעה קודקודים מגדירה איבר ב־Z_2. קיבלנו, אם כך, כי $|Z_2| = \binom{n}{4}$. החישוב שבסעיף הקודם מראה שכל איבר ב־Z_1 הוא קצה של $n-3$ קטעי אלכסון במצולע, וכל איבר ב־Z_2 הוא קצה של 4 קטעי אלכסון, ולכן אוסף הקצוות של קטעי אלכסון במצולע הוא

$$(n-3)\,|Z_1| + 4 \cdot |Z_2| = n(n-3) + 4 \cdot \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{4!} = n(n-3)\left(1 + \frac{(n-2)(n-1)}{6}\right)$$

מאותו טיעון כמו בסעיף הקודם מספר הקטעים הוא

$$n(n-3) \cdot \frac{n^2 - 2n + 8}{12}$$

■

תרגיל 3 א. בכמה דרכים ניתן לסדר n אנשים במעגל?

ב. בכמה דרכים ניתן לסדר n זוגות במעגל כך שכל אדם ישב ליד בן/בת זוגו?

פתרון.

1. יש $n!$ דרכים לסדר n אנשים בשורה. ע"י הצמדת האדם הראשון והאחרון בשורה אנחנו מקבלים מכל סידור שכזה סידור של האנשים במעגל. מכיוון שבמעגל אין חשיבות לבחירה הראשון בסידור, אנו מקבלים כי כל סידור במעגל הוא תמונה של בדיוק n סידורים בשורה תחת ההעתקה הזו, ולכן ההעתקה הזו היא n ל־1. מכאן שמספר הדרכים לסדר במעגל הוא $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.
2. נתייחס לכל אחד מהזוגות כיישות אחת. מהסעיף הקודם ישנן $(n-1)!$ דרכים לסדר את הזוגות על מעגל. כל השמה של הזוגות על המעגל נותן לנו 2^n סידורים של בני הזוג המתקבלים ע"י החלפה ביניהם. בסה"כ־ $2^n(n-1)!$ סידורים.

■

תרגיל 4 יהא p מספר ראשוני ויהא $n \in \mathbb{N}$. חשבו את מספר הדרכים לסדר p איברים מתוך $\{1, \ldots, n\}$ במעגל. הסיקו כי $n^p \equiv n \pmod p$ (המשפט הקטן של פרמה).

פתרון. נסמן בX את אוסף הסדרות באורך p על $\{1, \ldots, n\}$ ונגדיר יחס שקילות $\sim$ על X, כאשר שתי סדרות ייחשבו כשקולות אם יש להן את אותה תמונה לאחר "סגירתן למעגל". נחשב את גודל מחלקת השקילות של סדרה נתונה $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p)$:

1. מקרה א. אם $a_1 = a_2 = \ldots = a_p$ אז הסידרה היחידה שמגדירה את אותו סידור על המעגל היא הסדרה הקבועה ולכן $[\mathbf{a}] = \{\mathbf{a}\}$.

2. מקרה 2. נניח כי קיימים i,j כך ש־$a_i \neq a_j$. נטען כי $|[(a_1,\ldots,a_p)]| = p$. ברור כי מספר האיברים השקולים ל־$(a_1,\ldots,a_p)$ לא יכול להיות גדול ממספר הדרכים "לסובב את $(a_1,\ldots,a_p)$" ולכן קטן או שווה ל־p. נניח בשלילה כי קיים $1 \leq k < p$ כך ש־$(a_1,\ldots,a_p) = (a_{k+1},a_{k+2},\ldots,a_p,a_1,\ldots,a_k)$, כלומר שע"י סיבוב a בפחות מ־p צעדים קיבלנו בחזרה את a. אם נחזור על הפעולה של לסובב ב־k p פעמים נקבל כי $a_1 = a_{\overline{k+1}} = a_{\overline{2k+1}} = \ldots = a_{\overline{(p-1)k+1}}$ (כאשר $\bar{j}$ מסמן את השארית מודולו p של j). מההנחה כי ישנם שני אינדקסים בהם $a_i \neq a_j$ מתקיים כי האינדקסים בשוויון שכתבנו מהווים קבוצה מגודל קטן מ־p ולכן יש שניים מתוכם שהם שווים. בפרט, נובע כי mk מתחלק ב־p לאיזשהו $1 \leq m \leq p-1$ ולכן k מחלק את p. סתירה לראשוניות.

מכאן ש־$[a]$ מכילה p סדרות שונות.

מקבלים מכך כי מספר הדרכים לסדר p איברים מתוך $\{1,\ldots,n\}$ על מעגל הוא

$$\frac{n^p-n}{p}+n.$$

בפרט מקבלים כי n^p-n הוא מספר המתחלק ב־p. ■

פרק 3

תרגול 3

3.1 טכניקת ספירה כפולה

רעיון כללי בשאלות ספירה כפולה אנחנו מעוניינים לחשב את גודל קבוצה מסויימת בשתי דרכים שונות, על מנת להוכיח נוסחאות המתארות את גודל הקבוצה. למשל־

דוגמה בהינתן $N \in \mathbb{N}$, ניתן להוכיח את הנוסחה

$$2^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k}$$

באופן הבא. המספר 2^N באגף ימין מתאר את מספר תתי הקבוצות של קבוצה מגודל N. הביטוי מצד שמאל הוא סכום כל האפשרויות לבחור תת־קבוצה של $\{1, \dots, N\}$ מגודל 0, מגודל 1 וכן הלאה עד גודל N, ולכן גם כן מתאר את מספר כל תתי־הקבוצות של קבוצה בגודל N. מכאן ששני הביטויים שווים.

(בעזרת הבינום של ניוטון ניתן גם להוכיח זאת באופן אריתמטי, שכן $2^N = (1+1)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k}$).

דוגמה בכיתה נתונה יש k בנים ו־m בנות. בכמה דרכים ניתן לבחור ועד בן n חברים מתוך חברי הכיתה? השתמשו בחישוב זה כדי להוכיח את זהות ואן־דרמונדה:

$$\sum_{r=0}^{m+k} \binom{m}{r}\binom{k}{n-r} = \binom{m+k}{n}.$$

שימו לב כי לפי הגדרה $\binom{a}{b} = 0$ אם $b > a$.

<u>דרך חישוב א.</u> לכל $0 \le r \le n$ ניתן לבחור ועד בן n חברים אם נבחר r בניס מתוך m ו־$n-r$ בנות מתוך k. מספר הדרכים לבצע בחירה במקום זה הוא $\binom{m}{r}\binom{k}{n-r}$. אם נעבור על כל האפשרויות של $r = 0, \dots, m+k$ נקבל כי מספר הדרכים לבחור את הועד הם $\sum_{r=0}^{m+k} \binom{m}{r}\binom{k}{n-r}$.

<u>דרך חישוב ב.</u> למה בעצם איכפת לנו כמה מחברי הועד הם בנים וכמה הם בנות? בכיתה יש $m+k$ אנשים ואנחנו רוצים לבחור n מתוכם. מספר הדרכים לבצע את זה הוא $\binom{m+k}{n}$.

3.1.1 תרגילים

תרגיל 1 תהא $A = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in \{1, \dots, 100\},\ a < b,\ a < c\}$. חשבו את $|A|$ בשתי דרכים והשתמשו בחישוב זה כדי להוכיח את השוויון $\sum_{r=1}^{99} r^2 = |A| = 2\binom{100}{3} + \binom{100}{2}$.

פתרון. לכל $r\{1, \dots, 100\}$ נסמן $A_r = \{(a_1, a_2, a_3) \in A \mid a_1 = r\}$. מהגדרת A, מקבלים כי $A_{100} = \varnothing$. כמו כן, בהינתן $1 \le r < 100$, ההעתקה $(a_1, a_2, a_3) \mapsto (a_2, a_3)$ היא העתקה חח"ע על מ־A_r לאוסף הסדרות באורך 2 על הקבוצה $\{r+1, \dots, 100\}$. קיבלנו כי

$$|A| = \sum_{r=1}^{99} (100-r)^2 = \sum_{r=1}^{99} r^2 .$$

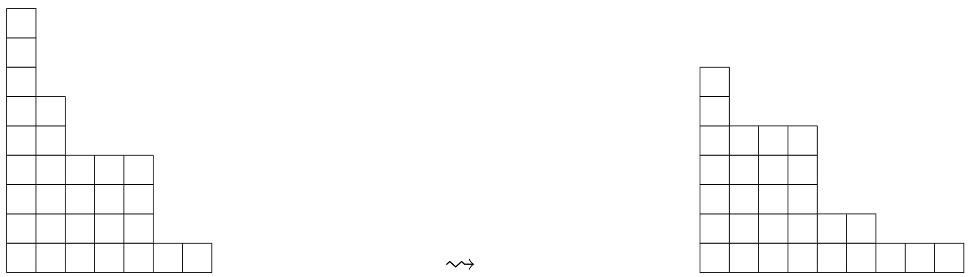
חישוב שני. נשים לב כי ניתן לחלק את הקבוצה A לשתי תתי קבוצות זרות־

$$A = \{(a_1, a_2, a_3) \in A \mid a_2 \neq a_3\} \sqcup \{(a_1, a_2, a_2) \in A\}$$

הקבוצה מימין נמצאת בהתאמה חח"ע ועל עם קבוצת תתי־הקבוצות של A מגודל 2 וזו משמאל בהתאמה 2 ל־1 עם תתי־הקבוצות מגודל 3. קיבלנו אם כך כי $\sum_{r=1}^{99} r^2 = |A| = 2\binom{100}{3} + \binom{100}{2}$. ∎

תרגיל 2 יחזקאל הקופאי מחשב את סך הכסף שבקופתו בסוף יום עסקים. ראשית, הוא סופר את מספר השטרות שערכם לפחות 1, אחר כך את מספר השטרות שערכם לפחות 2, לאחר מכן את אלו שערכם לפחות 3 וכן הלאה. לאחר הספירה יחזקאל מסכם את כל הערכים שקיבל וטוען כי התוצאה הסופית היא סכום כל השטרות הקופה. האם הוא צודק?

פתרון. יחזקאל צודק! נסמן ב־N את סכום כל הכסף בקופה, ולכל $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ נסמן ב־a_i את מספר השטרות בקופה בעלי ערך i בדיוק. הסדרה $(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_1 \text{ פעמים}}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{a_2 \text{ פעמים}}, \ldots, \underbrace{N, \ldots, N}_{a_N \text{ פעמים}})$ מהווה **חלוקה של** N, כלומר־ סדרה לא עולה $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ עם $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ כך ש־$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = N$. חלוקה שכזו ניתן לתאר באמצעות דיאגרמת פרר (Ferrer) באופן הבא־



החלוקה הדואלית

החלוקה המקורית

כל דיאגרמה שכזו מגדירה **חלוקה דואלית** ע"י היפוך לאורך האלכסון הראשי. נשים לב כי בחלוקה זו, שנסמנה ב־$(\mu_1, \ldots, \mu_N)$ האיבר הראשון מתאר את מספר האיברים בחלוקה המקורית שגודלם גדול או שווה ל־1, האיבר השני את מספר האיברים בחלוקה המקורית שגודלם או שווה ל־2 ובאופן כללי $\mu_i = |\{\lambda_i \mid \lambda_i \geq i\}|$. כמו כן, מובן כי החלוקה הדואלית גם היא חלוקה של N (כי מספר האיברים הכולל לא השתנה, רק הצורה בה הם מונחים בדיאגרמה).

הפעולה שיחזקאל ביצע היא למעשה סכימה של איברי החלוקה הדואלית לזו המוגדרת ע"י השטרות בקופה, ועל כן גם נותנת את סכום הכסף שבקופה. ∎

תרגיל 3 חשבו

$$.\sum_{i=1}^{1000} \lfloor \sqrt[3]{i} \rfloor$$

פתרון. נשים לב כי לכל $1 \leq i \leq 1000$ מתקיים כי $\sqrt[3]{i} \in [1, 10]$. נסמן את הסכום הנתון ב־N, ולכל $j = 1, \ldots, 10$ נסמן ב־a_i את מספר המספרים השלמים $1 \leq i \leq 1000$ כך ש־$\lfloor \sqrt[3]{i} \rfloor = j$. הסכום שאנו מעוניינים לחשב הוא

$$.N = \sum_{i=1}^{1000} \lfloor \sqrt[3]{i} \rfloor = \sum_{j=1}^{10} j \cdot a_j$$

נשתמש בשיטה של יחזקאל מהתרגיל הקודם, ונתבונן בחלוקה המוגדרת ע"י האיברים a_i ועל החלוקה הדואלית $(\mu_1, \ldots, \mu_K)$. מהגדרת החלוקה הדואלית, לכל $j = 1, \ldots, K$ מתקיים כי $\mu_j = \left|\{1 \leq i \leq 1000 \mid \lfloor \sqrt[3]{i} \rfloor \geq j\}\right|$. חישוב ישיר מראה כי $\mu_j = 1000 + 1 - j^3$ וכי במקרה זה $K = 10$. לפי שיטת יחזקאל

$$.N = \sum_{j=1}^{10} j \cdot a_j = \sum_{j=1}^{10} 1001 - j^3 = 1000 + 993 + 974 + 937 + 876 + 785 + 658 + 489 + 272 = 6985$$

■

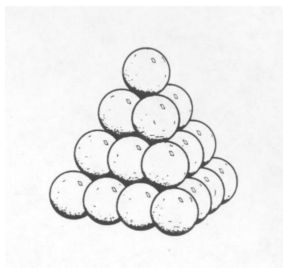
תרגיל 4 הוכיחו את השוויון הבא:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{2}=\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)$$

על ידי התבוננות בפירמידה משולשת המורכבת מכדורי טניס (או שוקולד).

פתרון. נתבונן הפירמידה משולשת בגובה n המורכבת מכדורים. אם נספור מראש הפירמידה, במפלס ה־k־י מופיע משולש שווה צלעות בעל צלע באורך k. מספר הכדורים במשולש שמופיע בגובה זה הוא $1+2+\ldots+k=\frac{(k+1)k}{2}$. מספר הכדורים במעגל, אם כן, הוא $\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{2}$.

מצד שני, ניתן גם לספור את הכדורים ע"י הסתכלות בחתכים אלכסוניים של הפירמידה. החתך הקיצוני ביותר מורכב משורה אחת של n כדורים. החתך השני מורכב משתי שורות בנות $n-1$ כדורים, וכן הלאה־ החתך ה־k־י מורכב מ־k שורות באורך $n+1-k$. בסה"כ, מספר הכדורים בפירמידה הוא גם $\sum_{k=1}^{n}k(n+1-k)$.



■

3.2 המקדם הבינומי (חלק א')

תרגיל 1 חשבו את המקדם של $a^5b^2c^3$ בביטוי $(a+b+c)^{10}$.

פתרון. נתבונן במכפלה

$$\underbrace{(a+b+c)\cdot(a+b+c)\cdot\ldots\cdot(a+b+c)}_{\text{עשר פעמים}}$$

המונום $a^5b^2c^3$ יכול להתקבל ע"י בחירת a ב־5 מתוך הגורמים, b בשניים מתוכם ו־c בשלוש מתוכם, וכל בחירה כזו תורמת תוספת של $+1$ למקדם. מספר הדרכים לבצע בחירה זו היא $\frac{10!}{5!3!2!}=\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{3}$. ■

פרק 4

תרגול 4

4.1 המקדם הבינומי והמולטינומי

תזכורת 1. בהינתן $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, המקדם הבינומי $\binom{n}{m}$ (n בחר m) מתאר את מספר הדרכים לבחור תת־קבוצה מגודל m מתוך קבוצה מגודל n, והוא נתון ע"י הנוסחה $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

2. בהינתן $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ כך ש־$m_1 + \ldots + m_k = n$, המקדם המולטינומי $\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ מתאר את מספר הדרכים לחלק קבוצה בגודל n לתתי־קבוצות זרות בגדלים $m_1, m_2, \ldots, m_k$. המקדם המולטינומי נתון ע"י הנוסחה

$$\binom{n}{m_1, \ldots, m_k} = \binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}\binom{n-m_1-m_2}{m_3} \cdot \ldots \cdot \binom{n-m_1-\ldots-m_{k-1}}{m_k} = \frac{n!}{m_1! \cdot \ldots \cdot m_k!}.$$

בפרט־ במקרה בו $k = 2$ מתקיים כי $\binom{n}{m_1, m_2} = \binom{n}{m_1} = \binom{n}{m_2}$.

3. <u>המשפט הבינומי/המולטינומי:</u>

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m y^{n-m}$$

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\substack{m_1, m_2, \ldots, m_k \geq 0 \\ m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n}} \binom{n}{m_1, m_2 \ldots, m_k} x_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{m_k}.$$

תרגיל 1 מצאו ניסוח קומבינטורי לנוסחה $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$ והוכיחו אותה.

