1 $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $x^2+ax+1=0 \cdots ①$, $x^2+bx+2=0 \cdots ②$, $x^2+cx+3=0 \cdots ③$

(1) ①, ②が実数解をもたないとき、それらの解は同一直線上か、同一円周上にあることを示せ。
また、同一円周上にあるとき、その円の中心と半径を a, b を使って表わせ。

(2) ①, ②, ③がどれも実数解をもたず、それらの解がすべて同一円周上にあるための必要十分条件を a, b, c で表わせ。

(1) ①が実数解をもたない $\iff a^2-4<0$
$\iff -2<a<2$

②が実数解をもたない $\iff b^2-8<0$
$\iff -2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$

このとき、①, ②の解は

$\dfrac{-a\pm i\sqrt{4-a^2}}{2}$, $\dfrac{-b\pm i\sqrt{8-b^2}}{2}$ となる。

(i) $a=b$ のとき、この4点は直線 $\mathrm{Re}\,z=-\frac{a}{2}$ 上にある。

(ii) $a\neq b$ のとき、この4点は複素平面上で等脚台形をつくる。よって同一円周上にある。

次に、4点が同一円周上にあるときの円の中心と半径について考える。それは座標平面において考えればよく、

4点 $P\left(\dfrac{-a}{2}, \dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}\right)$ $Q\left(-\dfrac{a}{2}, \dfrac{-\sqrt{4-a^2}}{2}\right)$

$R\left(\dfrac{-b}{2}, \dfrac{-\sqrt{8-b^2}}{2}\right)$, $S\left(\dfrac{-b}{2}, \dfrac{\sqrt{8-b^2}}{2}\right)$ と

おけばよい。このとき、SPの垂直二等分線とQRの垂直2等分線について考えればよい。

QRの垂直2等分線はQRの中点 $\left(\dfrac{-a-b}{4}, \dfrac{-\sqrt{4-a^2}-\sqrt{8-b^2}}{4}\right)$

を通り、かたむきが $-1\div\left(\dfrac{\left(\frac{-\sqrt{4-a^2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{8-b^2}}{2}\right)}{\left(-\frac{a}{2}\right)-\left(-\frac{b}{2}\right)}\right)$

$=\dfrac{b-a}{\sqrt{4-a^2}-\sqrt{8-b^2}}$ の直線である。よってQRの

垂直2等分線上にある複素数を $x+yi$ は、

$$\left(y+\frac{\sqrt{4-a^2}+\sqrt{8-b^2}}{4}\right)=\frac{b-a}{\sqrt{4-a^2}-\sqrt{8-b^2}}\left(x+\frac{a+b}{4}\right)$$

を通る。また、同様にしてSPの垂直二等分線の方程式を求めると、

$$\left(-y+\frac{\sqrt{4-a^2}+\sqrt{8-b^2}}{4}\right)=\frac{b-a}{\sqrt{4-a^2}-\sqrt{8-b^2}}\left(x+\frac{a+b}{4}\right)$$

である。この2直線の交点が円の中心となる。

ここで $y=0$ であり、

$$\frac{(4-a^2)-(8-b^2)}{4}=(b-a)x+\frac{b^2-a^2}{4}$$

$$\frac{4-a^2-8+b^2}{4}\quad \frac{-b^2+a^2}{4}=(b-a)x$$

$$x=\frac{1}{a-b}$$

よって中心は $\dfrac{1}{a-b}$

半径は $\left|-\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}i\right|$

$=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{4-a^2}{4}$

$=\dfrac{(a-b)^2}{(a-b)^2}+\dfrac{1}{(a-b)^2}+\dfrac{a(a-b)}{(a-b)^2}$

$=\dfrac{(2a-b)(a-b)+1}{(a-b)^2}$

(2) ③が実数解をもたない $\iff c^2-12<0$
$\iff -2\sqrt{3}<c<2\sqrt{3}$

このとき、$T\left(-\dfrac{c}{2}, \dfrac{\sqrt{12-c^2}}{2}\right)$ $U\left(-\dfrac{c}{2}, \dfrac{-\sqrt{12-c^2}}{2}\right)$

