[1] $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $B(0,0,1)$, $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$, $D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$

$\vec{p} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}$, $\vec{q} = (1-s)\vec{OC} + s\vec{OD}$

(1) $|\vec{p}|, |\vec{q}|, \vec{p}\cdot\vec{q}$ を s, t で表わす. (2) $t=\frac{1}{2}$ のとき, $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角が $\frac{3}{4}\pi$ となる s

(3) $(s,t)\in\mathbb{R}^2$ のときの $\min|\vec{p}-\vec{q}|$

(1)

$$\vec{p} = (1-t)\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}(1-t) \\ \frac{1}{2}(1-t) \\ t \end{pmatrix}$$

$$\vec{q} = (1-s)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(2s-1) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(2s-1) \\ -1 \end{pmatrix}$$

となるので, $|\vec{p}| = \sqrt{\frac{3}{4}(1-t)^2 + \frac{1}{4}(1-t)^2 + t^2}$

$= \sqrt{2t^2 - 2t + 1}$

$|\vec{q}| = \sqrt{\frac{1}{4}(2s-1)^2 + \frac{1}{4}(2s-1)^2 + 1}$

$= \sqrt{2(2s^2 - 2s + 1)}$

$\vec{p}\cdot\vec{q} = \cancel{-\frac{\sqrt{3}}{4}(1-t)(2s-1)} + \cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(1-t)(2s-1)} - t$

$= \underline{-t}$

(2) $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角を $\theta\ (0 \leq \theta \leq \pi)$ とすると,

$\cos\theta = \frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}$ よって (1) と $t = \frac{1}{2}$ より,

$$\cos\theta = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{2(2s^2-2s+1)}} = \frac{-1}{\sqrt{2s^2-2s+1}}$$

$\theta = \frac{3}{4}\pi$ となるとき, $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ となるので,

$-\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2s^2-2s+1}}$ 　 $2s^2-2s+1 = (s-1)^2 + s^2 > 0$ であるので,

$\Leftrightarrow 2 = 2s^2 - 2s + 1$

$\Leftrightarrow 0 = 2s^2 - 2s - 1$

$\Leftrightarrow s = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

よって $s = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ //

(3) ($|\vec{p}-\vec{q}| \geq 0$ より) $|\vec{p}-\vec{q}|^2$ の最小値を考えれば十分.

このとき $|\vec{p}-\vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2\vec{p}\cdot\vec{q}$

$= 2t^2 - 2t + 1 + 2(2s^2 - 2s + 1) - 2(-t)$

$= 2t^2 + 1 + 4s^2 - 4s + 2$

$= 2t^2 + (2s-1)^2 + 1 + 1$

$\geq 1 + 1 = 2$

よって $\forall (s,t)\in\mathbb{R}^2$, $|\vec{p}-\vec{q}|^2 \geq 2$ となる.

逆に, $(s,t) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ のとき,

$|\vec{p}-\vec{q}|^2 = 2$ となり, このとき

$|\vec{p}-\vec{q}|^2$ は最小となる. よって

$|\vec{p}-\vec{q}| \geq 0$ より,

$|\vec{p}-\vec{q}|$ も同じ (s,t) で最小となる.

よって $|\vec{p}-\vec{q}|$ の最小値は $\sqrt{2}$.

$$\therefore \min_{(s,t)\in\mathbb{R}^2} |\vec{p}-\vec{q}| = \sqrt{2} \quad \left\{(s,t) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)\right\}$$ //

2 $D=\{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\} \mid z+\frac{4}{z}\in\mathbb{R}\}$ (1) Dを図示.

(2) $z\in D$について, $k(z+\frac{4}{z}+8)=i(z-\frac{4}{z})$ の解があるkのはんい.

(1) $z+\frac{4}{z}\in\mathbb{R} \iff z+\frac{4}{z}=\bar{z}+\frac{4}{\bar{z}}$ である

よって $z+\frac{4}{z}=\bar{z}+\frac{4}{\bar{z}}$

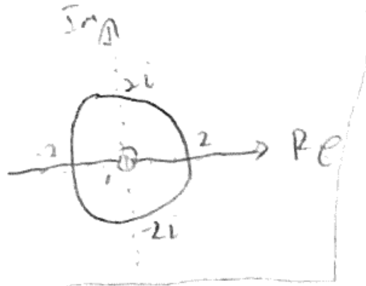
$\iff z-\bar{z}=\frac{4(z-\bar{z})}{z\bar{z}}$

$\iff (z-\bar{z})(|z|^2-4)=0 \quad (z\neq 0)$

($z=\bar{z} \iff z$は実数) または

$|z|^2=4 \iff |z|=2$の円周上 ($|z|>0$より) である.