פתרון. נבחר קבוצה A מגודל n ונבחר $a \in A$ כלשהו. הערך $\binom{n}{m}$ הוא מספר הדרכים לבחור תת־קבוצה מגודל m ב־A. לחילופין, ניתן לחלק את תתי הקבוצות של A לתתי־קבוצות המכילות את a ואלה שאינן מכילות אותו. תתי־הקבוצות שמכילות את a נמצאות בהתאמה חח"ע ועל עם תתי הקבוצות בגודל $m-1$ של הקבוצה $A \setminus \{a\}$, בעוד אלה שלא מכילות את A נמצאות בהתאמה חח"ע ועל עם תתי־הקבוצות של $A \setminus \{a\}$ מגודל m. מכיוון שקבוצה לא יכולה גם להכיל את a וגם לא להכיל אותו, איחוד שתי תתי הללו הוא זר ומספר הדרכים לבחור תת־קבוצה של A מגודל m הוא

$$\binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}.$$

■

תרגיל 2 עבור $3 \le k \le n$, הוכיחו את השוויון

$$\binom{n+3}{k} = \binom{n}{k} + 3\binom{n}{k-1} + 3\binom{n}{k-2} + \binom{n}{k-3}$$

פתרון. יהא z משתנה. נחשב את המקדם של z^k בפולינום $(1+z)^{n+3}$ בשתי דרכים. ראשית, נשים לב כי לפי משפט הבינום, אותו מקדם שווה ל־$\binom{n+3}{k}$. מצד שני, מתקיים כי

$$(1+z)^{n+3} = (1+z)^3 \cdot (1+z)^n = (1+3z+3z^2+z^3)(1+z)^n.$$

מהשוואת מקדמים, על מנת להגיע למקדם של z^k באגף ימין צריך לחשב את המקדמים של $z^k, z^{k-1}, z^{k-2}, z^{k-4}$ ב־$(1+z)^n$ ולכפול אותם ב־$1, 3, 3, 1$ בהתאמה. שוב, ממשפט הבינום, נובע כי מקדם זה הוא

$$\binom{n}{k} + 3\binom{n}{k-1} + 3\binom{n}{k-2} + \binom{n}{k-3}$$

■

תרגיל 3 בהינתן סדרה ללא חזרות $y = (y_1, \ldots, y_n)$ באורך n על $\{1, \ldots, n\}$ נגדיר את ההפחתה (Descent) של y להיות הקבוצה $Des(y) = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid y_i > y_{i+1}\}$.

בהינתן תת־קבוצה $S = \{s_1, \ldots, s_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ חשבו את מספר הסדרות ללא חזרות y על $\{1, \ldots, n\}$ המקיימות כי $Des(y) \subseteq S$. הראו כי מספר זה הוא

$$\binom{n}{s_1, s_2 - s_1, \ldots, n - s_k} = \frac{n!}{s_1! \cdot (s_2 - s_1)! \cdot \ldots \cdot (s_n - s_k)!}.$$

פתרון. בשלב הראשון נבחר s_1 איברים מתוך הקבוצה $\{1, \ldots, n\}$ ונסדרם בסדר עולה. נשים לב כי בהינתן קבוצה מעוצמה s_1 מתוך n האיברים הנתונים, קיימת דרך יחידה לסדר אותה כסדרה עולה, ולכן מספר הדרכים לבחור את s_1 האיברים בסדרה הוא $\binom{n}{s_1} = \frac{n!}{s_1! \cdot (n-s_1)!}$. בשלב הבא נותרה לנו קבוצה בת $n - s_1$ איברים ואנו מעוניינים לבחור מתוכה קבוצה בת $s_2 - s_1$ איברים ולסדרם בסדר עולה. מספר הדרכים לבחור סדרה שכזו הוא $\binom{n-s_1}{s_2-s_1} = \frac{(n-s_1)!}{(s_2-s_1)! \cdot (n-s_2)!}$. באופן דומה, בהנחה כי s_r האיברים הראשונים בסדרה נבחרו, לאיזשהו $r \le k$, נותר לנו בשלב ה־$r+1$ לבחור תת־קבוצה בגודל $s_{r+1} - s_r$ מתוך קבוצה בגודל $n - s_r$ ולסדרה בסדר עולה. מספר הדרכים לבצע בחירה זו הוא $\binom{n-s_r}{s_{r+1}-s_r} = \frac{(n-s_r)!}{(s_{r+1}-s_r)! \cdot (n-s_{r+1})!}$. בסה"כ, ע"י הכפלת כל הגורמים מקבלים

$$\frac{n!}{s_1! \cdot (n-s_1)!} \cdot \frac{(n-s_1)!}{(s_2-s_1)! \cdot (n-s_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-s_k)!}{(s_{k+1}-s_k)! \cdot (n-s_{k+1})!} = \frac{n!}{s_1!(s_2-s_1)! \cdot \ldots (s_{k+1}-s_k)!}$$

■

תרגיל 4 הוכיחו בשתי דרכים את השוויון

$$\sum_{\substack{m_1, \ldots, m_k \ge 0 \\ m_1 + \ldots + m_k = n}} \binom{n}{m_1, \ldots, m_k} = k^n.$$

פתרון. לפי המשפט המולטינומי־

$$\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_k\geq 0\\ m_1+\ldots+m_k=n}} \binom{n}{m_1,\ldots,m_k} = \text{sum}_{\substack{m_1,\ldots,m_k\geq 0\\ m_1+\ldots+m_k=n}} \binom{n}{m_1,\ldots,m_k} 1^{m_1}\cdot\ldots\cdot 1^{m_k} = (\underbrace{1+\ldots+1}_{\text{פעמים } k})^n = k^n .$$

זה היה פתרון אריתמטי. פתרון קומבינטורי־ נספתור את מספר הסדרות באורך n על המספרים $1,2,\ldots,k$. כידוע לנו, מספר הסדרות הללו הוא k^n. מצד שני, כל סדרה כזו נקבעת ע"י חלוקה של הקבוצה $\{1,\ldots,n\}$ ל־k תתי־קבוצות זרות (אולי ריקות) $\{1,\ldots,n\} = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_k$ וקביעת סדרה $(x_1,\ldots,x_n)$ בה $x_i = j$ אם"ם $i \in A_j$ (במילים אחרות־ הקבוצה A_i היא קבוצת האינדקסים בהם מופיעה הספרה i, לכל $i = 1,\ldots,n$). לכל $m_1,\ldots,m_k \geq 0$ עם $m_1+\ldots+m_k = n$ מספר הדרכים את הקבוצות $A_1\ldots,A_k$ כך ש־$|A_i| = m_i$ הוא $\binom{n}{m_1,\ldots,m_k}$. אם נסכום את כל המקרים האפשריים, נקבל את אגף שמאל של השוויון שרצינו להוכיח. ■

4.2 שימושים של המקדם הבינומי

4.2.1 פתרון ע"י מחיצות

תזכורת מספר הפתרונות למשוואה $x_1+\ldots+x_k = n$ עם $x_1,\ldots,x_k \geq 0$ ו־$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ הוא כמספר הדרכים לבחור $k-1$ מקומות להניח בהם מחיצות בין n כדורים, למשל־

$$\bullet\bullet \mid \bullet\ldots\bullet\bullet \mid\mid \bullet\ldots\bullet\bullet \mid \bullet \mid \bullet\ldots\bullet\bullet .$$

מספר הפתרונות למשוואה זו הוא $\binom{n+k-1}{k-1}$.

תרגיל 1 מולטי־קבוצה (multiset) בגודל n היא אוסף בן n איברים, ללא חשיבות לסדר ועם חזרות. חשבו את מספר המולטי־קבוצות בגודל n שאיבריהן לקוחים מקבוצה בגודל m.

פתרון. בה"כ, ניתן להניח כי איברי המולטי־קבוצה שאנחנו מגדירים הם $1,2,\ldots,m$. לכל $1 \leq i \leq m$ נסמן ב־x_i את מספר הפעמים בהם הספרה i מופיעה במולטי־קבוצה נתונה. מספר הדרכים ליצור מולטי־קבוצה שכזו הוא כמספר הדרכים לפתור את המשוואה $x_1+\ldots+x_m = n$, כאשר $x_1,\ldots,x_m \geq 0$. מספר זה הוא

$$\binom{n+m-1}{m-1}$$

■

תרגיל 2 מרצה בקורס מתמטיקה בדידה מעוניין לכתוב תרגיל מהצורה "כמה מילים ניתן ליצור מאותיות המילה XXXXXXX" כאשר XXXXXXX היא איזושהי מילה (לא בהכרח בעלת משמעות) בת 7 אותיות לטיניות. בהנחה שהמורה מתעלם מסדר בחירת האותיות, כמה תרגילים שונים מסוג זה יכול המורה לכתוב?

פתרון. המורה רוצה ליצור מולטי־קבוצה בגודל 7 מעל קבוצה בגודל 26. מספר האפשרויות לבצע זאת הוא $\binom{7+25}{25} = \binom{32}{25} = 3365856$. ■

4.3 בעיות הצבת צריחים

תרגיל 1 יהא $n \in \mathbb{N}$.

1. הראו כי מספר הדרכים לסדר n צריחים לא־תוקפים על לוח שח־מט בגודל $n \times n$ הוא $n!$. מהו מספר הדרכים לסדר אותם ללא שום הגבלה?

2. מהו מספר הדרכים לסדר k צריחים לא־תוקפים על לוח שחמט בגודל $m \times n$ כאשר $m, n \in \mathbb{N}$?

פתרון.

1. $n!$ (n אפשרויות להציב בשורה הראשונה, $n-1$ להציב בשורה השנייה וכיו"ב). מבלי להגביל את הצבת הצריחים, מספר האפשרויות הוא $\binom{n^2}{n}$.
2. נשים לב כי כל הצבה של הצריחים על לוח בגודל $n \times m$ קובעת לנו תת־לוח בגודל $k \times k$ (הנקבעת לפי השורות והעמודות עליהן הצריחים מונחים), וכי לכל בחירה כזו קיימות $k!$ הצבות של צריחים לא־תוקפים על אותו הלוח (לפי הסעיף הקודם). נובע מכך כי ההעתקה השולחת את הצבת הצריחים לתת־הלוח עליו הצריחים מוצבים היא $k!$ ל־1.

   כמו כן, מספר הדרכים לבחור תת־לוח $k \times k$ מתוך לוח $n \times m$ היא $\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{k}$. בסה"כ, מספר ההצבות האפשריות ל־k צריחים לא תוקפים הוא $\binom{m}{n} \cdot \binom{n}{k} \cdot k!$.

■

תרגיל 2 יהא $n \in \mathbb{N}$. מה מספר הדרכים לסדר n צריחים לא־תוקפים על לוח שחמט מבלי להניח אף צריח על האלכסון הראשי $\{(1,1),(2,2),\dots,(n,n)\}$?

הערה השאלה שקולה לשאלה הבאה. בכמה דרכים ניתן לערבב את הקבוצה $\{1,\dots,n\}$, כלומר לסדר את הקבוצה מחדש מבלי להשאיר אף איבר במקומו?

פתרון. לכל תת־קבוצה $T \subseteq \{1,\dots,n\}$ נסמן ב־A_T את קבוצת הסידורים של n צריחים לא־תוקפים בהם יש צריח במשבצת (t,t) לכל $t \in T$. אז

$$|A_T| = \#\left(\{1,\dots,n\} \setminus T\right)^2 \text{ על } \text{סידורים של צריחים לא־תוקפים} = (n-|T|)!\,.$$

אנחנו מחפשים את סידורי הצריחים הלא־תוקפים שלא נמצאים באף אחד מהקבוצות A_T. מספר סידורי הצריחים הלא־תוקפים האפשריים על הלוח המלא הוא $n!$. כמו כן, לפי הכלה־הדחה, מספר הסידורים ב־$\bigcup_{T\subseteq\{1,\dots,n\}} A_T = \bigcup_{t=1}^{n} A_{\{t\}}$ הוא

$$\sum_{\varnothing\neq T\subseteq A} (-1)^{|T|+1} |A_T| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)!$$

נחסר את שני הגורמים ונקבל את מספר ההצבות ללא הצבה על ההאלכסון הראשי־

$$.n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$$

■

באופן כללי יותר, אנחנו רוצים כעת להתמודד עם שאלות הצבה עם הגבלות מהצורה הבאה.

> נתונה קבוצה $B \subseteq \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$. בכמה דרכים ניתן לסדר k צריחים לא־תוקפים על לוח שח־מט בגודל $n \times n$ מבלי שאף אחד מהם מונח על ריבוע ב־B?

על זה נדבר בתרגול הבא.

פרק 5

תרגול 5

5.1 מספרי קטלן

תרגיל 1 מילה מאוזנת באורך $2n$ על $\{-1,1\}$ היא מילה $(y_1,\ldots,y_{2n})$ כך ש־$y_1+\ldots+y_{2n}=0$ וכך שלכל $1\le r\le 2n$ מתקיים כי $y_1+\ldots+y_r\ge 0$. כמה מילים מאוזנות באורך $2n$ קיימות?

פתרון. נסמן ב־X את אוסף המילים המאוזנות באורך $2n$, ו־

$$Y=\{(y_1,\ldots,y_{2n})\mid \forall 1\le i\le 2n,\ y_i\in\{\pm1\} \text{ ו־ } y_1+\ldots+y_{2n}=0\}.$$

ברור כי $X\subseteq Y$. כמו כן, איבר ב־Y נקבע ע"י בחירת n אינדקסים מתוך $2n$ והצבת 1 בתוכם ו־-1 בשאר האינדקסים. לכן $|Y|=\binom{2n}{n}$. נחשב את $|Y\setminus X|$.

בהינתן סדרה לא־מאוזנת $(y_1,\ldots,y_{2n})\in Y\setminus X$, ניקח את r להיות האינדקס הראשון בו $y_1+\ldots+y_r=-1$ ונגדיר סדרה חדשה

$$\Phi(y_1,\ldots,y_{2n})=(z_1,\ldots,z_{2n}) \quad \text{כאשר} \quad z_i=\begin{cases} y_i & ,i\le r\\ -y_i & i>r\end{cases}.$$

נשים לב כי $\sum_{i=1}^{2n} z_i=\sum_{i=1}^{r} y_i+\sum_{i=r+1}^{2n}(-y_i)=-1+(-1)=-2$.

נסמן ב־Z את אוסף הסדרות על ±1 הנסכמות ל־-2, כלומר

$$Z=\{(y_1,\ldots,y_{2n})\mid \forall 1\le i\le 2n,\ y_i\in\{\pm1\} \text{ ו־ } y_1+\ldots+y_{2n}=-2\}.$$

ההתאמה Φ שהגדרנו לעיל היא העתקה מ־$Y\setminus X$ ל־Z. בכיוון השני, ניתן להגדיר העתקה $\Phi:Z\to Y\setminus X$ באופן דומה־ בהינתן סדרה $(z_1,\ldots,z_{2n})$ הנסכמת ל־-2, נסמן ב־r את האינדקס הראשון בו $z_1+\ldots+z_r=-1$, ונגדיר סדרה

$$\Psi(z_1,\ldots,z_{2n})=(y_1,\ldots,y_{2n}), \quad \text{כאשר} \quad y_i=\begin{cases} z_i & i\le r\\ -z_i & i>r\end{cases}.$$

אז, בדומה למקרה הקודם, מתקיים כי $y_1+\ldots+y_{2n}=0$. כמו כן, מכיוון ש־$y_1+\ldots+y_r=z_1+\ldots+z_r=-1$, הסדרה $(y_1,\ldots,y_{2n})$ אינה מאוזנת ולכן Ψ היא העתקה מ־Z ל־$Y\setminus X$. מהגדרתן, קל לוודא כי $\Psi\circ\Phi=\mathrm{Id}_{Y\setminus X}$ וכי $\Phi\circ\Psi=\mathrm{Id}_Z$, ולכן שתי ההעתקות חח"ע ועל.

לבסוף, נשים לב כי סדרה ב־Z נקבעת ע"י בחירת $n-1$ אינדקסים בהם מוצב $+1$, והצבת -1 בשאר המקומות. לכן, מתקיים כי $|Z|=\binom{2n}{n-1}$. קיבלנו כי

$$|X|=|Y|-|Y\setminus X|=|Y|-|Z|=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

■

תרגיל 2 נסמן ב־C_n את מספר קטלן ה־n־י. הראו כי מספרי קטלן מקיימים את נוסחת הנסיגה

$$C_0 = 1,\ C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}.$$

הראו בנוסף כי, אם $(D_n)_{n=0}^{\infty}$ היא סדרה נוספת כך ש־$D_0 = 1$ וכך ש־$D_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} D_i D_{n-i}$ לכל n, אז $D_n = C_n$ לכל n.

פתרון. לכל $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ נסמן ב־X_n את אוסף הסדרות המאוזנות באורך $2n$ על $\{\pm 1\}$. אז $|X_n| = C_n$. בהינתן $n \in \mathbb{Z}_{ge0}$, נוכיח קיום של העתקה חח"ע ועל

$$f : X_{n+1} \to \bigsqcup_{i=0}^{n} X_i \times X_{n-i}.$$

בהינתן סדרה $(x_1, \ldots, x_{2n+2}) \in X_{n+1}$ נסמן ב־i_0 את האינדקס הראשון בו מתקיים כי $x_1 + \ldots + x_{2i_0} = 0$, נשים לב כי בהכרח $i_0 > 0$ וכי סכום הסדרה יכול להתאפס רק באינדקס זוגי, מכיוון ש־$x_1 + \ldots + x_r \equiv r \pmod 2$ לכל $1 \leq r \leq 2n+2$. אם $i_0 = 1$, נשים לב כי פירוש הדבר ש־$(x_1, \ldots, x_{2n+2}) = (1, -1, x_3, \ldots, x_{2n+2})$, וכי תת־הסדרה $(x_3, \ldots, x_{2n+1})$ מהווה סדרה מאוזנת באורך $2n$. נגדיר במקרה זה

$$f(x_1, \ldots, x_{2n+2}) = ((\ldots), (x_3, \ldots, x_{2n+1})) \in X_0 \times X_{2n},$$

כאשר $(\ldots)$ מסמן את הסדרה הריקה (כלומר, הסדרה היחידה באורך 0).

במקרה בו $i_0 > 1$ נשים לב כי בהכרח $x_2 = +1$ וכי תתי־הסדרות $(x_2, \ldots, x_{2i_0-1})$ ו־$(x_{2i_0+1}, \ldots, x_{2n+2})$ הן סדרות מאוזנות באורכים $2(i_0-1)$ ו־$2(n-i_0+1)$ בהתאמה. נגדיר במקרה זה

$$f(x_1, \ldots, x_{2n+2}) = ((x_2, \ldots, x_{2i_0-1}), (x_{2i_0+1}, \ldots, x_{2n+1})) \in X_{i_0-1} \times X_{n-i_0+1}.$$

קיבלנו פונקציה $f : X_{n+1} \to \bigsqcup_{i=0}^{n} X_i \times X_{n-i}$. בכיוון השני, בהינתן זוג סדרות $\left((y_1, \ldots, y_{2i}), (z_1, \ldots, z_{2(n-i)})\right)$, קל לוודא כי הסדרה

$$g\left((y_1, \ldots, y_{2i}), (z_1, \ldots, z_{2(n-i)})\right) = (1, y_1, \ldots, y_{2i}, -1, z_1, \ldots, z_{2(n-i)})$$

הינה סדרה מאוזנת באורך $2n$ על $\{\pm 1\}$, וכי ההעתקות f ו־g הופכיות זו לזו, ובפרט חח"ע ועל.

