京大2020 1

$a, b \in \mathbb{R}$

$z^3+3az^2+bz+1=0$ (*)

が3つの相異なる解

3点が一辺$\sqrt{3}a$の正三角形

このときの a, b と3つの解をもとめよ

3つの解を $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ とおくと

解と係数の関係より

$\alpha+\beta+\gamma=-3a$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$

$\alpha\beta\gamma=-1$

正三角形になるならば

$(\alpha+\beta+\gamma)^2=3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ を満たしている

(参照:2020東工大問2) ため

$(-3a)^2=3b$ より. $\underline{b=3a^2}$

また. 三角形ABCの重心は

$\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=-a$. (正三角形なので 外心=重心)

$a^3=|a+\alpha|\cdot|a+\beta|\cdot|a+\gamma|$

$=|a^3+(\alpha+\beta+\gamma)a^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)a+\alpha\beta\gamma|$

$=|a^3-3a\cdot a^2+3a^2\cdot a-1|$

$=|a^3-1|$ $a>1$のとき, $0=-1$より×

よって $a<1$ であって $2a^3=1$ より.

$a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $b=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$

となる. (*)はこのとき,

$z^3+3\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{2}}z^2+3\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{4}}z+1=0$

$z^3+3\frac{1}{\sqrt[3]{2}}z^2+3\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{4}}z+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

$\left(z+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3=-\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3$

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とすることで.

$z+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}=\omega^k\cdot\dfrac{-1}{\sqrt[3]{2}}$ となり

$$z=\frac{-2}{\sqrt[3]{2}},\ \frac{-1-\omega}{\sqrt[3]{2}},\ \frac{-1-\omega^2}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\ -\sqrt[3]{4}\qquad\ \frac{\omega^2}{\sqrt[3]{2}}\qquad\ \frac{\omega}{\sqrt[3]{2}}$$

より解は.

$\underline{-\sqrt[3]{4},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2\cdot\sqrt[3]{2}}}$ //

東大2020 $\boxed{2}$ $p \geq 1$ $p \in \mathbb{N}$ α, β は $x^2-2px-1$ の2解. $|\alpha|>1$
(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha^n+\beta^n$ が整数を示せ (2) $\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n \sin(\alpha^n \pi)$

(1) $\alpha+\beta=2p$, $\alpha\beta=-1$.

$x_n=\alpha^n+\beta^n$ としたとき,

$x_{n+2}=\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})$
$-\alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)$

$=2px_{n+1}+x_n$

$x_1=2p$, $x_2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=4p^2+2$

$n=1,2$ で x_n: 整数 より.
x_n, x_{n+1}: 整数 ならば.
$x_{n+2}=2px_{n+1}+x_n$ も 整数となる.
よって帰納的に, $\forall n\in\mathbb{N}$. x_n: 整数.

(2) $(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)$

$=(-\alpha)^n\cdot\sin((\alpha^n+\beta^n-\beta^n)\pi)$

$=(-\alpha)^n\cdot\sin(x_n\pi-\beta^n\pi)$
(1)より. x_n: 整数なので,

$=(-\alpha)^n\cdot\sin(-\beta^n\pi)$

$\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\cdot\sin(-\beta^n\pi)$

$=-\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\cdot\sin(\beta^n\pi)$

$=-\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\cdot\frac{\sin(\beta^n\pi)}{\beta^n\pi}\cdot\beta^n\pi$

$=-\lim_{n\to\infty}(-\alpha\beta)^n\cdot\pi\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\beta^n\pi)}{\beta^n\pi}$

$=-\pi\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\beta^n\pi)}{\beta^n\pi}$ ($\because \alpha\beta=-1$)

$|\alpha|\cdot|\beta|=1$ かつ $|\alpha|>1$ より. $|\beta|<1$ となる
よって $\beta^n\pi\to 0$ $(n\to\infty)$. よって
$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\beta^n\pi)}{\beta^n\pi}=1$ より

$=-\pi$

京大 2020 [3]　$\vec{OA}\cdot\vec{OD}=\vec{OB}\cdot\vec{OD}=k$

A, B, C, D は S^2 上

$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=\vec{OC}\cdot\vec{OD}=\frac{1}{2}$

$\vec{OA}\cdot\vec{OC}=\vec{OB}\cdot\vec{OC}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$

kはいくつ？

$uz_2 = \frac{1}{2} = \sqrt{2}t$

$uz = \sqrt{2}t + \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}}{3}t + \frac{1}{2}$

$\vec{OA}=\vec{a},\ \vec{OB}=\vec{b},\ \vec{OC}=\vec{c},\ \vec{OD}=\vec{d}$ とする.