とおいて、PTUQが同一円周上にある条件を調べる。

(1)と同様にすることで円の中心を $z=x+yi$ は

$$\left(\pm y+\frac{\sqrt{4-a^2}+\sqrt{12-c^2}}{4}\right)=\frac{c-a}{\sqrt{4-a^2}-\sqrt{12-c^2}}\left(x+\frac{a+c}{4}\right)$$

よりy=0から、

$$\frac{(4-a^2)-(12-c^2)}{4}-\frac{c^2-a^2}{4}=(c-a)x$$

$$x=\frac{2}{a-c}$$

半径は $\left|-\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a-c}+\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}i\right|$

$=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{4}{(a-c)^2}+\dfrac{2a}{a-c}+\dfrac{4}{4}-\dfrac{a^2}{4}$

$=\dfrac{(3a-c)(a-c)+4}{(a-c)^2}$

よって同じ円周上にある
$\iff$ 中心、半径が等しいなので

必要十分条件は、($a\neq b\neq c\neq a$ はもちろんのこと)

$\dfrac{1}{a-b}=\dfrac{2}{a-c} \cdots Ⓐ$, $\dfrac{(3a-c)(a-c)+4}{(a-c)^2}=\dfrac{(2a-b)(a-b)+1}{(a-b)^2} \cdots Ⓑ$

Ⓐ $\iff (a-c)=2a-2b \iff a=2b-c$, また、Ⓑから

Ⓐの2乗を引いて整理すると、

$(3a-c)(a-c)(a-b)^2=(2a-b)(a-b)(a-c)^2$

$a\neq b$, $a\neq c$ より $\iff (3a-c)(a-b)=(2a-b)(a-c)$ 逆に、$a=2b-c$ のとき、

$\iff (6b-4c)(b-c)=(3b-2c)(2a-2c)$

より、Ⓑが成立する。よって条件が成立する

必要十分条件は、

($a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$)

a, b, c がこの順で等差数列をなす

である。

$\boxed{2}$ (1) $35x+91y+65z=3$ をみたすせいすうの組 (x,y,z) を1組求めよ.

(2) $35x+91y+65z=3$ をみたすせいすうの組の中で, x^2+y^2 が最小となるもの, そしてその最小値を求めよ.

$$35x+91y+65z=3$$

$$\Longleftrightarrow 35x+13(7y+5z)=3$$

7と5は互いに素なので, $\forall n\in\mathbb{Z}, \exists y,z\in\mathbb{Z}, 7y+5z=n$ をみたす. よって n を任意のせいすうとして,

$35x+13n=3$ の解について考えればよい.

このとき,
$$\begin{aligned}35&=13\times2+9\\13&=9\times1+4\\9&=2\times4+1\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}1&=9-2\times4\\&=9-2\times(13-9)\\&=3\times9-2\times13\\&=3\times(35-13\times2)-2\times13\\&=3\times35-8\times13\end{aligned}$$

より $35\cdot3+13\cdot(-8)=1$ よって

$35\cdot9+13\cdot(-24)=3$. このとき,

$$\begin{aligned}&35x+13n=3\\-)\ &35\cdot9+13\cdot(-24)=3\\\hline&35(x-9)+13(n+24)=0\end{aligned}$$

$\Rightarrow x-9=13(k-1)$

$n+24=-35(k-1)$

$(\because \gcd(35,13)=1)$

$(x,n)=(13k-4,-35k+11)$ $(k\in\mathbb{Z})$ となる.

次に, y,z について考える.

$7y+5z=1$ について, $(y,z)=(-2,3)$ は解であるので,

$y=70k-22,\ z=-105k+33$ として,

$\therefore 7y+5z=-35k+11$ となるので.

$$\begin{aligned}&7y+5z=-35k+11\\-)\ &7(70k-22)+5(-105k+33)=-35k+11\\\hline&7(y-70k+22)+5(z+105k-33)=0\end{aligned}$$

$\gcd(7,5)=1$ より

$$\therefore \begin{cases}y-70k+22=-5l\\z+105k-33=7l\end{cases} \quad (l\in\mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned}y&=-5l+70k-22\\z&=7l-105k+33\end{aligned}$$ となる. よって

$35x+91y+65z=3$ の全てのせいすうかいは, せいすう (k,l) をつかって

$$\begin{cases}x=13k-4\\y=-5l+70k-22\\z=7l-105k+33\end{cases} \cdots ①$$ と表すことができる.