החלק השני נובע באינדוקציה פשוטה על n. מהנתון ידוע ש־$D_0 = C_0 = 1$. נניח כי הטענה נכונה לכל $i \leq n$ עבור n נתון, אז $D_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} D_i D_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-1} = C_{n+1}$, לפי נוסחת הנסיגה הנתונה. ■

תרגיל 3 במסיבת לחיצות ידיים, $2n$ אנשים עומדים במעגל. בכמה אופנים הם יכולים ללחוץ ידיים זה לזה כך שכל אדם לוחץ ידיים לאדם אחר, כך שאף זוג ידיים לא חוצה זה את זה?

פתרון. לכל n, נסמן ב־c_n את מספר האופנים בהם $2n$ אנשים במסיבה יכולים ללחוץ ידיים מבלי לחצות זה את זה.

נמספר את באי המסיבה ע"י $1, \ldots, 2n$, לפי כיוון השעון. נסמן ב־ k את האדם שלוחץ את ידו של 1. נשים לב כי k הוא בהכרח מספר זוגי הגדול מ־1, שכן אחרת קיים $2 \leq j \leq k-1$ שבהכרח לוחץ את ידו של אדם j' מתוך הקבוצה $\{k+1, \ldots, 2n\}$, ובפרט לחיצת היד שלהם חוצה את זו של 1 ו־k.

יהא $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ כך ש־$k = 2(i+1)$. נשים לב כי תת־הקבוצה שמימין ל־k, כלומר האנשים $\{1, \ldots, k-1\}$ מהווים בעצמם מעגל לחיצות ידיים מאורך $k-2 = 2i$, ולכן מספר הדרכים בהם הם יכולים ללחוץ ידיים זה לזה מבלי לחצות זה את זה הוא c_i. באופן דומה, קבוצת האנשים שמשמאל ל־k מהווה גם היא מעגל לחיצות ידיים באורך $2n-k = 2(n-i-1)$ ולכן מספר הדרכים בהם הם יכולים ללחוץ ידיים מבלי לחצות זה את זה הוא c_{n-i-1}. מכיוון שבכל לחיצות הידיים שאנו סופרים לא אפשרי שאדם מהקבוצה הימנית ילחץ את ידו של אדם מהקבוצה השמאלית, אנו מקבלים כך כי מספר לחיצות הידיים ה"טובות" בהן נתון כי 1 לוחץ את ידו של $2(i+1)$ הוא $c_i \cdot c_{n-1-i}$. אם נסכום את כל האפשרויות ללחיצת היד של 1, נקבל כי $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_{n-1-i} \cdot c_i$. מהסעיף הקודם, ומכיוון שבמסיבה הריקה יש סידור תקין יחיד (הסידור הריק), כלומר $c_0 = 1$, נובע כי c_n היא סדרת מספרי קטלן ולכן $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

■

5.2 מספרי סטירלינג

הגדרה מספר סטירלינג מהסוג השני של n מעל k מתאר את מספר הדרכים לחלק קבוצה בגודל n ל־k קבוצות זרות ולא ריקות, ללא חשיבות לסדר החלוקה. כלומר, המספר

$$\left\{ n \atop k \right\} = |\{\{A_1,\ldots,A_k\} \mid \varnothing \neq A_1,\ldots,A_k \subseteq \{1,\ldots,n\},\ A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_k = \{1,\ldots,n\}\}| .$$

תרגיל 1 הוכיחו את השוויון

$$\left\{ n+1 \atop k+1 \right\} = \left\{ n \atop k \right\} + (k+1)\left\{ n \atop k+1 \right\}$$

פתרון. לכל n,k נסמן ב־$S_{n,k}$ את קבוצת החלוקות של $\{1,\ldots,n\}$ ל־k תתי־קבוצות זרות ולא ריקות, כלומר

$$S_{n,k} = \{\{A_1,\ldots,A_k\} \mid \varnothing \neq A_1,\ldots,A_k \subseteq \{1,\ldots,n\}\ A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_k = \{1,\ldots,n\}\}.$$

מהגדרה, מתקיים כי $\left\{ n+1 \atop k+1 \right\} = |S_{n+1,k+1}|$. נסמן ב־$X$ את תת־הקבוצה של $S_{n+1,k+1}$ של חלוקות שבהן היחידון $\{n+1\}$ הוא איבר בחלוקה, ו־$Y = S_{n+1,k+1} \setminus X$. נשים לב כי לכל $\{A_1,\ldots,A_{k+1}\} \in X$, הקבוצה $\{A_1,\ldots,A_{k+1}\} \setminus \{\{n+1\}\}$ (כלומר, אם נוציא מהקבוצה $\{A_1,\ldots,A_k\}$ את הקבוצה $\{n+1\}$) מהווה חלוקה של של הקבוצה $\{1,\ldots,n\}$ ל־k קבוצות לא ריקות וזרות. כמו כן, בהינתן חלוקה $\{B_1,\ldots,B_k\} \in S_{n,k}$, $\{B_1,\ldots,B_k,\{n+1\}\}$ מהווה איבר של X.
בצורה זו אנו מקבלים התאמה חח"ע ועל בין X ו־$S_{n,k}$ ולכן $|X| = \left\{ n \atop k \right\}$.
כדי לחשב את גודל Y נגדיר פונקציה $f : Y \to S_{n,k+1}$ ע"י

$$f(\{A_1,\ldots,A_{k+1}\}) = \{A_1 \setminus \{n+1\},\ldots,A_{k+1} \setminus \{n+1\}\}.$$

נשים לב כי, מהגדרת Y, לכל $1 \leq i \leq n+1$ מתקיים כי $A_i \neq \{n+1\}$, ולכן $f(A_1,\ldots,A_{k+1})$ היא אכן חלוקה של $\{1,\ldots,n\}$ ל־$k+1$ קבוצות זרות **ולא ריקות**. נחשב את גודל הסיבים של ההעתקה f.
בהינתן $\{B_1,\ldots,B_{k+1}\} \in S_{n,k+1}$ חלוקה של $\{1,\ldots,n\}$ ל־$k+1$ קבוצות זרות ולא ריקות, לכל $i = 1,\ldots,k+1$ ניתן להגדיר חלוקה $\{A_1^i,\ldots,A_{k+1}^i\}$ של $\{1,\ldots,n+1\}$ ל־$k+1$ תתי־קבוצות לא ריקות וזרות ע"י

$$A_j^i = \begin{cases} B_j & ,\ j \neq i \\ B_i \cup \{n+1\} & ,\ i = j \end{cases}.$$

מתקיים כי לכל $i = 1,\ldots,k+1$ $f(\{A_1^i,\ldots,A_{k+1}^i\}) = \{B_1,\ldots,B_{k+1}\}$ וכי אלו כל החלוקות של $\{1,\ldots,n+1\}$ הנשלחות ע"י f לחלוקה $\{B_1,\ldots,B_{k+1}\}$. בפרט־ f היא העתקה $(k+1)$ ל־1 ולכן

$$|Y| = (k+1)\,|S_{n,k+1}| = (k+1)\left\{ n \atop k+1 \right\}.$$

מכיוון ש־$S_{n+1,k+1} = X \sqcup Y$ אנו מקבלים כי

$$\left\{ n+1 \atop k+1 \right\} = |S_{n+1,k+1}| = |X| + |Y| = \left\{ n \atop k \right\} + (k+1)\left\{ n \atop k+1 \right\}.$$

■

פרק 6

תרגול 6

6.1 פולינומי צריחים (Rook Polynomials)

בשיעור קודם דיברנו על המושג של הצבת צריחים תקינה על לוח, וענינו על השאלה של מספר ההצבות התקינות של צריחים ללא מגבלות ועם המגבלה של איסור הצבה של צריחים על האלכסון.

באופן כללי יותר, אנחנו רוצים כעת להתמודד עם שאלות הצבה עם הגבלות מהצורה הבאה.

שאלה נתונה קבוצה $B \subseteq \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$. בכמה דרכים ניתן לסדר k צריחים לא־תוקפים על לוח שח־מט בגודל $n \times n$ מבלי שאף אחד מהם מונח על ריבוע ב־B?

נקבע קבוצה $B \subseteq \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$. לכל k נסמן ב־N_k את הדרכים לסדר n צריחים לא־תוקפים על לוח בגודל $n \times n$ כך שבדיוק k מתוכם מונחים בתוך הקבוצה B, ונסמן ב־r_k את מספר הדרכים לסדר k צריחים לא־תוקפים בתוך B. אנחנו מעוניינים לחשב את N_0.

משפט 3

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k r_k (n-k)!$$

הוכחה. נגדיר פולינום

$$\mathcal{N}(x) = \sum_{j=0}^{n} N_j \cdot x^j.$$

אנו נוכיח את השוויון הפולינומי $\mathcal{N}(x) = \sum_{k=0}^{n} r_k \cdot (n-k)!(x-1)^k$, ונסיק מכך את הערך של N_0 ע"י הצבת $x = 0$.

- בהינתן הצבה π של n צריחים לא תוקפים על לוח $n \times n$ נסמן ב־$B(\pi)$ את אוסף המשבצות $(i,j) \in B$ שעליהן מונח צריח, כלומר $\pi \cap B$.
- נסמן, לכל $k = 0,\dots,n$ ב־$\mathcal{C}_k$ את קבוצת הזוגות (π, C) בהם π היא הצבה תקינה של n צריחים על לוח $n \times n$ ו־C היא תת־קבוצה מגודל k של $B(\pi)$. נחשב את $|\mathcal{C}_k|$ בשתי דרכים.

1. לכל $1 \leq j \leq n$, מספר ההצבות התקינים של צריחים π עבורם מתקיים כי $|B(\pi)| = j$ הוא, לפי הגדרה, N_j. לכל הצבה π שכזו, מספר הדרכים לבחור תת־קבוצה של $B(\pi)$ מגודל k הוא בדיוק $\binom{j}{k}$. ע"י כך שנסכום את כל האפשרויות ל־j, קיבלנו כי $|\mathcal{C}_k| = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} N_j$.
2. לחילופין, ניתן להתחיל בלבחור את הקבוצה $C \subseteq B$ כך שתהיה מגודל k וכך שהצבת הצריחים שהיא מגדירה תהיה תקינה. לכל בחירה של קבוצה C שכזו, נותרות $n-k$ שורות ו־$n-k$ עמודות על הלוח עליהן ניתן להציב עליהן $n-k$ צריחים, כאשר ההגבלה היחידה במקרה זה היא שההצבה תהיה תקינה. מקבלים כי $|\mathcal{C}_k| = r_k \cdot (n-k)!$.

- הוכחנו את השוויון $\sum_{j=0}^{n}\binom{j}{k}N_j=|\mathcal{C}_k|=r_k(n-k)!$, לכל $1\le k\le n$. נכפול את השוויון הזה ב־z^k ונסכום את כל המקרים של k:

$$\sum_{k=0}^{n}r_k(n-k)!\cdot z^k=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k}N_jz^k=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}z^k\right)N_j=\sum_{j=0}^{n}(z+1)^jN_j.$$

נציב $z=x-1$ כדי לקבל את השוויון הפולינומי שרצינו להוכיח, ונציב $z=0$ כדי לקבל את הטענה.

הערה שימו לב כי ההוכחה הזאת למעשה נותנת לנו הרבה יותר מהערך של N_0. למעשה, ע"י גזירה חוזרת של $\mathcal{N}(x)$ והצבת 0 ניתן להסיק מהשוויון הפולינומי שהוכחנו את ערכי N_j לכל j.

■

תרגיל 1 הוכיחו מחדש את הנוסחה למספר התמורות ללא נקודות שבת של $\{1,\ldots,n\}$.

פתרון. לפי הפרשנות החדשה, אנחנו רוצים לחשב את N_0 כאשר $B=\{(0,0),(1,1),\ldots,(n,n)\}$. נשים לב שכל הצבה של צריחים בתוך B היא הצבה תקינה. בפרט, לכל $k=0,\ldots,n$ מתקיים כי $r_k=\binom{n}{k}$. בפרט $N_0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)!=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}$. ■

תרגיל 2 יהא B הלוח הנתון ע"י המחצית הימנית־עליונה של לוח בגודל $n\times n$, כלומר $B=\{(i,j)\mid 1\le i<j\le n\}$. הראו כי לכל $0\le k\le n$ מתקיים כי $r_k=\left\{\begin{matrix}n\\n-k\end{matrix}\right\}$. הסיקו את השוויון

$$1=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\left\{\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right\}k!.$$

פתרון. נסמן ב־$\mathcal{S}(n,n-k)$ את אוסף החלוקות של הקבוצה $\{1,\ldots,n\}$ ל־$n-k$ תתי־קבוצות זרות ולא ריקות, ונסמן ב־$\mathcal{R}_k^B$ את קבוצת ההצבות התקינות של k צריחים על הלוח B. תהא $\pi\in\mathcal{R}_k^B$ הצבה תקינה של k צריחים על הלוח. ראשית כל, נשתמש ב־π כדי להגדיר תמורה σ_π על הקבוצה $\{1,\ldots,n\}$ באופן הבא.

1. בהינתן $i\in\{1,\ldots,n\}$ נתבונן בשורה ה־i של לוח השח־מט. אם יש j כך שצריח מונח במשבצת (i,j) ב־π נגדיר $\sigma_\pi(i)=j$.
2. אם השורה ה־i ריקה, נבדוק האם $i=\sigma_\pi(l)$ לאישזהו $1\le l\le n$, כלומר־ האם העמודה ה־i אינה ריקה. אם לא קיים l שכזה, נגדיר $\sigma_\pi(i)=i$.
3. אחרת, נמצא את המספר l' הקטן ביותר כך ש־$i=\sigma_\pi\circ\sigma_\pi\circ\ldots\circ\sigma_\pi(l')$ עבור מספר מסויים של הרכבות של σ_π (קיים כזה, כי אם יש צריח במשבצת (l',l'') אז $l'<l''$ וקבוצת האינדקסים סופית). נגדיר $\sigma_\pi(i)=l'$.

כעת נגדיר חלוקה של $\{1,\ldots,n\}$ באופן הבא־ ניקח $i_1=1$ ונגדיר את הקבוצה $A_1=\{1,\sigma_\pi(1),\sigma_\pi^2(1),\ldots\}$ (נשים לב כי σ_π סופית, לפי הגדרה). כדי להגדיר את A_2 ניקח את i_2 להיות המספר הקטן ביותר שאינו ב־A_1 ונגדיר $A_2=\{i_2,\sigma_\pi(i_2),\ldots\}$. נמשיך כך ונגדיר חלוקה $\{A_1,A_2,\ldots,A_r\}$ של $\{1,\ldots,n\}$. נשים לב כי, בעוד אנחנו לא יודעים מה גודל הקבוצות $A_1,A_2,\ldots,A_r$ או מה מספרן, כן ידוע לנו כי כל קבוצה כזו מכילה מספר אחד יותר ממספר הצריחים שעברנו עליהם בתהליך הבנייה של σ_π. בפרט, מתקיים כי

$$n=\sum_{i=1}^{r}|A_i|=\underbrace{\sum_{i=1}^{r}(|A_i|-1)}_{\text{מספר הצריחים}}+r=k+r$$

ולכן $r = n-k$, וקיבלנו חלוקה של $\{1,\ldots,n\}$ ל־$n-k$ קבוצות לא־ריקות וזרות.

לכיוון השני, בהינתן חלוקה $\{A_1,\ldots,A_{n-k}\}$ קבוצות זרות ולא ריקות, נגדיר תמורה σ על $\{1,\ldots,n\}$ ע"י כך שלכל $1 \leq i \leq n$ נסמן ב־j_i להיות האינדקס כך ש־$i \in A_{j_i}$ ונגדיר את $\sigma(i)$ להיות העוקב של i ב־A_{j_i} אם i אינו מקסימלי ב־A_{j_i}, או להיות המינימום של A_{j_i} אחרת. נגדיר הצבת צריחים על B ע"י $(i,j) \in \pi$ אם"ם $\sigma(i) = j$ וגם $i < j$. נשים לב כי מהגדרת σ, בכל קבוצה A_j מתוך החלוקה, מספר האיברים $i \in A_j$ עבורם $\sigma(i) < j$ הוא בדיוק $|A_i| - 1$. נובע, בדומה לפסקה הקודמת, כי $|\pi| = k$.

קל לוודא ששתי ההתאמות שהגדרנו כאן הן הופכיות זו לזו, ולכן קיבלנו את השוויון.

נסיק את השוויון. מהנוסחה שהוכחנו ל־N_0 מתקיים כי

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left\{ \begin{matrix} n \\ n-k \end{matrix} \right\} (n-k)! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} k!.$$

מצד שני, ההצבה התקינה היחידה שבה אף צריח אינו מוצב ב־B היא זו המתאימה לתמורת הזהות $\sigma(i) = i$. לכן $N_0 = 1$, ומכאן השוויון. ■

פרק 7

תרגול 7

7.1 נוסחאות נסיגה

הגדרה בהינתן סדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ אנו אומרים כי $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ אם קיימת פונקציה $f(t_0,\ldots,t_r)$ וערכים $\gamma_0,\ldots\gamma_r$ כך ש־

$$a_0=\gamma_0\,,\quad a_1=\gamma_1\,,\quad \ldots\quad ,a_r=\gamma_r$$

ו־ $a_{n+r}=f(a_1,\ldots,a_r)$ לכל $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

תרגיל 1 (מגדלי האנוי) חשבו את המספר המינימלי של שלבים הנדרשים על מנת לפתור בעיית מגדלי האנוי עם n דיסקיות.

