

Skrivtid, inlämning och frågor: Ordinarie skrivtid är 08.00-13.00. Senast 13.20 ska tentan lämnas in, och då som en pdf-fil. Får du problem med att lämna in, kontakta en lärare direkt! Vid eventuella frågor, maila någon av oss lärare (se nedan), vi är båda tillgängliga under skrivtiden.

Håll också viss uppsikt över er studentmail, eventuell kommunikation från oss lärare kommer ske där.

Skulle det vara så att ert internet slutar att fungera och ni inte kan maila någon av oss, ring då Tobias Jakobsson på telefonnummer 018 471 46 26.

Tillåtna hjälpmedel: Anteckningar, böcker, miniräknare, Python, R, och all möjlig skrivutrustning.

OBS! Alla lösningar skall göras **enskilt**, samarbete är **ej** tillåtet.

Lösningarna skall vara väl motiverade och försedda med förklarande text. Alla steg i dina uträkningar o.s.v. ska redovisas för full poäng. Om du inte kan få till en fullständig lösning, försök då att ange i ord hur du tänkt och hur långt du kommit. Totalpoängen på denna skrivtenta är 40 poäng och för godkänt behövs 21 poäng, med minst 5 poäng på statistikdelen och minst 10 poäng på matematikdelen.

Om alla inlämningsuppgifter, datalabbar, samt skrivtentan är godkända bestäms betyget på kursen 'Matematik och statistik för biologer' av poängen på skrivtentan. Betyg 3: 21p-27p, Betyg 4: 28p-35p, Betyg 5: 36p-40p.

Lärare:

Martin Andersson: martin.andersson@math.uu.se

Maciej Klimek: maciej.klimek@math.uu.se

Matematikproblem

Lösningar på dessa problem måste göras för hand. Inga hänvisningar till kod i Python eller R, eller till grafer gjorda med hjälp av en dator/miniräknare kommer godkännas som lösning. Dessa verktyg får däremot användas för att kontrollera att lösningen är rätt, och detta behöver inte redovisas.

1. (5p) Brian K. McNab presenterade 1988 en studie av en stor grupp däggdjur som gav följande allometriskt samband mellan den basala metaboliska hastigheten V , mätt i watt, och kroppsmassan M , mätt i kg:

$$V = 2,652M^{0,713}.$$

Använd sambandet för att svara på följande frågor:

- (a) Om den basala metaboliska hastigheten hos ett djur är 130 watt, hur stor är massan?
- (b) Om den basala metaboliska hastigheten i a) ökar med 50%, med hur många procent har massan ökat?
- (c) Omvänt, om massan ökar med 50% i a), med hur många procent har den basala metaboliska hastigheten ökat?

2. (5p) Betrakta funktionen

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x^3}{3} - \frac{x}{2}}.$$

(a) Visa att derivatan av $f(x)$ är

$$\frac{x^2 - \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{2x^3}{3} - \frac{x}{2}}}.$$

(b) Hitta det största och minsta värdet av $f(x)$ på intervallet $[1, 5]$. Vi kan anta att $\frac{2x^3}{3} - \frac{x}{2}$ aldrig är 0 på det intervallet.

(c) Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $x = 2$.

3. (5p) Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -2 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att egenvärdena till matrisen A är $\lambda_1 = -1/2$ och $\lambda_2 = 5/2$.

(b) Hitta egenvektorer till A .

(c) Diagonalisera matrisen A , d.v.s. hitta matriser D , C och C^{-1} , där D är en diagonalmatris, så att $A = CDC^{-1}$.

(d) Beräkna A^9 .

(Tips: Använd ditt svar i (c).)

4. (5p) Betrakta differensekvationen

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 6x_n,$$

med begynnelsevärden $x_0 = 1$ och $x_1 = 2$.

(a) Hitta en explicit formel för x_n .

(b) Beräkna $x_{12} + 6x_{11}$.

5. (5p) Låt y vara en funktion av x , d.v.s. $y = y(x)$, och låt y' beteckna derivatan av y med avseende på x .

(a) Lös begynnelsevärdeproblemet

$$xy' = \frac{2xe^x + x}{y^2},$$

$$y(0) = 1.$$

(b) Lös differentialekvationen

$$y' = \sqrt{2x} + \frac{3}{2x^2} + 2x^3.$$

(c) Beräkna integralen

$$\int_{-3}^3 (x^4 + 2)^2 4x^3 \, dx.$$

Statistics problems

The solutions to the statistics problems can be written in English or in Swedish (or in the mixture of both languages). The use of Python or R is allowed. All solutions, both conventional and those based on computer code should be properly motivated and should contain explanatory text. **For the Swedish versions of the questions turn to page 7. At the end of the exam paper, the necessary quantile tables are attached.**

1. (5p) Suppose that we select a random sample of 12 animals from a large population in which 5% are known to be mutants.

