חדו"א וטורים

התכנית להרחבת הסמכה ל־5 יחידות מתמטיקה

פתרון מבחן מועד א'

3 בינואר 2017

הוראות למבחן־

1. חלק א'־ השאלות 1 ו־2 הן חובה, ומשקלן הכולל הוא 60 נקודות.
2. חלק ב'־ עליכם לבחור אחת מבין השאלות 3 ו־4, משקלן הוא 25 נקודות.
3. חלק ג'־ עליכם לבחור לענות על אחת מבין השאלות 5 ו־6, ומשקלן הוא 25 נקודות.
4. חלק ד'־ שאלת אתגר, שמשקלה 25 נקודות.
5. סמנו בטבלה למטה את השאלות שבחרתם. שאלות שלא יסומנו לא ייבדקו.
6. אורך המבחן שעתיים.
7. חומר עזר־ השימוש במחשבון מותר.
   מצורף דף נוסחאות לטופס.

בהצלחה!

שאלה	בחירה
4	
5	
6	
7	

חלק א

שאלה 1

(30 נק.) הוכיחו את המשפט הבא־
יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות עם $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ ו־$T = \lim_{n\to\infty} b_n$. אזי הסדרה $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $L \cdot T$.

פתרון. יהא $\epsilon > 0$ שרירותי. עלינו למצא $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $|a_n b_n - LT| < \epsilon$. נשים לב לאי־השוויון

$$|a_n b_n - LT| = |a_n b_n - Lb_n + Lb_n - LT| \leq |b_n| |a_n - L| + |L| |b_n - T|$$

הנובע מאי־שוויון המשולש. בנוסף, מכיוון ש־b_n מתכנסת, ממשפט שהוכחנו בכיתה, b_n חסומה ולכן קיים $M > 0$ כך ש־$|b_n| < M$ לכל $n \in \mathbb{N}$. בפרט אנו מקבלים כי

$$|a_n b_n - LT| \leq M |a_n - L| + |L| |b_n - T|. \qquad (\star)$$

מכיוון ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = L$, עבור $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2M}$ קיים $n_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_1$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon' = \frac{\epsilon}{2M}$. בנוסף, מכיוון ש־$\lim_{n\to\infty} b_n = L$, עבור $\epsilon'' = \frac{\epsilon}{|L|+1}$ קיים $n_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_2$ מתקיים כי $|b_n - T| < \epsilon'' = \frac{\epsilon}{|L|+1}$.

הערה 1 בחלק זה הוספנו 1 למכנה של ϵ'' כדי להימנע מבעייתיות במקרה בו $L = 0$, ולדאוג ש־$\epsilon'' > 0$ בכל מקרה.

משתי המסקנות שכתבנו לעיל, אם ניקח $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ אז לכל $n > n_0$ מתקיים כי

$$|a_n b_n - LT| \leq M |a_n - L| + |L| |b_n - T| < M \cdot \frac{\epsilon}{2M} + |L| \frac{\epsilon}{2(|L|+1)} < 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

שאלה 2

הגדירו במדוייק את המונחים הבאים.

1. (15 נק') סדרה חסומה.
פתרון. סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקרא חסומה, אם קיים מספר $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n| < M$.

2. (15 נק') סדרה מתכנסת במובן הרחב.
פתרון. סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקראת מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים כי $a_n > M$. הסדרה נקראת מתכנסת במובן הרחב ל־$-\infty$ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $a_n < M$.

חלק ב

שאלה 3

(25 נק')

1. הראו כי לכל $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. מתקיים אי השוויון $4 \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \leq 4 \cdot \sqrt[n]{2}$.
2. חשבו $\lim_{n\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$.

פתרון.

1. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$4 = \sqrt[n]{0+0+4^n} < \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} = \sqrt[n]{4^n\left(\frac{1}{2^n} + \frac{3}{4^n} + 1\right)} \leq 4\sqrt[n]{2}$$

לכל $n \geq 2$. עבור $n = 1$ מתקיים $\sqrt[1]{2+3+4} = 2+3+4 = 9 \not\leq 4 \cdot 2$.

2. בתרגילי הבית ובכיתה הראינו כי $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$. מכאן ש־$\lim_{n\to\infty} 4 = \lim_{n\to\infty} 4\sqrt[n]{2} = 4$, ולכן מכלל הסנדביץ', $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} = 4$.

שאלה 4

(25 נק') נתונה הסדרה ההנדסית $4, 3.6, 3.24, \ldots$. מצאו ערך $n \in \mathbb{N}$ מינימלי כך שהסכום החלקי $S_n = a_1 + \ldots + a_n$ יהיה גדול מ־36. הראו כי לא קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו סכום זה גדול מ־40.

