$\boxed{1}$ (1) $x>0$ で $x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ を示せ.

(2) $x>0$ のとき, $y=\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}$ のとりうる値のはんいを求めよ.

(1) $f(x)=\log(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$ とすると,

$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x$

$=\frac{x^2}{1+x}>0$ $(x>0)$ より.

$f'(x)$ は $x>0$ で単調増加 また.

$f(0)=0$ より. $f(x)>f(0)=0$ …①

$g(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}-\log(1+x)$ とおくと,

$g(x)=\frac{x+1-1}{\sqrt{1+x}}-\log(1+x)$

$=(x+1)^{\frac{1}{2}}-(x+1)^{-\frac{1}{2}}-\log(1+x)$ より.

$g'(x)=\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}-(x+1)^{-1}$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+x}^3}-\frac{2}{(\sqrt{1+x})^2}\right\}$

$=\frac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{2\sqrt{1+x}^3}>0$ よって $g(x)$ は $x>0$ $(x>0)$ で単調増加

よって $g(0)=0$ より $g(x)>g(0)=0$ …②

①②より, $x>0$ で $x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ が成立することが示された

(2) $y=\frac{x-\log(1+x)}{x\log(1+x)}$ なので. (1)より

$y<\frac{x-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)}{x\left(x-\frac{x^2}{2}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$ と.

$y>\frac{x-\frac{x}{\sqrt{1+x}}}{x\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x}}}=\frac{x(\sqrt{1+x}-1)}{x^2}=\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x+1}+1)}$

$=\frac{1}{1+\sqrt{1+x}}$

よって $x>0$ で $\frac{1}{1+\sqrt{1+x}}<y<\frac{1}{2-x}$ より.

はさみうちの原理から

$\lim_{x\to+0}y=\frac{1}{2}$

次に y の増減について考える.

$\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{1}{x+1}}{\{\log(1+x)\}^2}+\frac{1}{x^2}$

$=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)\{\log(1+x)\}^2}$

$=\frac{(x+1)(\log(1+x))^2-x^2}{x^2(x+1)(\log(1+x))^2}$

このとき, (1)より $\log(1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ なので.

$\frac{dy}{dx}<\frac{(x+1)\frac{x^2}{1+x}-x^2}{x^2(x+1)(\log(1+x))^2}=0$ より.

$x>0$ で $\frac{dy}{dx}<0$ よって $y(x)$ は $x>0$ で単調減少.

よって $\frac{1}{2}=\lim_{x\to+0}y>y$ となる.

さて, $\lim_{x\to\infty}y$ について考えると.

$y=\frac{x-\log(1+x)}{x\log(1+x)}$ について, $x>0$ で $\log(1+x)<x$ なので $y>0$. また.

$y<\frac{1}{\log(1+x)}\to0$ $(x\to\infty)$ よって

$\lim_{x\to\infty}y=0$. よって y のとりうる値のはんいは

$0<y<\frac{1}{2}$

② $a, b \in [0, \infty)$, $f(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1$

(1) $c \in \mathbb{R}$, $f(x)$が$(x-c)$で割り切れる $\Rightarrow$ $f(x)$は$(x-c)(x-\frac{1}{c})$でわり切れる。を示せ。

(2) $f(x) = (x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$と因数分解できるとき,$(s,t,u,v \in \mathbb{R})$ $a \geq 4$を示せ。

(3) $a=5$とする。このとき$f(x)$が(2)のように分解できるときのbの値を求めよ。

(1)

$f(0)=1\neq 0$ より、$c \neq 0$である。$f(x)$が$(x-c)$でわれるので、因数定理より

$f(c) = c^4 - ac^3 + bc^2 - ac + 1 = 0$ が成立する。

ここで、$f(\frac{1}{c}) = \frac{1}{c^4} - \frac{a}{c^3} + \frac{b}{c^2} - \frac{a}{c} + 1$

$= \frac{c^4 - ac^3 + bc^2 - ac + 1}{c^4}$

$= \frac{1}{c^4} f(c) = 0 \ (c \neq 0)$

よって因数定理より、$f(\frac{1}{c})=0$から$f(x)$は$(x-\frac{1}{c})$で割ることができる。$f(x)$は$(x-c)$でもわれるので$f(x)$は$(x-c)(x-\frac{1}{c})$でわることができる。

