

OBS! Lösningarna skall vara väl motiverade och försedda med förklarande text. Exempelvis ska alla steg i uträkningar av derivator etc. redovisas för full poäng. Om du inte kan få till en fullständig lösning, försök då att ange i ord hur du tänkt och hur långt du kommit. Välj lämpliga beteckningar för matematiska storheter. Totalpoängen på denna skrivtenta är 40 poäng och för godkänt behövs 21 poäng med rimlig fördelning mellan matematik och statistik.

Tillåtna hjälpmedel: Anteckningar, böcker, miniräknare och all möjlig skrivutrustning.

Om sju inlämningsuppgifter och skrivtenta är godkända bestäms betyget på kursen matematik och statistik för biologer av den poängen på skrivtenta. Maxpoängen är 40 poäng och betygsgränserna för 4 och 5 är grovt 70% respektive 90% av denna maxpoäng. Betyg 3: 21p-27p, Betyg 4: 28p-35p, Betyg 5: 36p-40p.

Matematikproblem

1. (5p) En spelentusiast tror sig ha hittat följande allometriskt samband för Pokémon:

$$Y = 1,1X^{0,65}$$

där Y är Pokémonens HP (hit points) och X är Pokémonens CP (combat power). Använd detta samband för att

- (a) Uppskatta antalet HP för en Pokémon som har CP 500.
- (b) Uppskatta antalet CP för en Pokémon som har HP 50.
- (c) Om vi plottar det allometriskt sambandet i ett diagram med både X - och Y -axeln logaritmerade får vi en rät linje $y = kx + m$ i de nya variablerna $x = \lg(X)$ och $y = \lg(Y)$. Bestäm linjens ekvation, dvs hitta k och m .

2. (5p) Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- (a) Beräkna egenvärdena och egenvektorer till A .
- (b) Diagonalisera matrisen A , d.v.s. hitta matriser D , C och C^{-1} , där D är en diagonalmatris, så att $A = CDC^{-1}$.
- (c) Beräkna

$$A^7$$

(OBS! Det finns två bra och en riktigt dålig metod ni känner till för att göra detta. Att börja utföra 7 matrismultiplikationer ger 0 poäng.)

3. (5p) Betrakta följande funktion

$$f(x) = x(x - 4) + 5$$

- (a) Hitta det största värdet av $f(x)$ på intervallet $[0, 5]$.
- (b) Hitta alla kritiska punkter och bestäm vilka som är maximi- respektive minimipunkter.
- (c) Ta fram ekvationen för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $x = 3$.

4. (5p) Låt y vara en funktion av x , dvs. $y = y(x)$, och låt y' beteckna derivatan av y med avseende på x .

- (a) Lös differentialekvationen

$$y' = \frac{1}{x^3} + 2x^2 + 7$$

- (b) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y' = \frac{x}{2y},$$

$$y(1) = 2.$$

- (c) Beräkna integralen

$$\int_0^2 3x^2 e^{x^3} dx$$

5. (5p) Betrakta differentialekvationen

$$y' = 2y - 0.2y^2$$

- (a) Finn alla jämviktslösningar till ekvationen.
 (b) För varje jämviktslösning du fann i a), avgör om den är attraherande eller repellerande (stabil eller instabil).

Statistikproblem

Note: If you need to perform a hypothesis test, you can use 0.05 as the α value.

1. In order to investigate the relationship between height and weight a sample of 100 subjects is taken. Let X be a random variable that corresponds to the height, and let Y be a random variable that corresponds to the weight. So, we have $n = 100$ paired sample points (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. The following quantities are obtained from the paired sample:

$$\bar{X} = 169.5837, \quad \sum_{i=1}^n X_i^2 = 2882493.331, \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 6957.804, \quad \bar{Y} = 4909.19903, \quad \text{cov}(X, Y) = 67.38257.$$

- (a) (1p) Compute all the numerical characteristics of the samples (means, variances, standard deviations, covariance).
 (b) (2p) Compute the correlation coefficient between height and weight. What can we conclude from its value?
 (c) (2p) Compute the linear regression coefficients of the model $Y_i = a + bX_i + \epsilon_i$ and the determination coefficient (how do you interpret its value?).
2. (5p) After testing an experimental drug the adverse events graded as *Mild*, *Moderate*, *Severe* and *Life-threatening* have been reported. The report is summarized by the following frequency table:

| | Adverse event (AE) | | | |
|-------------------|--------------------|-----------------|---------------|-------------------------|
| | <i>Mild</i> | <i>Moderate</i> | <i>Severe</i> | <i>Life-threatening</i> |
| Experimental Drug | 3 | 4 | 2 | 1 |

Investigators assume that all the types of adverse events are equally likely. Is this assumption correct?

3. An experimental drug which normalizes the *total cholesterol level (TChL)* (mg/dl) is compared to etalon drug. Investigators assume that *TChL* of the experimental drug follows normal distribution $N(\mu_1, \sigma_1)$, and *TChL* of the etalon drug follows normal distribution $N(\mu_2, \sigma_2)$. After taking 10 measurements on each drug investigators have got sample means $X_1 = 219.1$, $X_2 = 238.1$, and sample standard variances $s_1^2 = 38.1$, $s_2^2 = 47.6$.
- (a) (1p) What is the 95% confidence interval for the *TChLs* of the drugs if $\mu_1 = 218$, $\sigma_1 = 6$, and $\mu_2 = 240$, $\sigma_1 = 7$?
 - (b) (2p) Can we accept that there is no difference in the drugs' effects according to the sample numeric characteristics?
 - (c) (2p) Give a 95% confidence interval for the difference of the two population means (if it is known that the population variances are equal but unknown).