1 $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $x^2+ax+1=0\cdots①$, $x^2+bx+2=0\cdots②$, $x^2+cx+3=0\cdots③$

(1) ①,②が実数解をもたないとき，それらの解は同一直線上か，同一円周上にあることを示せ．
また，同一円周上にあるとき，その円の中心と半径を a,b を使って表わせ．

(2) ①,②,③がどれも実数解をもたず，それらの解がすべて同一円周上にあるための必要十分条件を a,b,c で表わせ．

(1) ①が実数解をもたない $\Leftrightarrow a^2-4<0$
$\Leftrightarrow -2<a<2$

②が実数解をもたない $\Leftrightarrow b^2-8<0$
$\Leftrightarrow -2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$

このとき，①,②の解は
$\dfrac{-a\pm i\sqrt{4-a^2}}{2}$, $\dfrac{-b\pm i\sqrt{8-b^2}}{2}$ となる．

(i) $a=b$ のとき，この4点は直線 $\mathrm{Re}\,z=-\frac{a}{2}$ 上にある．

(ii) $a\neq b$ のとき，この4点は複素平面上で等脚台形をつくる．よって同一円周上にある．

次に，4点が同一円周上にあるときの円の中心と半径について考える．それは座標平面において考えればよく，

4点 $P\left(\frac{-a}{2},\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}\right)$ $Q\left(-\frac{a}{2},\frac{-\sqrt{4-a^2}}{2}\right)$
$R\left(\frac{-b}{2},\frac{-\sqrt{8-b^2}}{2}\right)$, $S\left(\frac{-b}{2},\frac{\sqrt{8-b^2}}{2}\right)$ と

おけばよい．このとき，SPの垂直二等分線とQRの垂直二等分線について考えればよい．

QRの垂直二等分線はQRの中点 $\left(\frac{-a-b}{4},\frac{-\sqrt{4-a^2}-\sqrt{8-b^2}}{4}\right)$
を通り，かたむきが $-1\div\left(\dfrac{\left(\frac{-\sqrt{4-a^2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{8-b^2}}{2}\right)}{\left(-\frac{a}{2}\right)-\left(-\frac{b}{2}\right)}\right)$

$=\dfrac{b-a}{\sqrt{4-a^2}-\sqrt{8-b^2}}$ の直線である．よってQRの

垂直二等分線上にある複素数 $z=x+yi$ は，

$$\left(y+\frac{\sqrt{4-a^2}+\sqrt{8-b^2}}{4}\right)=\frac{b-a}{\sqrt{4-a^2}-\sqrt{8-b^2}}\left(x+\frac{a+b}{4}\right)$$

を通る．また，同様にしてSPの垂直二等分線の方程式を求めると，

$$\left(-y+\frac{\sqrt{4-a^2}+\sqrt{8-b^2}}{4}\right)=\frac{b-a}{\sqrt{4-a^2}-\sqrt{8-b^2}}\left(x+\frac{a+b}{4}\right)$$

である．この2直線の交点が円の中心となる．

ここで $y=0$ であり

$$\frac{(4-a^2)-(8-b^2)}{4}=(b-a)x+\frac{b^2-a^2}{4}$$

$$\frac{4-a^2-8+b^2}{4}\ \frac{-b^2+a^2}{4}=(b-a)x$$

$$x=\frac{1}{a-b}$$

よって中心は $\dfrac{1}{a-b}$

半径は $\left|-\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}i\right|$

$$=\frac{a^2}{4}+\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{a}{a-b}+\frac{4-a^2}{4}$$

$$=\frac{(a-b)^2}{(a-b)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{a(a-b)}{(a-b)^2}$$

$$\frac{(2a-b)(a-b)+1}{(a-b)^2}$$

(2) ③が実数解をもたない $\Leftrightarrow c^2-12<0$
$\Leftrightarrow -2\sqrt{3}<c<2\sqrt{3}$.