- (a) What is the probability that fewer than 3 animals in the sample will be mutants?
- (b) What is the probability that 3 or more animals in the sample will be mutants?
- (c) What is the probability that exactly 2 animals in the sample will be mutants?

2. (5p) In the study of blood pressure among chronic migraine sufferers 121 adults were selected at random. The sample mean systolic blood pressure for this group of patients turned out to be 145 mm Hg and the sample standard deviation was 27 mm Hg.

- (a) Calculate a 95% confidence interval for the mean systolic blood pressure μ among the population of adult migraine sufferers.
- (b) Test the hypothesis that the mean systolic blood pressure μ among this population is actually 139 mm Hg, against the two-tailed alternative hypothesis that $\mu \neq 139$.
- (c) What is the p -value for this test?

3. (5p) It has been claimed that the nut weight from a dwarf coconut tree follows the normal distribution with mean 85g and standard deviation 15g. A random sample 500 nuts has been collected and weighted. The weights are summarized in the following table:

Weight band:	0–49	49–68	68–87	87–106	106–125	≥ 125
Number of nuts:	8	85	194	172	35	6

Perform a goodness-of-fit χ^2 -test at the significance level $\alpha = 0.05$ to determine if the sample data supports the hypothesis about the normal distribution of weight.

1. (5p) Anta att vi drar ett slumpmässigt stickprov om tolv djur från en stor population, i vilken 5% av djuren är mutanter.

- (a) Hur stor är sannolikheten att få färre än tre mutanter i stickprovet?
- (b) Hur stor är sannolikheten att få tre eller flera mutanter i stickprovet?
- (c) Hur stor är sannolikheten att få exakt två mutanter i stickprovet?

2. (5p) I studien av blodtryck bland kroniska migränpatienter har 121 vuxna valts ut slumpmässigt. Sticksprovsmedelvärdet för det systoliska blodtrycket för denna patientgrupp visade sig vara 145 mm Hg och standardavvikelsen var 27 mm Hg.

- (a) Beräkna ett 95% konfidensintervall för det genomsnittliga systoliska blodtrycket μ bland vuxna migränpatienter.
- (b) Testa hypotesen att det genomsnittliga systoliska blodtrycket μ för denna population faktiskt är 139 mm Hg mot den dubbelsidiga forskningshypotesen att $\mu \neq 139$.
- (c) Vilket är testets p-värde?

3. (5p) Det har hävdats att nötens vikt från en dvärgkokospalm följer normalfördelningen med medelvärde 85g och standardavvikelse 15g. Ett slumpmässigt urval av 500 nötter har samlats in och vägts. Viktarna sammanfattas i följande tabell:

Weight band:	0–49	49–68	68–87	87–106	106–125	≥ 125
Number of nuts:	8	85	194	172	35	6

Använd ett χ^2 -anpassningstest på signifikansnivån $\alpha = 0,05$ för att avgöra om provdata stöder hypotesen om normalfördelning av vikten.

Source of tables:
 Lars-Åke Lindahl, Ulf Lindh,
 KVANTITATIV BIOLOGI
 Liber, 2012, Stockholm

Tabeller

Tabell 1. Normalfördelningens kvantiler z_α

Tabellen ger z_α för $\alpha \leq 0,5$, där z_α definieras av att $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$, eller ekvivalent att $P(X > z_\alpha) = \alpha$ då $X \sim N(0, 1)$.

För $\alpha > 0,5$ utnyttjas att $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$.

α	z_α
0,50	0,000000
0,40	0,253347
0,30	0,524401
0,25	0,674490
0,20	0,841621
0,15	1,036433
0,10	1,281552
0,05	1,644854
0,025	1,959964
0,010	2,326348
0,005	2,575829
0,001	3,090232
0,0005	3,290527
0,0001	3,719016
0,00005	3,890592



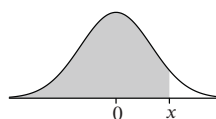
Figur 1. Arean till höger om z_α är α , och arean mellan $-z_\alpha/2$ och $z_\alpha/2$ är $1 - \alpha$.

Tabell 2. Normalfördelningens fördelningsfunktion $\Phi(x)$

Tabellen ger $\Phi(x) = \Pr(X \leq x)$ då $X \sim N(0, 1)$ för $0 \leq x \leq 3,09$.

