1 解答用

採点欄

(ii) C_1とC_2が接する

$\Leftrightarrow$ $ax^2-\{b(x-1)^2+c\}=0$ は重解をもつ
よって

$ax^2-bx^2+2bx-b-c$

$(a-b)x^2+2bx-(b+c)$ より

$a\neq b$ と、…①

$b^2+(a-b)(b+c)=0$ よって

$b^2+ab-b^2-bc+ac=0$

$\Leftrightarrow$ $(a-b)c+ab=0$ となる …②

このとき、

(1) 接点のx座標は $\dfrac{-b}{a-b}$ だが

①,②より $(a-b)c=-ab$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{b}{a-b}=-\dfrac{c}{a}$

よってxざひょうは $\dfrac{c}{a}$, より

yざひょうは $a\cdot\left(\dfrac{c}{a}\right)^2=\dfrac{c^2}{a}$ よって

接点のざひょうは $\left(\dfrac{c}{a},\dfrac{c^2}{a}\right)$ //

(2) a,b,cの条件をまとめると、

$\begin{cases}(a-b)c+ab=0 & \cdots① \\ a\neq b & \cdots② \\ 1+c^2\leq 2a & \cdots③\end{cases}$ となる。このとき、$a>0$ である。

以下、$(x,y)=\left(\dfrac{c}{a},\dfrac{c^2}{a}\right)$ とおく。

ここで(x,y)についてじょうけんをみたす(a,b,c)が存在するかを考える

(i) $x=0$のとき、このとき、$b+c=0$, $c=0$ より $b=c=0$。よって
そのような組みあわせはない

(ii) $x\neq 0$ のとき、(x,y)がじょうけんをみたすとき、$c=\dfrac{y}{x}$ でなければいけない。

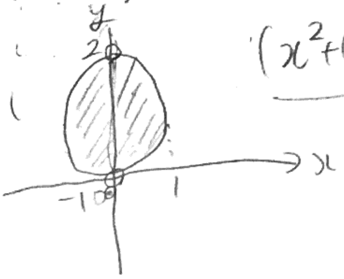
このとき、$\dfrac{c}{a}=x=\dfrac{1}{a}\dfrac{y}{x}$ より $a=\dfrac{y}{x^2}$ となる。

このとき③をみたすには、以下のようになり

$1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\leq 2\cdot\dfrac{y}{x^2}$ $\Leftrightarrow$ $x^2+y^2\leq 2y$

$\Leftrightarrow$ $x^2+(y-1)^2\leq 1$ となる。

(i)(ii)より、C_1とC_2の接点のうごきうるはんいは下のようになる。



$(x^2+(y-1)^2\leq 1,\ x\neq 0)$ //

2 解答用

$n^3-7n+9=n^3-n-6n+9$

$=\underbrace{n(n-1)(n+1)}_{①}\underbrace{-3(2n-3)}_{②}$

①は連続する3数のかけ算なので

3の倍数，

②も明らかに3の倍数

よって $\forall n\in\mathbb{Z},\ n^3-7n+9\equiv 0 \pmod 3$ より，

$n^3-7n+9\in\mathbb{P}\iff n^3-7n+9=3$

となる．よって

$n^3-n^2+n^2-7n+6$

$n^2(n-1)+(n-1)(n-6)$

$n^3-7n+6=0$

$(n-1)(n^2+n-6)=0$

$(n-1)(n+3)(n-2)=0$

$\therefore n=1,2,-3$ //

3 解答用

採点欄

四角形ABCDは円に内接するので、
$\angle BCD = \pi - \alpha$, $\angle ADC = \pi - \alpha$ よって
四角形ABCDは $AB \parallel CD$ をみたす台形
である。ここで、$A(\cos\theta, -\sin\theta)$
$B(\cos\theta, \sin\theta)$
$C(\cos(2\alpha+\theta), -\sin(2\alpha+\theta))$
$D(\cos(2\alpha+\theta), \sin(2\alpha+\theta))$