(2) $t = x + \frac{1}{x}$ とおくと、

$\frac{f}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} - a(x+\frac{1}{x}) + b + 2 - 2$

$= t^2 - at + (b-2)$

$x \in \mathbb{R}$のとき、tのとりうる値のはんいは、

$x^2 - tx + 1 = 0$の解より、$t^2 - 4 \geq 0 \iff t \leq -2, 2 \leq t$

よって $g(t) = t^2 - at + (b-2)$が $t \leq -2, 2 \leq t$のはんいで2つの実解をもつことを考える。

(i) 2つの実解をもつので

$a^2 - 4(b-2) \geq 0 \iff a^2 - 4b + 8 \geq 0$

(ii) ①$g(2) \leq 0$ ②$g(-2) \leq 0$

① $\iff 4 - 2a + (b-2) \leq 0$, $2 - 2a + b \leq 0$

② $\iff 4 + 2a + (b-2) \leq 0$, $2 + 2a + b \leq 0$

(iii) $g(2) \geq 0$ かつ (軸のx座標) ≥ 2

$\iff 2 - 2a + b \geq 0$ かつ $\frac{a}{2} > 2 \iff$

$\iff (2 - 2a + b \geq 0$ かつ $a > 4)$

(iv) $g(-2) > 0$ かつ 軸のx座標 < -2

aは正の数なので ありえない。

ここで、$g(t)=0$が $|t| \geq 2$な 2つの実解をもつためには

(i)かつ((ii)または(iii))をみたすことが必要。

(iii)のとき明らかに$a > 4$

(ii)②で、$4 + 2b \leq 0 \iff b \leq -2$ より

(ii)は成立しない。よって

$g(t)=0$の実解が$|t| \geq 2$に2つあるためには

(i)かつ(iii)でなければいけない。そのとき、

$a \geq 4$となるため題意は示された。

(3) $a=5$のとき、

(i)かつ(iii)が成立するためには

(i) $\iff b \leq \frac{33}{4}$ $(33 - 4b \geq 0)$

(iii) $\iff 8 \leq b$ となる

逆に(i)かつ(iii)の場合には、

$g(t)=0$の解が $t \geq 2$で2つある。

このときの解をα, βとおくと、

$x + \frac{1}{x} = \alpha$, $x + \frac{1}{x} = \beta$となるxについて考えればよい。

$x + \frac{1}{x} = \alpha \iff x^2 - \alpha x + 1 = 0$ $(\because x \neq 0)$

$\iff \alpha^2 - 4 \geq 0$ $(\because \alpha \geq 2)$

βについても同様に$\beta^2 - 4 \geq 0$がなりたつ。

よってこのとき、α, βに対して

$x + \frac{1}{x} = \alpha, \beta$となる$x \in \mathbb{R}$が存在して、

それらをs, t, u, vとおくと、

$f(x) = (x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$となるため、

これが十分条件であることも分かる

$\therefore 8 \leq b \leq \frac{33}{4}$

$\boxed{3}$ $f(t)=2\sin t+\cos 2t$, $g(t)=2\cos t+\sin 2t$

$C:(x,y)=(f(t),g(t))$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$

(1) $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$のときのf,gのmax (2) $t_1,t_2\in[0,\frac{\pi}{2}]$を$t_1<t_2$, $f(t_1)=f(t_2)$とな
このとき, $g(t_1)^2-g(t_2)^2>0$を示せ.

(3) Cと$x=1$が囲む領域の面積Sを求めよ.

