Lösningsförslag: inlupp 4

Uppgift 1.

(a)

$$\int \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{\pi}{x^3} + \frac{e}{2} + \frac{x^2}{3} dx = 4\sqrt{x} - \frac{\pi}{2x^2} + \frac{e}{2}x + \frac{x^3}{9} + C$$

(b) Eftersom att $x^2 + 3x - 10$ har lösningarna

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 10} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{-3 \pm 7}{2} = -5, 2$$

så är $x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$. Vi partialbråksuppdelar:

$$\frac{7}{x^2 + 3x - 10} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-2}.$$

Vi bestämmer A och B genom att sätta högerledet under gemensamt bråksträck: $A(x-2) + B(x+5) = 7$. Detta ger att $A = -B$, och därfeter att $2B + 5B = 7$, så att $B = 1$ och $A = -1$. Vi får då

$$\int \frac{7}{x^2 + 3x - 10} = \int -\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-2} dx = -\ln|x+5| + \ln|x-2| + C.$$

Uppgift 2.

(a) Med partiell integration:

$$\int_0^1 xe^x - x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = (e-0) - (e-1) - \left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}.$$

(b) Vi gör substitutionen $t = \sqrt{x+1}$. Vi får då att

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}},$$

så att

$$\frac{dx}{\sqrt{x+1}} = 2dt.$$

Om $x = 0$, så är $t = \sqrt{0+1} = 1$, och om $x = 3$, så är $t = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$.

Vi får då att

$$\int_0^3 \frac{4e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx = \int_1^2 8e^t dt = 8(e^2 - e) = 8e(e-1).$$

Uppgift 3.

(a) Vi har att

$$y = \int -\frac{1}{x^2} + \pi dx = \frac{1}{x} + \pi x + C.$$

Begynnelsevillkoret ger att

$$\pi + 1 = y(1) = \frac{1}{1} + \pi \cdot 1 + C,$$

vilket ger $C = 0$. Svar: Lösningen är $y(x) = \frac{1}{x} + \pi x$.

(b) Differetntialekvationen är separabel, och vi skriver om den som

$$3y^2 dy = \frac{dx}{x}.$$

Vi integrerar:

$$y^3 = \ln x + C.$$

Därför är

$$y = (\ln x + C)^{1/3}.$$

Begynnelsevillkoret ger att

$$1 = y(1) = (\ln 1 + C)^{1/3} = C^{1/3},$$

så att $C = 1$. Svar: Lösningen är $y = (\ln x + 1)^{1/3}$.

Uppgift 4.

(a) Jämviktslösningarna ges av $y = C$, konstant, som uppfyller $f(y) = 0$, där $f(y) = y^4 - 256$. Vi får två lösningar: $y = 4$ och $y = -4$.

(b) Vi har att

$$f'(y) = 4y^3.$$

Eftersom att

$$f'(4) = 256 > 0$$
$$f'(-4) = -256 < 0,$$

så är $y = 4$ en instabil lösning och $y = -4$ en stabil lösning.