このとき，$T\left(-\frac{c}{2},\frac{\sqrt{12-c^2}}{2}\right)$ $U\left(-\frac{c}{2},\frac{-\sqrt{12-c^2}}{2}\right)$
としておいて，PTUQが同一円周上にある条件を考

(1)と同様にすることで円の中心 $z=x+yi$ は

$$\left(\pm y+\frac{\sqrt{4-a^2}+\sqrt{12-c^2}}{4}\right)=\frac{c-a}{\sqrt{4-a^2}-\sqrt{12-c^2}}\left(x+\frac{a+c}{4}\right)$$

より $y=0$ から

$$\frac{(4-a^2)-(12-c^2)}{4}-\frac{c^2-a^2}{4}=(c-a)x$$

$$x=\frac{2}{a-c}$$

半径は $\left|-\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a-c}+\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}i\right|$

$$=\frac{a^2}{4}+\frac{4}{(a-c)^2}+\frac{2a}{a-c}+\frac{4}{4}-\frac{a^2}{4}$$

$$=\frac{(3a-c)(a-c)+4}{(a-c)^2}$$

よって同じ円周上にある
$\Leftrightarrow$ 中心，半径が等しいなので

必要十分条件は，($a\neq b\neq c\neq a$ はもちろんのこと)

$\dfrac{1}{a-b}=\dfrac{2}{a-c}\cdots Ⓐ$, $\dfrac{(3a-c)(a-c)+4}{(a-c)^2}=\dfrac{(2a-b)(a-b)+1}{(a-b)^2}\cdots Ⓑ$

Ⓐ $\Leftrightarrow (a-c)=2a-2b \Leftrightarrow a=2b-c$．また，Ⓑから

Ⓐの2乗を引いてせいりすると．
$(3a-c)(a-c)(a-b)^2=(2a-b)(a-b)(a-c)^2$

$a\neq b$, $a\neq c$ より $\Leftrightarrow (3a-c)(a-b)=(2a-b)(a-c)$ 逆に，$a=2b-c$ のとき，

$\Leftrightarrow (6b-4c)(b-c)=(3b-2c)(2a-2c)$
より，Ⓑが成立する．よって条件が成立する

必要十分条件は，
($a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$)
a,b,c がこの順で等差数列をなす．
である．

2 (1) $35x+91y+65z=3$ をみたすせいすうの組 (x,y,z) を1つ求めよ。

(2) $35x+91y+65z=3$ をみたすせいすうの組の中で、x^2+y^2 が最小となるもの、そしてその最小値をもとめよ。

$35x+91y+65z=3$

$\iff 35x+13(7y+5z)=3$

7と5は互いに素なので $\forall n\in\mathbb{Z}, \exists y,z\in\mathbb{Z}, 7y+5z=n$ をみたす。よって n を任意のせいすうとして、

$35x+13n=3$ の解について考えればよい。

このとき、
$$\begin{aligned}35&=13\times2+9\\13&=9\times1+4\\9&=2\times4+1\end{aligned}\implies\begin{aligned}1&=9-2\times4\\&=9-2\times(13-9)\\&=3\times9-2\times13\\&=3\times(35-13\times2)-2\times13\\&=3\times35-8\times13\end{aligned}$$

より $35\cdot3+13\cdot(-8)=1$ よって

$35\cdot9+13\cdot(-24)=3$. このとき、

$$\begin{aligned}&35x+13n=3\\-)\ &35\cdot9+13\cdot(-24)=3\\\hline&35(x-9)+13(n+24)=0\end{aligned}$$

$\Rightarrow x-9=13(k-1)$

$n+24=-35(k-1)$

$(\because \gcd(35,13)=1)$

$(x,n)=(13k-4,-35k+11)$ $(k\in\mathbb{Z})$ となる。

次に、y,z について考える。

$7y+5z=1$ について、$(y,z)=(-2,3)$ は解であるので、

$y=70k-22,\ z=-105k+33$ として、

$\therefore 7y+5z=-35k+11$ となるので、

$$\begin{aligned}&7y+5z=-35k+11\\-)\ &7(70k-22)+5(-105k+33)=-35k+11\\\hline&7(y-70k+22)+5(z+105k-33)=0\end{aligned}$$

$\gcd(7,5)=1$ より

$\therefore\begin{cases}y-70k+22=-5l\\z+105k-33=7l\end{cases}$ $(l\in\mathbb{Z})$