(1) $f'(t)=2\cos t-2\sin 2t$
$=2\cos t-4\sin t\cos t$
$=2\cos t(1-2\sin t)$
$\therefore f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}$
$g'(t)=-2\sin t+2\cos 2t$
$=2-2\sin t-4\sin^2 t$
$=2(1-\sin t-2\sin^2 t)$
$=2(1+\sin t)(1-2\sin t)$
$\therefore g'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{6}$ よって増減表をかくと,

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
f'	2	$+$	0	$-$	0
g'	2	$+$	0	$-$	-4
f	1	$\nearrow$	Local	$\searrow$	1
g	2	$\nearrow$	Local	$\searrow$	0

左図のようになる. よって
f,gは共に$t=\frac{\pi}{6}$で最大となる. よって
$\max_t f(t)=\frac{3}{2}$
$\max_t g(t)=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

(2) $t_1<\frac{\pi}{6}<t_2$で$f(t_1)=f(t_2)$より,
$2\sin t_1+\cos 2t_1=2\sin t_2+\cos 2t_2$
$\Leftrightarrow 2(\sin t_1-\sin t_2)=-(\cos 2t_1-\cos 2t_2)$
$=-(1-2\sin^2 t_1-1+2\sin^2 t_2)$
$=2(\sin t_1^2-\sin^2 t_2)$
ここで$t_1<t_2\le\frac{\pi}{2}$より, $\sin t_1\ne\sin t_2$である.
よって
$\Leftrightarrow 1=\sin t_1+\sin t_2$となる. また,
このとき, $g(t_1)^2-g(t_2)^2$について,
$\sin t_1=k$とおくと, $g(t)=2\cos t(1+\sin t)$より,
$g(t_1)^2-g(t_2)^2=\left(4(1-k^2)(1-k)^2\right)-\left(4(1-(1-k)^2)k^2\right)$
$=4(1-k^2)(1-k)^2-4(k-2)k^3$
$=4(1-k^2)(1-k)^2-4(1-k)^2k^2+4k^2$
$=4(1-2k^2)(1-k)^2+4k^2$ $0\le t_1<\frac{\pi}{6}$より, $k<\frac{1}{2}$
よって $>4(1-\frac{2}{4})(1-k)^2+4k^2>0$
よって示された.

(3) Cと$x=1$が交わるとき, $f(t)=1$をみたす.
このとき, t_1,t_2を$0\le t_1<t_2\le\frac{\pi}{2}$, $f(t_1)=f(t_2)=1$をみたすものとする.
ここで, $f(t)=1 \Leftrightarrow 2\sin t+1-2\sin^2 t=1$
$\Leftrightarrow \sin t(1-\sin t)=0$
$\therefore t=0,\frac{\pi}{2}$より, $t_1=0$, $t_2=\frac{\pi}{2}$
α,βを, $0\le\alpha<\beta\le\frac{\pi}{2}$, $f(\alpha)=f(\beta)=x$となるようにすると,
(2)より, $g(\alpha)^2-g(\beta)^2>0$ また, (1)より,
$g(\alpha)\ge 0$, $g(\beta)>0$より,
$g(\alpha)-g(\beta)>0$となる.
$\max_t f(t)=\frac{3}{2}$より, Sは

$$S=\int_1^{\frac{3}{2}}y\,dx=\int_1^{\frac{3}{2}}(g(\alpha)-g(\beta))\,dx$$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)\cdot f'(t)\,dt$
←おりかえして戻ってる
$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos t+\sin 2t)(2\cos t-2\sin 2t)\,dt$
$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^2 t-2\sin 2t\cos t-2\sin^2 2t)\,dt$
$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2(1+\cos 2t)-4\sin^2 t\cdot(\sin t)'-(1-\cos 4t)\,dt$
$=\left[2(t+\frac{1}{2}\sin 2t)-\frac{4}{3}\sin^3 t-t+\frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
$=2(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(0-0))-\frac{4}{3}(1-0)-(\frac{\pi}{2})+0$
$=\pi-0-\frac{4}{3}-\frac{\pi}{2}$
$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}$
$=\frac{3\pi-8}{6}$

[4] A(0,0,1) B(1,0,0) C(0,1,0) D(−1,0,0) E(0,−1,0) F(0,0,−1), $0<s<1$, $0<t<1$

AB, ACを $1-s:s$ に内分 → P, Q, FD, FEを $1-t:t$ に内分 → R, S

(1) P, Q, R, Sは同一平面上にあることを示せ.

(2) PQの中点：L, RSの中点：M. $\min_{0<s<1,\,0<t<1} |\overrightarrow{LM}| = m$ を求めよ.

