Lösningsförslag: inlupp 1

1. (a) Vi skriver om som
$$e^{-\sqrt{t}} = y - \frac{5}{2}.$$
Vi tar naturliga logaritmen bå bägge sidor:
$$-\sqrt{t} = \ln\left(y - \frac{5}{2}\right).$$
Vi höjer upp bägge sidor med 2, vilket ger slutresultatet
$$t = \left(\ln\left(y - \frac{5}{2}\right)\right)^2.$$

   (b) Från $0 < e^{-\sqrt{t}} \leq 1$ får vi
$$\frac{5}{2} < e^{-\sqrt{t}} \leq 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}.$$
Vi ser att ekvationen har en lösning för $\frac{5}{2} < y \leq \frac{7}{2}$.

2. (a)
$$\frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2}{x^2 - 2x} = \frac{x^2(x-2)^2}{x(x-2)} = x(x-2) = x^2 - 2x$$

   (b)
$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{5} i^2 - \sum_{j=-1} (2j+1) &= \left(2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2\right) - (-1 + 1 + 3 + 5 + 7) \\ &= 54 - 19 \\ &= 39\end{aligned}$$

   (c)
$$\frac{8^2 \cdot 4}{2^{-3}} \cdot \frac{2^2}{2^{15}} \cdot 16^0 = (2^3)^2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^{-15} \cdot 1 = 2^{6+2+3+2-15} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

   (d) Alternativ 1:
$$\begin{aligned}\frac{\log_5(2500)}{2\log_5(10)} + \frac{2}{\log_5\left(\frac{1}{100}\right)} &= \frac{\log_5(25) + \log_5(100)}{\log_5(100)} - \frac{2}{\log_5(100)} \\ &= \frac{2 + \log_5(100) - 2}{\log_5(100)} \\ &= 1\end{aligned}$$

Alternativ 2:

$$
\begin{aligned}
\frac{\log_5(2500)}{2\log_5(10)} + \frac{2}{\log_5\left(\frac{1}{100}\right)} &= \frac{\log_{10}(50^2)}{2} - \frac{2\log_5(5)}{2\log_5(10)} \\
&= \log_{10}(50) - \log_{10}(5) \\
&= \log_{10}\left(\frac{50}{5}\right) \\
&= \log_{10}(10) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

(Finns även andra möjligheter.)

3. (a) Här får vi

$$0,5 = \frac{\sqrt{M}}{200},$$

vilket ger

$$M = 100^2 = 10000\,\text{kg}.$$

(b) I detta fall får vi

$$H = \frac{\sqrt{2500}}{200} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}\,\text{kg}.$$

Detta är H/M, dvs,

$$\frac{1/4)}{2500} = \frac{1}{10000}$$

av den totala massan. Vilket är $0,01\,\%$.

(c) Alternativ 1: Vi har att

$$
\begin{aligned}
Y &= \lg(H) \\
&= \lg\left(\frac{M^{1/2}}{200}\right) \\
&= \frac{1}{2}\lg(M) - \lg(200) \\
&= \frac{1}{2}X - \lg(200).
\end{aligned}
$$

Dvs. $k = 1/2$ och $m = -\lg(200)$.

Alternativ 2: Från (a) och (b) kan vi beräkna k genom

$$k = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{\lg(1/4) - \lg(1/2)}{\lg(2500) - \lg(10000)} = \frac{\lg\left(\frac{1/4}{1/2}\right)}{\lg(1/4)} = \frac{\lg(1/2)}{2\lg(1/2)} = \frac{1}{2}.$$

Vi kan nu sätta in (X_1, Y_1) eller (X_2, Y_2) i $Y = kX + m$ för att lösa ut m, t.ex.:

$$\lg(1/2) = \frac{\lg(10000)}{2} + m,$$

så att

$$m = \lg((1/2) - \lg(100) = \lg\left(\frac{1/2}{100}\right) = \lg\left(\frac{1}{200}\right).$$

Vi får att linjen har ekvationen

$$Y = \frac{1}{2}X + \lg\left(\frac{1}{200}\right).$$

4. (a) Den karakteristiska ekvationen är $r^2 = 4r - 4$, eller $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$, som har en dubbelrot $r = 2$. Från känd formel får vi då att den allmäna lösningen ges av

$$x_n = (An + B)2^n,$$

där A och B är konstanter (som bestäms av begynnelsevillkoren).

(b) Vi får att

$$1 = x_0 = (A \cdot 0 + B) \cdot 2^0 = B,$$

samt då att

$$4 = (A \cdot 1 + B)2^1 = (A + 1) \cdot 2 = 2A + 2,$$

vilket ger $A = 1$. Därför är lösningen

$$x_n = (n + 1)2^n.$$