

Tillåtna hjälpmedel: Anteckningar, böcker, miniräknare och all möjlig skrivutrustning.

OBS! Lösningarna skall vara väl motiverade och försedda med förklarande text. Alla steg i dina uträkningar o.s.v. ska redovisas för full poäng. Om du inte kan få till en fullständig lösning, försök då att ange i ord hur du tänkt och hur långt du kommit. Totalpoängen på denna skrivtenta är 40 poäng och för godkänt behövs 21 poäng, med minst 5 poäng på statistikdelen och minst 10 poäng på matematikdelen.

Om alla inlämningsuppgifter, datalabbar, samt skrivtentan är godkända bestäms betyget på kursen 'Matematik och statistik för biologer' av poängen på skrivtentan. Betyg 3: 21p-27p, Betyg 4: 28p-35p, Betyg 5: 36p-40p.

Matematikproblem

1. (5p) Hos krabbarten *Uca pugnax* har hanarna en väldigt förstorad klo. Följande (approximativt) allometriskt samband gäller då:

$$w = 0,036m^{1,36},$$

där w är den större klons vikt i gram, och m är hela kroppsvikten i gram. Använd det allometriskt sambandet ovan för att svara på följande frågor:

- (a) Bestäm klons andel av vikten hos en krabba som väger 20 gram.
- (b) Bestäm kroppsmassan om den större klon väger 10 gram.
- (c) Om vi plottar det allometriskt sambandet i ett diagram med båda axlarna logaritmerade får en rät linje $W = kM + c$ i de nya variablerna $W = \lg(w)$ och $M = \lg(m)$. Bestäm linjens ekvation, det vill säga hitta k och c .

2. (5p) Betrakta funktionen

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x^3}{3} - 4x^2 + 6x + 4}.$$

(a) Visa att derivatan av $f(x)$ är

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{\frac{2x^3}{3} - 4x^2 + 6x + 4}}.$$

(b) Hitta det största och minsta värdet av $f(x)$ på intervallet $[0, 5]$.

(c) Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $x = 0$.

3. (5p) Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att egenvärdena till matrisen A är $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_2 = 3$.

(b) Visa att $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.

(c) Hitta egenvektorer till A .

(d) Diagonalisera matrisen A , d.v.s. hitta matriser D , C och C^{-1} , där D är en diagonalmatris, så att $A = CDC^{-1}$.

(e) Beräkna A^7 .

(Tips: Använd ditt svar i (d).)

4. (5p) Betrakta differensekvationen

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - 9x_n,$$

med begynnelsevärden $x_0 = 1$ och $x_1 = 4$.

(a) Hitta en explicit formel för x_n .

(b) Beräkna x_{10} .

5. (5p) Låt y vara en funktion av x , d.v.s. $y = y(x)$, och låt y' beteckna derivatan av y med avseende på x .

(a) Lös begynnelsevärdeproblemet

$$2y' = \frac{e^x + 1}{y},$$

$$y(0) = 1.$$

(b) Lös differentialekvationen

$$y' = 3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + 2x^3.$$

(c) Beräkna integralen

$$\int_{-1}^1 (x^3 + 2)^3 3x^2 \, dx.$$

Statistikproblem

OBS: Några användbara tabeller finns i bilagan.

1. Ungefär 60% av nyfödda lejonungar är manliga, 40% kvinnliga.
 - (a) (1p) Vad är sannolikheten att av två nyfödda lejonungar är båda kvinnliga?
 - (b) (1p) Vad är sannolikheten att minst en av två nyfödda lejonungar är kvinnlig?
 - (c) (1p) Det finns nio ungar i en flock lejon. Vad är väntevärdet på antalet manliga ungar?
 - (d) (1p) Vad är sannolikheten att exakt sex av de nio ungarna är manliga?
 - (e) (1p) Vad är sannolikheten att mer än sju av de nio ungarna är manliga?
2. Diametern på vita venusmusslor är normalfördelad med väntevärde $\mu = 13$ cm och standardavvikelse $\sigma = 1,7$ cm. Bestäm
 - (a) (1p) sannolikheten att en vit venusmussla är mindre än 11 cm i diameter,
 - (b) (2p) sannolikheten att en vit venusmussla har en diameter mellan 12 och 14 cm,
 - (c) (2p) ett värde på x så att 95% av vita venusmusslor är högst x cm i diameter.
3. Regnmängden per år (i mm) har registrerats i en viss stad under de senaste åtta åren:

År	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Regn	858	994	735	385	511	469	652	661

- (a) (1p) Verifiera att $\bar{x} = 658,1$ (stickprovsmedelvärde) och $s = 203,8$ (stickprovstandardavvikelse).
- (b) (2p) Använd dessa värden för att bestämma ett 95% konfidensintervall för den genomsnittliga regnmängden per år. Anta att mängden är normalfördelad.
- (c) (2p) Utför ett t -test (konfidensgrad 95%) för att testa följande hypotes: den genomsnittliga årliga regnmängden är större än 600 mm.

NOTE: Some useful tables are in the appendix.

1. About 60% of newborn lion cubs are male, 40% female.
 - (a) (1p) What is the probability that two newborn cubs are both female?
 - (b) (1p) What is the probability that at least one of two newborn cubs is female?
 - (c) (1p) There are nine cubs in a pride of lions. What is the expected value of the number of male cubs?
 - (d) (1p) What is the probability that exactly six of the nine cubs are male?
 - (e) (1p) What is the probability that more than seven of the nine cubs are male?
2. The diameter of white venus clams follows a normal distribution with expected value $\mu = 13$ cm and standard deviation $\sigma = 1.7$ cm. Determine
 - (a) (1p) the probability that a white venus clam is smaller than 11 cm in diameter,
 - (b) (2p) the probability that a white venus clam has a diameter between 12 and 14 cm,
 - (c) (2p) a value of x such that 95% of white venus clams are at most x cm in diameter.
3. The amount of rain per year (in mm) has been recorded in a certain town over the past eight years:

Year	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Rain	858	994	735	385	511	469	652	661

- (a) (1p) Verify that $\bar{x} = 658.1$ (sample mean) and $s = 203.8$ (sample standard deviation).
- (b) (2p) Use these values to determine a 95% confidence interval for the average amount of rainfall in a year. Assume that the amount follows a normal distribution.
- (c) (2p) Perform a t -test (confidence level 95%) to test the following hypothesis: the average annual amount of rainfall is greater than 600 mm.

Tabeller

Tabell 1. Normalfördelningens kvantiler z_α

Tabellen ger z_α för $\alpha \leq 0,5$, där z_α definieras av att $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$, eller ekvivalent att $P(X > z_\alpha) = \alpha$ då $X \sim N(0, 1)$.

För $\alpha > 0,5$ utnyttjas att $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$.

α	z_α
0,50	0,000000
0,40	0,253347
0,30	0,524401
0,25	0,674490
0,20	0,841621
0,15	1,036433
0,10	1,281552
0,05	1,644854
0,025	1,959964
0,010	2,326348
0,005	2,575829
0,001	3,090232
0,0005	3,290527
0,0001	3,719016
0,00005	3,890592



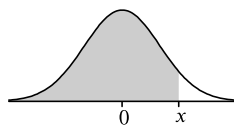
Figur 1. Arean till höger om z_α är α , och arean mellan $-z_{\alpha/2}$ och $z_{\alpha/2}$ är $1 - \alpha$.

Tabell 2. Normalfördelningens fördelningsfunktion $\Phi(x)$

Tabellen ger $\Phi(x) = \Pr(X \leq x)$ då $X \sim N(0, 1)$ för $0 \leq x \leq 3,09$.