פתרון. נסמן ב־a_n את מספר השלבים המינימלי הנדרש כדי לפתור בעיית האנוי עם n דיסקיות. מובן כי $a_1=1$. כמו כן, בהינתן מגדל האנוי בגודל n נוכל להעבירו למקל השני באופן הבא־

1. נפעיל את האלגוריתם ל־$n-1$ הדיסקיות העליונות כדי להעבירן למקל השלישי. מספר השלבים המינימלי לכך הוא a_{n-1}.
2. נעביר את הדיסקית הרחבה ביותר למקל השני־ שלב אחד נוסף.
3. נעביר את $n-1$ הדיסקיות מהמקל השלישי למקל השני־ a_{n-1} שלבים.

קיבלנו כי מספר השלבים המינימלי הנדרש כדי לפתור את בעיית האנוי הוא $a_n=2a_{n-1}+1$. **שאלה למחשבה:** למה זה מינימלי?

המספר המדוייק ניתן לחישוב באופן ישיר:

$$a_n=(a_n-2a_{n-1})+2(a_{n-1}-a_{n-2})+2^2(a_{n-2}-a_{n-3})+\ldots+2^{n-1}(a_2-a_1)+2^na_1=2\cdot 2^n=2^{n+1}$$

■

תרגיל 2 נתון חדר בגודל $2\times n$. מצאו נוסחת נסיגה המתארת את מספר הדרכים לרצף את החדר במשבצות שחורות ולבנות, כך שבאף שורה אין שתי משבצות לבנות צמודות.

פתרון. אופן הריצוף של השורה הראשונה של החדר לא משפיע על הריצוף של השורה השנייה, לכן קבוצת הריצופים של חדר $2\times n$ היא המכפלה הקרטזית של שתי קבוצות הריצופים של שורה $1\times n$. כלומר־ אם נסמן ב־a_n את מספר הדרכים האפשריות לרצף חדר $2\times n$ וב־b_n את מספר הדרכים לרצף שורה $1\times n$ אז $a_n=b_n^2$ לכל n.

נחשב נוסחת נסיגה ל־b_n. מתקיים כי $b_0=1$ ו־$b_1=2$, מכיוון שיש דרך יחידה לרצף חדר ריק (הריצוף הריק) ושתי דרכים לרצף חדר 1×1 (משבצת אחת שחורה או אחת לבנה). נסמן ב־X_n את קבוצת הריצופים האפשריים של חדר $1\times n$

ונסמן ב־X_n^{Wh} את קבוצת הריצופים בהם התא ה־n צבוע בלבן וב־X_n^{Bl} את קבוצת הריצופים בהם הוא צבוע בשחור. אז $|X_n| = \left|X_n^{Wh}\right| + \left|X_n^{Bl}\right|$.

נשים לב כי בהינתן ריצוף הנמצא ב־X_n^{Bl}, ההגבלה היחידה המתקיימת על $n-1$ המשבצות הנותרות היא כי לא יהיו בהן 2 משבצות לבנות עוקבות, ולכן ההעתקה המסירה את המשבצת האחרונה מהריצוף היא התאמה חח"ע ועל $X_n^{Bl} \to X_{n-1}$. בנוסף, בהינתן ריצוף השייך ל־X_n^{Wh}, ידוע לנו כי המשבצת בתא ה־$n-1$ חייבת להיות שחורה (כי אחרת יהיו שני לבנים רצופים), ובשאר המשבצות ההגבלה היחידה המתקיימת היא כי לא יהיו בהן שתי משבצות לבנות עוקבות. בפרט, ע"י הסרת שתי המשבצות האחרונות אנחנו מקבלים התאמה חח"ע ועל $X_n^{Wh} \to X_{n-1}$. קיבלנו כי

$$b_n = |X_n| = \left|X_n^{Bl}\right| + \left|X_n^{Wh}\right| = |X_{n-1}| + |X_{n-2}| = b_{n-1} + b_{n-2}.$$

נציב את התנאי שקיבלנו ב־a_n ונקבל את כלל הנסיגה $a_0 = 1,\ a_1 = 4$ ו־

$$a_n = b_n^2 = (b_{n-1} + b_{n-2})^2 = b_{n-1}^2 + 2b_{n-1}b_{n-2} + b_{n-2}^2 = a_{n-1} + a_{n-2} + 2\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}.$$

■

תרגיל 3 בכמה דרכים ניתן לרצף לוח $3 \times n$ בעזרת משבצות 1×2 ו־2×2 שניתן לסובב.

פתרון. נסמן ב־a_n את מספר הדרכים לרצף לוח $3 \times n$ במשבצות $1\times 2,\ 2 \times 2$ ו־2×1. נחלק את אוסף הריצופים האפשריים לפי סוג המרצפת המונחת בתא השמאלי עליון.

1. אם בתא זה מונחת מרצפת 2×2, אין לנו ברירה אלא להניח מתחתיה מרצפת 1×2 ואז נותרו $3 \times (n-2)$ שיש לרצף עם אותן משבצות. מספר הריצופים שבהם מונחת מרצפת 2×2 בפינה זו הוא a_{n-2}.
2. נניח שבתא השמאלי עליון מונחת מרצפת 1×2. מכיוון שבמקרה זה אנחנו חייבים להניח בשורה התחתונה מרצפת בגובה 1 אין ברירה אלא להניח שם מרצפת 2×1. מה ניתן לעשות מכאן? יש הרבה אפשרויות לרצף את הלוח שנותר, ובינתיים לא כדאי לנסות לחשב אותן ישירות. נסמן לבינתיים ב־b_{n-1} את מספר הדרכים לרצף חדר בגודל $3 \times (n-1)$ שבו יש פינה אחת חסרה. מספר הדרכים לרצף את החדר $3 \times n$ כאשר בפינה השמאלית עליונה יש מרצפת 1×2 הוא b_{n-1}.
3. נניח כעת כי בפינה השמאלית עליונה מונחת מרצפת 2×1. מקרה זה גם כן מתפצל ל־3 לפי סוג המשבצת שמונחת מתחת למשבצת השמאלית עליונה.

   אם במשבצת זו מונחת משבצת 2×2 נותר לנו לרצף חדר $3 \times (n-2)$ ומספר האפשרויות לבצע זאת הוא a_{n-2}. אם המשבצת שמתחת למשבצת השמאלית עליונה היא 2×1 אין לנו ברירה אלא להניח עוד משבצת 2×1 מתחתיה ושוב נותרים לנו a_{n-2} דרכים להשלים את הריצוף. לבסוף, אם מונחת במקום השמאלי ביותר מתחת למשבצת השמאלית עליונה משבצת 1×2 נותר לנו לרצף לוח $3 \times (n-1)$ עם המרצפות הנתונות, ומספר הדרכים לבצע זאת הוא b_{n-1}. קיבלנו כי מספר הריצופים הנמצאים במקרה זה הוא $2a_{n-2} + b_{n-1}$.

בסה"כ קיבלנו את הנוסחה $a_n = 2b_{n-1} + 3a_{n-2}$.

במקום לחשב את b_n ישירות, נשים לב כי גם סדרה זו מקיימת נוסחת נסיגה. אם נחלק את הריצופים האפשריים לפי המשבצות הנמצאות בעמודה בה חסרה משבצת נקבל כי הריצופים בהם מונחת שם משבצת 2×2 או 2×1 תורמים כל אחד b_{n-2} ריצופים אפשריים, ואלה שבהם מונחת שם מרצפת 1×2 תורמים a_{n-1} ריצופים. לכן קיבלנו

$$b_n = 2b_{n-2} + a_{n-1}$$

מהנוסחה ל־a_n ניתן לבודד את b_{n-1} ולקבל $b_{n-1} = \frac{a_n - 3a_{n-2}}{2}$ ולהציב לנוסחה ל־b_n

$$\frac{a_{n+1} - 3a_{n-1}}{2} = \frac{a_{n-1} - 3a_{n-3}}{2} + a_{n-1}$$

או, אחרי פיתוח

$$a_{n+4} = 6a_{n+2} - 3a_n.$$

זו נוסחה מסדר 4, לכן עלינו לחשב את 4 תנאי ההתחלה. $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 5, a_3 = 0$. ■

7.2 משוואות נסיגה ליניאריות הומוגניות

7.2.1 דוגמה בסיסית- סדרת פיבונאצ'י

נתונה הסדרה $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_1 = 1$, $F_0 = 0$. כיצד ניתן למצא נוסחה סגורה ל-F_n?

הנה שיטה- נגדיר מטריצה $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ונשים לב כי $\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \mathcal{F} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$ לכל $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. עובדה מאלגברה ליניארית- המטריצה $\mathcal{F}$ היא **לכסינה**, כאשר שני הערכים העצמיים שלה הם השורשים השונים של הפולינום $t^2 - t - 1$, שנסמנם ב-τ_1, τ_2, והוקטורים העצמיים המתאימים הם $\begin{pmatrix} \tau_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ו-$\begin{pmatrix} \tau_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ בהתאמה. מתקיים כי $\tau_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\tau_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. בפרט, מתקיים כי

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix}$$

אם נסמן $P = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ונכפול את שני האגפים מימין ב-$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\tau_2 \\ -1 & \tau_1 \end{pmatrix}$ נקבל את השוויון

$$\mathcal{F} = P \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

נשים לב כי לכל $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ מתקיים כי

$$\mathcal{F}^n = (P \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix} P^{-1})^n = P \begin{pmatrix} \tau_1^n & 0 \\ 0 & \tau_2^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

מצד שני, מה שאנחנו מעוניינים לחשב הוא $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \mathcal{F}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. מחישוב ישיר מקבלים

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \mathcal{F}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1^n & 0 \\ 0 & \tau_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\tau_2 \\ -1 & \tau_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1^n & 0 \\ 0 & \tau_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1^n \\ -\tau_2^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1^{n+1} \\ -\tau_2^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \tau_1^{n+1} - \tau_2^{n+1} \\ \tau_1^n - \tau_2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ובפרט $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau_1^n - \tau_2^n)$ לכל n.

7.2.2 הפולינום האופייני ונוסחאות סגורות

נוסחת נסיגה נתונה ע"י $\alpha_r a_{n+r} + \alpha_{r-1} a_{n+r-1} + \ldots \alpha_0 a_n = 0$ לכל n ו-$a_i = \gamma_i$ עבור $i = 1, \ldots, r$. למשל, במקרה של סדרה פיבונצי הסדרה נתונה ע"י $a_0 = a_1 = 1$ ו-$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ לכל n. נגדיר את ה**פולינום האופייני** של הסדרה ע"י

$$p(t) = \alpha_r t^r + \alpha_{r-1} t^{r-1} + \ldots + \alpha_0.$$

מקרה פשוט ביותר . נניח כי הפולינום p מתפצל (מעל המרוכבים) למכפלה של r גורמים לינאריים **שונים**, $p(t) = \prod_{i=1}^{r}(t-\lambda_i)$. אז, קיימים $A_1,\dots,A_r$ כך ש- $a_n = A_1\lambda_1^n + \dots + \lambda_r^n$.
איך נדע למצא את $A_1,\dots,A_r$? לפי תנאי ההתחלה של הנסיגה. עלינו לפתור את המשוואה הלינארית ההומוגנית

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^1 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \lambda_3^r & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{r-1} \end{pmatrix}$$

ולמשוואה זו יש תמיד פתרון, בגלל ההפיכות של מטריצת ונדרמונדה.

תרגיל 1 נתונה נוסחת נסיגה ע"י

$$a_0 = 1,\ a_1 = 3, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n.$$

מצאו נוסחה סגורה לאיבר ה-n-י של a_n.

פתרון. הפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה הוא $p(t) = t^2 - t - 6 = (t+2)(t-3)$ לכן קיימים $A, B \in \mathbb{C}$ כך ש-$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-3)^n$. מה ערכים אלו?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן $A = \frac{6}{5}$ ו-$B = -\frac{1}{5}$. ■

פרק 8

תרגול 8

8.1 נוסחאות נסיגה

8.1.1 נוסחאות נסיגה לינאריות הומוגניות

נוסחת נסיגה נתונה ע"י $\alpha_r a_{n+r} + \alpha_{r-1} a_{n+r-1} + \ldots \alpha_0 a_n = 0$ לכל n ו־$a_i = \gamma_i$ עבור $i = 1, \ldots, r$. למשל, במקרה של סדרה פיבונצי הסדרה נתונה ע"י $a_0 = a_1 = 1$ ו־$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ לכל n. נגדיר את ה**פולינום האופייני** של הסדרה ע"י

$$.p(t) = \alpha_r t^r + \alpha_{r-1} t^{r-1} + \ldots + \alpha_0$$

מקרה פשוט ביותר . נניח כי הפולינום p מתפצל (מעל המרוכבים) למכפלה של r גורמים לינאריים **שונים**, $p(t) = \prod_{i=1}^{r}(t - \lambda_i)$. אז, קיימים $A_1, \ldots, A_r$ כך ש־ $a_n = A_1\lambda_1^n + \ldots + \lambda_r^n$.

איך נדע למצא את $A_1, \ldots, A_r$? לפי תנאי ההתחלה של הנסיגה. עלינו לפתור את המשוואה הלינארית ההומוגנית

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_r \\ \lambda_1^1 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \ldots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \lambda_3^r & \ldots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{r-1} \end{pmatrix}$$

ולמשוואה זו יש תמיד פתרון, בגלל ההפיכות של מטריצת ונדרמונדה.

תרגיל 1 נתונים ערכים $a_0 = \gamma_0, \ldots, a_{r-1} = \gamma_{r-1}$ עבור $r \in \mathbb{N}$. מצאו נוסחה סגורה (ללא חלוקה למקרים) לסדרה

$$a_n = \gamma_{n \pmod r}$$

כאשר $n \pmod r$ מסמן את המספר היחיד $0 \le i \le r-1$ כך ש־$n - i$ מתחלק ב־r.

פתרון. ניתן לתאר את הסדרה הנתונה ע"י נוסחת הנסיגה $a_{n+r} = a_n$ לכל $n \ge 0$, עם תנאי ההתחלה הנתונים. הפולינום האופייני של הסדרה הוא $t^r - 1 = 0$ והוא מתפרק, מעל המרוכבים, למכפלה של גורמים לינארים שונים $\prod_{i=0}^{r-1}(t - \xi^i)$ כאשר $\xi = e^{2i\pi/r}$ הוא שורש יחידה פרימיטיבי מסדר r. הסדרה הנתונה היא מהצורה

$$.a_n = A_0 + A_1\xi^n + A_2\xi^{2n} + \ldots + A_{r-1}\xi^{(r-1)n}$$

כדי לחשב את הערכים $A_0, \ldots, A_{r-1}$ נציב את הערכים $n = 0, \ldots, r-1$ ונקבל את המשוואה הלינארית

$$.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \ldots & \xi^{r-1} \\ 1 & \xi^2 & \xi^4 & \ldots & \xi^{2(r-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \xi^{r-1} & \xi^{2(r-1)} & \ldots & \xi^{(r-1)(r-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{r-1} \end{pmatrix}$$

מציאת הופכי של מטריצת ונדרמונדה היא, בד"כ, משימה לא פשוטה. במקרה הספציפי הנתון, ניתן למצא את המטריצה ההופכית יחסית בקלות (ראו הערה למטה), ולהשתמש בה כדי לחשב את הערכים של $A_0, \ldots, A_{r-1}$.

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{r-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \xi^{r-1} & \xi^{r-2} & \ldots & \xi^1 \\ 1 & \xi^{2(r-1)} & \xi^{2(r-2)} & \ldots & \xi^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \xi^{(r-1)(r-1)} & \xi^{(r-1)(r-2)} & \vdots & \xi^{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{r-1} \end{pmatrix}$$

כלומר

$$A_i = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{r-1} \xi^{i(r-j)} \gamma_j$$

ו־$a_n = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{r-1} \xi^{i(r-j)+n} \gamma_i$.

הערה כדי לוודא את נוסחת ההופכי לדטרמיננטת ונדרמונדה מספיק לנו לחשב את המכפלה

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi^j & \xi^{2j} & \ldots & \xi^{(r-1)j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi^i \\ \xi^{2i} \\ \vdots \\ \xi^{(r-1)i} \end{pmatrix} = \sum_{l=0}^{r-1} \xi^{l(i+j)} = \begin{cases} r & i+j=r \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

וידוא זה ניתן לעשות ע"י הכפלת המשוואה ב־$\xi^{(i+j)}$ ולראות כי הוא לא משפיע על הערך באגף שמאל, לכן אם $\xi^{i+j} \neq 1$ בהכרח הערך באגף שמאל שווה ל־0.

■

תרגיל 2 נתונה נוסחת נסיגה ע"י

$$a_0 = \ldots = a_4 = 2, \quad a_{n+4} = 2a_{n+3} + 2a_{n+1} + a_n.$$

מצאו נוסחה סגורה לאיבר ה־n־י של a_n.

