תרגיל 10- טורים א'
חדו"א : סדרות וטורים

1

נתון טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $S_n = a_1 + \ldots + a_n$, הסכום החלקי הn־י של $\{a_n\}$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם הגבול $\lim_{n\to\infty} S_n$ קיים וסופי.
2. נתון טור נוסף $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, ונניח כי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסים. נסמן ב־S_n^a, S_n^b את הסכומים החלקיים ה־n־יים של $\{a_n\}, \{b_n\}$ בהתאמה. מההנחנו כי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסים נובע כי הגבולות $\lim_{n\to\infty} S_n^a, \lim_{n\to\infty} S_n^b$ קיימים וסופיים.

   נשים לב כי לכל $n \in \mathbb{N}$ הסכום החלקי ה־n־י של $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ הוא
   $S_n^{a+b} = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \ldots + a_n + b_n = S_n^a + S_n^b$.

   מחשבון גבולות אנו מקבלים כי
   $$\lim_{n\to\infty} S_n^{a+b} = \lim_{n\to\infty} \left(S_n^a + S_n^b\right) = \lim_{n\to\infty} S_n^a + \lim_{n\to\infty} S_n^b = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n ,$$
   וגבול זה קיים וסופי.
3. נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ו־$c \in \mathbb{R}$ סקלר. נשים לב כי הסכום החלקי ה־n־י של $\sum ca_n{}_{n=1}^{\infty}$ הוא $ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n = cS_n^a$ מחשבון גבולות נובע כי
   $$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = \lim_{n\to\infty} c \cdot S_n^a = c \cdot \lim_{n\to\infty} S_n^a = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
   ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

2

נתונים טורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum n = 1^{\infty} b_n$. נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס וכי קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $b_n = a_n$. נסמן, כמו בסעיף קודם, ב־S_n^a, S_n^b את הסכום החלקי ה־n־י של $\{a_n\}, \{b_n\}$ בהתאמה.
לפי הנתון, לכל $n > n_0$ מתקיים כי

$$\begin{aligned} S_n^a &= a_1 + \ldots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_n \\ &= a_1 + \ldots + a_{n_0} + b_{n_0+1} + \ldots + b_n \\ &= (a_1 + \ldots + a_{n_0} - b_1 - \ldots - b_{n_0}) \\ &\quad + b_1 + \ldots + b_{n_0} + b_{n_0+1} + \ldots + b_n \\ &= C + S_n^b \end{aligned}$$

כאשר $C = a_1 + \ldots + a_{n_0} - b_1 - \ldots - b_{n_0}$. נובע כי אם S_n^a מתכנס אז $\lim_{n\to\infty} S_n^b = \lim_{n\to\infty} S_n^a - C$ גם כן מתכנס, ובדומה אם S_n^b מתכנס אז S_n^a מתכנס.

3

נתונים טורים $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, בהם $a_n, b_n \geq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$. לכל $N \in \mathbb{N}$ נסמן

$$S_N^a = a_1 + a_2 + \ldots + a_N \quad , \quad S_N^b = b_1 + b_2 + \ldots + b_N$$

את הסכום החלקי ה־N־י של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו־$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ בהתאמה.

1. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $0 \leq S_{n+1}^a - S_n^a = a_1 + \ldots + a_{n+1} - a_1 - \ldots - a_n = a_{n+1}$ ולכן S_n^a מונוטונית עולה. בנוסף, S_n^a אי־שלילית, כסכום של ערכים אי־שליליים.
   בדומה S_n^b מונוטונית עולה ואי־שלילית.
2. מההנחה כי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור מתכנס אנו מקבלים כי $\lim_{n\to\infty} S_n^b$ מתכנס ושווה ל־$\sup\left\{S_n^b\right\}$. בנוסף, מהנתון כי $a_n \leq b_n$ לכל n אנו מקבלים כי $S_n^a \leq S_n^b \leq \lim_{n\to\infty} S_n^b$ לכל $n \in \mathbb{N}$. מכיוון ש־S_n^a מונוטונית וחסומה, אנחנו למדים כי היא מתכנסת, ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
3. ניקח למשל $b_n = \frac{1}{n^2}$ ו־$a_n = -1$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
4. מאי שוויון הממוצעים אנו יודעים כי $\sqrt{a_n b_n} \leq \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ לכל $n \in \mathbb{N}$. מתרגיל 1 אנו יודעים כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ הוא מתכנס, ולכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$.

4

בדקו אלו מהטורים הבאים מתכנסים.

1. נסמן $a_n = \frac{1}{4n^2-1}$. מחישוב ישיר מקבלים כי

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

ולכן

$$S_n = a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2(2n-1)}$$

וסדרה זו מתכנסת ל־$\frac{1}{6}$. על כן הטור מתכנס.

2. נסמן $a_n = n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. נשים לב כי $a_1 = 2\ln(2) > 0$. בנוסף, מחוקי לוגריתם $a_n = \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$, ומכיוון שהסדרה $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ מונוטונית עולה והפונקציה הלוגריתמית משמרת סדר, אנו מקבלים כי הסדרה a_n מונוטונית עולה ובפרט גבולה (אם קיים) אינו 0. מהמשפט לגבי האיבר הכללי של טור מתכנס, נובע כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ לא מתכנס.

3. הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{4}\right)^{n}$ מתכנסים, כטורים גיאומטריים עם יחס קטן מ-1. מתרגיל 1 נובע כי גם סכומם מתכנס, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{4^n}$ מתכנס.

4. לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\frac{1}{n^3}\leq\frac{1}{n^2}$. מכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס, נובע כי גם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ מתכנס.