Lösningsförslag: inlupp 3

1. (a) Den karakteristiska ekvationen är $r^2 = 90r + 1000$, eller ekvivalent, $r^2 - 90r - 1000 = (r - 100)(r + 10) = 0$. Den har två rötter $r_1 = -10$ och $r_2 = 100$. Vi har därför att lösningen ges av

$$x_n = A(-10)^n + B100^n,$$

för konstanter A och B som bestäms av begynnelsevillkoren.
Från $n = 0$ får vi att

$$3 = A + B,$$

och från $n = 1$ att

$$80 = -10A + 100B.$$

Detta ger att

$$80 = -10(3 - B) + 100B = -30 + 110B.$$

Vi ser att $B = 1$ och $A = 2$. Alltså ges lösningen av

$$x_n = 2(-10)^n + 100^n.$$

(b) Övergånsfunktionen är $f(x) = xe^{3-2x}$. Vi löser $x = f(x)$, vilket ger oss

$$x = xe^{3-2x}.$$

Notera att en jämviktpunkt ges av $x = 0$. Vi delar med x för att se om det finns fler:

$$1 = e^{3-2x}.$$

Detta ger oss $3 - 2x = 0$. Vi ser att det finns ytterligare en jämviktspunkt $x = 3/2$.
Vi har att

$$f'(x) = e^{3-2x} + x(-2e^{3-2x}) = (1 - 2x)e^{3-2x}.$$

Därför är

$$|f'(0)| = |e^3| > 1,$$
$$|f'(3/2)| = |(1 - 2(3/2))e^0| = |-2| = 2 > 1.$$

Vi drar slutsatsen att både $x = 0$ och $x = 3/2$ är instabila jämviktspunkter.

2. (a) Vi delar nedersta raden med 2 och får:

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 2 \\ 2x - 5y + 10z = 7 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

Vi tar nu bort 2 gånger den övre raden från mittenraden:

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 2 \\ y = 3 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

Vi tar bort 1 gånger mittenraden från den nedre raden, och lägger till 3 gånger mittenraden till den övre:

$$\begin{cases} x & & + & 5z & = & 11 \\ & y & & & = & 3 \\ & & & z & = & 2 \end{cases}$$

Vi tar bort 5 gånger den undre raden från den övre:

$$\begin{cases} x & & & = & 1 \\ & y & & = & 3 \\ & & z & = & 2 \end{cases}$$

Svar: lösningen ges av $x = 1$, $y = 3$ och $z = 1$.

(b)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 \cdot (-9) = 54.$$

3. (a) Enligt formel har vi att

$$A^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned} BC - CB &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(c)

$$A^2 BC(BC)^{-1} A^{-1} = A^2 I A^{-1} = A^2 A^{-1} = A.$$

(d) Vi har att $(AC)^{-1}ABC = C^{-1}A^{-1}ABC = C^{-1}BC$. Då

$$C^{-1} = \frac{1}{1-2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

så får vi att

$$(AC)^{-1}ABC = C^{-1}(BC) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}.$$

(e) Vi har att $2(BC + C^{-1})C^{-1} = 2BCC^{-1} + 2CC^{-1} = 2B + 2I$, vilket är

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Eftersom att

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 5),$$

så har vi att $0 = \det(\lambda I - A) = 0$ har lösningarna $\lambda_1 = 4$ och $\lambda_2 = 5$, som då är matrisens egenvärden.

(b) För $\lambda_1 = 4$:

$$4I - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vi söker vektorerna som löser motsvarande ekvationssystem (här blir ekvationssystemet bara $-y = 0$ i bägge raderna). Lösningarna ges av $x = t$ och $y = 0$, där t är godtyckligt reellt tal. Motsvarande egenvektorer ges därför av

$$\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

För $\lambda_2 = 5$:

$$5I - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Motsvarande ekvationssystem är $x - y = 0$ (samt med nedre rad $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$, som ju är uppfyllt oavsett vad x och y är). Lösningarna ges av $x = y = t$, där $t \in \mathbb{R}$ är vilket tal som helst, och vi vet då att egenvektorerna med egenvärde $\lambda_2 = 5$ ges av

$$\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(c) Vi kan välja två egenvektorer v_1 ovh v_2 med motsvarande egenvärde λ_1 respektive λ_2, och C ges då av matrisen med kolloner v_1 och v_2. T.ex.:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Då är $C^{-1}AC = D$, om

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

(Ta fram C^{-1} och kontrollräkna detta!)

(d) Från föregående uppgift får vi att $A = CDC^{-1}$, och att

$$A^{10} = (CDC^{-1})^{10} = CD^{10}C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4^{10} & 0 \\ 0 & 5^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4^{10} & 5^{10} \\ 0 & 5^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^{10} & 5^{10} - 4^{10} \\ 0 & 5^{10} \end{bmatrix}.$$