פתרון. הפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה הוא $p(t) = t^4 - 2t^3 - 2t - 1$. נשים לב כי $p(i) = p(-i) = 0$ ולכן הפולינום $p(t)$ מתחלק ב־(t^2+1), ומקבלים

$$p(t) = (t^2+1)(t^2-2t-1) = (t-i)(t+i)(t-(1+\sqrt{2}))(t-(1-\sqrt{2})).$$

המשוואה המתקבלת היא מהצורה

$$a_n = A(-i)^n + Bi^n + C(1+\sqrt{2})^n + D(1-\sqrt{2})^n$$

נציב ערכים ב־$n = 0, 1, 2, 3$.

$$\begin{cases} A+B+C+D = 2 \\ -Ai + Bi + C(1+\sqrt{2}) + D(1-\sqrt{2}) = 2 \\ -A - B + C(3+2\sqrt{2}) + D(3-2\sqrt{2}) = 2 \\ Ai - Bi + C(7+5\sqrt{2}) + D(7-5\sqrt{2}) = 2 \end{cases}$$

מכאן ניתן לחלץ את ערכי A, B, C, D ע"י דירוג. ■

מקרה כללי נרשום $p(t)=\prod_{j=1}^{k}(t-\lambda_j)^{f_j}$ כאשר $\lambda_1,\ldots,\lambda_j\in\mathbb{C}$ שונים ו־$f_1,\ldots,f_k\in\mathbb{Z}_{>0},\ f_1+\ldots+f_k=r$. אז קיימים פולינומים $h_1,\ldots,h_k$ כך ש־$\deg(h_i)\le f_i-1$ ו־

$$a_n=h_1(n)\lambda_1^n+\ldots+h_k(n)\lambda_r^n.$$

תרגיל 3

$$a_0=1,\ a_1=2,\ a_2=4,\ a_{n+3}=3a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n.$$

פתרון. הפולינום האופייני של המשוואה הוא $p(t)=t^3-3t^2+3t-1=(t-1)^3$. לכן יש פולינום $h(t)$ כך ש־$a_n=h(n)\cdot 1^n$ לכל n. איך נמצא את $h(t)$? תנאי ההתחלה נותנים לנו את ערכי $h(t)$ ב־3 מקומות ולכן קובעים אותו. נותר רק למצא פולינום ממעלה 2 $h(t)$ המקיים $h(0)=1,\ h(1)=2,\ h(2)=4$. נשתמש באינטרפולציה של לגרנג':

$$h(t)=\frac{(t-1)(t-2)}{(-1)\cdot(-2)}\cdot 1+\frac{t(t-2)}{1\cdot(-1)}\cdot 2+\frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\cdot 4=\frac{t^2+t+2}{2}$$

שאלה מה היה הפתרון לשאלה אם היה נדרש כי $a_0=a_1=a_2=2$?
פולינום ממעלה 2 נקבע ע"י ערכו ב־3 נקודות, לכן בהכרח $h(n)=2$ לכל n. ■

8.1.2 נוסחאות נסיגה ליניאריות לא הומוגניות

כעת נניח שנתונה לנו נוסחת נסיגה מהצורה

$$\lambda_k a_{n+k}+\lambda_{k-1}a_{n+k-1}+\ldots+\lambda_0 a_n=f(n)$$

עם תנאי התחלה $a_0=\mu_0,\ldots,a_{k-1}=\mu_{k-1}$, כאשר f היא איזושהי פונקציה נתונה. נניח שהצלחנו למצא סדרות (b_n) ו־(c_n) כך ש־

$$\lambda_k c_{n+k}+\ldots+\lambda_0 c_n=0 \tag{8.1}$$

$$\lambda_k b_{n+k}+\ldots+\lambda_0 b_n=f(n) \tag{8.2}$$

אז $a_n=b_n+c_n$ הוא פתרון לנוסחת הנסיגה הלא־הומוגנית הנתונה.
איך מוצאים את b_n? **מנחשים!**

שיטות ניחוש מקדמים

המטרה שלנו היא למצא סדרה b_n המקיימת את המשוואה (8.2).

תרגיל 4 פתרו את נוסחת הנסיגה

$$a_{n+2}+4a_{n+1}+3a_n=5(-2)^n$$

כאשר $a_0=1,a_1=2$.

פתרון. נתחיל בלמצא סדרה $b_n=q(-2)^n$ כך ש־

$$b_{n+2}+4b_{n+1}+3b_n=5(-2)^n$$

אז

$$\begin{aligned}5(-2)^n = b_{n+2}+4b_{n+1}+3b_n &= q(-2)^{n+2}+4q(-2)^{n+1}+3q(-2)^n \\ &= (-2)^n\,(4q-8q+3q) \\ &= (-2)^n(-q)\end{aligned}$$

ולכן $q=-5$. כמו כן, $c_{n+2}+4c_{n+1}+3c_n=0$ צריכה להיפתר עם תנאי ההתחלה $c_0=a_0-b_0=6,\ c_1=a_1-b_1=-8$. את זה ניתן לבצע פתרון משוואת נסיגה לינארית הומוגנית. הפולינום האופייני של המשוואה הוא $t^2+4t+3=(t+1)(t+3)=0$ ולכן $c_n=A(-1)^n+B(-3)^n$ לאיזשהו $A,B\in\mathbb{C}$. ע"י הצבת הערכים $n=0,1$ מקבלים כי $A=5$, $B=1$. ■

תרגיל 5 חשבו נוסחה סגורה לנוסחת הנסיגה

$$a_{n+2}+4a_n=6\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+3\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

עם $a_0=a_1=1$.

פתרון. אנחנו רוצים למצא פתרונות של $b_{n+2}+b_n=6\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+3\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. נחפש פתרון מהצורה $b_n=A_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+A_2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.
מתקיים כי

$$\begin{aligned}b_{n+1} &= A_1\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right)+A_2\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) \\ &= A_1\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)+A_2\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= A_2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-A_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

ובאופן דומה $b_{n+2}=-A_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-A_2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. ■
אנחנו רוצים

$$\begin{aligned}6\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+3\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = b_{n+2}+4b_n &= (-A_1+4A_1)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+(-A_2+4A_2)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= 3A_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+3A_2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

ולכן $A_1=2,\ A_2=1$.
נותר לנו לפתור את המשוואה הלינארית ההומוגנית

$$c_{n+2}+4c_n=0$$

עם תנאי ההתחלה $c_0=a_0-b_0=1-2\cos(0)-1\sin(0)=-1$ ו־$c_1=a_1-b_1=1-1=0$.
הפולינום האופייני של הסדרה c_n הוא $t^2+4=(t-2i)(t+2i)=0$ והנוסחה הסגורה המתקבלת היא מהצורה $A(2i)^n+B(-2i)^n$. לפי הצבת הערכים $n=0,1$ מקבלים

$$\begin{cases}A+B=-1\\ 2iA-2iB=0\end{cases}\qquad\Rightarrow\qquad A=B=-\frac{1}{2}$$

והתשובה הסופית היא

$$\begin{aligned}a_n=b_n+c_n &= 2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)+(-\frac{1}{2}\cdot 2^n)\,(i^n+(-i)^n) \\ &= (2-2^{n-1})\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

הצבות נפוצות

הפונקציה $f(n)$	הצבה לסדרה (c_n)
קבוע c	A
cn	$A_0 + A_1 n$
cn^m	$A_0 + A_1 n + \ldots + A_m n^m$
cr^n $(r \in \mathbb{R})$	Ar^n
$c\cos(\alpha n),\ c\sin(\alpha n)$	$A_1\cos(\alpha n) + A_2\sin(\alpha n)$
$cn^m r^n$	$r^n(A_0 + A_1 n + \ldots + A_m n^m)$

הערה הטבלה למעלה היא לא ממצה ויש עוד הרבה אפשרויות לפונקציה $f(n)$. בנוסף, ההצבה המוצעת בטבלה היא לא בהכרח ההצבה הטובה היותר, למשל, ראו בתרגיל הבא.

תרגיל 6

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 3^n$$

ו־$a_0 = a_1 = 1$.

פתרון. אנחנו מחפשים סדרות $(b_n), (c_n)$ כך ש־ $b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n = 3^n$ ו־$c_{n+2} - 6c_n + 9c_n = 0$ עם תנאי התחלה שנקבעים ע"י a_0, a_1. נשים לב כי הפולינום האופייני של c_n בהכרח יהיה $t^2 - 6t + 9 = (t-3)^2$ ובפרט $c_n = (An + B)3^n$ והפתרון המוצע ע"י הטבלה ל־(b_n) בפרט מקיים משוואה הומוגנית ולא את המשוואה שאנחנו מעוניינית לחשב. באופן דומה גם פתרון מהצורה $b_n = An \cdot 3^n$ לא יוכל לפתור משוואה לא־הומוגנית.
ננסה את $b_n = An^2 3^n$.

$$\begin{aligned} 3^n = b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n &= 3^{n+2}A(n+2)^2 - 6 \cdot 3^{n+1}A(n+1)^2 + 9 \cdot 3^n A n^2 \\ &= 3^{n+2} \cdot 2A \end{aligned}$$

ולכן $b_n = An^2 3^n$ עם $A = \frac{1}{18}$ פותר את המשוואה.
נמצא כעת פתרון לנוסחת הנסיגה $c_{n+2} - 6c_{n+1} + 9c_n = 0$ בתנאי ההתחלה $c_0 = a_0 - b_0 = 1$ ו־$c_1 = a_1 - b_1 = \frac{5}{6}$.
ידוע כי $c_n = (An + B)3^n$ ו־

$$\begin{cases} A \cdot 0 + B = 1 \\ (A \cdot 1 + B) \cdot 3 = \frac{1}{6} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{17}{18},\ B = 1$$

■

ולכן קיבלנו את המשוואה

$$.a_n = \left(\frac{1}{18}n^2 - \frac{17}{18}n + 1\right)3^n$$

פרק 9

תרגול 9

9.1 פונקציות יוצרות

הגדרה בהינתן סדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ (ולא בהכרח של שלמים חיוביים, אבל לרוב זה המקרה המעניין) מגדירים טור פורמלי $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ שנקרא <u>הפונקציה היוצרת</u> של הסדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

9.1.1 דוגמאות בסיסיות

1. הפונקציה היוצרת של הסדרה הקבועה $a_n=1$ לכל n היא הטור $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$. נשים לב ש־$xF(x)=F(x)-1$, וע"י העברת אגפים מקבלים $(1-x)F(x)=1$. זה מצדיק את הסימון $F(x)=\frac{1}{1-x}$.
2. נקבע $m\in\mathbb{N}$ ונסמן לכל $n\in\mathbb{N}$, $a_n=\binom{m}{n}$. אז $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n=\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^n=(1+x)^m$.

9.1.2 פעולות על פונקציות יוצרות

עצם המעבר מסדרה לפונקציה יוצרת איננו הרבה מעבר לפעולה פורמלית. נשים לב כי, למרות השם, פונקציות יוצרות הן לא פונקציות במובן הקבוצתי. בפרט, לרוב לא מתייחסים לתחום ולתמונה של פונקצייה יוצרת, ולעתים קרובות גם לא ניתן לפרש את התמונה של הפונקציה באופן קוהרנטי (למשל־ מה הפירוש בהצבת 1 בפונקציה היוצרת $\frac{1}{1-x}$?). מצד שני־ במקרים הספציפיים בהם ניתן לפרש את הפונקציה היוצרת בתוך השדה או האלגברה שאנו עובדים בה, התורה של פונקציות יוצרות אומרת ששוויון בין ביטויים פורמליים אכן גורר שוויון בין הפונקציות המתקבלות.

יהיו $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ו־$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x)$ פוקציות יוצרות. הפעולות הבאות מוגדרות.

1. **סכום של פונקציות יוצרות**

$$F(x)+G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)\,x^n$$

2. **כפל של פונקציה יוצרת בסקלר** עבור $\lambda\in\mathbb{C}$

$$\lambda F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n)\,x^n$$

3. **מכפלת פונקציות יוצרות**

$$F(x)G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\,,$$

כאשר c_n הסדרה המוגדרת ע"י $c_n=\sum_{m=0}^{n}a_mb_{n-m}$.

נשים לב־ אם נתייחס לאיבר x בתור הפונקציה יוצרת המתאימה לסדרה $a_1 = 1$ ו־$a_n = 0$ לכל $n \neq 1$, מקבלים כי $xF(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n$. כמו כן, לקבועים $\lambda \in \mathbb{C}$ ניתן להתייחס בתור הסדרה $a_0 = \lambda$ ו־$a_n = 0$ לכל $n \neq 0$, ולקבל כי $\lambda F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n)x^n$. בפרט, הפונקציה היוצרת $1 = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots$ מהווה איבר נייטרלי לכפל של פונקציות יוצרות.

תרגיל 1 כתבו נוסחה לפונקציה היוצרת של הסדרה a_n של מספר הפתרונות של $x_1+x_2+x_3 = n$ **עבור** $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 6$ מספרים שלמים.

פתרון. חישוב הסדרה a_n יכול להתבצע באופן ישיר ע"י הכלה והדחה, כפי שעשינו בתרגולים הקודמים. נשתמש בשיטה אחרת.

נשים לב כי מספר הפתרונות של $x_1 + x_2 + x_3 = n$ עם $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 6$ שלמים שווה למקדם של x^n בתוך הפולינום $(1 + x + \ldots + x^6)^3$. לכן ניתן לקחת את הפונקציה היוצרת $F(x) = (1 + x + \ldots + x^6)^3$. ברמת העיקרון זה פתרון טוב, אבל מסיבות שנבהיר בקרוב נפתח את הפונקציה מעט יותר. נשים לב כי אם $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ היא הפונקציה היוצרת של הסדרה הקבועה, אז

$$1 + x + \ldots + x^6 = G(x) - x^7G(x) = (1 - x^7)G(x) = \frac{1 - x^7}{1 - x}.$$

בפרט־

$$F(x) = \left(1 + \ldots + x^6\right)^3 = \left(\frac{1 - x^7}{1 - x}\right)^3.$$

■

תרגיל 2 רשמו פונקציה יוצרת המתארת את מספר הדרכים לקבל n שקלים כסכום של מטבעות של שקל אחד, שני שקלים, חמישה שקלים ועשרה שקלים.

פתרון.

$$\begin{aligned} F(x) &= (1 + x + x^2 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + \ldots)(1 + x^5 + x + 10 + \ldots)(1 + x^{10} + x^{20} + \ldots) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{5n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{10n}\right) \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^{10}} \end{aligned}$$

■

תרגיל 3 בכמה דרכים ניתן לבחור 20 כדורים בשלושה צבעים כך ש־

1. מספר הכדורים האדומים זוגי,
2. מספר הכחולים גדול מ־13,
3. יש לכל היותר 5 לבנים?

פתרון. כגודל המקדם של x^{20} בפונקציה היוצרת

$$(1 + x^2 + x^4 + \ldots)(x^{14} + x^{15} + \ldots)(1 + x + x^2 + \ldots + x^5) = \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{x^{14}}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^6}{1 - x}.$$

■

9.1.3 המשפט הבינומי המורחב וחישוב מקדמים

כשהגדרנו את המקדם הבינומי בשיעורים קודמים השתמשנו בהגדרה הקומבינטורית־ $\binom{n}{m}$ הוגדר להיות מספר הדרכים לבחור תת־קבוצה מגודל m מתוך קבוצה בגודל n, והמספר המדוייק הוא

$$.\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}$$

נשים לב כי הנוסחה באגף הימני אינה מצריכה כי n יהיה מספר שלם, ואפשר להכליל אותה לכל $n \in \mathbb{C}$. למשל

1. עבור $m \geq 0$ שלם

$$\binom{\frac{1}{2}}{m} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{3-2m}{2}\right)}{m!} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\cdot\frac{3\cdot 5\cdot\ldots(2m-3)}{m!}$$

2. עבור $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\binom{-n}{m} = \frac{-n(-n-1)\cdot(-n-m+1)}{m!} = (-1)^m\frac{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+m-1)}{m!} = (-1)^m\binom{n+m-1}{m}$$

משפט 4 (המשפט הבינומי) כפונקציות יוצרות, השוויון

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

מתקיים לכל $\alpha \in \mathbb{Z}$.

הערה 1. המונח שוויון כפונקציות יוצרות אומר, כי שתי הפונקציות ניתנות לפיתוח באופן יחיד כטור חזקות פורמלי עם אותם המקדמים. בפרט, אם ניתן לפרש את הפונקציה יוצרת כפונקציה על הממשיים או המרוכבים (או באלגברה אחרת) אז מתקיים כי בכל נקודה בה אגף ימין וגם אגף שמאל מוגדרים, הם בהכרח יהיו שווים.

2. המשפט למעשה נכון בכלליות גדולה יותר מאשר $\alpha \in \mathbb{Z}$, אבל לא נתעסק בזה כרגע.

תרגיל 4 מה מספר הפתרונות ל־$x_1 + x_2 + x_3 = 20$ עם $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 6$ שלמים?

פתרון. לפי התרגיל הראשון, צריך לחשב את המקדם ה־20 של הפונקציה היוצרת $\left(\frac{1-x^7}{1-x}\right)^3$. לפי המשפט

$$\begin{aligned}(1-x^7)^3(1-x)^{-3} &= (1-3x^7+3x^{14}-x^{21})\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}x^n \\ &= (1-3x^7+3x^{14}-x^{21})\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{3+n-1}{n}x^n\end{aligned}$$

המקדם של x^{20} הוא $(-1)^{20}\binom{22}{20} - 3\cdot(-1)^{13}\binom{15}{13} + 3(-1)^6\binom{8}{6}$. ∎

תרגיל 5 חשבו את מספר הדרכים לסדר את 20 הכדורים מתרגיל 3.