これを図示すると以下の図のようになる.



(2) (i) zが0でない実数のとき.

$k\in\mathbb{R}$であるため, (左辺)=実数

(右辺)=純虚数となる. よって

解が存在するためには, (左辺)=(右辺)=0でなくてはいけない.

(右辺)$=0 \iff z-\frac{4}{z}=0 \iff z^2=4$

$\therefore z=2,-2$

このとき, $z+\frac{4}{z}+8=\frac{(z+4)^2-12}{z}$ だが, $z=2,-2$のときは

$\frac{(z+4)^2-12}{z}$は明らかに0ではない. よって$k=0$でなくてはいけない. 逆に $k=0$ のときは

$z=2,-2$のとき (左辺)=(右辺)=0となり

$D\supset z$上に解が存在する.

(ii) $|z|=2$のとき, $\theta\in[0,2\pi)$として.

$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくことができる.

このとき, (右辺) $=i\left(2(\cos\theta+i\sin\theta)-\frac{4}{2(\cos\theta+i\sin\theta)}\right)$

$=i(2(\cos\theta+i\sin\theta)-2(\cos\theta-i\sin\theta))$

$=i(2\cos\theta+2i\sin\theta-2\cos\theta+2i\sin\theta)$

$=-4\sin\theta$

(左辺) $=k(z+\frac{4}{z}+8)$

$=k\left(2(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{4}{2(\cos\theta+i\sin\theta)}+8\right)$

$=k(2(\cos\theta+i\sin\theta)+2(\cos\theta-i\sin\theta)+8)$

$=k(4\cos\theta+8)$

よって $-4\sin\theta=k(4\cos\theta+8)$ Ⓐ

$\iff \sin\theta+k\cos\theta=-2k$ の解について考えればよいことが分かる

ここで, αを, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$, $\sin\alpha=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$, $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$

を満たす実数とすると

Ⓐ: $\sin(\theta+\alpha)=\frac{-2k}{\sqrt{1+k^2}}$ となる よって

$-1\leq\frac{-2k}{\sqrt{1+k^2}}\leq 1$ となることが, 解の存在する必要十分条件である. ここで

$\sqrt{1+k^2}>0$より

$\iff -\sqrt{1+k^2}\leq -2k\leq\sqrt{1+k^2}$

$\iff |2k|\leq\sqrt{1+k^2}$

$\iff 4k^2\leq 1+k^2$

$\iff 3k^2-1\leq 0$

$\iff -\frac{1}{\sqrt{3}}\leq k\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$ これと(i)を合わせると

答えは

$\therefore -\frac{1}{\sqrt{3}}\leq k\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$ //

$\boxed{3}$ カード $\underbrace{\boxed{2}\,\boxed{2}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{8}\,\boxed{8}}_{8枚}$ → 4枚とり出し，1列に自然数 n をつくる（n が3ケタ，2ケタとなることもある）

(1) $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$，$1000a + 100b + 10c + d \equiv 0 \pmod 9 \Leftrightarrow a+b+c+d \equiv 0 \pmod 9$ を示せ．

(2) $n \equiv 0 \pmod 9$ となる確率 (3) $n \equiv 0 \pmod 2$ のときの $n \equiv 0 \pmod 9$ となる確率

(1)