(1) ①で求めた解に, $(k,l)=(0,-4)$ を代入すると,

$(x,y,z)=(-4,-2,5)$ を導出できて これは明らかに解である

$(-140-182+325=3)$

(2) ①より x^2+y^2 はせいすう k,l を用いて,

$$x^2+y^2=(13k-4)^2+(-5l+70k-22)^2$$

右辺第2項は $l=14k-4$ のとき, $2^2=4$,

$l=14k-3$ のとき, $7^2=49$

$l=14k-5$ ので, $3^2=9$

であり, $l>14k-3$ のときは $l=14k-3$ のときよりも大きく,

$l<14k-5$ のときは $l=14k-5$ のときよりも大きい

よって右辺第2項は $l=14k-4$ で min 4をとる

このとき, $(x^2+y^2)=(13k-4)^2+4$ だが,

$k=1$ のとき, $x^2+y^2=9^2+4=85$

$k=0$ のとき, $x^2+y^2=4^2+4=20$

$k=-1$ のとき, $x^2+y^2=289+4=293$

で $k=0$ のとき最小となる. よって

このとき $l=14\cdot0-4=-4$ であり,

$(x,y,z)=(-4,-2,5)$

答え:

x^2+y^2 の最小値は20であり, そのとき

$(x,y,z)=(-4,-2,5)$

//

3 方程式 $e^x(1-\sin x)=1$ について、
(1) このほうていしきは負の実数解をもたず、正の実数解を無限個もつことを示せ。
(2) このほうていしきの正のじっすうかいを小さいほうから順に $a_1 \sim a_n \sim$ としたとき、
$(S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k)$ $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$ を求めよ。

(1) $e^x>0$ なので
$1-\sin x=e^{-x}$ と同値 $t=-x$ とすると、
$\Leftrightarrow 1+\sin t=e^t$
$\Leftrightarrow 1+\sin t-e^t=0$ これが $t>0$ で解をもたないことを示す

$f(t)=1+\sin t-e^t$ とおくと、
$f'(t)=\cos t-e^t$
$f''(t)=-\sin t-e^t$
$\leqq -\sin t-1$
$\leqq 0$

よって $f''\leqq 0$ より f' はたんちょうげんしょう。よって $f'(t)<f'(0)=0$。よって f はたんちょうげんしょうで、$f(t)<f(0)=0$ となる

よって $t>0$ では $f(t)<0$ となり、$f(t)=0$ の解は $t>0$ には存在しない。$\Leftrightarrow$ $e^x(1-\sin x)=1$ は負の実数解をもたない。

次に正の実数解について考える $x=0$ は解なので $x>0$ についてのみぎろんする。k を1以上のせいすうとすると、
区間 $[2k\pi, (2k+\frac{1}{2})\pi]$ においては $\left(g(x)=e^x(1-\sin x)\right.$ とする$\left.\right)$
$g(2k\pi)=e^{2k\pi}(1-\sin(2k\pi))$
$=e^{2k\pi}\cdot 1=e^{2k\pi}>1$
$(\because k>0)$

$g((2k+\frac{1}{2})\pi)=0$、$g(x)$ は $x>0$ でなめらかにれんぞくであり、

$g'(x)=e^x(1-\sin x)+e^x(-\cos x)$
$=e^x(1-\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}))$ より
$x\in[2k\pi, (2k+\frac{1}{2})\pi]$ において、
$x+\frac{\pi}{4}\in[(2k+\frac{1}{4})\pi, (2k+\frac{3}{4})\pi]$ より
$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin(x+\frac{\pi}{4})\leqq 1$ ⇒ 区間内で $g'(x)\leqq 0$ より
中間値のていりより、$g(x)=1$ は区間内に1つだけ解をもつ。

