UPPSALA UNIVERSITET **Tentamen**

Matematik och statistik för biologer
2017 - 03 - 17

Tillåtna hjälpmedel: Anteckningar, böcker, miniräknare och all möjlig skrivutrustning.

OBS! Lösningarna skall vara väl motiverade och försedda med förklarande text. Alla steg i dina uträkningar o.s.v. ska redovisas för full poäng. Om du inte kan få till en fullständig lösning, försök då att ange i ord hur du tänkt och hur långt du kommit. Totalpoängen på denna skrivtenta är 40 poäng och för godkänt behövs 21 poäng med rimlig fördelning mellan matematik och statistik.

Om sju inlämningsuppgifter och skrivtentan är godkända bestäms betyget på kursen 'Matematik och statistik för biologer' av poängen på skrivtentan. Maxpoängen är 40 poäng och betygsgränserna för 4 och 5 är grovt 70% respektive 90% av denna maxpoäng. Betyg 3: 21p-27p, Betyg 4: 28p-35p, Betyg 5: 36p-40p.

Matematikproblem

1. *(5p)* Två forskare studerade allometriska samband mellan vikt och längd bland barn på formen
$$y = ax^b,$$
där y är kroppslängden i cm, x kroppsvikten i kg, och a och b är reella tal. De fann att värdena på a och b varierade beroende på kön och åldersgrupp.

   (a) För pojkar mellan 0 och 1 år fann de att $a = 30,2$ och $b = 0,377$. Använd dessa värden på a och b samt det allometriska sambandet ovan för att uppskatta:

   (i) Längden av en pojke som väger 4 kg.

   (ii) Vikten av en pojke som är 60 cm lång.

   (b) För flickor mellan 5 och 10 år plottade de mätdata i en log-log graf. I de logaritmerade variablerna $X = lg(x)$ och $Y = lg(y)$ fick de fram en rät trendlinje med ekvation
$$Y = 0,398X + 1,54.$$
Använd detta för att uppskatta värdena på a och b i denna åldersgrupp.

2. *(5p)* Betrakta funktionen

$$f(x) = \sqrt{4x^3 + 15x^2 + 12x + 23},$$

där $x \geq -3$.

(a) Visa att derivatan av $f(x)$ är

$$f'(x) = \frac{6x^2 + 15x + 6}{\sqrt{4x^3 + 15x^2 + 12x + 23}}.$$

(b) Hitta det största och minsta värdet av $f(x)$ på intervallet $[-3, 0]$.

(c) Ta fram ekvationen för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $x = -1$.

3. *(5p)* Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att egenvärdena till matrisen A är $\lambda_1 = 4$ och $\lambda_2 = -3$.

(b) Hitta egenvektorerna till A.

(c) Diagonalisera matrisen A, d.v.s. hitta matriser D, C och C^{-1}, där D är en diagonalmatris, så att $A = CDC^{-1}$.

(d) Beräkna A^7.
(Tips: Använd ditt svar i (c).)

4. *(5p)* Beverton-Holt modellen beskriver ett diskret dynamiskt system via ekvationen

$$x_{n+1} = \frac{rx_n}{1 + Mx_n}.$$

I ekvationen ovan är r och M positiva konstanter och $r > 1$.

(a) Vad är systemets övergångsfunktion?

(b) Visa att systemets fixpunkter (jämvikter) är $x_1^* = 0$ och $x_2^* = \frac{r-1}{M}$.

(c) För varje fixpunkt i (b), avgör om den är stabil eller instabil (attraherande eller repellerande).

5. *(5p)* Låt y vara en funktion av x, d.v.s. $y = y(x)$, och låt y' beteckna derivatan av y med avseende på x.

   (a) Lös differentialekvationen
   $$y' = -\frac{1}{x^4} + 2x^3 + 3.$$
   (b) Lös begynnelsevärdesproblemet
   $$y' = \frac{x^3}{4y}, \quad y(2) = 3.$$
   (c) Beräkna integralen
   $$\int_0^1 3x\sqrt{x^2+1}\, dx$$

Statistikproblem

Note: If you need to perform a hypothesis test, you can use 0.05 as the α value.

1. In order to check if there is a difference in males' and females' height mean two samples of 13 females ($X_i, i = 1 \dots 13$) and 14 males ($Y_j, j = 1 \dots 14$) are taken. Then, the following quantities have been obtained:
   $$\sum_{i=1}^{13} X_i = 2161, \quad \sum_{i=1}^{13} X_i^2 = 359561$$
   $$\sum_{j=1}^{14} Y_j = 2553, \quad \sum_{j=1}^{14} Y_j^2 = 466007$$
   (a) *(1p)* For each sample compute the sample's mean, variance, and standard deviation.

   (b) *(2p)* Check if the population height means are the same for females and males. (*population variances are unknown but equal*. Perform **two-sided test**).

   (c) *(2p)* What is the 95% confidence interval for the difference of the two population means?

2. *(5p)* Different types of mutations have been investigated for the Melanoma cancer. The results of the investigation are given by the following frequency table:

	Mutation				
Type of cancer	$A \to C$	$A \to G$	$A \to T$	$C \to G$	$C \to T$
Melanoma	16	20	15	26	23

   Test a hypothesis that mutations are equally probable (use two-sided test).

3. It was observed in previous studies that 10% of patients had got an adverse event (AE) of a particular type after taking an experimental drug. For a new study 5 patients have been chosen and have been given the same drug with the same dose. An investigator wants to study the distribution of the random variable "number of subjects experiencing AEs" (assume that one patient can get only one AE after dosing).

   (a) *(3p)* What are the possible values of this random variable and the associated probabilities of each of these values?

   (b) *(1p)* What is the probability that the number patients experiencing an AEs is larger than 3?

   (c) *(1p)* What is the probability that at least one patient gets an AE?