פתרון. הסדרה הנתונה היא $a_n = 4 \cdot (0.9)^{n-1}$, וסכומה החלקי ה־$n$־י הוא

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n = \frac{4\left(1 - (0.9)^n\right)}{1 - 0.9}$$

לפי נוסחת סכום סדרה הנדסית.

נחפש n כך ש־$S_n > 36$:

$$\begin{aligned}
S_n > 36 \quad &\iff \quad \frac{4\left(1-(0.9)^n\right)}{0.1} > 36 \\
&\iff \quad 1 - (0.9)^n > 0.9 \\
&\iff \quad (0.9)^n < 0.1 \\
&\iff \quad n\ln(0.9) < \ln(0.1) \\
&\iff \quad n > \frac{\ln(0.1)}{\ln(0.9)} \approx 21.85434\ldots
\end{aligned}$$

שימו לב ש־$\ln(0.9) < 0$ ולכן חלוקה בו משנה את סימן אי־השוויון. לכן קיבלנו $n = 22$ בתור ה־n המינימלי המקיים כי $S_n > 36$.

לא קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$S_n > 40$ שכן

$$S_n > 40 \quad \iff \quad \frac{4\left(1-(0.9)^n\right)}{0.1} > 40 \quad \iff \quad 1 - (0.9)^n > 1 \quad \iff \quad -(0.9)^n > 0$$

דבר שאינו אפשרי, כי אגף שמאל של אי־השוויון האחרון שלילי.

חלק ג

שאלה 5

(25 נק') הוכיחו כי הסדרה

$$a_n = \frac{n^3}{2n^2+1}$$

מתכנסת במובן הרחב ל־$+\infty$.

פתרון. נבחר $M \in \mathbb{R}$. עלינו למצא $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים כי $M < \frac{n^3}{2n^2+1}$. נשים לב כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$\frac{n^3}{2n^2+1} \geq \frac{n^3}{2n^2+n^2} = \frac{n}{3}$$

לכן, אם ניקח $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־$\frac{n_0}{3} > M$ (כלומר $n_0 > 3M$) אז לכל $n > n_0$ מתקיים

$$\frac{n^3}{2n^2+1} \geq \frac{n}{3} \geq \frac{n_0}{3} > M$$

כנדרש.

שאלה 6

(25 נק') חשבו את הגבול הבא

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{2n^2-n} - \frac{n^2}{2n+3}\right).$$

פתרון.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{2n^2-n} - \frac{n^2}{2n+3}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^4+3n^3-2n^4+n^3}{(2n^2-n)(2n+3)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^3}{4n^3+4n^2-3n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{4+\frac{4}{n}-\frac{3}{n^2}} = 1\end{aligned}$$

לפי חשבון גבולות, והגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

חלק ד

(25 נק') השתמשו באי השוויון $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ לכל $n \in \mathbb{N}$ כדי להראות כי לכל מספר **טבעי** $a > 1$ הסדרה

$$b_n = \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{a^3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a^n}\right)$$

מתכנסת.

פתרון. לפי אי־השוויון $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$, והעובדה כי האיברים a^k הם טבעיים, אנחנו מקבלים כי לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$\left(1+\frac{1}{a^k}\right) < e^{\frac{1}{a^k}} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(1+\frac{1}{a^k}\right)^{a^k} < e .$$

מכאן אנו מקבלים כי

$$b_n = \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{a^3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a^n}\right) < e^{\frac{1}{a}} \cdot e^{\frac{1}{a^2}} \cdot \ldots \cdot e^{\frac{1}{a^n}} = e^{\frac{1}{a}+\ldots+\frac{1}{a^n}}$$

כעת, אם נתבונן בחזקה של e בביטוי הימני ביותר, מכיוון ש־

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\ldots+\frac{1}{a^n} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1-\frac{1}{a^n}}{1-\frac{1}{a}} \le \frac{1}{a-1} \le 1$$

נקבל כי $b_n < e$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ובפרט הסדרה חסומה.

בנוסף, מתקיים כי

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + \frac{1}{a^{n+1}} > 1$$

לכל $n \in \mathbb{N}$ ועל כן הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה וחסומה מלעיל. ממשפט שהוכחנו בכיתה־ b_n מתכנסת.

נוסחאות

סכום סדרה חשבונית

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

סכום סדרה הנדסית

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

הבינום של ניוטון

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad , \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

נוסחאות כפל מקוצר

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (x-y)(x+y) \\ x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2+xy+y^2) \end{aligned}$$

פתרון משוואה ריבועית

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

נוסחאות טריגונומטריות

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1 \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)} \end{aligned}$$