Lösningsförslag: inlupp 3

Uppgift 1.

(a) Vi löser den linjära differensekvationen (som är på formen $x_{n+1} = ax_n + b$, $a \neq 1$) med lösningsformeln, vilket ger

$$x_n = \left(2 - \frac{4}{1-(-3)}\right)(-3)^n + \frac{4}{1-(-3)} = (-3)^n + 1.$$

Vi får då att

$$x_6 = (-3)^6 + 1 = 730.$$

(b) Övergångsfunktionen är

$$f(x) = xe^{5x-2}.$$

Fixpunkterna ges av $x = f(x)$, vilket förenklat blir

$$0 = x(1 - e^{5x-2}).$$

Vi ser att fixpunkterna ges av $x = 0$, samt av $1 - e^{5x-2} = 0$. Vi löser den andra ekvationen och ser att vi måste ha $5x - 2 = 0$, dvs $x = 2/5$. Så systemet har två fixpunkter: $x = 0$ och $x = 2/5$.

Vi deriverar övergångsfunktionen:

$$f'(x) = e^{5x-2} + 5xe^{5x-2} = e^{5x-2}(1 + 5x).$$

Eftersom att

$$|f'(0)| = \left|e^{-2}\right| = \frac{1}{e^2} < 1,$$
$$|f'(2/5)| = \left|1 + 5 \cdot \frac{2}{5}\right| = 3 > 1,$$

så är $x = 0$ en stabil fixpunkt och $x = 2/5$ en instabil fixpunkt.

Uppgift 2.

(a) Vi skriver om ekvationssystemet som en matris.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & 2 & -6 \\ 3 & 7 & -1 & 35 \end{array}\right]$$

Vi delar första raden med 2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -6 \\ 3 & 7 & -1 & 35 \end{array}\right]$$

Därefter tar vi bort 3 gånger den första raden från rad 3:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -4 & 20 \end{array}\right]$$

Vi delar tredje raden med 4:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right]$$

Vi lägger till den andra raden till den tredje:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Vi tar bort 2 gånger den tredje raden från den andra och 1 gånger den tredje från den första raden:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Vi adderar den andra raden till den första, och multiplicerar därefter den andra raden med -1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

(b)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} &= -2\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2(1 \cdot 5 - 7 \cdot 2) - (1 \cdot 1 - 7 \cdot (-3)) \\ &= -4 \end{aligned}$$

Uppgift 3.

(a) Enligt formel för invers av 2×2-matriser är

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix},$$

Då $\det(A) = 4 \cdot 1 - (-2) \cdot (-3) = -2$, så är

$$-4A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$BC - CB = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 6 & -12 \end{bmatrix}.$$

(c)

$$A^2BC(BC)^{-1}A^{-1} = A^2A^{-1} = A.$$

(d)

$$C(AC)^{-1}ABC = CC^{-1}A^{-1}ABC = BC = \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

(e)

$$2(BC^{-1} + I_2)C = 2B + 2C = \begin{bmatrix} -2 & 12 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 14 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Uppgift 4.

(a) Vi beräknar matrisens egenvärden genom att hitta lösningarna till ekvationen $0 = \det(\lambda I - A)$:

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2).$$

Vi får därför egenvärdena $\lambda = 0$ och $\lambda = 2$.

(b) Vi hittar egenvektorerna som lösningar till $\lambda I - A = 0$, för $\lambda = 0$ respektive $\lambda = 2$.

$$0I - A = 0 \iff \left| \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

har lösnigarna $(x, y) = (-t, t)$, där $t \in \mathbb{R}$ (och egenvektorerna ges när $t \neq 0$).

$$2I - A = 0 \iff \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

har lösningarna $(x, y) = (t, t)$. där $t \in \mathbb{R}$ (och egenvektorerna ges när $t \neq 0$).

(c) Vi vet att vi kan göra detta med hjälp av egenvärdena och egenvektorerna (där vi väljer en egenvektor per egenvärde). Låt

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Då är ekvationen uppfylld: $C^{-1}AC = D$.

(d)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A^4 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Vi gissar att

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}.$$

(e) Vi har att

$$D^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi beräknar inversen till C:

$$C^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi vet att $A^n = (CDC^{-1})^n = CD^nC^{-1}$, därför får vi att

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}.$$