Lösningsförslag: inlupp 4

1. (a)

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{\pi}{x} + e^2 + \frac{x^3}{4}dx \\ &= \int \frac{2}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{\pi}{x}dx + \int e^2 dx + \int \frac{x^3}{4}dx \\ &= 4\sqrt{x} + \pi \ln|x| + e^2 x + \frac{x^4}{16} + C,\end{aligned}$$

där C är en konstant.

(b) Då $x^2 - 6x - 7 = 0$ har lösningarna $x = 3 \pm \sqrt{9+7} = 3 \pm 4 = 7, -1$, så ansätter vi

$$\frac{A}{x-7} + \frac{B}{x+1} = \frac{5x-11}{(x-7)(x+1)} = \frac{5x-11}{x^2-6x-7}.$$

Detta ger

$$A(x+1) + B(x-7) = 5x - 11.$$

Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} A & + & B & = & 5 \\ A & - & 7B & = & -11 \end{cases}.$$

Vi tar -1 av den övre raden i den undre och får kvar $-8B = -11 - 5 = -16$, så att $B = 2$. $A + B = A + 2 = 5$ ger då att $A = 3$. Vi drar slutsatsen att

$$\frac{5x-11}{x^2-6x-7} = \frac{3}{x-7} + \frac{2}{x+1}.$$

Således är

$$\begin{aligned}\int \frac{5x-11}{x^2-6x-7}dx &= \int \frac{3}{x-7}dx + \int \frac{2}{x+1}dx \\ &= 3\ln|x-7| + 2\ln|x+1| + C,\end{aligned}$$

där C är en konstant.

2. (a)

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x - xdx &= \int_0^1 xe^x dx - \int_0^1 xdx \\ &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= (e^1 - 0) - [e^x]_0^1 - \left(\frac{1}{2} - 0\right) \\ &= e - (e-1) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(Partiell integration används i den andra likheten.)

(b) Vi använder substitutionen $u = \sqrt{x}$. Då är $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, och de nya gränserna ges av $u = \sqrt{1} = 1$ samt $u = \sqrt{4} = 2$. Vi får att

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int_1^2 2e^u du = [2e^u]_1^2 = 2(e^2 - e).$$

3. Vi integrerar högerledet med avseende på x (det förekommer inte y någonstans i uttrycket) och får

$$y = -\frac{2}{x} + \pi x + C,$$

där C är en konstant.

Vi sätter in $y(2) = \pi - 1$ och får

$$\pi - 1 = y(2) = -\frac{2}{2} + \pi \cdot 2 + C = 2\pi - 1 + C,$$

och således $C = -\pi$. Lösningen är därför

$$y(x) = -\frac{2}{x} + \pi x - \pi.$$

4. Vi skriver $y' = dy/dx$, och vi skriver om uttrycket som

$$y\ dy = x + 7\ dx.$$

Vi integrerar båda sidor av likheten,

$$\int y\ dy = \int x + 7\ dx,$$

och får

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + 7x + C,$$

där C är en konstant.

Vi förenklar först till

$$y^2 = x^2 + 14x + D,$$

där $D = 2C$ är någon konstant. (Det är okej att bara fortsätta skriva C istället för D, fast med ändrad betydelse, eftersom att det är en ännu obestämt konstant som kan anta alla värden.) Därefter förenklar vi till

$$y = \pm\sqrt{x^2 + 14x + D}.$$

Då $y(0) = -1$ ser vi att det är den negativa lösningen vi söker, samt att $D = 1$, ty

$$-1 = y(0) = -\sqrt{D}.$$

Lösningen blir därför $y = -\sqrt{x^2 + 14x + 1}$.