$(1000a + 100b + 10c + d) - (a+b+c+d)$

$= (999a + 99b + 9c)$

$= 9(111a + 11b + c)$

$\equiv 0 \pmod 9$ より．

$1000a + 100b + 10c + d \equiv a+b+c+d \pmod 9$ より

明らかに成立する

(2) 同じ数が書かれたカードを区別できるものとして，組みあわせについて考えると（全体の場合の数は ${}_8C_4 = 70$ 通りなので）

A B C D → (i) 4種の数がそろう：$2^4 = 16$ 通り．

(ii) 3種類だけの数がそろう：$\frac{4!}{2!1!1!} \cdot 2^2 = 48$ 通り．

A A B C のパターンのみ

(iii) 2種類だけの数がそろう ${}_4C_2 = 6$ 通り

A A B B のパターン

となっている．この中で4つの和が9の倍数になるパターンについて考える

(i) のとき，$\boxed{2}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{8}$ が書かれたカードしか取り出さないので $2+0+1+8 = 2 \not\equiv 0 \pmod 9$ より．

条件をみたすパターンはない

(ii) のとき，$\boxed{2}\,\boxed{2}$ を取るときはどうやってもムリ

$\boxed{0}\,\boxed{0}$ を取るときは $\boxed{1}\,\boxed{8}$ をとるといける → 4通り

$\boxed{1}\,\boxed{1}$ を取るときはどうやってもムリ．

$\boxed{8}\,\boxed{8}$ を取るときは $\boxed{2}\,\boxed{0}$ をとるといける → 4通り

(iii) a, a, b, b とかかれたカードを取るとき，

$a+a+b+b \equiv 0 \pmod 9 \Leftrightarrow a+b \equiv 0 \pmod 9$

となる $a+b \equiv 0 \pmod 9$ となる組み合わせは，

$\boxed{1}\,\boxed{8}$ しかないため 1通り．

(i)(ii)(iii) より，$n \equiv 0 \pmod 9$ となるかくりつは，

$\frac{4+4+1}{70} = \frac{9}{70}$ //

(3) とり方の順番も考えると，すべてのカードの区別方は ${}_7P_4 = 1680$ 通り．この中で9の倍数となるのは．

$\frac{9}{70} \times {}_7P_4 = 216$ 通り．また2の倍数となるためには

4枚目の選びについてのみ考えればいいので 84通り

確率は $\frac{1}{2}$．

次に n が18の倍数になる場合について考える．

$n \equiv 0 \pmod 9$ となるカードの取るパターン

（順番は考えない）は，(2)より

$\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{8}$ …Ⓐ

$\boxed{8}\,\boxed{8}\,\boxed{2}\,\boxed{0}$ …Ⓑ　の3パターンである

$\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{8}\,\boxed{8}$ …Ⓒ

順番 カードの区別を考慮すると，

Ⓐの全体：$24 \times 4 = 96$ 通り，そのうち

n が偶数となるのは，$\frac{3}{4} \times 96 = 72$ 通り

Ⓑの全体，$24 \times 4 = 96$ 通り．全てのカードが偶数なので

どのように並べかえても n は偶数．よって96通り

Ⓒの全体 ${}_4C_2 \times 1 = 6$ 通り このとき，一番右が8になることが必要なので 3通り

よって全ての選び方（順番，カード区別あり）の1680パターンのうち n が18の倍数となるのは $72 + 96 + 3 = 171$ 通り．

よって $n \equiv 0 \pmod{18}$ となるかくりつは $\frac{171}{1680}$

よって $n \equiv 0 \pmod 2$ であるときの

$n \equiv 0 \pmod 9$ となる条件つきかくりつは，

$\frac{171}{1680} \cdot \frac{2}{1} = \frac{171}{840} = \frac{57}{280}$ //

$\frac{57}{280}$ //

4 $O(0,0)$, $A\left(\frac{15}{2},0\right)$, $B(11,11)$ $D=\{\underset{Q}{(x,y)}\in\mathbb{R}^2 \mid BQ\geq OQ\geq 2AQ\}$.

(1) Dを図示せよ. また, $BQ=OQ=2AQ$となるQの座標を全て求めよ.

(2) $0<p\leq 11$とし, $P(p,11)$とおく. このとき, $OQ\geq PQ$となる$Q\in D$が存在するpのはんいを求めよ.

