Lösningsförslag: inlupp 2

Uppgift 1.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 x^{x^3}) = (3x^2)e^{x^3} + x^3(3x^2 e^{x^3}) = 3x^2 x^{x^3} + 3x^5 e^{x^3}.$$

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x^2+2x+4}\right) = \frac{(x^2+2x+4)-(x+1)(2x+2)}{(x^2+2x+4)^2} = \frac{-x^2-2x+2}{(x^2+2x+4)^2}.$$

$$h'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x} + \ln\left(x^2+2\right)\right) = -\frac{4}{x^2} + 2x \cdot \frac{1}{x^2+2} = -\frac{4}{x^2} + \frac{2x}{x^2+2}.$$

$$i'(x) = \frac{d}{dx}\left(10^x + \log_{10}(x)\right) = \frac{1}{x\ln(10)} + 10^x \ln(10).$$

$$j'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{-2}+4\right) = (-2)x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

Uppgift 2.

(a) Vi beräknar derivatan och får att

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x^4 + 8x^3 - 4x^2 - 8x + 6 \\ &= -2(x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3) \\ &= -2(x+1)(x-1)^2(x-3) \end{aligned}$$

(där den sista likheten är given i uppgiften). De kritiska punkterna för f ges av $f'(x) = 0$. Vi får därför att de kritiska punkterna är $x = 1$ samt $x = 3$ (kom ihåg att vi bara är intresserade av intervallet $[0, 4]$).

(b) Teckenschema ger att $x = 1$ är en sadelpunkt och $x = 3$ är en lokal maximipunkt. Teckenschemat ger även att derivatan är positiv för $0 < x < 1$ samt negativ för $3 < x < 4$. Där för är ändpunkten $x = 0$ ett lokalt minimum och ändpunkten $x = 4$ också ett lokalt minimum. Så vi får tre extrempunkter: $x = 0$ (min), $x = 3$ (max) och $x = 4$ (min).

(c) Vi beräknar $f(x)$ i extremvärdena (detta är tillräckligt eftersom att funktionen är definierad på ett slutet interval $[0,4]$):

$$f(0) = 1,$$
$$f(3) = \frac{59}{5},$$
$$f(4) = -\frac{329}{15}.$$

Vi får att funktionens största värde är $59/5$ samt att funktionens minsta värde är $-329/15$.

Uppgift 3.

(a) Derivatan är $f'(x) = 2 + 6x + 12x^2$. Därför är

$$f(-1) = 1 - 2 + 3 - 4 = -2,$$
$$f'(-1) = 2 - 6 + 12 = 8.$$

Tangentlinjen har ekvationen $y = kx + m$, där $k = f'(-1) = 8$, och går genom punkten $(x, y) = (-1, f(-1)) = (-1, -2)$. Sätter in detta i ekvationen för att bestämma m:

$$-2 = 8(-1) + m \implies m = 6.$$

Tangentlinjen har därför ekvationen $y = 8x + 6$.

(b) Eftersom att $f(-1) = -2$, så är $f^{-1}(-2) = -1$. Från formel för derivatan av invers har vi att

$$(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-2))} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{8}.$$

Tangentlinjen har därför ekvationen $y = \frac{x}{8} + m$, och vi vet att den går genom punkten $(x, y) = (-2, f^{-1}(-2)) = (-2, -1)$. Vi sätter in det i ekvationen för tangentlinjen och beräknar m:

$$-1 = \frac{-2}{8} + m \implies m = -\frac{3}{4}.$$

Tangentlinjen har därför ekvationen $y = \frac{x}{8} - \frac{3}{4}$.

Uppgift 4.

(a) Systemets övergångsfunktion är

$$f(x) = \frac{1}{16} + x\left(1 - \frac{x}{4}\right).$$

(b) Vi ska lösa ekvationen $f(x) = x$, dvs

$$x = \frac{1}{16} + x\left(1 - \frac{x}{4}\right),$$

för att hitta systemets jämviktspunkter.

(c) Vi förenklar och får

$$x = \frac{1}{16} + x - \frac{x^2}{4}$$

vilket ger $x^2 = \frac{1}{4}$. Därför är systemets två jämviktspunkter $x = -\frac{1}{2}$ och $x = \frac{1}{2}$.

(d) Vi har att

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{2}.$$

Vi får då att

$$|f'(1/2)| = |1 - 1/4| = 3/4 < 1,$$
$$|f'(-1/2)| = |1 + 1/4| = 5/4 > 1.$$

Detta medför att $x = 1/2$ är en stabil jämviktspunkt, samt att $x = -1/2$ är en instabil jämviktspunkt.