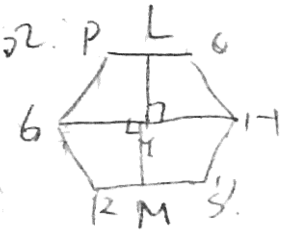
(3) P, Q, R, S を通る切り口の面積：X. $|\overrightarrow{LM}|=m$ のときの $\max_{0<s<1,\,0<t<1} X$ とそのときの(s,t)

(1) $\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AQ}=(1-s)\overrightarrow{AC}$,
$\overrightarrow{FR}=(1-t)\overrightarrow{FE},\ \overrightarrow{FS}=(1-t)\overrightarrow{FD}$ より
$\overrightarrow{PQ}=(1-s)\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{RS}=(1-t)\overrightarrow{ED}$ ここで,
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{ED}$ (正八面体の性質より) より
$\overrightarrow{PQ} /\!/ \overrightarrow{RS}$ より 四角形PQRSは
PQ//RSの台形 ⟹ P,Q,R,Sは同一平面上にある.

(2) $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\{\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}\}=\frac{1-s}{2}\{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\}$
$\overrightarrow{FM}=\frac{1}{2}\{\overrightarrow{FR}+\overrightarrow{FS}\}=\frac{1-t}{2}\{\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FD}\}$
より.
$-\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{LM}$ である. このとき,
BCの中点をNとおくと, $\overrightarrow{AN}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$ より
$\overrightarrow{LM}=-(1-s)\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AF}-(1-t)\overrightarrow{AN}$
$=\overrightarrow{AF}-(2-s-t)\overrightarrow{AN}$ このとき,
$|\overrightarrow{LM}|^2=|\overrightarrow{AF}|^2-2(2-s-t)\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AF}+(2-s-t)^2|\overrightarrow{AN}|^2$
であり, $|\overrightarrow{AF}|^2=4,\ |\overrightarrow{AN}|^2=\frac{3}{2}$
$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AN}=2$ より, $2-s-t=k$ とおくと,
$|\overrightarrow{LM}|^2=4-2\cdot 2k+\frac{3}{2}k^2$　　$0<s<1$, $0<t<1$ より $0<k<2$ であるので,
$=\frac{3}{2}\left(k^2-\frac{8}{3}k+\frac{8}{3}\right)$
$=\frac{3}{2}\left(k^2-2\cdot\frac{4}{3}k+\frac{8}{3}+\frac{16}{9}-\frac{16}{9}\right)$
$=\frac{3}{2}\left(k-\frac{4}{3}\right)^2+4-\frac{8}{3}$
$=\frac{3}{2}\left(k-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$ よって
$k=\frac{4}{3} \iff s+t=\frac{2}{3}$ のときに
$|\overrightarrow{LM}|$ は最小値 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ をとる.

$m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(3) 四角形PQRSは台形であり,
$|\overrightarrow{LM}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $s+t=\frac{2}{3}$,
$|\overrightarrow{PQ}|=(1-s)\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{RS}|=(1-t)\sqrt{2}$ をみたす.
ここで, $L\left(\frac{1-s}{2},\frac{1-s}{2},s\right)$ と,
$M\left(-\frac{1-t}{2},-\frac{1-t}{2},-t\right)$ より.
$\overrightarrow{ML}=\left(\frac{2-s-t}{2},\frac{2-s-t}{2},s+t\right)$
$=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ よって線分LM
上の点は $\left(k-\frac{1-t}{2},k-\frac{1-t}{2},k-t\right)$ となる
LMとxy平面の交点をYとおくとこの式において (z成分)$=k-t=0$ より
$\left(\frac{3}{2}t-\frac{1}{2},\frac{3}{2}t-\frac{1}{2},0\right)$ となる
また平面PQRSは面ABCと平行なので
BCと平行 よって平面PQRSと
BE, CDの交点をそれぞれG, Hとおくと,
$G\left(\frac{3t-2}{2},\frac{3}{2}t,0\right)$ となる
$H\left(\frac{3}{2}t,\frac{3t-2}{2},0\right)$
よって断面は台形を2つあわせた
六角形PQHSRGになって.



