Lösningsförslag: inlupp 2

1. (a) Vi använder produktregeln:

$$f'(x) = 4 \cdot (5x^4) \cdot e^{3x} + 4x^5 \cdot (3e^{3x}) = 20x^4 e^{3x} + 12x^5 e^{3x} = (20x^4 + 12x^5)e^{3x}.$$

Vi använder kedjeregeln:

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{x^2+1}.$$

Vi använder kedjeregeln samt kvotregeln:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (e^x + 2x)e^{e^x + x^2} + \frac{1 \cdot (1 + x + x^2) - x(1 + 2x)}{(1 + x + x^2)^2} \\ &= (e^x + 2x)e^{e^x + x^2} + \frac{1 - x^2}{(1 + x + x^2)^2}. \end{aligned}$$

(b) Vi har att

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2,$$

och därför att $f'(2) = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 = 1 + 4 + 12 = 17$.
Tangenten är den räta linje $y = kx + m$ där $k = f'(2) = 17$, och som går igenom punkten $(2, f(2)) = (2, 15)$, eftersom $f(2) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$.
Vi kan nu beräkna m genom att lösa

$$15 = 17 \cdot 2 + m,$$

vilket ger $m = -19$. Så tangent ges av $y = 17x - 19$.

2. Vi har att

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 40x^3 + 105x^2 - 110x + 40 = 5(x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 22x + 8) \\ &= 5(x-1)^2(x-2)(x-4), \end{aligned}$$

där vi använt den givna likheten.

(a) De kritiska punkterna ges då $f'(x) = 0$, vilket vi ser är i de tre punkterna $x = 1$, $x = 2$ och $x = 4$.

(b) Vi gör en teckentabell:

x	0		1		2		4		5
$f'(x)$	+	+	0	+	0	−	0	+	+
	/	/	−	/	−	\	−	/	/

(Obs: derivatan i ändpunkterna behöver inte beräknas, det räcker med att derivatan är positiv mellan 0 och 1, respektive mellan 4 och 5.) Detta ger att ändpunkten $x = 0$ är lokalt minimum, $x = 2$ är ett lokalt maximum, $x = 4$ är lokalt minimum och ändpunkten $x = 5$ är lokalt maximum.

(c)

$$\begin{aligned}
f(0) &= 10 \\
f(1) &= 21 \\
f(2) &= 22 \\
f(4) &= -6 \\
f(5) &= 85
\end{aligned}$$

(Om vi har gjort (b) behöver vi inte beräkna $f(1)$, då vi vet att det är en sadelpunkt och vi kan därför inte ha ett globalt maximum eller minimum i denna punkt.) Då funktionen måste anta sitt största respektive minsta värde i en kritisk punkt eller i en ändpunkt, ser vi att $f(5) = 85$ är funktionens största värde och $f(4) = -6$ är funktionens minsta värde.

3. Vi har att

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\sqrt{x^4+1} - x \cdot \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}}}{(\sqrt{x^4+1})^2} \\
&= \frac{(\sqrt{x^4+1})^2 - 2x^4}{(x^4+1)^{3/2}} \\
&= \frac{x^4 + 1 - 2x^4}{(x^4+1)^{3/2}} \\
&= \frac{1 - x^4}{(x^4+1)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Vi löser $1 - x^4 = 0$, och ser att det finns två lösningar $x = \pm 1$, varav en, $x = 1$, är en kritisk punkt till $f(x)$ i intervallet $[0, \infty)$. Vi ser att nämnaren i uttrycket för $f'(x)$ alltid är positiv, och täljaren är positiv om $0 \leq x < 1$, samt negativ om $x > 1$. Därför är $x = 1$ ett lokalt maximimum. Det måste till och med vara ett globalt maximum eftersom funktionen minskar när $x > 1$ och ökar när $0 \leq x < 1$. Därför är funktionens största värde

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{1^4+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vi har att $f(0) = 0$, samt att $f(x) > 0$ om $x > 0$. Därför är funktionens minsta värde $f(0) = 0$.

4. Övergångsfunktionen är $f(x) = \frac{1}{8} + x\left(1 - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{8} + x - \frac{x^2}{2}$. Jämviktspunkterna ges av $x = f(x)$, dvs

$$x = \frac{1}{8} + x - \frac{x^2}{2}.$$

Vi förenklar ekvationen till

$$x^2 = \frac{1}{4},$$

vilket ger oss två fixpunkter $x = -\frac{1}{2}$ och $x = \frac{1}{2}$.

Vi har att $f'(x) = 1 - x$. Därför är

$$\begin{aligned}
|f'(-1/2)| &= |1 + 1/2| = 3/2 > 1, \\
|f'(1/2)| &= |1 - 1/2| = 1/2 < 1.
\end{aligned}$$

Vi drar slutsatsen att $x = -1/2$ är en instabil jämviktspunkt och att $x = 1/2$ är en stabil jämviktspunkt.