För $x \leq 0$ utnyttjas att $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	,5000	,5040	,5080	,5120	,5160	,5199	,5239	,5279	,5319	,5359
0,1	,5398	,5438	,5478	,5517	,5557	,5596	,5636	,5675	,5714	,5753
0,2	,5793	,5832	,5871	,5910	,5948	,5987	,6026	,6064	,6103	,6141
0,3	,6179	,6217	,6255	,6293	,6331	,6368	,6406	,6443	,6480	,6517
0,4	,6554	,6591	,6628	,6664	,6700	,6736	,6772	,6808	,6844	,6879
0,5	,6915	,6950	,6985	,7019	,7054	,7088	,7123	,7157	,7190	,7224
0,6	,7257	,7291	,7324	,7357	,7389	,7422	,7454	,7486	,7517	,7549
0,7	,7580	,7611	,7642	,7673	,7704	,7734	,7764	,7794	,7823	,7852
0,8	,7881	,7910	,7939	,7967	,7995	,8023	,8051	,8078	,8106	,8133
0,9	,8159	,8186	,8212	,8238	,8264	,8289	,8315	,8340	,8365	,8389
1,0	,8413	,8438	,8461	,8485	,8508	,8531	,8554	,8577	,8599	,8621
1,1	,8643	,8665	,8686	,8708	,8729	,8749	,8770	,8790	,8810	,8830
1,2	,8849	,8869	,8888	,8907	,8925	,8944	,8962	,8980	,8997	,9015
1,3	,9032	,9049	,9066	,9082	,9099	,9115	,9131	,9147	,9162	,9177
1,4	,9192	,9207	,9222	,9236	,9251	,9265	,9279	,9292	,9306	,9319
1,5	,9332	,9345	,9357	,9370	,9382	,9394	,9406	,9418	,9429	,9441
1,6	,9452	,9463	,9474	,9484	,9495	,9505	,9515	,9525	,9535	,9545
1,7	,9554	,9564	,9573	,9582	,9591	,9599	,9608	,9616	,9625	,9633
1,8	,9641	,9649	,9656	,9664	,9671	,9678	,9686	,9693	,9699	,9706
1,9	,9713	,9719	,9726	,9732	,9738	,9744	,9750	,9756	,9761	,9767
2,0	,9772	,9778	,9783	,9788	,9793	,9798	,9803	,9808	,9812	,9817
2,1	,9821	,9826	,9830	,9834	,9838	,9842	,9846	,9850	,9854	,9857
2,2	,9861	,9864	,9868	,9871	,9875	,9878	,9881	,9884	,9887	,9890
2,3	,9893	,9896	,9898	,9901	,9904	,9906	,9909	,9911	,9913	,9916
2,4	,9918	,9920	,9922	,9925	,9927	,9929	,9931	,9932	,9934	,9936
2,5	,9938	,9940	,9941	,9943	,9945	,9946	,9948	,9949	,9951	,9952
2,6	,9953	,9955	,9956	,9957	,9959	,9960	,9961	,9962	,9963	,9964
2,7	,9965	,9966	,9967	,9968	,9969	,9970	,9971	,9972	,9973	,9974
2,8	,9974	,9975	,9976	,9977	,9977	,9978	,9979	,9979	,9980	,9981
2,9	,9981	,9982	,9982	,9983	,9984	,9984	,9985	,9985	,9986	,9986
3,0	,9987	,9987	,9987	,9988	,9988	,9989	,9989	,9989	,9990	,9990



Figur 2. Arean till vänster om x är $\Phi(x)$.

Tabell 3. *t-fördelningens kvantiler $t_{n, \alpha}$*

$n \backslash \alpha$	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
1	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	318,3088	636,6192
2	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	22,3271	31,5991
3	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	1,2145	12,9240
4	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	7,1732	8,6103
5	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	5,8934	6,8688
6	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,2076	5,9588
7	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	4,7853	5,4079
8	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	4,5008	5,0413
9	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,2968	4,7809
10	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,1437	4,5869
11	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,0247	4,4370
12	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	3,9296	4,3178
13	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	3,8520	4,2208
14	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	3,7874	4,1405
15	1,3406	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	3,7328	4,0728
16	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	3,6862	4,0150
17	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,6458	3,9651
18	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,6105	3,9216
19	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,5794	3,8834
20	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,5518	3,8495
21	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,5272	3,8193
22	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,5050	3,7921
23	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,4850	3,7676
24	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,4668	3,7454
25	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,4502	3,7251
26	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,4350	3,7066
27	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,4210	3,6896
28	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,4082	3,6739
29	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,3962	3,6594
30	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,3852	3,6460
35	1,3062	1,6896	2,0301	2,4377	2,7238	3,3400	3,5911
40	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,3069	3,5510
45	1,3006	1,6794	2,0141	2,4121	2,6896	3,2815	3,5203
50	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,2614	3,4960
60	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,2317	3,4602
70	1,2938	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	3,2108	3,4350
80	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,1953	3,4163
100	1,2901	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	3,1737	3,3905
120	1,2886	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	3,1595	3,3735
∞	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,0902	3,2905

