Lösningsförslag: inlupp 1

Uppgift 1.

(a) Vi tar e upphöjt med respektive sida och får

$$e^{y+5} = e^{\ln\sqrt{t-7}} = \sqrt{t-7}.$$

Vi kvadrerar båda sidor vilket ger

$$(e^{y+5})^2 = e^{2y+10} = t-7.$$

Slutligen får vi då

$$t = e^{2y+10} + 7.$$

(b) För $y=-4$ ges ekvationens enda lösning av

$$t = e^{2(-4)+10} + 7 = e^2 + 7.$$

Uppgift 2.

(a)

$$\frac{x^4+10x+25}{x^3+5x^2} = \frac{x^2(x^2+10x+25)}{x^2(x+5)} = \frac{x^2(x+5)^2}{x^2(x+5)} = x+5$$

(b)

$$\sum_{j=-1}^{3} j^3 - \sum_{i=2}^{3} 2 = ((-1)^3+0^3+1^3+2^3) - (2+2) = -1+0+1+8-4 = 4$$

(c)

$$\frac{8^2\cdot 2}{2^-1}\cdot\frac{4^2}{2^{11}}\cdot 16^0 = \frac{(2^3)^2\cdot 2}{2^{-1}}\cdot\frac{(2^2)^2}{2^{11}}\cdot 1 = 2^{2\cdot3+1-(-1)}\cdot 2^{2\cdot2-11} = 2^{8+(-7)} = 2^1 = 2.$$

(d)

$$\begin{aligned}
\frac{\log_3(900)}{2\log_3(10)} + \frac{2}{\log_3\left(\frac{1}{100}\right)} &= \frac{\log_3(3^2\cdot10^2)}{2\log_3(10)} + \frac{2}{-\log_3(100)} \\
&= \frac{\log_3(3^2\cdot10^2)}{2\log_3(10)} - \frac{2}{\log_3(300)} \\
&= \frac{2+2\log_3(10)}{2\log_3(10)} - \frac{2}{2\log_3(10)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Uppgift 3.

(a) Vi har att

$$M = (4H)^2.$$

Därför får vi att om $H = 1.5$, så är

$$M = \left(4 \cdot \frac{3}{2}\right)^2 = 6^2 = 36.$$

Den totala massan är då 36 kg.

(b) Om $M = 10000$, då är

$$H = \frac{\sqrt{10000}}{4} = \frac{100}{4} = 25.$$

Eftersom att

$$\frac{H}{M} = \frac{25}{10000} = 0,0025,$$

så vet vi att hjärnans massa utgör 0.25 % av den totala massan.

(c) Låt $Y = \lg(H)$ och $X = \lg(M)$, så är

$$Y = \lg(H) = \lg\left(\frac{\sqrt{M}}{4}\right) = \frac{1}{2}\lg(M) - \lg(4).$$

Vi ser att $k = \frac{1}{2}$ och $m = -\lg(4)$, dvs. vi får den räta linjen

$$Y = \frac{1}{2}X - \lg(4).$$

Uppgift 4.

(a) Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 = 10r - 25$$

vilket vi kan skriva om som

$$0 = r^2 - 10r + 25 = (r-5)^2.$$

Vi ser att ekvationen har en dubbelrot $r = 5$, och den allmäna lösningen ges då av

$$x_n = (An + B)5^n,$$

där A och B är konstanter som bestäms av begynnelsevillkoren.

(b) Vi använder begynnelsevillkoren:

$$1 = x_0 = (A \cdot 0 + B)5^0 = B,$$

$$20 = x_1 = (A\dot{1} + B)5^1 = (A + 1)5 = 5A + 5,$$

vilket ger

$$A = \frac{20 - 5}{5} = \frac{15}{5} = 3.$$

Differensekvationen med dessa begynnelsevillkor har därför lösningen

$$x_n = (3n + 1)5^n.$$