とおけば $\begin{cases} \angle AOC = 2\alpha \\ \angle BOD = 2\alpha \end{cases}$ 一般性を失わない。

ここで、$\begin{cases} 0 < 2\alpha+\theta < \pi \\ 0 < \theta < \pi \end{cases} \Rightarrow 0 < \theta < \pi - 2\alpha$ でなくてはいけない。

このとき、$AB = 2\sin\theta$
$CD = 2\sin(2\alpha+\theta)$,

$$BC = DA = \sqrt{(\cos\theta - \cos(2\alpha+\theta))^2 + (\sin\theta + \sin(2\alpha+\theta))^2}$$
$$= \sqrt{2 - 2\cos(2\alpha+2\theta)}$$
$$= \sqrt{2 - 2(2\cos^2(\alpha+\theta) - 1)}$$
$$= \sqrt{4\sin^2(\alpha+\theta)}$$
$$= 2\sin(\alpha+\theta) \quad (\because 0 < \alpha+\theta < \pi - \alpha < \pi \text{ より}, \sin(\alpha+\theta) > 0)$$

よって $K = 16 \cdot \sin\theta \cdot \sin^2(\alpha+\theta) \cdot \sin(2\alpha+\theta)$

となるが、$\alpha+\theta = \phi$ とおくと、

$$K = 16\sin(\phi-\alpha)\sin(\phi+\alpha)\cdot\sin^2\phi$$
$$= 16\{\sin^2\phi\cos^2\alpha - \cos^2\phi\sin^2\alpha\}\sin^2\phi$$
$$= 16\{\sin^4\phi\cos^2\alpha - \sin^2\phi\cos^2\phi\sin^2\alpha\}$$
$$= 4\{(1-\cos 2\phi)^2\cos^2\alpha - (\sin 2\phi)^2\sin^2\alpha\}$$
$$= 4\{(1-2\cos 2\phi+\cos^2 2\phi)\cos^2\alpha - (1-\cos^2 2\phi)\sin^2\alpha\}$$
$$= 4\{\cos^2 2\phi - 2\cos^2\alpha\cos 2\phi + \cos 2\alpha\}$$

$0 < \theta < \pi - 2\alpha$ より $\alpha < \phi < \pi - \alpha$
よって $2\alpha < 2\phi < 2\pi - 2\alpha$ より
$-1 \leq \cos 2\phi \leq \cos 2\alpha$.
ここで、$\cos 2\alpha - \cos^2\alpha = \cos^2\alpha - 1 \leq 0$
より、Kを最大とするときの
$\cos 2\phi$ は、$\cos 2\phi = -1$ となる。
このとき、
$$K = 4\{1 + 2\cos^2\alpha + \cos 2\alpha\}$$
$$= 4\{2 + \cos 2\alpha + \cos 2\alpha\}$$
$$= 8(1 + \cos 2\alpha)$$

4 解答用

採点欄

$z_n=1$ となるかくりつこ p_n

$z_n=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ となるかくりつこ q_n

$z_n=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ となるかくりつこ r_n とおく.

このとき, z_n は $1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ のどれかなので, 明らかに, $p_n+q_n+r_n=1$ が成立する.

また, $p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}r_n=\frac{1}{2}(1-q_n)$

$q_{n+1}=\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{2}p_n=\frac{1}{2}(1-q_n)$

$r_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}q_n=q_n$

となる このとき,

$q_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(q_n-\frac{1}{3}\right)$,

$q_1=\frac{1}{2}$ より

$\{q_n-\frac{1}{3}\}$ は初項 $\frac{1}{6}$, 公比 $\left(-\frac{1}{2}\right)$ のとうひすうれつなので

$q_n=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$.

よって $p_n=\frac{1}{2}(1-q_{n-1})$

$=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\right)\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$

$\therefore \frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ //

5 解答用

$y=\log x$ のAの法線の方程式は、

$y-\log t=-t(x-t)$

$y+tx=\log t+t^2$ より法線の向きベクトルは $(1,-t)$ よってBのざひょうは $\left(t+\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ \log t-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$

となる.