$y=-5l+70k-22$

$z=7l-105k+33$ となる。よって

$35x+91y+65z=3$ の全ての せいすうかいは、せいすう (k,l) をつかって

$\begin{cases}x=13k-4\\y=-5l+70k-22\\z=7l-105k+33\end{cases}$ …① と表すことができる。

(1) ①で求めた解に、$(k,l)=(0,-4)$ を代入すると、$(x,y,z)=(-4,-2,5)$ をえることができて、これは明らかに解である

$(-140-182+325=3)$

(2) ①より x^2+y^2 はせいすう k,l を用いて、

$x^2+y^2=(13k-4)^2+(-5l+70k-22)^2$

右辺第2項は $l=14k-4$ のとき、$2^2=4$、
$l=14k-3$ のとき、$7^2=49$
$l=14k-5$ のとき、$3^2=9$

であり、$l>14k-3$ のときは $l=14k-3$ のときよりも大きく、$l<14k-5$ のときは $l=14k-5$ のときよりも大きい。

よって右辺第2項は $l=14k-4$ で min 4 をとる

このとき、$(x^2+y^2)=(13k-4)^2+4$ だが、

$k=1$ のとき、$x^2+y^2=9^2+4=85$

$k=0$ のとき、$x^2+y^2=4^2+4=20$

$k=-1$ のとき、$x^2+y^2=289+4=293$

で $k=0$ のとき最小となる。よって

このとき $l=14\cdot0-4=-4$ であり、

$(x,y,z)=(-4,-2,5)$

答え：

x^2+y^2 の最小値は20であり、そのとき、
$(x,y,z)=(-4,-2,5)$ //

3 方程式 $e^x(1-\sin x)=1$ について、正の実数解を無限個もつことを示せ。
(1) このほうていしきは負の実数解をもたず、正の実数解を無限個もつことを示せ。
(2) このほうていしきの正のじっすうかいを小さいほうから順に $a_1 \sim a_n$ とした時、
$\left(S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^2}$ を求めよ。

(1) $e^x>0$ なので
$1-\sin x=e^{-x}$ と同値 $t=-x$ とすると、
$\iff 1+\sin t=e^t$
$\iff 1+\sin t-e^t=0$ これが $t>0$ で解をもたないことを示す

$f(t)=1+\sin t-e^t$ とおくと、
$f'(t)=\cos t-e^t$
$f''(t)=-\sin t-e^t$
$\leq -\sin t-1$
≤ 0
よって $f''(t)\leq 0$ より f' はたんちょうげんしょう。よって $f'(t)<f'(0)=0$。よって f はたんちょうげんしょうで、$f(t)<f(0)=0$ となる

よって $t>0$ では $f(t)<0$ となり、$f(t)=0$ の解は $t>0$ には存在しない。$\iff e^x(1-\sin x)=1$ は負の実数解をもたない。

次に正の実数解について考える $x=0$ は解なので $x>0$ についてのみギロンする。k を1以上のせいすうとすると、区間 $[2k\pi, (2k+\frac{1}{2})\pi]$ においては $\left(g(x)=e^x(1-\sin x)\right.$ とする$\left.\right)$

$g(2k\pi)=e^{2k\pi}(1-\sin(2k\pi))$
$=e^{2k\pi}\cdot 1=e^{2k\pi}>1$ $(\because k>0)$

$g((2k+\frac{1}{2})\pi)=0$, $g(x)$ は $x>0$ でなめらかにれんぞくであり、

$g'(x)=e^x(1-\sin x)+e^x(-\cos x)$
$=e^x\left(1-\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\right)$ より
$x\in[2k\pi, (2k+\frac{1}{2})\pi]$ において、
$x+\frac{\pi}{4}\in[(2k+\frac{1}{4})\pi, (2k+\frac{3}{4})\pi]$ より
$\frac{1}{\sqrt{2}}\leq\sin(x+\frac{\pi}{4})\leq 1 \Rightarrow$ 区間内で $g'(x)\leq 0$ よって中間値のていりより、$g(x)=1$ は区間内に1つだけ解をもつ。
また、区間 $[(2k+\frac{1}{2})\pi, (2k+1)\pi]$ においては、
$g((2k+\frac{1}{2})\pi)=0$, $g((2k+1)\pi)=e^{(2k+1)\pi}>1$
$x\in[(2k+\frac{1}{2})\pi, (2k+1)\pi]$ のとき、
$x+\frac{\pi}{4}\in[(2k+\frac{3}{4})\pi, (2k+\frac{5}{4})\pi]$ であり
$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq\sin(x+\frac{\pi}{4})\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ より 区間内で $g'(x)\geq 0$。
$g(x)$ はくかん $[(2k+\frac{1}{2})\pi, (2k+1)\pi]$ で単調増加よって中間値のていりより $g(x)=1$ は区間内に1つだけ解をもつ。