(1) $BQ\geq OQ \iff BQ^2\geq OQ^2$

$\iff (11-x)^2+(11-y)^2\geq x^2+y^2$

$\iff 242-22x-22y\geq 0$

$\iff x+y\leq 11$

$OQ\geq 2AQ \iff OQ^2\geq 4AQ^2$

$\iff x^2+y^2\geq 4\left\{\left(\frac{15}{2}-x\right)^2+y^2\right\}$

$\iff x^2+y^2-4\left\{x^2-15x+\frac{225}{4}+y^2\right\}\geq 0$

$\iff x^2+y^2-4x^2+60x-225-4y^2\geq 0$

$\iff -3x^2-3y^2+60x-225\geq 0$

$\iff x^2+y^2-20x+75\leq 0$

$\iff (x-10)^2+y^2\leq 5^2$

よって $Q\in D \iff x+y\leq 11$ かつ $(x-10)^2+y^2\leq 5^2$

となる また, 計算の過程から, 明らかに.

$BQ=OQ \iff x+y=11$

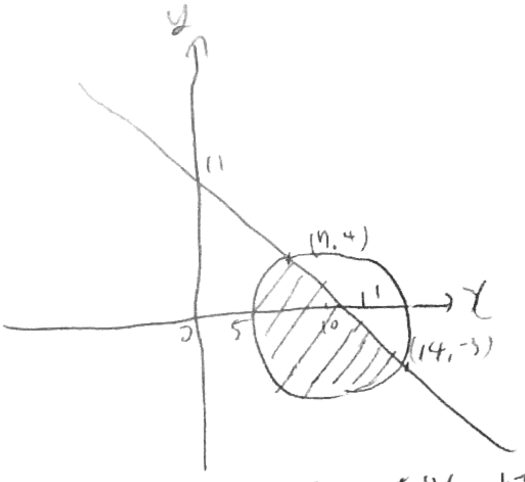
$OQ=2AQ \iff (x-10)^2+y^2=5^2$ が成立するので,

$BQ=OQ=2AQ \Rightarrow \begin{cases} x+y=11 & \cdots① \\ (x-10)^2+y^2=5^2 & \cdots② \end{cases}$ ①を②に代入して,

$(y-1)^2+y^2=25 \iff y^2-y-12=0$, $(x,y)=(7,4)$

$(y-4)(y+3)=0$ $(14,-3)$

となる よって図示すると下の図の斜線部分になる



※ただし境界含む.

(2) $OQ\geq PQ \iff OQ^2\geq PQ^2$

$\iff x^2+y^2\geq (x-p)^2+(y-11)^2$

$\iff x^2+y^2\geq x^2+y^2-2px-22y+p^2+121$

$\iff 2px+22y\geq p^2+121$

$\iff px+11y\geq \frac{p^2+121}{2}$

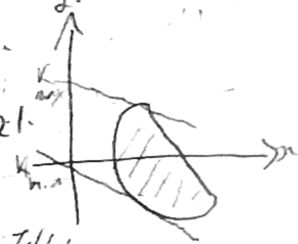
よって $(x,y)\in D$のときの $px+11y$のとりうる値のはんいを考えればよい. ここで $k=px+11y$とおくと.

このとき, この(x,y)について, (x,y)は直線 $k=px+11y$

$\iff l: y=-\frac{p}{11}x+\frac{k}{11}$ に属している. ここで

$k(x,y)$は未定値をとらないので, 最大, 最小となる

また, 直線のかたむき $-\frac{p}{11}$ は, $-1<-\frac{p}{11}<0$ より



図から$(x,y)=(7,4)$のとき最大

lが$(x-10)^2+y^2=5^2$に接するとき最小

となることがわかる.

よって $\max k=7p+44$ であり,

$\vec{a}=(x-10,y)$, $\vec{b}=(p,11)$とおくと,

$|\vec{a}||\vec{b}|\geq \vec{a}\cdot\vec{b}\geq -|\vec{a}||\vec{b}| = 5\sqrt{p^2+121}\geq k-10p\geq -5\sqrt{p^2+121}$

