Inlämningsuppgift nr 2 i matematik

Detta är den andra av fyra inlämningsuppgifter i mattedelen av kursen. Varje inlämningsuppgift består av fyra problem som kan ge maximalt 5 poäng vardera, dvs varje inlämningsuppgift kan ge maximalt 20 poäng. Uppgifterna är en obligatorisk del av examinationen: man måste få totalt 40 poäng (av 80 möjliga) för att bli godkänd på kursen. Lämna in individuellt skrivna lösningar: det är okej att sammarbeta för att lösa problemen men alla måste lämna in egna lösningar.

Lämna in senast onsdag 14 februari klockan 23:59. Lösningarna lämnas in på gm.ibg.uu.se, under rubrikerna matematik följt av inlupp 2.

Lämna in lösningarna som en pdf. Det är okej med både scannade/fotade handsrkivna lösningar och datorskrivna.

Instruktioner:

- Lösningarna ska motiveras väl och formuleras tydligt. Man ska aldrig behöva gissa vad ni menar eller leta bland ostrukturerade uträkningar för att hitta svaret/lösningen eller delar därav. Skriv gärna hela meningar och tänk på era formuleringar.
- Se till att ni svarat på frågan.
- Börja med inlämningen i god tid så att ni hinner fråga om det är något som ni inte förstår.

Lycka till!

1. Derivera följande funktioner:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 e^{x^3}, \\ g(x) &= \frac{x+1}{x^2+2x+4,} \\ h(x) &= \frac{4}{x} + \ln(x^2+2), \\ i(x) &= 10^x + \log_{10}(x), \\ j(x) &= x^{-2} + 4. \end{aligned}$$

2. Använd likheten $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 = (x+1)(x-1)^2(x-3)$ för att bestämma följande egenskaper hos funktionen

$$f(x) = -\frac{2x^5}{5} + 2x^4 - \frac{4x^3}{3} - 4x^2 + 6x + 1,$$

definierad på intervallet $[0, 4]$:

   (a) De kritiska punkterna.

   (b) Extrempunkterna, och deras typ.

   (c) Funktionens största och minsta värde.

3. Låt $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.

   (a) Beräkna $f(-1)$, $f'(-1)$ samt bestäm ekvationen för tangentlinjen till $f(x)$ i $x = -1$ (dvs. hitta ekvationen till den räta linje som tangerar funktionens graf i punkten $(-1, f(-1))$).

   (b) Beräkna $f^{-1}(-2)$, $(f^{-1})'(-2)$ samt bestäm ekvationen för tangentlinjen till $f^{-1}(x)$ i $x = -2$. (Ni behöver inte visa att $f(x)$ är inverterbar, dvs. att $f^{-1}(x)$ existerar; det följer av att $f(x)$ är ökande.)

4. Betrakta det diskreta dynamiska systemet givet av

$$x_{n+1} = \frac{1}{16} + x_n \left(1 - \frac{x_n}{4}\right).$$

(a) Bestäm systemets övergångsfunktion.

(b) Vilken ekvation ska lösas för att hitta systemets jämviktspunkter?

(c) Använd ekvationen i (b) för att hitta systemets två jämviktspunkter.

(d) Avgöra om jämviktspunkterna är stabila eller instabila.