これらのギロンが任意の正のせいすう k で成立するので、$g(x)=1$ は $x>0$ で無限個の解をもつ。

(2) (1)のギロンより、n ばんめの解 a_n は
$a_n\in\left[(n-\frac{1}{2})\pi, (n+\frac{1}{2})\pi\right]$ が成立する
よって $\forall n$, $(n-\frac{1}{2})\pi\leq a_n\leq(n+\frac{1}{2})\pi$。これを $1\leq k\leq n$ で足しあわせると、

$$\sum_{k=1}^{n}(k-\tfrac{1}{2})\pi\leq S_n\leq\sum_{k=1}^{n}(k+\tfrac{1}{2})\pi$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k+\tfrac{1}{2})\pi=\left(\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}\tfrac{1}{2}\right)\pi=\left(\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n}{2}\right)\pi=\frac{n(n+2)}{2}\pi$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k-\tfrac{1}{2})\pi=\left(\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}\tfrac{1}{2}\right)\pi=\left(\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n}{2}\right)\pi=\frac{n^2}{2}\pi$$ よって

$$\frac{n^2}{2}\pi\leq S_n\leq\frac{n(n+2)}{2}\pi$$

$$\iff \frac{\pi}{2}\leq\frac{S_n}{n^2}\leq\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{2}{n}\right)$$

これが任意の n で成立する。
$n\to\infty$ のとき、$\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{2}{n}\right)\to\frac{\pi}{2}$

より、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{\pi}{2}$$

//

4 $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4}+y^2\le 1,\ |z|\le 6\}$, ℓ: $(2,0,2)$, $(-2,0,-2)$ を通る直線.

(1) $|t|\le 2\sqrt2$, $P_t\left(\frac{t}{\sqrt2},0,\frac{t}{\sqrt2}\right)$, H_t: P_t を通り, ℓ と垂直な平面, L_θ: $(2\cos\theta,\sin\theta,0)$ を通り, z 軸に平行な直線 $(\theta\in\mathbb{R})$.

L_θ と H_t の交点の座標を t,θ であらわせ.

(2) ℓ を回転じくにもち, V にふくまれる回転体のうち, 体積が最大となるものの体積.

(1) H_t の法線ベクトルは $(1,0,1)$ で, $P_t\left(\frac{t}{\sqrt2},0,\frac{t}{\sqrt2}\right)$ を通るため, 平面 H_t の方程式は $0=\left(x-\frac{t}{\sqrt2}\right)+0(y-0)+\left(z-\frac{t}{\sqrt2}\right)$

$\iff x+z=\sqrt2\,t$ とあらわすことができる

このとき, この平面と L_θ: $x=2\cos\theta$, $y=\sin\theta$ の交点は代入することで, $(x,y,z)=(2\cos\theta,\sin\theta,\sqrt2 t-2\cos\theta)$ と求められる

$\therefore (2\cos\theta,\ \sin\theta,\ \sqrt2 t-2\cos\theta)$

(2) (1)でもとめた座標のうち, θ を動かしたときの P_t とのきょりの変動を考える. (1)でもとめたものを $Q_{t\theta}$ とおくと,

$$\overrightarrow{P_tQ_{t\theta}}=\left(2\cos\theta-\frac{t}{\sqrt2},\ \sin\theta,\ \frac{t}{\sqrt2}-2\cos\theta\right)$$