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$ であるため,

内積からなす角を求められる.

$\angle AOB = 60°$ より

$A=(1,0,0),\ B=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ としても

一般性を失わない. ここで,

$C=(x,y,z),\ D=(s,t,u)$ とおく.

このとき,

$\vec{c}\cdot\vec{d} = sx+ty+uz=\frac{1}{2}$ …①

$\vec{a}\cdot\vec{c} = x = -\frac{\sqrt{6}}{4}$ …②

$\vec{c}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y = -\frac{\sqrt{6}}{4}$ …③

$\vec{a}\cdot\vec{d} = s = k$ …④

$\vec{b}\cdot\vec{d} = \frac{1}{2}s+\frac{\sqrt{3}}{2}t = k$ …⑤

$|\vec{c}|^2 = x^2+y^2+z^2=1$ …⑥

$|\vec{d}|^2 = s^2+t^2+u^2=1$ …⑦

②より $\boxed{x=-\frac{\sqrt{6}}{4}}$ ③より $\frac{\sqrt{3}}{2}y=-\frac{\sqrt{6}}{8}$ より $\boxed{y=-\frac{\sqrt{2}}{4}}$ よって $z^2=1-x^2-y^2$ より

$z^2=1-\frac{6}{16}-\frac{2}{16}=\frac{1}{2}$　$\left(z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

①に代入すると

$-\frac{\sqrt{6}}{4}s-\frac{\sqrt{2}}{4}t=\frac{1}{2}-uz$　Ⓐ

$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}s-\frac{1}{2}t=\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}uz$

④と⑤より

$-\frac{1}{2}s+\frac{\sqrt{3}}{2}t=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}t=s$ を

Ⓐに代入すると

$-\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}t=\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}uz$

$\parallel$

$-2t$ より, $t=\frac{1}{\sqrt{2}}uz-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ …Ⓑ

⑦より

$1-u^2=s^2+t^2=3t^2+t^2=4t^2$

$=\left(\sqrt{2}uz-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$=2u^2z^2+\frac{1}{2}-2uz$

$=u^2+\frac{1}{2}-2uz$ より

$0=2u^2-2uz-\frac{1}{2}$ より

$u=\frac{z\pm\sqrt{z^2+1}}{2}=\frac{2z\pm\sqrt{6}}{4}$

$k=s=\sqrt{3}t=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2z\pm\sqrt{6}}{4}z-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$=\frac{2\sqrt{6}z^2\pm6z}{8}-\frac{2\sqrt{6}}{8}=\frac{\sqrt{6}\pm6z-2\sqrt{6}}{8}$

より $k=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8},\ \frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$　$k>0$ より

$$\boxed{k=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}}$$

東大2020 $\boxed{4}$ $B(n)$: nが3で割り切れる回数 $f(m,n)=m^3+n^2+n+3$ の
$(m,n)\in([1,30]\cap\mathbb{Z})^2$ このときの $A(m,n)=B(f(m,n))$ のmax とそのときの(m,n)を求めよ

$n\not\equiv 0 \pmod 3$

$f(m,n)=m^3+9+n^2+n-6$

$=m^3+9+(n+3)(n-2)$

(i) $n\equiv 1 \pmod 3$ のとき, $(n+3)(n-2)\equiv -1 \pmod 3$

より $f(m,n)\equiv m^3+8 \pmod 3$. ここで,

$f(m,n)\equiv 8, 9, 16$ より $m\equiv 1 \pmod 3$

$m \bmod 3 = 0, 1, 2$ のときに最適

$m=3a+1$, $n=3b+1$ としたとき, $(a, b\in\mathbb{N}_{\geq 0})$

$f(m,n)=(3a+1)^3+9+(3b+4)(3b-1)$

$=27a^3+27a^2+9a+1+9+9b^2+9b-4$

$=54a^3+9a+9b^2+9b+6$

$=3\cdot(3(6a^3+a+b^2+b)+2)$ より, このとき,

$A(m,n)=1$ となる

(ii) $n\equiv 2 \pmod 3$ のとき, $(n+3)(n-2)\equiv 0 \pmod 3$

より $f(m,n)\equiv m^3+9$ より $m\not\equiv 0 \pmod 3$ のとき,

$A(m,n)=0$ より $m\equiv 0 \pmod 3$ とする. このとき,

$n=3a+2$, $m=3b$ $(a\geq 0, b\geq 1)$ とおいて.