פתרון.

$$\frac{x^{14}(1-x^6)}{(1-x)^3(1+x)} = x^{14}(1-x^6)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n+2}{n}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)$$

לחשב את המקדם של x^{14} בביטוי למעלה שקול לחישוב של המקדם של x^6 בביטוי

$$(1-x^6)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n+2}{n}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)$$

וזה שווה להפרש בין המקדם של x^6 למקדם של x^0 בביטוי $\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n+2}{n}x^n\right)$, כלומר

$$.\sum_{m=0}^{6}(-1)^m\binom{m+2}{m}\cdot(-1)^{6-m}-1=\sum_{m=0}^{6}\binom{m+2}{m}-1$$

■

9.1.4 נוסחאות נסיגה לינאריות בעזרת פונקציות יוצרות

תרגיל 6 פתרו את נוסחת הנסיגה ההומוגנית הבאה באמצעות פונקציות יוצרות

$$a_0=3,\ a_1=4,\ a_2=1,$$
$$a_{n+3}-a_{n+2}+a_{n+1}-a_n=0$$

פתרון. נכפול את המשוואה $a_{n+3}-a_{n+2}+a_{n+1}-a_n=0$ ב-x^{n+3} ונסכום לכל n. נקבל:

$$\begin{aligned}0&=\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+3}x^{n+3}-a_{n+2}x^{n+3}+a_{n+1}x^{n+3}-a_nx^{n+3})\\&=(F(x)-a_0-a_1x-a_2x^2)-x(F(x)-a_0-a_1x)+x^2(F(x)-a_0)-x^3F(x)\\&=F(x)(1-x+x^2-x^3)-a_0(1-x+x^2)-a_1(x-x^2)-a_2x^2\\&=F(x)(1-x+x^2-x^3)-(3-3x+3x^2+4-4x^2+x^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad F(x)&=\frac{7-3x}{(1-x+x^2-x^3)}=\frac{7-3x}{(1-x)(1+x^2)}=\left(\frac{2}{1-x}+\frac{2x+5}{1+x^2}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}2x^n+\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^nx^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}5(-1)^nx^{2n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2+2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)+5\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)x^n\end{aligned}$$

■

פרק 10

תרגול 10

10.1 פונקציות יוצרות־ המשך

תרגיל 1 פתרו את נוסחת הנסיגה הבאה בעזרת שימוש בפונקציות יוצרות

$$.a_0 = 1,\ a_1 = 5, \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + 3^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

פתרון. נגדיר $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. אז

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 + 5x + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^{n+2} \\ &= 1 + 5x + \sum_{n=0}^{\infty} (4a_{n+1} - 4a_n + 3^n)x^{n+2} \\ &= 1 + 5x + 4x(F(x) - 1) - 4x^2F(x) + x^2\frac{1}{1-3x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad F(x)(1 - 4x + 4x^2) = 1 + x + \frac{x^2}{1-3x} = \frac{1-2x-3x^2}{1-3x} \\ &\Rightarrow \quad F(x) = \frac{1-2x+3x^2}{(1-2x)^2(1-3x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{(1-2x)^2} + \frac{C}{1-3x} \end{aligned}$$

מציאת מכנה משותף והשוואת מקדמים נותנת

$$A = -\frac{1}{2},\ B = 1\frac{1}{2},\ C = 0$$

ולכן

$$.\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{2}(1-2x)^{-1} + \frac{3}{2}(1-2x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\binom{n+1}{n}\right) 2^n x^n$$

■

תרגיל 2 נתונה נוסחת הנסיגה הבאה.

$$a_0 = 1,\ a_1 = 5,$$

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \pmod 3 \\ -7 & n \equiv 0 \pmod 3 \\ 10 & n \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$$

מצאו נוסחה סגורה לאיבר ה־n בסדרה.

פתרון. נסמן $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. וננסה להשתמש בכלל הנסיגה כדי לרשום את F בצורה שונה. נרשום את נוסחת הנסיגה הנתונה, אלא שנכפול את השורה $a_{n+2}-7a_{n+1}+10a_n$ במשתנה x^{n+2}.

$$\begin{aligned}
a_2x^2-7a_1x^2+10a_0x^2&=x^2\\
a_3x^3-7a_2x^3+10a_1x^3&=-7x^3\\
a_4x^4-7a_3x^4+10a_1x^4&=10x^4\\
a_5x^5-7a_4x^5+10a_3x^5&=x^5\\
&\vdots
\end{aligned}$$

אם נסכום את הביטויים באגף שמאל ובאגף ימין נקבל

$$F(x)-a_1x-a_0-7x(F(x)-a_0)+10x^2F(x)=\frac{x^2}{1-x^3}-\frac{7x^3}{1-x^3}+\frac{6x^4}{1-x^3}=\frac{x^2-7x^3+10x^4}{1-x^3}$$

נציב את הערכים הנתונים $a_0=1$ ו־$a_1=5$ כדי לקבל

$$F(x)(1-7x+10x^2)=\frac{x^2-7x^3+10x^4}{1-x^3}+1-2x$$

ואחרי פיתוח מקבלים

$$\begin{aligned}
F(x)&=\frac{x^2}{1-x^3}+\frac{1-2x}{(1-2x)(1-5x)}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}5^nx^n
\end{aligned}$$

■

10.1.1 פעולות נוספות על פונקציות יוצרות

נצרף עוד כמה פעולות חשובות.

3. **הזזה ימינה ושמאלה**

$$xF(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n,$$

ו־

$$\frac{1}{x}((F(x)-a_0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^n.$$

4. **אופרטור הגזירה**

$$DF(x)=\frac{d}{dx}F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n.$$

5. **אופרטור הסכימה**

$$\frac{1}{1-x}F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+a_1+\ldots+a_n)x^n.$$

תרגיל 3 השתמשו בפעולות שהגדרנו לעיל כדי לחשב את הנוסחאות הבאות

1. $\sum_{n=0}^{m} n$
2. $\sum_{n=0}^{m} n(n-1)$.
3. $\sum_{n=0}^{m} n(n-1)(m-n)$

פתרון.

.1

$$F(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$
$$DF(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$
$$\frac{1}{1-x}DF(x) = \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{m}(n+1)\right)x^m$$

לכן הערך הנדרש הוא המקדם של x^{m-1} באגף שמאל. מצד שני, לפי המשפט הבינומי המוכלל, מקדם זה הוא

$$(-1)^{m-1}\binom{-3}{m-1} = (-1)^{m-1}(-1)^{m-1}\binom{3+m-2}{m-1} = \binom{m+1}{m-1} = \frac{(m+1)m}{2}.$$

.2

$$F(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$
$$DF(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$
$$D^2F(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$$
$$\frac{1}{(1-x)}D^2F(x) = \frac{2}{(1-x)^4} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{m}(n+1)(n+2)\right)x^m$$

לכן הערך הנדרש הוא המקדם של x^{m-2} באגף שמאל. מצד שני, לפי המשפט הבינומי המוכלל, מקדם זה הוא

$$2\cdot(-1)^{m-2}\binom{-4}{m-2} = 2\cdot(-1)^{m-2}(-1)^{m-2}\binom{4+m-3}{m-2} = 2\binom{m+1}{m-2} = \frac{(m+1)m(m-1)}{3}.$$

3. לפי התרגיל הקודם

$$D^2F(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$$

וע"י הזזה ימינה פעמיים נקבל

$$x^2D^2F(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3}\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n.$$

כמו כן, לפי הסעיף הראשון, אחרי הזזה לימין, מקבלים

$$xDF(x)=\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}nx^n.$$

נכפול את שתי הפונקציות כדי לקבל

$$\frac{2x^3}{(1-x)^5}=(xDF(x))(x^2D^2F(x))=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{m}n(n-1)(m-n)\right)x^n.$$

מצד שני, לפי המשפט הבינומי

$$\frac{2x^3}{(1-x)^5}=2x^3\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-5}{n}(-1)^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}2\binom{n+4}{n}x^{n+3}$$

ולכן $\sum_{n=0}^{m}n(n-1)(m-n)=2\binom{n+1}{n-3}$ אם $n\geq 3$ ו־0 אחרת.

■

תרגיל 4 מצאו סדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ המקיימת כי $\sum_{m=0}^{n}a_ma_{n-m}=1$ לכל $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

פתרון. נתבונן בפונקציה היוצרת $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. נשים לב כי

$$F(x)^2=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}a_ma_{n-m}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

לכן סדרת המקדמים של הפונקציה היוצרת $F(x)=\sqrt{\frac{1}{1-x}}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ מקיימת את הנוסחה שרצינו. כדי למצא אותה נשתמש במשפט הבינומי המוכלל

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-1)^nx^n.$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^nn!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}x^n$$

■

10.1.2 פונקציות יוצרות מעריכיות

תרגיל 5 נתונה נוסחת הנסיגה הבאה

$$a_0=a_1=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+(n+1)a_n\quad\forall n\geq 0.$$

מצאו פונקציה יוצרת מתאימה לסדרה והערך a_{10}.

פתרון. נתבונן בפונקציה היוצרת המעריכית $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$. במקום לפתח את $F(x)$ לפי נוסחת הנסיגה, נפתח את $DF(x) = \frac{d}{dx}F(x)$:

$$\begin{aligned} DF(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+2}x^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)a_n x^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} + x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} = (1+x)F(x) \end{aligned}$$

קיבלנו כי $F(x)$ היא פתרון של המשוואה $F'(x) = (1+x)F(x)$ עם תנאי ההתחלה $F(0) = 1$. חישוב מישדי"פ נותן: $\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{d}{dx}(\log(F(x))) = (1+x) \Rightarrow \log(F(x)) = x + \frac{x^2}{2} \Rightarrow F(x) = \exp(x + \frac{x^2}{2})$ ולכן,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + \frac{x^2}{2})^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}\right).$$

בפרט

$$\frac{a_{10}}{(10)!} = \frac{1}{0!}\cdot\frac{1}{2^5 5!} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^4 4!} + \frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{2^3 3!} + \frac{1}{8!}\cdot\frac{1}{2^2 2!} + \frac{1}{10!}\cdot\frac{1}{2^1\cdot 1} = 34752.000263655.$$

■

תרגיל 6 בהינתן סדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, כתבו נוסחה סגורה לפונקציה היוצרת $e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^n}{n!}$. השתמשו בנוסחה זו כדי למצא סדרה a_n המקיימת כי $\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}a_j = 1$ לכל $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

פתרון.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m}a_m}{(n-m)!m!}\right)x^m \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(-1)^{n-m}a_m\right)x^m \end{aligned}$$

בפרט, אם (a_n) מקיימת את התנאי הנדרש, אז

$$e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^n}{n!} = e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}$$

ולכן $a_n = 2^n$ לכל n. ■

פרק 11

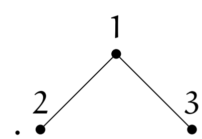
תרגול 11

11.1 תורת הגרפים

11.1.1 הגדרות בסיסיות

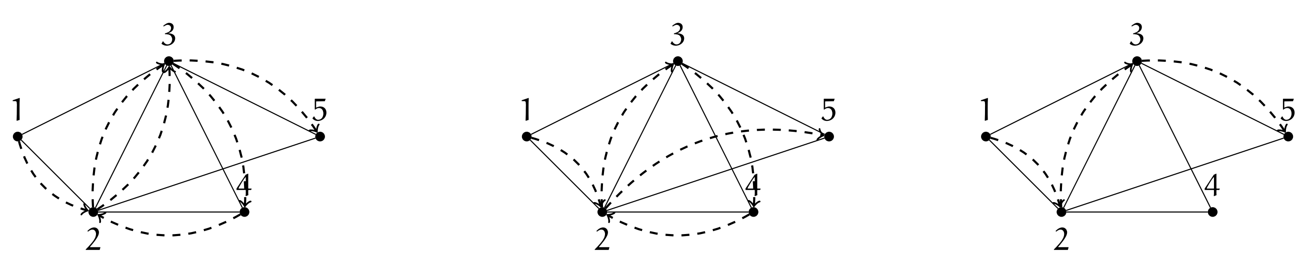
הגדרה (גרף לא מכוון) גרף לא מכוון הוא זוג (V, E) בו $V \neq \emptyset$ היא קבוצה (לא בהכרח סופית) ו־$E \subseteq \{\{v_1, v_2\} \mid v_1, v_2 \in V\}$.
הקבוצה V נקראת קבוצת הקודקודים (*Vertices*) של G, ו־E נקראת קבוצת הצלעות (*Edges*) של G. שני קודקודים $v_1, v_2 \in V$ נקראים מחוברים בצלע (או שכנים) אם $\{v_1, v_2\} \in E$.

למשל, עבור $V = \{1, 2, 3\}$ ו־$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ מקבלים



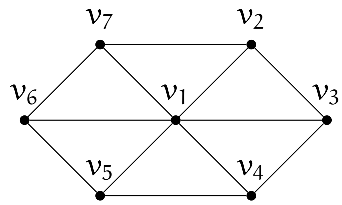
גרף **מכוון** מוגדר בדומה להיות זוג (V, E) בו V היא קבוצה לא־ריקה ו־$E \subseteq V \times V$ היא אוסף של זוגות סדורים.
הגרף (מכוון או לא מכוון) נקרא **פשוט** אם אף קודקוד אינו מחובר לעצמו בצלע, כלומר $\{v\} \notin E$ (או $(v, v) \notin E$) לכל $v \in V$.

הגדרה (טיול, מסלול, מסלול פשוט מעגל) טיול באורך n על גרף $G = (V, E)$ הוא n־יה סדורה $(v_1, \ldots, v_n)$ של קודקודים, כך שלכל $i = 1, \ldots, n-1$, $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$.
מסלול הוא טיול בו אף צלע לא מופיעה פעמיים.
מסלול פשוט הוא מסלול בו אף קודקוד לא מופיע פעמיים.
מעגל הוא טיול בו $v_0 = v_n$, מעגל פשוט הוא מסלול פשוט שהוא גם מעגל.



מסלול פשוט $(1, 2, 3, 5)$ מסלול לא פשוט $(1, 2, 3, 4, 2, 5)$ טיול שאינו מסלול $(1, 2, 3, 4, 2, 3, 5)$

תרגיל 1 נתון גרף לא־מכוון וללא לולאות



מצאו את מספר הטיולים המתחילים ב־v_1 באורך n בגרף.

פתרון. נסמן את מספר הטיולים באורך n המתחילים ב־v_1 ב־a_n. כמו כן, נשים לב כי מספר הטיולים באורך n המתחילים ב־$v_2, v_3, \dots, v_6$ או v_7 הוא זהה. נסמנו אותו ב־b_n. מתקיימת משוואת הנסיגה הבאה:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \quad b_0 = 1 \\ a_{n+1} = 6b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases}$$

או בסימון מטריצות

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

כדי לחשב את החזקה ה־$n+1$־ית של המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ נשים לב כי הפולינום האופייני של המטריצה הוא $t^2 - 2t - 6 = (t-1-\sqrt{7})(t-1+\sqrt{7})$ ולכן במטריצה לכסינה (שני ערכים עצמיים שונים) ומתקיים

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \begin{pmatrix} -1+\sqrt{7} & -1-\sqrt{7} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{7} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{7} \\ -1 & -1+\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} &= \left(\frac{1}{2\sqrt{7}} \begin{pmatrix} -1+\sqrt{7} & -1-\sqrt{7} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{7} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{7} \\ -1 & -1+\sqrt{7} \end{pmatrix} \right)^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{7}} \begin{pmatrix} -1+\sqrt{7} & -1-\sqrt{7} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+\sqrt{7})^{n+1} & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{7})^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{7} \\ -1 & -1+\sqrt{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 6\left((1+\sqrt{7})^n(2+\sqrt{7}) - (1-\sqrt{7})^n)(2-\sqrt{7})\right) \\ (1+\sqrt{7})^{n+1}(2+\sqrt{7}) - (1-\sqrt{7})^{n+1}(2-\sqrt{7}) \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

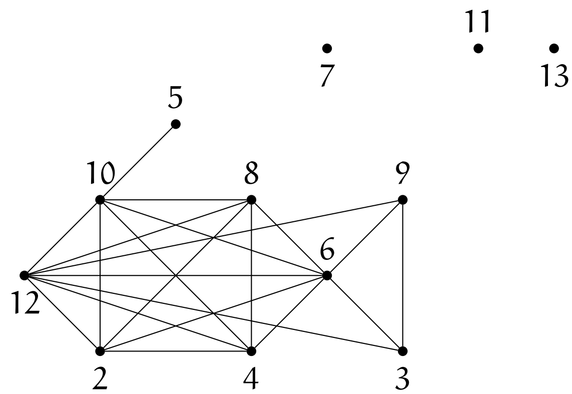
■

הגדרה רכיב קשירות בגרף $G = (V, E)$ הוא תת־קבוצה $V' \subseteq V$ כך שלכל $v_1, v_2 \in V'$ קיים טיול ב־G בין v_1 ל־v_2.
הגרף נקרא קשיר אם הוא מורכב מרכיב קשירות יחיד.

תרגיל 2 נתון גרף על הקבוצה $V = \{2, 3, \dots, 13\}$ עם צלע בין v_1 ל־v_2 אס"ם $\gcd(v_1, v_2) > 1$. מהם רכיבי הקשירות של הגרף? ציירו את הגרף.

פתרון. כל המספרים הזוגיים נמצאים באותו רכיב קשירות, וכן כל המספרים המתחלקים ב־3, כל אלה המתחלקים ב־5, המתחלקים ב־7, ב־11 וב־13. בנוסף, מכיוון ש־6 נמצא ברכיב הקשירות של 3 וכן של 2, מקבלים ש**כל** המספרים המחלקים

ב־3 או ב־2 נמצאים באותו רכיב קשירות. באותו אופן, מכיוון ש־10 מתחלק ב־5 וגם ב־2, $\{5,10\}$ נמצאים באותו רכיב קשירות. שאר האיברים הם **מבודדים**.



■

הגדרה (דרגה של קודקוד) הדרגה של קודקוד $v \in V$ היא מספר הקודקודים $v' \in V$ כך ש־$\{v, v'\} \in E$.

טענה 1 (נוסחת אוילר) בהינתן גרף $G = (V, E)$ לא מכוון מתקיים

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| .$$

הוכחת הטענה היא פשוט ספירה כפולה של מספר הצלעות בגרף.

תרגיל 3 נתונה קבוצת הקודקודים $V = \{1, 2, \ldots, 7\}$.

1. האם קיים גרף G בו לכל קודקוד יש דרגה 5?
2. האם קיים גרף G שסדרת הדרגות שלו הם $(1, 1, 2, 2, 3, 5, 6)$?

פתרון.

1. לא, מכיוון שבגרף שכזה היה מתקיים
$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 5 \cdot 7 = 35$$
ובפרט אינו זוגי.

2. במקרה זה מתקיים כי $\sum_{v \in V} \deg(v) = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 5 + 6 = 20$ וערך זה הוא אכן זוגי. עדיין, נראה שגרף כזה לא קיים. נניח בשלילה כי $G = (V, E)$ הוא גרף עם סדרת הדרגות הנתונה. בפרט קיים קודקוד בעל דרגה 6, ועד כדי שינוי סדר הקודקודים, ניתן להניח כי $\deg(1) = 6$. בנוסף, קיימים שני קודקודים שדרגתם היא בדיוק 1, שנסמנם v_1, v_2, והם מחוברים רק ל־1.

