

## Inlämningsuppgift nr 3 i matematik

Detta är den tredje av fyra inlämningsuppgifter i mattedelen av kursen. Varje inlämningsuppgift består av fyra problem som kan ge maximalt 5 poäng vardera, dvs varje inlämningsuppgift kan ge maximalt 20 poäng. Uppgifterna är en obligatorisk del av examinationen: man måste få totalt 40 poäng (av 80 möjliga) för att bli godkänd på kursen. Lämna in individuellt skrivna lösningar: det är okej att samarbeta för att lösa problemen men alla måste lämna in egna lösningar.

Lämna in senast onsdag 21 februari klockan 23:59. Lösningarna lämnas in på [gm.ibg.uu.se](http://gm.ibg.uu.se), under rubrikerna matematik följt av inlupp 3.

Lämna in lösningarna som en pdf. Det är okej med både skannade/fotade handskrivna lösningar och datorskrivna.

### Instruktioner:

- Lösningarna ska motiveras väl och formuleras tydligt. Man ska aldrig behöva gissa vad ni menar eller leta bland ostrukturerade uträkningar för att hitta svaret/lösningen eller delar därav. Skriv gärna hela meningar och tänk på era formuleringar.
- Se till att ni svarat på frågan.
- Börja med inlämningen i god tid så att ni hinner fråga om det är något som ni inte förstår.

**Lycka till!**

1. (Lite repetition.)

(a) Lös differensekvationen

$$x_{n+1} = -3x_n + 4$$

med begynnelsevillkoret  $x_0 = 2$ . Använd lösningen för att beräkna  $x_6$ .

(b) Bestäm jämviktspunkterna till nedanstående dynamiska system, och avgör om de är stabila eller instabila:

$$x_{n+1} = x_n e^{5x_n - 2}$$

2. (a) Hitta lösningarna till följande linjära ekvationssystem med hjälp av Gausseliminering:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 10 \\ \quad - y + 2z = -6 \\ 3x + 7y - z = 35 \end{cases}$$

(b) Beräkna determinanten av

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Beräkna följande:

(a)  $-4A^{-1}$

(b)  $BC - CB$

(c)  $A^2 BC (BC)^{-1} A^{-1}$

(d)  $C(AC)^{-1}ABC$

(e)  $2(BC^{-1} + I_2)C$

(Hint: använd räknereglerna för matriser.)

4. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Beräkna matrisens egenvärden.

(b) Beräkna matrisens egenvektorer.

(c) Diagonalisera  $A$ , dvs hitta matriser  $C$  och  $D$  så att  $C^{-1}AC = D$ , där  $D$  är en diagonalmatrix (bara nollskild längs diagonalen i matrisen).

(d) Beräkna  $A^2$ ,  $A^3$  och  $A^4$ ; ser du något mönster? Gissa en formel för  $A^n$ , där  $n \geq 1$  är ett heltal.

(e) Visa formeln för  $A^n$  genom att beräkna  $D^n$ , och därefter  $CD^nC^{-1}$ .