(1) $(u(t),v(t))=\left(t+\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ \log t-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$

また、$\frac{du}{dt}=1+\frac{-t}{(\sqrt{1+t^2})^3}=1-\frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3}$,

$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{t}-\frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3}$ となる.

(2) $L_1(r)=\int_r^1\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\cdot dt$

$=\int_r^1\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}dt$

$L_2(r)=\int_r^1\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{du}{dt}\right)^2}dt$

$\frac{du}{dt}=t\frac{dv}{dt}$ より

$=\int_r^1\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}dt$

$\frac{du}{dt}>0$ かつ $t>0$ より

$=\int_r^1\frac{du}{dt}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}dt$

$=\int_r^1\left(1-\frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3}\right)\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}dt$

よって $L_1(r)-L_2(r)$

$=\int_r^1\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\left\{1-\left(1-\frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3}\right)\right\}dt$

$=\int_r^1\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\frac{t}{(\sqrt{1+t^2})^3}\cdot dt$

$=\int_r^1\frac{1}{1+t^2}dt$.

よって $\lim_{r\to+0}(L_1(r)-L_2(r))=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{4}$ //

採点欄

6 解答用

採点欄

(1) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$とおく.

このとき, $AC=BD \iff |\vec{c}|=|\vec{b}-\vec{d}|$

$AD=BC \iff |\vec{d}|=|\vec{c}-\vec{b}|$,

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}$

このとき, 明らかに $\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{PQ}\neq\vec{0}$である.

このとき, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}$

$=\vec{b}\cdot\{\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}\}$

$=\vec{b}\cdot\frac{1}{2}\{\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\}$

$=\frac{1}{2}\{\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}-|\vec{b}|^2\}$

$=\frac{1}{4}\{2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{d}-|\vec{b}|^2-|\vec{b}|^2\}$

$=\frac{1}{4}\{|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-|\vec{b}-\vec{c}|^2-|\vec{d}-\vec{b}|^2\}$

$=\frac{1}{4}\{(|\vec{c}|^2-|\vec{d}-\vec{b}|^2)+(|\vec{d}|^2-|\vec{b}-\vec{c}|^2)\}$

$=0$. よって $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{PQ}$ //

(2) PQと垂直な平面αにおけるだんめんずを考えると,

四面体ABCDのαにおける断面は四角形となる. このとき,

$\overrightarrow{AM}=s\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{BC}$

$=s\vec{d}$, $=s\vec{c}+(1-s)\vec{b}$ について,

MNの中点をLとおくと,

$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\{(1-s)\vec{b}+s\vec{c}+s\vec{d}\}$ より,

$\overrightarrow{PL}=\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AP}=\frac{s}{2}(-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$

$=s\overrightarrow{PQ}$ よって

Lは線分PQ上にある.

同様に, $\overrightarrow{AX}=(1-s)\vec{b}+s\vec{d}$,

$\overrightarrow{AY}=s\vec{c}$ とおき,

XYの中点をZとおくと,

$\overrightarrow{AZ}=\frac{1}{2}((1-s)\vec{b}+s\vec{c}+s\vec{d})$

$\overrightarrow{PZ}=\frac{s}{2}(-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})=\frac{s}{2}\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PL}$

よってPQと垂直で点$\overrightarrow{AP}+s\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AL}$を通る面における四面体ABCDの断面図は.

$\overrightarrow{AM}=s\vec{d}$

$\overrightarrow{AN}=s\vec{c}+(1-s)\vec{b}$

$\overrightarrow{AX}=(1-s)\vec{b}+s\vec{d}$

$\overrightarrow{AY}=s\vec{c}$

であらわされる四角形MYNXである

このとき, LはMYNXにふくまれて,

LM=LN, LX=LY であるので四角形MYNXは平行四辺形となる. よってこのときの

平面αによる切断は必ず平行四辺形の面積を2等分する. これが任意のsで成立するので, 切断された2つの部分の体積は等しくなる.