 כמו כן, מההנחה, קיים קודקוד v_3 שדרגתו היא 5. מצד שני, קבוצת השכנים של קודקוד כזה בהכרח מוכל בקבוצה $V \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$ שגודלה הוא 4. סתירה.

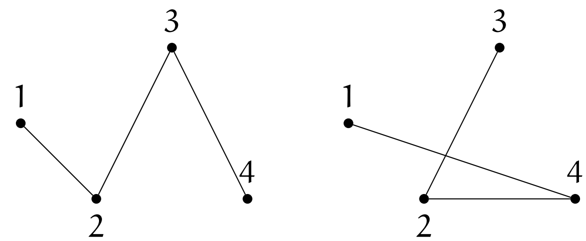
■

11.1.2 איזומורפיזם של גרפים

הגדרה בהינתן גרפים $G=(V,E)$ ו־$G'=(V',E')$, איזומורפיזם $f:G\to G'$ הוא פונקציה $f:V\to V'$ המקיימת כי

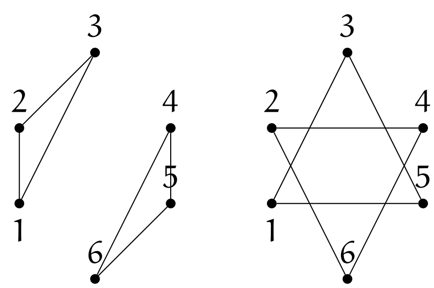
$$\{f(v_1),f(v_2)\}\in E' \quad\iff\quad \{v_1,v_2\}\in E.$$

דוגמה א.



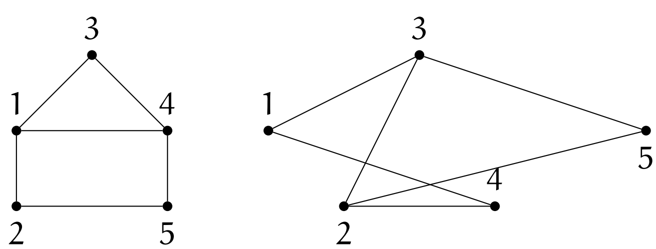
ע"י האיזומורפיזם
$$\begin{array}{l}1\mapsto 1\\ 2\mapsto 4\\ 3\mapsto 2\\ 4\mapsto 2\end{array}$$

ב.



ע"י האיזומורפיזם $2\mapsto 5$ ו־$f(i)=i$ לכל $i\neq 2$.

ג.

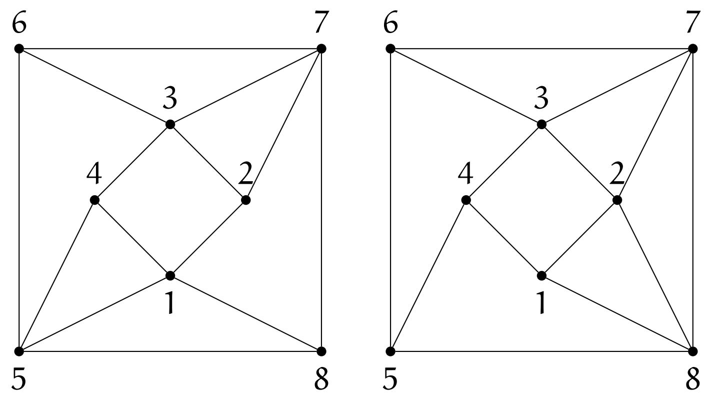


הגדרה הגרף המשלים של גרף $G=(V,E)$ הוא הגרף $\overline{G}=(V,\overline{E})$ עם אותה קבוצת קודקודים וכך ש־$\overline{E}$ $e\in$ אס"ם $e\notin E$.

טענה 2 גרפים G_1,G_2 הם איזומורפיים אס"ם הגרפים המשלימים $\overline{G_1}$ ו־$\overline{G_2}$ הם איזומורפיים.

הגדרה גרף $G=(V,E)$ נקרא k רגולרי אם לכל $v\in V$ מתקיים כי $\deg(v)=k$.

תרגיל 4 האם הגרפים הבאים איזומורפיים?



פתרון. נסמן ב־$G_1 = (V_1, E_1)$ את הגרף הימני וב־$G_2 = (V_2, E_2)$ את הגרף השמאלי. נניח בשלילה כי $f : G_1 \to G_2$ הוא איזומורפיזם בין הגרפים. נתבונן בקודקוד $7 \in V_1$. דרגתו בגרף G_1 היא 4 ולכן $f(7)$ גם כן מדרגה 4, שכן איזומורפיזם משמר דרגות, ועל כן $f(7) \in \{1, 3, 5, 7\}$. כמו כן, נשים לב כי בגרף G_1 לקודקוד 7 יש 3 שכנים מדרגה 4, שהם $2, 3$ ו־8.

מצד שני, בחינה של כל האפשרויות ל־$f(7)$ מראה כי לאף אחד מהם אין 3 שכנים (שונים) מדרגה 4, כפי שניתן לראות בטבלה הבאה־

קודקוד ב־G_2	דרגה	שכנים	דרגות השכנים
1	4	2,4,5,8	3,3,4,3
3	4	2,4,6,7	3,3,3,4
5	4	1,4,6,8	4,3,3,3
7	4	2,3,6,8	3,4,3,3

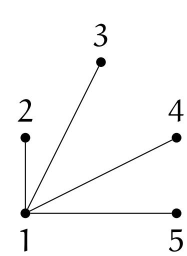
ומכיוון שאיזומורפיזם חייב לשמר שכנויות ודרגות, בהכרח לא יכול להתקיים כי f הוא איזומורפיזם. ■

הערה שימו לב כי בשאלה הקודמת, הגרפים G_1 ו־G_2 הם שניהם קשירים, בעלי אותו מספר קודקודים ואותה סדרת דרגות! לכן, אף אחד מהמאפיינים הללו אינם מספיקים כדי להוכיח איזומורפיזם של גרפים.

תרגיל 5 רשמו את כל הגרפים הקשירים(עד כדי איזומורפיזם) בני 5 קודקודים ובעלי 4 צלעות.

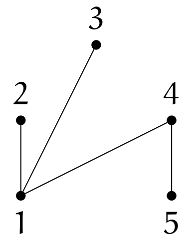
פתרון. ידוע לנו כי סכום הדרגות הוא $2 \cdot 4 = 8$ וכי אין קודקודים מדרגה 0 (כי הגרף קשיר). נחלק את הגרפים לפי הדרגה המקסימלית של קודקוד.

1. קודקוד מדרגה 4.



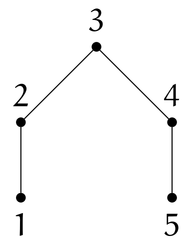
סדרת הדרגות האפשרית היחידה היא $(4, 1, 1, 1, 1)$, וכל הגרפים איזומורפיים.

2. קודקוד מדרגה 3.

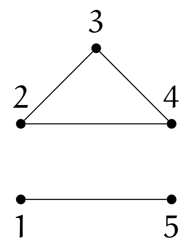


סדרת הדרגות האפשרית היחידה היא $(3, 2, 1, 1, 1)$ וכל הגרפים איזומורפיים.

3. קודקוד מדרגה 2



סדרות הקודקודים האפשרית היחידה היא $(2, 2, 2, 1, 1)$. קיים גרף נוסף בעל אותה סדרת דרגות־

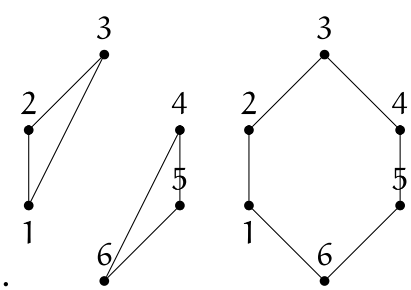


אך זה אינו קשיר.

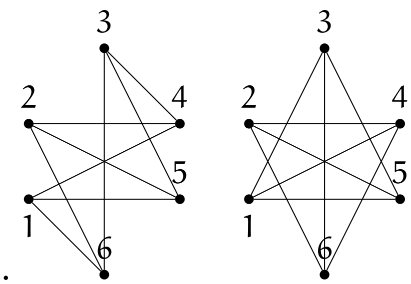
■

תרגיל 6 רשמו את כל הגרפים ה־2 רגולריים (עד כדי איזומורפיזם) על 6 קודקודים. כמה צלעות קיימים בגרף כזה? ענו אותה שאלה לגבי 3־רגולריים.

פתרון. גרף 2־רגולרי הוא איחוד של מעגלים. לכן, עד כדי איזומורפיזם, כל הגרפים ה־2־רגולריים הם



הגרפים ה־3־רגולריים הם בדיוק הגרפים המשלימים לגרפים ה־2 רגולריים.



.

■

11.1.3 עצים

הגדרה (עץ) עץ הוא גרף קשיר ללא מעגלים.

בהינתן גרף $G = (V, E)$, תת־גרף $G' = (V', E')$ (כלומר גרף כך ש־$V' \subseteq V$ ו־$E' \subseteq E$) נקרא <u>פורש</u> אם $V = V'$.
עץ פורש של גרף G הוא תת גרף פורש שהוא גם עץ.

שאלה נפוצה בתורת הגרפים היא־ בהינתן גרף בן n נקודות, כמה עצים פורשים קיימים בגרף? בפרט, במקרה של בגרף המלא על n נקודות, השאלה הנשאלת היא־ כמה עצים קיימים על n קודקודים ממוספרים? התשובה לשאלה זו נתונה ע"י **משפט קיילי** ($Cayley$).

משפט 5 מספר העצים הפורשים על n קודקודים ממוספרים הוא n^{n-2}.

תרגיל 7 (סדרות פרופר) נתונה סדרת מספרים שלמים $0 \leq d_1, d_2, \ldots, d_n < n$ המקיימת $\sum_i d_i = 2n - 2$. חשבו את מספר העצים על קבוצת הקודקודים $\{1, \ldots, n\}$ כך ש־$\deg(i) = d_i$.
הסיקו מהחישוב את נוסחת קיילי.

פתרון. ראשית נשים לב לעובדה הבאה:

טענה 3 בכל עץ סופי $T = (V, E)$ עם $|V| > 2$ קיימים לפחות שני קודקודים מדרגה 1.

הוכחה. את הטענה ניתן להוכיח באינדוקציה על גודל העץ. אם בעץ יש בדיוק שני קודקודים הטענה ברורה, שכן העץ היחיד על שני קודקודים הוא $\overset{1}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{2}{\bullet}$. יהא T עץ בן n קודקודים. מכיוון ש־T קשיר וללא מעגלים כל מסלול המתחיל מקודקוד שרירותי ב־T חייב להסתיים לאחר לכל היותר $n-1$ צעדים, ודרגת הקודקוד האחרון במסלול היא 1 (אחרת היה ניתן להמשיך את המסלול). נסיר קודקוד זה מהעץ. מכיוון שהסרה של קודקוד מדרגה 1 לא פוגע בקשירות ולא יוצרת מעגלים, הגרף שקיבלנו אחרי ההסרה הוא עץ מגודל $n-1$, ומהנחת האינדוקציה יש לו 2 קודקודים מדרגה 1 ולפחות אחד מהקודקודים הללו לא היו מחוברים בעץ המקורי לקודקוד שהוסר (כי קודקוד זה היה מדרגה 1). לכן בעץ T יש לכל הפחות שני קודקודים מדרגה 1. ■

טענה 4 מספר הצלעות בעץ T בעל n קודקודים הוא $n-1$.

הוכחה. אינדוקציה על גודל העץ, הסרת קודקוד מדרגה 1 והצלע המחוברת. ■

פתרון התרגיל כדי לפתור את השאלה נשתמש באלגוריתם של פרופר (Prufer) לקידוד עצים פורשים על $\{1,\dots,n\}$. האלגוריתם מתאים לכל עץ פורש שכזה סדרה באורך $n-2$ באופן הבא:

1. נסרוק את העץ ונמצא בו קודקוד קודקוד מדרגה מינימלית ובעל ערך מינימלי.

2. לפי הטענה, דרגה זו היא 1 וערך הקודקוד הוא קטן מ־n (אחרת היה רק קודקוד אחד מדרגה 1).

3. נוסיף לסדרה את הערך המופיע בקודקוד (היחיד) המחובר לקודקוד שבחרנו.

4. נסיר את הקודקוד שבחרנו ונפעיל שוב את האלגוריתם על העץ המתקבל.

האלגוריתם מסתיים כאשר אנחנו נותרים עם עץ בגודל 1. נשים לב כי, מכיוון שבכל שלב של האלגוריתם עלינו לבחור להסיר אחד מתוך **שני** קודקודים מדרגה 1, ובכל מקרה אנו מסירים את הקודקוד עם הערך הנמוך יותר, בשום שלב באלגוריתם לא מוסר הקודקוד ה־n־י. הסדרה המתקבלת אחרי הפעלת האלגוריתם בהכרח מסתיימת ב־n, וניתן למחוק אותו ולהישאר עם סדרה באורך $n-2$.

כמו כן, נשים לב כי אם v הוא קודקוד מדרגה d, אזי הוא מופיע בסדרת פרופר של העץ בדיוק $d-1$ פעמים (פעם אחת לכל קודקוד שהוא מחובר אליו, מלבד ההורה שלו). לכן קיבלנו העתקה מאוסף העצים על n קודקודים עם דרגות $d_1,\dots,d_n$ לאוסף הסדרות באורך $\sum_i(d_i-1)=2n-n-2=n-2$ בו המספר i מופיע בדיוק d_i-i פעמים.

נבנה העתקה בכיוון ההפוך על מנת להסיק כי בניה זו היא חח"ע ועל. נשים לב קודם כי בסדרה $d_1,\dots,d_n$ חייב להיות i כך ש־$d_i=1$ (אחרת הסכום יוצא גדול מ־$2n$) ולכן אחד מהמספרים $\{1,\dots,n\}$ לא יכול להופיע בסדרה הנתונה. נמצא את המספר המינימלי i_0 שלא מופיע בסדרה, ו(אם לא קיים קודקוד כזה בגרף) נגדיר קודקוד v_{i_0} עם המספר i_0. נוציא מ־v_{i_0} צלע ונחבר למספר הראשון שמופיע בסדרה. נקצץ את המספר הראשון מהסדרה ונחזור על התהליך, עד לתומה של הסדרה. (מה קורה אם n לא מדרגה 1?!).

לבנות דוגמה.

נובע מכך כי מספר העצים הוא כמספר הסדרות באורך $n-2$ בהן המספר i מופיע d_i-1 פעמים לכל i, שהוא $\binom{n-2}{d_1-1,\dots,d_n-1}$.

אם נעבור על כל המקרים האפשריים של סדרת דרגות שכזו נקבל כי מספר העצים על $\{1,\dots,n\}$ הוא

$$\sum_{\substack{1\le d_1,\dots,d_n<n\\ d_1+\dots+d_n=2n-2}}\binom{n-2}{d_1-1,\dots,d_n-n}=\sum_{\substack{0\le \ell_1,\dots,\ell_n<n-1\\ \ell_!+\dots+\ell_n=n-2}}\binom{n-2}{\ell_1,\dots,\ell_n}=n^{n-2}\,.$$

■

פרק 12

תרגול 12

12.1 תורת הגרפים

12.1.1 איזומורפיזמים, עצים וכיו"ב

תרגיל 1 1. חשבו את מספר העצים עם קודקודים ממוספרים אשר סדרת דרגותיהם היא $(1,1,1,2,5)$.

2. חשבו את מספר העצים עם קודקודים ממוספרים אשר סדרת דרגותיהם היא $(1,1,1,2,3)$.

3. ציירו את העץ המקודד ע"י סדרת פרופר $(1,1,1,6,1,5)$.

פתרון.

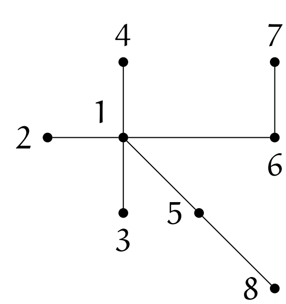
1. הסדרה הנתונה מתאימה לגרף בן 5 קודקודים. עץ בן 5 קודקודים הוא בעל 4 צלעות, ולכן מתקיים כי $\sum_{v\in V}\deg(v)=2n-2=8$. מצד שני, סכום הדרגות הנתונות הוא $1+1+1+2+5=10>8$ ולכן מספר העצים בעלי סדרת הדרגות הזו הוא 0.

2. האלגוריתם של פרופר מראה לנו כי בהינתן עץ ממוספר עם סדרת דרגות $(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ (בהכרח עם $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-n$) ניתן להתאים לו סדרה יחידה באורך $n-2$ על הקבוצה $\{1,\ldots,n\}$ בה הספרה i מופיע d_i-i פעמים. כמו כן, כל סדרה שכזו מגדירה עץ שקודקודיו $\{1,\ldots,n\}$ עם דרגות $(d_1,\ldots,d_n)$.

   בפרט, אוסף העצים על $\{1,\ldots,5\}$ שדרגותיהם הם $(1,1,1,2,3)$ הוא כמספר הסדרות באורך 3 בהן המספרים $1,2$ ו־3 מופיעים 0 פעמים, המספר 4 מופיע פעם 1 והמספר 5 מופיע פעמיים. מספר זה הוא $\binom{3}{2,1}=3$.

3. כדי לבנות את העץ המקודד ע"י הסדרה $(1,1,1,6,1,5)$ נתחיל בלמצא את הערך הקטן ביותר שלא מופיע בסדרה, ונבנה קודקוד עם מספר זה. נוסיף קודקוד נוסף שערכו המספר הראשון בסדרה ונחבר אותו לקודקוד החדש. נמחק את האיבר הראשון בסדרה ונחזור על התהליך, כאשר בכל שלב נוסיף קודקוד עבור הערך הקטן ביותר שלא מופיע בסדרה ולא התווסף בשום שלב עד כה.