$X=\frac{1}{2}(PQ+GH)\cdot LY$
$+\frac{1}{2}(RS+GH)\cdot MY$
$=\frac{1}{2}(PQ+RS)LY$
$+\frac{1}{2}(MY-LY)RS+\frac{1}{2}\cdot GH\cdot LM$
$+\frac{1}{2}(2MY-LM)\cdot RS+\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$=\frac{4}{9}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\left(2MY-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)(1-t)\sqrt{2}$
$=\frac{4}{9}\sqrt{6}+\frac{1}{2}(2MY$
$\overrightarrow{MY}=\begin{pmatrix}t\\t\\t\end{pmatrix}$ より $MY=t\sqrt{3}$ より.
$X=\frac{\sqrt{6}}{81}\left(67-\left(t-\frac{1}{3}\right)^2\right)$ より Xは $t=\frac{1}{3}$ で
min $\frac{67}{81}\sqrt{6}$ をとる

5 $(p, q) \in (0,1)^2$, $n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$. チームA, Bが やきうを n回行う.
1試合目に Aが勝つかくりつ: p, Aが勝ったあとAが勝つかくりつ: p
Bがかったあとに Aがかつかくりつ: q
(1) nしあいめに Aがかつかくりつ a_n
(2) $n \geq 3$ Bが連勝せず ちょうど2回勝つかくりつ b_n.

(1)
(n−1)しあいめに Aが勝つかくりつ : a_{n-1}
Bがかつかくりつ : $1-a_{n-1}$

より
nしあいめで Aが勝つかくりつ a_n

$a_n = p a_{n-1} + q(1-a_{n-1})$

$= (p-q) a_{n-1} + q$

$a_n - \dfrac{q}{1-p+q} = (p-q)a_{n-1} + q - \dfrac{q}{1-p+q}$

$= (p-q)a_{n-1} + \dfrac{q - pq + q^2 - q}{1-p+q}$

$\therefore a_n - \dfrac{q}{1-p+q} = (p-q)\left\{a_{n-1} - \dfrac{q}{1-p+q}\right\}$

$\left\{a_n - \dfrac{q}{1-p+q}\right\}$ は 初項

$p - \dfrac{q}{1-p+q} = \dfrac{p - p^2 + pq - q}{1-p+q} = \dfrac{(p-q)(1-p)}{1-p+q}$, 公比 $(p-q)$ の 等比数列なので.

$a_n = \dfrac{q}{1-p+q} + \dfrac{(1-p)(p-q)^n}{1-p+q}$

$= \dfrac{q + (1-p)(p-q)^n}{1-p+q}$ //

(2) ちょうど i回目と j回目だけ $(i<j)$
Bが勝つかくりつ b_{ij} について
考える まずは $j \neq n$ 7 3に ついて考える.

・1〜i−1回 Aがかつ
・i回目 Bがかつ
・i+1回目 Aがかつ
・i+2〜j−1回目 Aがかつ
・j回目 Bがかつ
・j+1回目 Aがかつ
・j+2〜n回目 Aがかつ

よって b_{ij} はこれらの 積で表せるので,

$b_{ij} = p^{i-1}(1-p) q\, p^{j-i-2} \cdot (1-p)\, q\, p^{n-j-1}$

$= (1-p)^2 q^2 p^{n-4}$

$j = n$ となる場合については,

1〜i−1回目 Aがつ
i回目 Bがつ
i+1回目 Aがつ
i+2〜n−1回: Aがつ
n回目 Bかつ

より

$b_{ij} = p^{i-1}(1-p) q \cdot p^{n-i-2}(1-p)$

$= p^{n-3}(1-p)^2 q$.

よって $n \geq 4$ のとき,

$b_n = \displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (1-p)^2 q^2 p^{n-4} + \sum_{1 \leq i \leq n-2} p^{n-3}(1-p)^2 q$

$= \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}(1-p)^2 q^2 p^{n-4} + (n-2) p^{n-3}(1-p)^2 q$

$= (1-p)^2 q\, p^{n-4}(n-2)\left\{\dfrac{n-1}{2}q + p\right\}$ //

n=3のときは 1回目と3回目だけかつので.

$b_3 = (1-p) q (1-p) = (1-p)^2 q$ //