$f(m,n)=27b^3+9+(3a+5)3a$

$=27b^3+9+9a^2+15a$

aが3の倍数でないなら

$=9\cdot(3b^3+1+a^2+a)+6a$ より,

$A(m,n)=1$ となる

aが3の倍数なら, $a=3k$ $(k\geq 0)$ とおいて

$n=9k+2$, $(k=0,1,2,3)$

$f(m,n)=27b^3+9+81k^2+45k$

$=9\cdot(3b^3+1+9k^2+5k)$

$k=0,1,2,3$の中では, $k=1$とおくとき, ( )の中が3の倍数となって最適となる. よって$k=1$となり $\boxed{n=11}$

このとき,

$f(m,n)=9\cdot(3b^3+1+9+5)$

$=9\cdot(3b^3+15)=27\cdot(b^3+5)$

$b\equiv 1$ のとき, b^3+5 は3の倍数となる.

ここで $m=3b$ より $1\leq b\leq 10$

$b=1, 4, 7, 10$ のとき,

b^3+5 はそれぞれ $6, 69, 348, 1005$

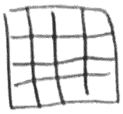
となりどれも3の倍数だが9の倍数でない.

よって $m=3, 12, 21, 30$ のとき

$B(f(m,n))=4$ となる.

∴ $\boxed{\text{max は4. このとき, } (m,n)=(3,11), (12,11), (21,11), (30,11)}$

京大2020 5　4×4のラテン方陣はいくつ?



1〜4の数字を
たて、よこで重複がないように

24×3×

1行目をABCD(1〜4の入れかえ)とする
2行目のBの位置はとりあえず左から1個目としておく(後で2列目〜4列目を入れかえる)

A	B	C	D
B			

以降のAの置き方について考える。

①

A	B	C	D
B	A		

このとき、

A	B	C	D
B	A	D	C
X		Y	

まで確定していて
Xには

C	D
D	C

or

D	C
C	D

のどちらか

Yには

A	B
B	A

or

B	A
A	B

のどちらか

よって 2×2=4通りある。

②

A	B	C	D
B		A	

このとき

A	B	C	D
B	D	A	C
P		Q	

まで確定

Pには

C	A
D	C

より

C	A
D	C

or

D	C
C	A

のどちらか

同様にして
Qには

B	A
D	B

or

D	B
B	A

となる。

DAが行に重複してはいけないので

B	A	D	C
D	B	C	A

or

D	B	C	A
B	A	D	C

の2つだけ。

③

A	B	C	D
B			A

このとき

A	B	C	D
B	C	D	A

まで確定していて、これは②の3列目と4列目を入れかえたものに対応。

よって結局

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

と

A	B	C	D
B	C	D	A
D	A	B	C
C	D	A	B

の2種類しかない。

よって結局、

$4!\times3\times(4+2+2)=\underline{576}$

京大2020 $\boxed{6}$ $z=\sqrt{\log(1+x)}$ をz軸まわりに回転→x軸まわりに回転したやつの体積

$f(x,y)=\sqrt{\log(1+\sqrt{x^2+y^2})}$ として $x=k$ のときの

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$ 上の $z=f(x,y)$ のきどうを考える。$x=k$ のとき、$-\sqrt{1-k^2}\leq y\leq\sqrt{1-k^2}$

このとき、

$z^2+y^2=y^2+\log(1+\sqrt{k^2+y^2})$ のはんいを考える これは y について偶関数なので、

$0\leq y\leq\sqrt{1-k^2}$ でのはんいを考えればよい。

これは(単増)+(単増)なので

明らかに単調増加。よって

$z^2+y^2|_{y=0}\leq z^2+y^2\leq z^2+y^2|_{y=\sqrt{1-k^2}}$ となり、

$\log(1+|k|)\leq z^2+y^2\leq 1-k^2+\log 2$

よって $-1\leq k\leq 1$ で動かせばよくて。

体積は

$\pi\cdot\int_{-1}^{1}1-x^2+\log 2-\log(1+|x|)\,dx$

$=2\pi\int_0^1 1-x^2+\log 2-\log(1+x)\,dx$

$=2\pi\left[x-\frac{x^3}{3}+x\log 2-(x+1)\log(x+1)+(x+1)\right]_0^1$

$=2\pi\cdot\left(\frac{2}{3}+\log 2-2\log 2+1\right)$

$=2\pi\left(\frac{5}{3}-\log 2\right)$

$=\frac{10\pi}{3}-2\pi\log 2$ //