また、区間 $[(2k+\frac{1}{2})\pi, (2k+1)\pi]$ においては、
$g((2k+\frac{1}{2})\pi)=0$, $g((2k+1)\pi)=e^{(2k+1)\pi}>1$
$x\in[(2k+\frac{1}{2})\pi, (2k+1)\pi]$ のとき、
$x+\frac{\pi}{4}\in[(2k+\frac{3}{4})\pi, (2k+\frac{5}{4})\pi]$ であり、
$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin(x+\frac{\pi}{4})\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ より 区間内で $g'(x)\geqq 0$。
$g(x)$ は区間 $[(2k+\frac{1}{2})\pi, (2k+1)\pi]$ で単調増加より
中間値のていりより $g(x)=1$ は区間内に1つだけ解をもつ。

これらのぎろんが任意の正のせいすう k で成立するので、$g(x)=1$ は $x>0$ で無限個の解をもつ。

(2) (1)のぎろんより n ばんめの解 a_n は
$a_n\in[(n-\frac{1}{2})\pi, (n+\frac{1}{2})\pi]$ が成立する
よって $\forall n$, $(n-\frac{1}{2})\pi\leqq a_n\leqq(n+\frac{1}{2})\pi$. これを $1\leqq k\leqq n$ で足しあわせると、

$$\sum_{k=1}^{n}(k-\tfrac{1}{2})\pi\leqq S_n\leqq\sum_{k=1}^{n}(k+\tfrac{1}{2})\pi$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k+\tfrac{1}{2})\pi=\left(\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}\tfrac{1}{2}\right)\pi=\left(\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n}{2}\right)\pi=\frac{n(n+2)}{2}\pi$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k-\tfrac{1}{2})\pi=\left(\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}\tfrac{1}{2}\right)\pi=\left(\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n}{2}\right)\pi=\frac{n^2}{2}\pi$$
よって

$$\frac{n^2}{2}\pi\leqq S_n\leqq\frac{n(n+2)}{2}\pi$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\pi}{2}\leqq\frac{S_n}{n^2}\leqq\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{2}{n}\right)$$

これが任意の n で成立する。
$n\to\infty$ のとき、$\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}(1+\frac{2}{n})\to\frac{\pi}{2}$
より、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{\pi}{2}$$
//

$\boxed{4}$ $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4}+y^2\leq 1,\ |z|\leq 6\}$, $l:(2,0,2),(-2,0,-2)$を通る直線.

(1) $|t|\leq 2\sqrt{2}$, $P_t\left(\frac{t}{\sqrt{2}},0,\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$, H_t: P_tを通り, lと垂直な平面, L_θ: $(2\cos\theta,\sin\theta,0)$を通り, z軸に平行な直線 $(\theta\in\mathbb{R})$.

L_θとH_tの交点の座標をt,θであらわせ.

(2) lを回転じくにもち, Vにふくまれる回転体のうち, 体積が最大となるものの体積.

(1) H_tの法線ベクトルは$(1,0,1)$で, $P_t\left(\frac{t}{\sqrt{2}},0,\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$を通るため, 平面$H_t$の方程式は $0=\left(x-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+0(y-0)+\left(z-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$

$\iff x+z=\sqrt{2}t$ とあらわすことができる

このとき, この平面とL_θ: $x=2\cos\theta$, $y=\sin\theta$ の交点は代入することで(x,y,z)に$(2\cos\theta,\sin\theta,\sqrt{2}t-2\cos\theta)$と求められる

$\therefore$ $(2\cos\theta,\sin\theta,\sqrt{2}t-2\cos\theta)$

(2) (1)でもとめた座標のうち, θを動かしたときのP_tとのきょりの変動を考える. (1)でもとめたものを$Q_{t\theta}$とすると,

$$\overrightarrow{P_tQ_{t\theta}}=\left(2\cos\theta-\frac{t}{\sqrt{2}},\ \sin\theta,\ \frac{t}{\sqrt{2}}-2\cos\theta\right)$$