となる. このとき,

$$|\overrightarrow{P_tQ_{t\theta}}|^2=\left(2\cos\theta-\frac{t}{\sqrt2}\right)^2\cdot 2+\sin^2\theta$$
$$=2\left\{4\cos^2\theta+\frac{t^2}{2}-2\sqrt2\,t\cos\theta\right\}+\sin^2\theta$$
$$=8\cos^2\theta+t^2-4\sqrt2\,t\cos\theta+1-\cos^2\theta$$
$$=7\cos^2\theta-4\sqrt2\,t\cos\theta+1+t^2$$
$$=7\left(\cos^2\theta-2\cdot\frac{2\sqrt2}{7}t\cos\theta+\frac{1+t^2}{7}+\frac{8}{49}t^2-\frac{8}{49}t^2\right)$$
$$=7\left\{\left(\cos\theta-\frac{2\sqrt2}{7}t\right)^2+\frac{7-t^2}{49}\right\}$$
$$=7\left(\cos\theta-\frac{2\sqrt2}{7}t\right)^2+\frac{7-t^2}{7}$$ となる.

よって $|t|\le\frac{7\sqrt2}{4}$ のとき,

$\min_{\theta\in\mathbb{R}}|\overrightarrow{P_tQ_{t\theta}}|^2=\frac{7-t^2}{7}$ より $\min_{\theta\in\mathbb{R}}|\overrightarrow{P_tQ_{t\theta}}|=\sqrt{1-\frac{t^2}{7}}$

また, $\frac{7\sqrt2}{4}<t\le 2\sqrt2$ のときは $\theta=0$ のときに ($\cos\theta=1$) 最小値 $(t-2\sqrt2)^2$,

$-\frac{7\sqrt2}{4}>t\ge-2\sqrt2$ のときは $\theta=\pi$ のときに ($\cos\theta=-1$) 最小値 $(t+2\sqrt2)^2$ をとる.

また, ℓ を回転軸にもつ回転体が V に含まれるためには, 各 H_t の断面について, P_t を中心とする円が断面に含まれていなくてはいけない. その条件での半径の最大値を $r(t)$ とおくと,

$$V=\int_{-2\sqrt2}^{2\sqrt2}\pi\{r(t)\}^2\cdot\left|\frac{dP_t}{dt}\right|\cdot dt$$ で

$$=\pi\int_{-2\sqrt2}^{2\sqrt2}\{r(t)\}^2\,dt$$ となり さきほどの結果で,

$$r(t)=\begin{cases}2\sqrt2-t & \frac{7}{4}\sqrt2<t\le 2\sqrt2\\ \sqrt{1-\frac{t^2}{7}} & |t|\le\frac{7}{4}\sqrt2\\ 2\sqrt2+t & -2\sqrt2\le t<-\frac{7}{4}\sqrt2\end{cases}$$ であるので,

$$V=\pi\left\{\int_{-2\sqrt2}^{-\frac{7}{4}\sqrt2}(t+2\sqrt2)^2dt+\int_{-\frac{7}{4}\sqrt2}^{\frac{7}{4}\sqrt2}\left(1-\frac{t^2}{7}\right)dt+\int_{\frac{7}{4}\sqrt2}^{2\sqrt2}(t-2\sqrt2)^2dt\right\}$$

$$=\pi\left\{\left[\frac13(t+2\sqrt2)^3\right]_{-2\sqrt2}^{-\frac{7}{4}\sqrt2}+\left[\frac13(t-2\sqrt2)^3\right]_{\frac74\sqrt2}^{2\sqrt2}+\left[t-\frac{t^3}{21}\right]_{-\frac74\sqrt2}^{\frac74\sqrt2}\right\}$$

$$=\pi\left\{\frac13\cdot\left(\frac{\sqrt2}{4}\right)^3-0+\frac13\cdot0-\frac13\left(-\frac{\sqrt2}{4}\right)^3+2\cdot\left(\frac74\sqrt2-\frac{1}{21}\left(\frac74\sqrt2\right)^3\right)\right\}$$

$$=\pi\left\{\frac23\cdot\frac{2\sqrt2}{64}+2\cdot\frac74\sqrt2\left\{1-\frac{1}{21}\cdot\frac{2\cdot49}{16}\right\}\right\}$$

$$=\pi\left\{\frac{\sqrt2}{48}+\frac72\sqrt2\left\{\frac{17}{24}\right\}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt2\pi}{48}\{1+7\times17\}$$

$$=\frac{\sqrt2\pi}{48}\cdot(1+119)$$

$$=\frac{120}{48}\cdot\sqrt2\cdot\pi$$

$$=\underline{\frac52\sqrt2\pi}$$ //

Q: $[0,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$, X: A(0,0,0) $x: p, y: q, z: r$ B(1,1,0), C(1,0,1), D(0,1,1)