För $x \leq 0$ utnyttjas att $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	,5000	,5040	,5080	,5120	,5160	,5199	,5239	,5279	,5319	,5359
0,1	,5398	,5438	,5478	,5517	,5557	,5596	,5636	,5675	,5714	,5753
0,2	,5793	,5832	,5871	,5910	,5948	,5987	,6026	,6064	,6103	,6141
0,3	,6179	,6217	,6255	,6293	,6331	,6368	,6406	,6443	,6480	,6517
0,4	,6554	,6591	,6628	,6664	,6700	,6736	,6772	,6808	,6844	,6879
0,5	,6915	,6950	,6985	,7019	,7054	,7088	,7123	,7157	,7190	,7224
0,6	,7257	,7291	,7324	,7357	,7389	,7422	,7454	,7486	,7517	,7549
0,7	,7580	,7611	,7642	,7673	,7704	,7734	,7764	,7794	,7823	,7852
0,8	,7881	,7910	,7939	,7967	,7995	,8023	,8051	,8078	,8106	,8133
0,9	,8159	,8186	,8212	,8238	,8264	,8289	,8315	,8340	,8365	,8389
1,0	,8413	,8438	,8461	,8485	,8508	,8531	,8554	,8577	,8599	,8621
1,1	,8643	,8665	,8686	,8708	,8729	,8749	,8770	,8790	,8810	,8830
1,2	,8849	,8869	,8888	,8907	,8925	,8944	,8962	,8980	,8997	,9015
1,3	,9032	,9049	,9066	,9082	,9099	,9115	,9131	,9147	,9162	,9177
1,4	,9192	,9207	,9222	,9236	,9251	,9265	,9279	,9292	,9306	,9319
1,5	,9332	,9345	,9357	,9370	,9382	,9394	,9406	,9418	,9429	,9441
1,6	,9452	,9463	,9474	,9484	,9495	,9505	,9515	,9525	,9535	,9545
1,7	,9554	,9564	,9573	,9582	,9591	,9599	,9608	,9616	,9625	,9633
1,8	,9641	,9649	,9656	,9664	,9671	,9678	,9686	,9693	,9699	,9706
1,9	,9713	,9719	,9726	,9732	,9738	,9744	,9750	,9756	,9761	,9767
2,0	,9772	,9778	,9783	,9788	,9793	,9798	,9803	,9808	,9812	,9817
2,1	,9821	,9826	,9830	,9834	,9838	,9842	,9846	,9850	,9854	,9857
2,2	,9861	,9864	,9868	,9871	,9875	,9878	,9881	,9884	,9887	,9890
2,3	,9893	,9896	,9898	,9901	,9904	,9906	,9909	,9911	,9913	,9916
2,4	,9918	,9920	,9922	,9925	,9927	,9929	,9931	,9932	,9934	,9936
2,5	,9938	,9940	,9941	,9943	,9945	,9946	,9948	,9949	,9951	,9952
2,6	,9953	,9955	,9956	,9957	,9959	,9960	,9961	,9962	,9963	,9964
2,7	,9965	,9966	,9967	,9968	,9969	,9970	,9971	,9972	,9973	,9974
2,8	,9974	,9975	,9976	,9977	,9977	,9978	,9979	,9979	,9980	,9981
2,9	,9981	,9982	,9982	,9983	,9984	,9984	,9985	,9985	,9986	,9986
3,0	,9987	,9987	,9987	,9988	,9988	,9989	,9989	,9989	,9990	,9990



Figur 2. Arean till vänster om x är $\Phi(x)$.

Tabell 3. *t-fördelningens kvantiler $t_{n, \alpha}$*

$n \backslash \alpha$	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
1	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	318,3088	636,6192
2	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	22,3271	31,5991
3	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	1,2145	12,9240
4	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	7,1732	8,6103
5	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	5,8934	6,8688
6	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,2076	5,9588
7	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	4,7853	5,4079
8	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	4,5008	5,0413
9	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,2968	4,7809
10	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,1437	4,5869
11	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,0247	4,4370
12	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	3,9296	4,3178
13	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	3,8520	4,2208
14	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	3,7874	4,1405
15	1,3406	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	3,7328	4,0728
16	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	3,6862	4,0150
17	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,6458	3,9651
18	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,6105	3,9216
19	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,5794	3,8834
20	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,5518	3,8495
21	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,5272	3,8193
22	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,5050	3,7921
23	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,4850	3,7676
24	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,4668	3,7454
25	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,4502	3,7251
26	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,4350	3,7066
27	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,4210	3,6896
28	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,4082	3,6739
29	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,3962	3,6594
30	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,3852	3,6460
35	1,3062	1,6896	2,0301	2,4377	2,7238	3,3400	3,5911
40	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,3069	3,5510
45	1,3006	1,6794	2,0141	2,4121	2,6896	3,2815	3,5203
50	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,2614	3,4960
60	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,2317	3,4602
70	1,2938	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	3,2108	3,4350
80	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,1953	3,4163
100	1,2901	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	3,1737	3,3905
120	1,2886	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	3,1595	3,3735
∞	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,0902	3,2905