となる. このとき,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{P_tQ_{t\theta}}|^2&=\left(2\cos\theta-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot 2+\sin^2\theta\\&=2\left\{4\cos^2\theta+\frac{t^2}{2}-2\sqrt{2}t\cos\theta\right\}+\sin^2\theta\\&=8\cos^2\theta+t^2-4\sqrt{2}t\cos\theta+1-\cos^2\theta\\&=7\cos^2\theta-4\sqrt{2}t\cos\theta+1+t^2\end{aligned}$$

$$=7\left(\cos^2\theta-2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{7}t\cos\theta+\frac{1+t^2}{7}+\frac{8}{49}t^2-\frac{8}{49}t^2\right)$$

$$=7\left\{\left(\cos\theta-\frac{2\sqrt{2}}{7}t\right)^2+\frac{7-t^2}{49}\right\}$$

$$=7\left(\cos\theta-\frac{2\sqrt{2}}{7}t\right)^2+\frac{7-t^2}{7}$$ となる.

よって $|t|\leq\frac{7\sqrt{2}}{4}$ のとき,

$\min_{\theta\in\mathbb{R}}|\overrightarrow{P_tQ_{t\theta}}|^2=\frac{7-t^2}{7}$ より $\min_{\theta\in\mathbb{R}}|\overrightarrow{P_tQ_{t\theta}}|=\sqrt{1-\frac{t^2}{7}}$

また, $\frac{7\sqrt{2}}{4}<t\leq 2\sqrt{2}$ のときは $\theta=0$ ($\cos\theta=1$) のときに最小値 $(t-2\sqrt{2})^2$,

$-\frac{7\sqrt{2}}{4}>t\geq -2\sqrt{2}$ のときは $\theta=\pi$ ($\cos\theta=-1$) のときに最小値 $(t+2\sqrt{2})^2$ をとる.

また, lを回転軸にもつ回転体がVに含まれるためには, 各H_tの断面について, P_tを中心とする円が断面に含まれていなくてはいけない. その条件での半径の最大値を$r(t)$とおくと,

$$V=\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\pi\{r(t)\}^2\cdot\left|\frac{dP_t}{dt}\right|dt$$ で

$$=\pi\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\{r(t)\}^2dt$$ となり さきほどの結果で,

$$r(t)=\begin{cases}2\sqrt{2}-t & \frac{7}{4}\sqrt{2}<t\leq 2\sqrt{2}\\ \sqrt{1-\frac{t^2}{7}} & |t|\leq\frac{7}{4}\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2}+t & -2\sqrt{2}\leq t<-\frac{7}{4}\sqrt{2}\end{cases}$$ であるので,

$$V=\pi\left\{\int_{-2\sqrt{2}}^{-\frac{7}{4}\sqrt{2}}(t+2\sqrt{2})^2dt+\int_{-\frac{7}{4}\sqrt{2}}^{\frac{7}{4}\sqrt{2}}\left(1-\frac{t^2}{7}\right)dt+\int_{\frac{7}{4}\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}(t-2\sqrt{2})^2dt\right\}$$

$$=\pi\left\{\left[\frac{1}{3}(t+2\sqrt{2})^3\right]_{-2\sqrt{2}}^{-\frac{7}{4}\sqrt{2}}+\left[\frac{1}{3}(t-2\sqrt{2})^3\right]_{\frac{7}{4}\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}+\left[t-\frac{t^3}{21}\right]_{-\frac{7}{4}\sqrt{2}}^{\frac{7}{4}\sqrt{2}}\right\}$$

$$=\pi\left\{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^3-0+\frac{1}{3}\cdot 0-\frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^3+2\cdot\left(\frac{7}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{21}\left(\frac{7}{4}\sqrt{2}\right)^3\right)\right\}$$

$$=\pi\left\{\frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{64}+2\cdot\frac{7}{4}\sqrt{2}\left\{1-\frac{1}{21_3}\cdot\frac{2\cdot 49^7}{16_8}\right\}\right\}$$

$$=\pi\left\{\frac{\sqrt{2}}{48}+\frac{7}{2}\sqrt{2}\left\{\frac{17}{24}\right\}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\pi}{48}\{1+7\times 17\}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\pi}{48}(1+119)$$

$$=\frac{\cancel{120}^{5}}{\cancel{48}_{2}}\sqrt{2}\pi$$

$$=\underline{\frac{5}{2}\sqrt{2}\pi}$$