

# תרגיל 3- סדרות הנדסיות וגבולות

חדו"א : סדרות וטורים

1

נתונה הסדרה ההנדסית  $4, 3.6, 3.24, \dots$ . מצאו ערך  $n \in \mathbb{N}$  מינימלי כך שהסכום החלקי  $S_n = a_1 + \dots + a_n$  יהיה גדול מ-36. הראו כי לא קיים  $n \in \mathbb{N}$  עבורו סכום זה גדול מ-40.

2

נתונה סדרה חיובית כלשהי  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

1. הראו כי אם  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  היא סדרה חשבונית, אזי לכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים כי  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+2})$ .

2. הראו כי אם  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  היא סדרה הנדסית, אזי לכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים כי  $a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot a_{n+2}}$ .

3. הוכיחו את אי-הממוצעים לקבוצה בת שני איברים. כלומר, הראו כי לכל  $x, y \geq 0$  מתקיים כי

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

כאשר שוויון יכול להתקיים אם ורק אם  $x = y$ .

4. הסיקו כי אם  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  היא סדרה חיובית שהינה גם חשבונית וגם הנדסית, אזי  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  היא סדרה קבועה.

3

נתון מספר בעל פיתוח עשרוני עם מחזור בן 3 ספרות

$$x = 0.144144144 \dots$$

השתמשו בנוסחת סכום סדרה חשבונית אינסופית כדי להראות כי  $x = \frac{144}{999}$ . חזרו על השאלה עבור המספר  $x = 0.9999 \dots$ . כיצד תוכלו להסביר את התוצאה שקיבלתם?

4

הוכיחו את הגבולות הבאים עפ"י הגדרת הגבול.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-4}{n^2+1} = 0$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2+9 \cdot (-1)^n}{n^2+24n+3} = 7$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$$

\* 5

נתונה סדרה  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  המתכנסת לגבול  $L$ . נגדיר סדרה חדשה ע"י  $b_n = \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ . הוכיחו כי  $b_n$  מתכנסת גם היא ל- $L$ .