であり, $x-10:y=p:11$となるような点があって, そのとき,

$k-10p$が最小となるため, $\min k=10p-5\sqrt{p^2+121}$となる

よって $(x,y)\in D$のとき,

$7p+44\geq px+11y\geq 10p-5\sqrt{p^2+121}$ となる. (このとき,

$px+11y\geq \frac{p^2+121}{2}$ とあわせて成立する(x,y)があるためには

$7p+44\geq \frac{p^2+121}{2}$ でなくてはいけないよって

$\iff 14p+88\geq p^2+121 \iff 0\geq p^2-14p+33$

$\iff 16\geq p^2-14p+49$

$\iff (p-3)(p-11)\leq 0$

∴ $3\leq p\leq 11$ でなくてはいけない. 逆に

$3\leq p\leq 11$なら, $7p+44\geq \frac{p^2+121}{2}$より

$7p+44\geq px+11y\geq \frac{p^2+121}{2}$ となる$Q(x,y)$がD上に,

つまり, $OQ\geq PQ$となる$Q\in D$が存在する

∴ $3\leq p\leq 11$ //

⑤ $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}-\frac{\pi}{2}$

(1) $\frac{2}{\pi}x\le \sin x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ を示せ.

(2) ~~g~~ $g(x)\le f(x)$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ を示せ.

(3) $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ で, $y=f(x)$, $y=g(x)$, y軸が囲む部分のめんせき.

(1)
$a(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$ とおくと.

$a'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$　$\frac{2}{\pi}\in[0,1]$ より.

$a'(x)=0$ となる $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ がただ1つ存在する.

このとき, α についての増減表をかくと左のようになる.

x	0	α	$\frac{\pi}{2}$
a'	$+$	0	$-$
a	↗	max	↘

よって $a(x)$ が最小となる x のこうほは $x=0,\frac{\pi}{2}$ だが, $a(0)=0$, $a\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, より,

$a(x)\ge 0$ が $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ で成立する.

(2)
$h(x)=f(x)-g(x)=\cos x+\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}$ とする

このとき, $h'(x)=-\sin x-\frac{-2x}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}}$

$=\frac{x}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}}-\sin x$　ここで, (1)より, $\frac{2}{\pi}x\le\sin x$ より

$\le\frac{x}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}}-\frac{2}{\pi}x$

$=x\left\{\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}}-\frac{2}{\pi}\right\}$

≤ 0 $\left(\because\ \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}}\le\frac{2}{\pi}\ \left(\frac{\pi^2}{4}\le\frac{\pi^2}{2}-x^2 \text{ より}\right)\right)$

よって $h'(x)\le 0$ より, $h(x)$ は単調減少, また,

$h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}}=-1+1=0$, より

$h'(0)=-0+0=0$

増減表をかくと左図のようになり

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
h'	0	$-$	0
h	A	↘	B

ここで, $A=1+\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{2}}=1+\pi\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

$B=0+\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}}=0$ である

また $\left(\pi<4,\ \sqrt{2}>1\right)$ より, $A>1+2(1-\sqrt{2})=3-2\sqrt{2}>0$ ($1.4<\sqrt{2}$ より $0.2>0$)

よって $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ で $h(x)\ge 0$ よって 成立することが示された.

(3) (2)より めんせきは せきぶんするだけ

よって めんせき S について　((2)より $f(x)-g(x)\ge 0$)

$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)-g(x)\}\,dx$

$=\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx}_{Ⓐ}-\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}\,dx}_{Ⓑ}+\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}\,dx}_{Ⓒ}$

Ⓐ: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-0=1$.

Ⓑ: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}\,dx$　$x=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sin\theta$ とおくと,

x	0	$\frac{\pi}{2}$
θ	0	$\frac{\pi}{4}$

$\frac{dx}{d\theta}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cos\theta$ より $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi^2}{2}(1-\sin^2\theta)}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cos\theta\,d\theta$

$\theta\ge 0$, $x\ge 0$

$\sin\theta\ge 0$ より

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\pi^2}{2}\cdot\cos^2\theta\,d\theta$

$=\frac{\pi^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$

$=\frac{\pi^2}{2}\left[\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{\pi^2}{2}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}(1-0)\right\}$

$=\frac{\pi^2}{16}(\pi+2)$

Ⓒ: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}\,dx=\frac{\pi^2}{4}$　よって

$S=Ⓐ-Ⓑ+Ⓒ$

$=1-\frac{\pi^2}{16}(\pi+2)+\frac{\pi^2}{4}$

$=\frac{-\pi^3-2\pi^2+4\pi^2+16}{16}$

$=\frac{-\pi^3+2\pi^2+16}{16}$

$=\frac{16+2\pi^2-\pi^3}{16}$