Tentamen
Matematik och statistik för biologer
2018 - 03 - 15

Tillåtna hjälpmedel: Anteckningar, böcker, miniräknare och all möjlig skrivutrustning.

OBS! Lösningarna skall vara väl motiverade och försedda med förklarande text. Alla steg i dina uträkningar o.s.v. ska redovisas för full poäng. Om du inte kan få till en fullständig lösning, försök då att ange i ord hur du tänkt och hur långt du kommit. Totalpoängen på denna skrivtenta är 40 poäng och för godkänt behövs 21 poäng, med minst 5 poäng på statistikdelen och minst 10 poäng på matematikdelen.

Om alla inlämningsuppgifter, datalabbar, samt skrivtentan är godkända bestäms betyget på kursen 'Matematik och statistik för biologer' av poängen på skrivtentan. Betyg 3: 21p-27p, Betyg 4: 28p-35p, Betyg 5: 36p-40p.

Matematikproblem

1. *(5p)* Alerstam et.al. (2007) studerade allometriska samband mellan flyghastighet och kroppsvikt hos fåglar och kom fram till följande formel:

$$y = 15,9\, x^{0,13},$$

där y är flyghastigheten i m/s och x kroppsvikten i kg.

Använd det allometriska sambandet ovan för att svara på följande frågor:

(a) Vad är flyghastigheten av en (olastad europeisk) svala som väger 20 gram?

(b) Om en fågelart flyger dubbelt så fort som en annan, hur många gånger tyngre är den då?

(c) Om vi plottar det allometriska sambandet i ett diagram med båda axlarna logaritmerade får vi en rät linje $Y = kX + m$ i de nya variablerna $Y = lg(y)$ och $X = lg(x)$. Bestäm linjens ekvation, d.v.s. hitta k och m.

2. *(5p)* Betrakta funktionen

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x+1},$$

där $x \geq 0$.

(a) Visa att derivatan av $f(x)$ är

$$f'(x) = \frac{3-x}{(x+1)^3}.$$

(b) Hitta det största och minsta värdet av $f(x)$ på intervallet $[0, 4]$.

(c) Ta fram ekvationen för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $x = 2$.

3. *(5p)* Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att egenvärdena till matrisen A är $\lambda_1 = 8$ och $\lambda_2 = -2$.

(b) Hitta egenvektorerna till A.

(c) Diagonalisera matrisen A, d.v.s. hitta matriser D, C och C^{-1}, där D är en diagonalmatris, så att $A = CDC^{-1}$.

(d) Beräkna A^8.
(Tips: Använd ditt svar i (c).)

4. *(5p)* Shepherd-modellen beskriver ett diskret dynamiskt system via ekvationen

$$x_{n+1} = \frac{rx_n}{1+x_n^2}.$$

I ekvationen ovan är $r > 1$ en konstant och vi är bara intresserade av icke-negativa värden på x_n, d.v.s. $x_n \geq 0$.

(a) Vad är systemets övergångsfunktion?

(b) Visa att systemets fixpunkter (jämvikter) är $x_1^* = 0$ och $x_2^* = \sqrt{r-1}$.

(c) För varje fixpunkt i (b), avgör om den är stabil eller instabil (attraherande eller repellerande).

5. *(5p)* Låt y vara en funktion av x, d.v.s. $y = y(x)$, och låt y' beteckna derivatan av y med avseende på x.

   (a) Lös differentialekvationen
   $$y' = -\frac{1}{x^3} + \sqrt{x} - 5.$$

   (b) Lös begynnelsevärdesproblemet
   $$y' = \frac{x^3+1}{4y}, \quad y(2) = 4.$$

   (c) Beräkna integralen
   $$\int_1^3 \frac{4x}{x^2+3}\,dx$$

Statistikproblem

Note: If you need to perform a hypothesis test, you may use 0.05 as the significance level (α value).

6. If one parent has *green* eyes and the second parent has *brown* eyes, then the probability that a child of such a couple has *blue* eyes equals to 12.5%. A *green*-eyed and a *brown*-eyed partner have 5 children.

   (a) *(3p)* What are the possible values of the random variable X=“number of *blue*-eyed children out of five” and the associated probabilities of each of these values?

   (b) *(1p)* What is the probability that the family has ***exactly one*** *blue*-eyed kid?

   (c) *(1p)* What is the probability that the family has ***at least one*** *blue*-eyed kid?

7. *(5p)* An investigator wants to know whether it is better to give a vaccine in either the thigh or the arm. For this purpose data of severe reactions to this vaccine have been collected.

	No severe reaction	Severe reaction
Thigh	4758	30
Arm	8840	76

   Does the type of reaction depend on the location of vaccination?

8. In order to check if there is a difference in males' and females' weight mean, two samples of 16 males ($X_i, i = 1 \ldots 16$) and 16 females ($Y_j, j = 1 \ldots 16$) are taken. Then, the following quantities have been obtained:

$$\sum_{i=1}^{16} X_i = 1275, \quad \sum_{i=1}^{16} X_i^2 = 102937$$
$$\sum_{j=1}^{16} Y_j = 968, \quad \sum_{j=1}^{16} Y_j^2 = 59442$$

(a) *(1p)* For each sample compute the sample's mean, variance, and standard deviation.

(b) *(2p)* Test a hypothesis that males and females have the same weight in average. (Assume that ***population variances are unknown but equal***. Perform a **two-sided test**).

(c) *(2p)* Calculate the 95% confidence interval for the difference of the two population means.