   העץ המתקבל הוא



.

■

תרגיל 2 אבי וליאת מגיעים למסיבת לחיצות ידיים ביחד עם שלושה זוגות נוספים. לאורך המסיבה אף אדם לא לחץ את ידו של עצמו או של בן/בת זוגו, וכל לחיצת יד התרחשה פעם אחת בלבד. בסוף המסיבה שאלה ליאת את שבע האנשים האחרים עם כמה אנשים הם לחצו ידיים במהלך המסיבה וקיבלה 7 תשובות שונות.

עם כמה אנשים לחצה ליאת ידיים במסיבה? מה לגבי אבי?

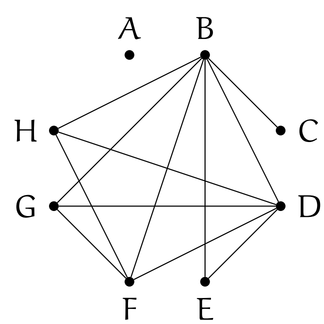
פתרון. נגדיר גרף $G=(V,E)$ שקודקודיו הוא אורחי המסיבה ו־$\{v,u\}\in E$ אם"ם v ו־u לחצו ידיים במהלך המסיבה. לפי התנאים הנתונים, הגרף הנתון הוא פשוט, לא־מכוון וללא לולאות. כמו כן, מכיוון שאף אדם במסיבה לא לוחץ ידיים עם עצמו או עם בן/בת־זוגו, דרגות הקודקודים בגרף חסומות בין 0 ל־6. מהנתון כי ליאת קיבלה 7 תשובות שונות, מקבלים כי דרגות הקודקודים בגרף הן $(0,1,2,3,4,5,6,d_L)$ כאשר d_L היא הדרגה של ליאת.

נשים לב כי, מכיוון שכל קודקוד בגרף חייב לקיים כי הוא אינו שכן של עצמו, אינו שכן של בן/בת זוגו ואינו שכן של הקודקוד מדרגה 0, נובע כי כל קודקוד בגרף הוא מדרגה $6 \leq$ וכי אי־שוויון זה הוא חזק אלא אם כן בן הזוג של הקודקוד הוא מדרגה 0. לכן קיבלנו כי הקודקוד מדרגה 6 והקודקוד מדרגה 0 הם בהכרח זוג.

נשים לב בנוסף כי הקודקוד מדרגה 6 **בהכרח** מחובר בצלע לקודקוד מדרגה 1 (כי הוא מחובר לכל הקודקודים מלבד עצמו ובן/בת זוגו). נובע כי כל הקודקודים שאינם אחד מהקודקודים מדרגה $0,1$ או 6 יכולים להיות לכל היותר מחוברים ל־5 קודקודים (לא לעצמם, לא לבן/בת זוגם ולא לקודקוד מדרגה 1) וכי המקרה היחיד שבו קודקוד יכול להיות מדרגה 5 היא אם הוא בן זוגו של הקודקוד מדרגה 1.

לבסוף, מכיוון שגם הקודקוד מדרגה 5 וגם הקודקוד מדרגה 6 בהכרח מחוברים לקודקוד מדרגה 2, נובע בהכרח כי בן/בת זוגו של הקודקוד מדרגה 2 הוא מדרגה 4, באותו אופן כמו קודם, ולבסוף־ נובע כי שני הקודקודים שנותרו הם בהכרח מדרגה 3, והם בהכרח זוג. מכיוון שדרגת הקודקוד של ליאת היא בהכרח היחיד שמופיעה פעמיים בסדרת הדרגות, נובע כי ליאת ואבי שניהם מיוצגים על ידי קודקודים מדרגה 3 ולחצו ידיים ל־3 אנשים.

נציג את הגרף המתואר בשאלה.

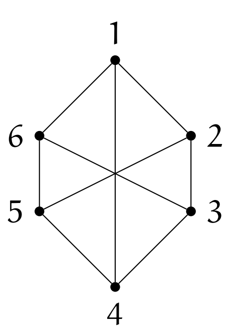


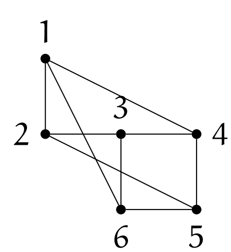
$$\begin{cases} \deg(A)=0 \\ \deg(B)=6 \\ \deg(C)=1 \\ \deg(D)=5 \\ \deg(E)=2 \\ \deg(F)=4 \\ \deg(G)=deg(H)=3 \end{cases}.$$

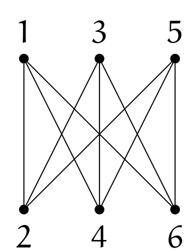
■

תרגיל 3 בדקו האם הגרפים הבאים איזומורפיים. מצאו איזומורפיזם במידה וכן, או הוכיחו כי איזומורפיזם כזה לא קיים.

א.

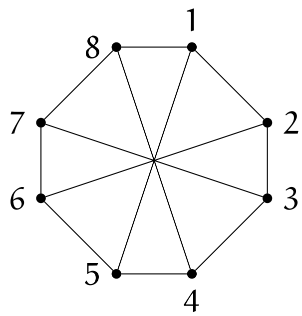
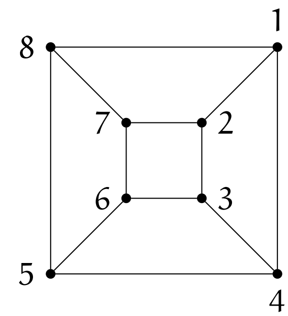
$G_1 =$ 

, $G_2 =$ 

, $G_3 =$ 

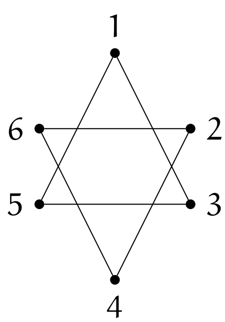
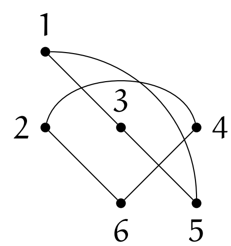
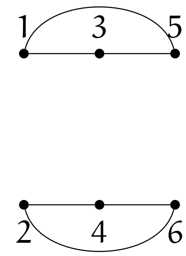
.

ב.

$.G_1 =$  , $G_2 =$ 

פתרון.

1. שלושת הגרפים הנתונים איזומורפיים. ניתן להוכיח זאת ע"י מציאת איזומורפיזם מפורש ביניהם, או לחילופין ניתן להשתמש בעובדה ש־$f : G_i \to G_j$ הוא איזומורפיזם אם"ם הפונקציה $f : V_i \to V_j$ משרה איזומורפיזם בין הגרפים המשלימים של G_i ו־G_j ($1 \leq i, j \leq 3$). במקרה הנתון הגרפים המשלימים הם

$.G_1^c =$  , $G_2^c =$  , $G_3^c =$ 

שלושת הגרפים הללו הם איחוד זר של שני מעגלים באורך 3 ובבירור איזומורפיים.

2. הגרפים אינם איזומורפיים. ניתן למשל להוכיח זו ע"י העובדה הבאה:

(א) בגרף G_1 לכל קודקוד קיימים בדיוק בשני מעגלים באורך 4 מהקודקוד לעצמו. למשל, הקודקוד 1 הוא נמצא במעגלים $(1, 8, 4, 5)$ ו־$(1, 2, 6, 5)$ וכל מעגל אחר המתחיל ב־1 יהיה בהכרח מאורך גדול מ־5.

(ב) בגרף G_2, לעומת זאת, לכל קודקוד ישנם 3 מעגלים באורך 4 מהקודקוד לעצמו. למשל, עבור הקודקוד 1 מתאימים המעגלים $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 8, 72)$ ו־$(1, 8, 5, 4)$.

שימו לב כי שני הגרפים בשאלה זו הם 3 רגולריים על 8 קודקודים. בפרט, מספר הקודקודים, מספר הצלעות וסדרת הדרגות שלהם היא זהה.

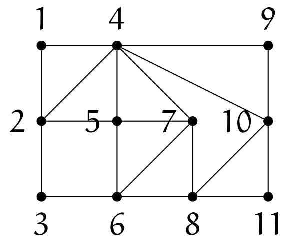
■

12.1.2 מעגלי ומסלולי אוילר

הגדרה (מעגל/מסלול אוילר) מסלול אוילר בגרף $G = (V, E)$ הוא מסלול העובר בכל צלעות הגרף פעם אחת בלבד (ויכול לחזור על קודקודים). מעגל אוילר הוא מסלול אוילר שהוא גם מעגל.

משפט 6 (אוילר Euler**)** בגרף G יש מעגל אוילר אס"ס G קשיר ודרגת כל קודקודי G היא זוגית.
בגרף G יש מסלול אוילר אס"ס מספר הקודקודים בעלי דרגה היא זוגית הוא 2.

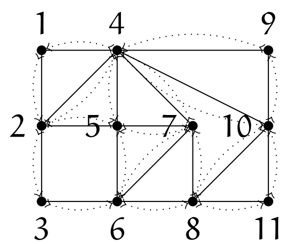
תרגיל 4 בדקו אם בגרף הבא קיים מעגל אוילר, ומצאו אותו במידה וכן.



פתרון. הגרף בבירור קשיר, ובדיקה ישירה מראה כי דרגת כל קודקוד היא זוגית:

$$\deg(1)=\deg(3=\deg(9)=\deg(11)=2,\ \deg(2=\deg(4)=\deg(5)=\deg(6)=\deg(8)\deg(10)=4\ .$$

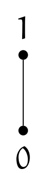
הנה דוגמה למעגל אוילר־

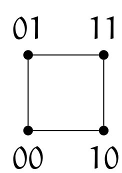


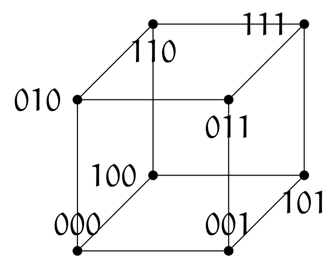
■

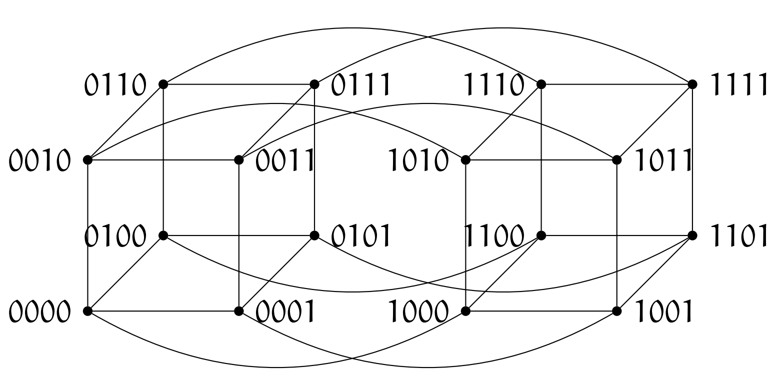
הערה (משפט אוילר לגרפים מכוונים) נניח כי $G=(V,E)$ הוא גרף מכוון, ונסמן ב־d^+ את דרגת הכניסה וב־d^- את דרגת היציאה. אז ב־G יש מעגל אוילר (מוגדר באותו אופן) אס"ם דרגת הכניסה של כל קודקוד שווה לדרגת היציאה ממנו.

תרגיל 5 גרף היפר־קוביה n מימדי מוגדר ע"י $Q_n=(V,E)$ כאשר V היא אוסף הסדרות באורך n על $0,1$ ושני קודקודים מחוברים בצלע אם הסדרות המגדירות אותם נבדלות באיבר אחד. הנה כמה מקרים בסיסיים.

$Q_1=$ 

, $Q_2=$ 

$Q_3=$ 

$Q_4=$ 

נמלה קוונטית מטיילת על קוביה n מימדית מקודקוד לקודקוד, כך שאין באפשרותה לחזור על צלע יותר מפעם אחת בשום שלב. בהנחה כי הנמלה מתחילה את מסלולה בנקודה 0, הראו כי באפשרותה לעבור בכל הקודקודים אס"ם n מספר זוגי או $n = 1$.

פתרון. נשים לב כי בגרף Q_n הוא קשיר ו־n־רגולרי. קשירות הגרף הוכחה בתרגיל בית. כמו כן, בהינתן $v = (a_1, \ldots, a_n)$ קודקוד של Q_n, קבוצת השכנים של v היא בדיוק

$$\{(1 - a_1, a_2, , a_3 \ldots, a_n),\ (a_1, 1 - a_2, a_3, \ldots, a_n), \ldots, (a_1, a_2, a_3, \ldots, 1 - a_n)\}$$

והיא מכילה n קודקודים.

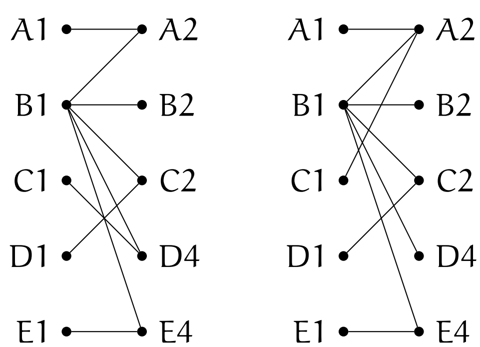
לפי משפט אוילר, מעגל אויילר קיים אס"ם כל הקודקודים מדרגה זוגית, מה שאפשרי אס"ם n זוגי. מסלול אוילר קיים אס"ם מספר הקודקודים מדרגה אי־זוגית הוא 2 או 0, מה שמתקיים בגרף Q_1. ■

12.1.3 גרפים דו־צדדים, משפט הול וקוניג

הערה גרף $G = (V, E)$ נקרא <u>דו־צדדי</u> אם קיימות קבוצות לא ריקות וזרות V_1, V_2 כך ש־$V = V_1 \sqcup V_2$ וכך ש־$E \subseteq \{\{v_1, v_2\} \mid v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2\}$. באופן שקול, G נקרא דו־צדדי אם ניתן לצבוע את קודקודיו בשני צבעים, כך שאף זוג שכנים אינם נצבעים באותו צבע.

הגדרה יהא G גרף דו צדדי, עם $V = V_1 \sqcup V_2$ כמו בהגדרה. <u>צימוד</u> על G הוא בחירה של צלעות ב־G כך שלכל איבר ב־V_1 יש שכן בודד מ־V_2 בצימוד. צימוד ניקרא מירבי אם לא ניתן להרחיבו לצימוד גדול יותר.

דוגמה בגרפים הבאים מופיעים בצד ימין רובוטים ובצד שמאל בטריות. רובוט ובטריה מחוברים בצלע אם הם תואמים.



בגרף הימני הצימוד המירבי הוא מגודל 4, בעוד בגרף השמאלי קיים צימוד מגודל 5.

משפט 7 (הול Hall) יהא $G = (V, E)$ גרף דו־צדדי עם קבוצת קודקודים המחולקת לצדדים $V = V_1 \sqcup V_2$. בהינתן $X \subseteq V_1$ נגדיר $N_G(X) = \{u \in V_1 \mid \exists x \in X \mid \{x, u\} \in E\}$ להיות קבוצת השכנים של איברי X. אזי, בגרף G קיים צימוד מירבי בגודל $|V_1|$ אס"ם לכל $X \subseteq V_1$ מתקיים

$$.|N_G(X)| \geq |X|$$

תרגיל 6 נתונה חפיסת קלפים סטנדרטית בת 52 קלפים, המחולקים באופן שרירותי ערימות בגודל 4. הראו כי ניתן, ע"י בחירה של קלף אחד מכל ערימה, ליצור סדרת קלפים מלאה מ־1 ועד 13.

פתרון. נגדיר גרף דו־צדדי G עם קבוצת קודקודים $V = V_1 \sqcup V_2$ עם $V_1 = \{p_1, \ldots, p_{13}\}$ קבוצת הערימות של הקלפים ו־$V_2 = \{1, 2, \ldots, 13\}$, וקבוצת הצלעות E מקיימת כי $\{p_i, j\} \in E$ אס"ם בערימה p_i מופיע קלף שערכו j ($1 \leq i, j \leq 13$).

נטען כי הגרף G מקיים את תנאי משפט הול, ולכן קיים בו צימוד בגודל 13, כלומר־ אפשרות לבחור קלף אחד מכל ערימה כך שסדרת הקלפים הנבחרת תהיה מלאה.

נניח בשלילה כי תנאי משפט הול לא מתקיימים. פירוש הדבר שקיימת קבוצה $X \subseteq V_1$ עבורה $|X| < |N_G(X)|$. נסמן ב־a את גודל X ונסמן ב־C את קבוצת הקלפים המופיעים בערימות המופיעות ב־X. אז גודל הקבוצה C הוא $4a$ וקבוצת הערכים של הקלפים ב־C היא בדיוק $N_G(X) \subseteq V_2 = \{1, \ldots, 13\}$. כמו כן, מההנחה, $|N_G(X)| < a$, ולכן הפונקציה המתאימה לקלף $c \in C$ את המספר המופיע עליו היא בעלת תחום בגודל $4a$ ותמונה בגודל קטן ממש מ־a. בפרט, לפי עיקרון שובך היונים המוכלל, יש מספר j שאליו נשלחים לכל הפחות $4 = \frac{4a}{a} < \lceil \frac{|C|}{|N_G(X)|} \rceil$ קלפים. זו סתירה, מכיוון שבחפיסה יש בדיוק 4 קלפים מכל ערך.

■

הגדרה כיסוי קודקודים של גרף $G = (V, E)$ הוא תת־קבוצה של V שמכילה קצה אחד מכל צלע בגרף.

משפט 8 (קוניג Koenig) יהא G גרף דו־צדדי. גודל כיסוי קודקודים מינימלי ב־G הוא זהה לגודל צימוד מקסימלי ב־G.