תרגיל 7- חסמים וסדרות מונוטוניות
חדו"א : סדרות וטורים

1

יהיו $A, B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות וחסומות מלרע. נסמן $I_A = \inf(A)$, $I_B = \inf(B)$.

1. עלינו להראות כי $\inf(A \cup B) = \min\{I_A, I_B\}$. נבחן את המקרה $I_A \leq I_B$ (המקרה $I_B \leq I_A$ מוכח באופן סימטרי). מהגדרת איחוד קבוצות, לכל $x \in A \cup B$ מתקיים כי $x \in A$ או $x \in B$. אם $x \in A$ אז $x \geq I_A$, מכיוון ש-I_A חסם מלרע של A, ואם $x \in B$ אז $x \geq I_B \geq I_A$, מכיוון ש-I_A חסם מלרע ל-B ומההנחה $I_A \leq I_B$.

   נטען כי I_A הוא חסם מלרע מקסימלי של $A \cup B$. אכן, אם $J > I_A$ הוא מספר ממשי גדול מ-I_A אז, מכיון ש-I_A הוא חסם מלרע מקסימלי של A, יש $x \in A$ כך ש-$J > x$, ובפרט $x \in A \cup B$ ומקיים $x < J$. כלומר- J אינו חסם מלרע של $A \cup B$.

2. מכיוון ש-$\inf(A \cap B)$ הוא חסם מלרע **מקסימלי** של $A \cap B$, כל מה שעלינו להוכיח בסעיף זה הוא כי הערך $\max\{I_A, I_B\}$ הוא חסם מלרע של הקבוצה $A \cap B$. אך זה מיידי, שכן כל $x \in A \cap B$ הוא איבר של A (ולכן $x \geq I_A$) וכן איבר של B (ולכן $x \geq I_B$), ולכן x גדול או שווה גם מהמקסימום בין I_A ו-I_B.

2

נתונה קבוצה חסומה A ומספר $S \in \mathbb{R}$. מתנאי (1) של התרגיל אנו יודעים ש-S היא חסם מלעיל של A, ולכן כל שעלינו להוכיח הוא כי S הוא חסם מלעיל מינימלי.

נניח בשלילה כי S אינו מינימלי, ועל כן יש $S' < S$ שהינו גם חסם מלעיל של A. נסמן $\varepsilon = S - S' > 0$. אז, מתנאי (2), קיים $a \in A$ כך ש-

$$a > S - \varepsilon = S - (S - S') = S'$$

וזו סתירה להנחה כי S' הוא חסם מלעיל.

3

עבור $A, B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל. נגדיר קבוצה חדשה

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b \text{ קיימים } a \in A \text{ ו-} b \in B \text{ כך ש-}\}.$$

1. כל $a \in A$ קטן או שווה ל-$\sup(A)$ וכל $b \in B$ קטן או שווה מ-$\sup(B)$, ולכן סכומם קטן או שווה מ-$\sup(A) + \sup(B)$.

2. ניקח $\varepsilon > 0$ שרירותי. מהגדרת הסופרמום, המספר $\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}$ איננו חסם מלעיל של A, שכן הוא קטן מסופרמום, שהוא חסם מלעיל מינימלי. על כן, יש $a \in A$ כך ש-$a > \sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}$. בדומה, המספר $\sup(B) - \frac{\varepsilon}{2}$ איננו חסם מלעיל של B ולכן יש $b \in B$ כך ש-$b > \sup(B) - \frac{\varepsilon}{2}$.

   נובע כי

$$a + b > \sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} + \sup(B) - \frac{\varepsilon}{2} = \sup(A) + \sup(B) - \varepsilon.$$

3. לפי תרגיל 2 והגדרת הקבוצה C נובע כי הערך $\sup(A) + \sup(B)$ הוא הסופרמום של C.

4. למשל- $A = [0, 1],\ B = \{-1\}$. בדיקה ישירה מראה כי $D = [-1, 0]$ וש-$\sup(D) = 0$, בעוד $\sup(A) \cdot \sup(B) = 1 \cdot (-1) = -1 \neq 0$.

4

בסעיפים הבאים נתונות תת־קבוצות של $\mathbb{R}$. בדקו האם הקבוצות הנתונות הן חסומות מלעיל ומלרע ומצאו את הסופרמום והאינפימום שלהן.

1. $A = [2, 2.5)$. $\sup(A) = 2.5, \inf(A) = \min(A) = 2$.
2. $A = \left\{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$. $\sup(A) = \max(A) = \frac{1}{2}, \inf(A) = 0$. התשובה $\sup(A) = 1$ גם מתקבלת, אם מניחים ש־$0 \in \mathbb{N}$.
3. $A = \left\{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$. הקבוצה איננה חסומה מלעיל (מכילה חזקות טבעיות של 2 מסדר לא חסום). $\inf(A) = 0$.
4. נשים לב כי מהגדרת A מתקיים כי לכל $\frac{m}{n} \in A$, מכיוון ש־ $0 \leq m < n$ מתקיים כי $0 \leq \frac{m}{n} < 1$. בפרט, מכיוון ש־$0 \in A$, נובע ש־$\inf(A) = \min(A) = 0$. נראה ש־$\sup(A) = 1$. כבר ידוע לנו כי 1 הוא חסם מלעיל שלA. בנוסף, בהינתן $\varepsilon > 0$ שרירותי, ניקח $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$\frac{1}{n} < \varepsilon$, ו־ $m = n - 1 < n$. אז $\frac{m}{n} \in A$, ומתקיים

$$\frac{m}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{n}{n} - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon.$$

בפרט, לפי תרגיל 2 נובע כי $\sup(A) = 1$.

5

1. $a_n = \frac{1}{n}$. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$, מכיוון שהמכנה חיובי. לכן a_n סדרה מונוטונית יורדת (ממש).
2. $a_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n+1}$. נשים לב כי הסדרה הנתונה היא חיובית לכל $n \in \mathbb{N}$. נחשב את המנה $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ונקבל

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n+2)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+3)}}{\frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}} = \frac{2n+2}{2n+3} < 1$$

ולכן הסדרה מונוטונית יורדת ממש.

3. $a_n = \frac{2}{n(n+1)}(1 + 2 + \ldots + n)$. לפי נוסחת סדרה חשבונית $(a_1 = 1,\ d = 1)$ רואים ש־

$$a_n = \frac{2}{n(n+1)}(1 + 2 + \ldots + n) = \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 1$$

לכל $n \in \mathbb{N}$. בפרט הסדרה קבועה, ולכן מונוטונית עולה וגם יורדת.

4. $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} > 0$. לכן הסדרה מונוטונית עולה ממש.