Lösningsförslag: tenta 2023-03-14

1. (a) Den karakteristiska ekvationen ges av $r^2 = 4$, som har rötterna $r_1 = 2$ och $r_2 = -2$. Därför ges den allmäna lösningen av

$$x_n = A2^n + B(-2)^n,$$

där A och B är konstanter som bestäms av begynnelsevillkoren.
Vi får att $5 = A+B$ och $6 = 2A-2B$. Detta ger att $3 = A-B = A-(5-A) = 2A-5$, så att $8 = 2A$, och slutligen $A = 4$. Då är $B = 5-A = 5-4 = 1$. Vi drar slutsatsen att en explicit formel för talföljden ges av

$$x_n = 4 \cdot 2^n + (-2)^n = 2^{n+2} + (-2)^n.$$

(b) Vi beräknar med formeln:

$$x_7 = 2^9 + (-2)^7 = 2^9 - 2^7 = 2^7(4-1) = 128 \cdot 3 = 384.$$

2. (a) Vi använder produktregeln och kedjeregeln för att få

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{1-x^2} + x^2(-2x)e^{1-x^2} \\ &= 2x(1-x^2)e^{1-x^2}. \end{aligned}$$

(b) De kritiska punkterna ges då $f'(x) = 0$, vilket ger

$$2x(1-x^2) = 0.$$

Vi ser att vi har tre kritiska punkter $x = -1$, $x = 0$ samt $x = 1$.
Vi gör en teckentabell (och vi använder oss av $e^{1-x^2} > 0$):

x		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
	$\nearrow$	$-$	$\searrow$	$-$	$\nearrow$	$-$	$\searrow$

Vi ser att $x = -1$ och $x = 1$ är (lokala) maximipunkter och $x = 0$ är (lokal) minimipunkt.

(c) Vi undersöker funktionens värden i de kritiska punkterna och i ändpunkterna.

$$\begin{aligned} f(-2) &= 4e^{-3} \\ f(-1) &= 1 \\ f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 \\ f(2) &= 4e^{-3} \end{aligned}$$

Då $0 < 4e^{-3} < 1$, så är det största värdet funktionen antar 1 och det minsta värdet 0.

(d) Lutningen ges av

$$k = f'(2) = 4 \cdot (-3) \cdot e^{-3} = -12e^{-3}.$$

Vi sätter in $(2, 4e^{-3})$ i ekvationen $y = kx + m = -12e^{-3}x + m$:

$$4e^{-3} = -24e^{-3} + m,$$

så att $m = 28e^{-3}$. Vi får att ekvationen för tangenten är

$$y = -12e^{-3}x + 28e^{-3}.$$

3. (a) Egenvärden ges som lösningarna till ekvationen $0 = \det(A - \lambda I)$. Vi får att

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = (2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = (1-\lambda)(3-\lambda),$$

så att egenvärdena är $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 3$.

(b) Vi löser ekvationssystemen $A - \lambda I = 0$, för $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 3$.
För $\lambda_1 = 1$ är

$$A - \lambda I = A - I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Detta ger att egenvektorerna med motsvarande egenvärde $\lambda_1 = 1$ är

$$\begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix},$$

där $t \neq 0$ är ett godtyckligt reellt tal.
För $\lambda_2 = 3$ är

$$A - \lambda I = A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Detta ger att egenvektorerna med motsvarande egenvärde $\lambda_2 = 3$ är

$$\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix},$$

där $t \neq 0$ är ett godtyckligt reellt tal.

(c) T.ex.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Vi har att

$$C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Då är

$$A^8 = (CDC^{-1})^8 = CD^8C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1+3^8)/2 & (-1+3^8)/2 \\ (-1+3^8)/2 & (1+3^8)/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3281 & 3280 \\ 3280 & 3281 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Systemets övergångsfunktion är

$$f(x) = \frac{5x^2}{x^2+6}.$$

(b) Fixpunkterna x^* ges av ekvationen $x = f(x)$, dvs:

$$x = \frac{5x^2}{x^2+6}.$$

Vi förenklar:

$$\begin{aligned} x(x^2+6) &= 5x^2, \\ x(x^2+6) - 5x^2 &= 0, \\ x(x^2-5x+6) &= 0. \end{aligned}$$

Vi ser att lösningarna ges av $x = 0$, samt av $x^2 - 5x + 6 = 0$, dvs.

$$\begin{aligned} x &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \\ &= \frac{5 \pm 1}{2} \\ &= 2, 3. \end{aligned}$$

Systemets trefixpunkter är alltså $x_1^* = 0$, $x_2^* = 2$ och $x_3^* = 3$.

(c) Vi beräknar derivatan till övergångsfunktionen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{10x(x^2+6) - 5x^2 \cdot (2x)}{(x^2+6)^2} \\ &= \frac{10x^3 + 60x - 10x^3}{(x^2+6)^2} \\ &= \frac{60x}{(x^2+6)^2}. \end{aligned}$$

Eftersom att

$$\begin{aligned} |f(0)| &= 0 < 1, \\ |f(2)| &= \left| \frac{120}{(4+6)^2} \right| = \frac{120}{100} > 1, \\ |f(3)| &= \left| \frac{180}{(9+6)^2} \right| = \frac{180}{225} < 1, \end{aligned}$$

så är $x_1^* = 0$ och $x_3^* = 3$ stabila fixpunkter, och $x_2^* = 2$ en instabil fixpunkt.

5. (a) Alla lösningar ges av

$$y(x) = \int 4x^4 - \frac{1}{x-2} + 1 dx = \frac{4x^5}{5} - \ln|x-2| + x + C,$$

där C är en konstant.

(b) Detta är en linjär differentialekvation av första ordningen, och den integrerande faktorn är

$$e^{\int 3x^2 dx} = e^{x^3}.$$

Vi har då att

$$y \cdot e^{x^3} = \int e^{x^3} \cdot \frac{1}{e^{x^3}} dx = \int 1 dx = x + C,$$

där C är en konstant som bestäms av begynnelsevillkoret. Vi får att

$$y(x) = \frac{x+C}{e^{x^3}}.$$

Vi bestämmer C:

$$1 = y(0) = \frac{0+C}{e^0} = C.$$

Begynnelsevärdesproblemet har därför lösningen

$$y(x) = \frac{x+1}{e^{x^3}}.$$

(c) Vi gör substitutionen $u = 1 + x^2$. Då är $du = 2x\,dx$ och gränserna ändras till $u(0) = 1$ samt $u(\sqrt{8}) = 1 + 8 = 9$. Vi får att

$$\int_0^{\sqrt{8}} x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int_1^9 \frac{\sqrt{u}}{2}\,du = \left[\frac{u^{3/2}}{3}\right]_1^9 = \frac{3^3-1}{3} = \frac{26}{3}.$$