(1) a_{n+2} ($a_n \sim d_n$, $p \sim r$), (2) $a_n - b_n + c_n - d_n$ (p, q, r, n) (3) a_n (p, q, r, n)

(1) $X_n(x_n, y_n, z_n)$ とすると, ($X_0 = (0,0,0)$)

$(x_n + y_n + z_n) \equiv n \pmod 2$ より. n: odd ならば,

$a_n = b_n = c_n = d_n = 0$ となる. 以下 n: even として考える. n+2秒の時点で A にいるとき,

n秒のとき A → xx, yy, zz

n秒のとき B → xy, yx

n秒のとき C → xz, zx

n秒のとき D → yz, zy より.

a_{n+2} を $p \sim q$, $a_n - d_n$ で表すと.

$$a_{n+2} = (p^2+q^2+r^2)a_n + 2pq\,b_n + 2rp\,c_n + 2qr\,d_n$$

(n: 偶) (※ n: 奇なら $a_{n+2} = 0$)

となる

(2) (1) と同様にして, $b_{n+2}, c_{n+2}, d_{n+2}$ を求めると,

$$a_{n+2} = (p^2+q^2+r^2)a_n + 2pq\,b_n + 2rp\,c_n + 2qr\,d_n$$
$$b_{n+2} = 2pq\,a_n + (p^2+q^2+r^2)b_n + 2qr\,c_n + 2rp\,d_n$$
$$c_{n+2} = 2rp\,a_n + 2qr\,b_n + (p^2+q^2+r^2)c_n + 2pq\,d_n$$
$$d_{n+2} = 2qr\,a_n + 2rp\,b_n + 2pq\,c_n + (p^2+q^2+r^2)d_n$$

よって. $a_{n+2} - b_{n+2} + c_{n+2} - d_{n+2}$ を求めると.

$$(a_{n+2} - b_{n+2} + c_{n+2} - d_{n+2})$$
$$= (p^2+q^2+r^2 - 2pq + 2rp - 2qr)(a_n - b_n + c_n - d_n)$$
$$= (p-q+r)^2(a_n - b_n + c_n - d_n)$$ となる.

$a_0 - b_0 + c_0 - d_0 = 1$, $a_1 - b_1 + c_1 - d_1 = 0$ より.

$$(a_n - b_n + c_n - d_n) = \begin{cases} (p-q+r)^n & n: \text{even} \\ 0 & n: \text{odd} \end{cases}$$

となる.

(3) (2) と同様の手順で.

① $a_n + b_n - c_n - d_n$

② $a_n - b_n - c_n + d_n$ を求める.

①. $(a_{n+2} + b_{n+2} - c_{n+2} - d_{n+2})$

$$= (p+q-r)^2(a_n + b_n - c_n - d_n)$$

$a_0 + b_0 - c_0 - d_0 = 1$, $a_1 + b_1 - c_1 - d_1 = 0$ より.

$$a_n + b_n - c_n - d_n = \begin{cases} (p+q-r)^n & n: \text{even} \\ 0 & n: \text{odd} \end{cases}$$

である.

② $(a_{n+2} - b_{n+2} - c_{n+2} + d_{n+2})$

$$= (-p+q+r)^2(a_n - b_n - c_n + d_n)$$

$a_0 - b_0 - c_0 + d_0 = 1$, $a_1 - b_1 - c_1 + d_1 = 0$ より.

$$a_n - b_n - c_n + d_n = \begin{cases} (-p+q+r)^n & n: \text{even} \\ 0 & n: \text{odd} \end{cases}$$

である

よって a_n を求める

n: 偶数ならば. $a_n + b_n + c_n + d_n = 1$ より

$$\begin{array}{rl} & 3a_n - b_n - c_n - d_n = (-p+q+r)^n + (p-q+r)^n + (p+q-r)^n \\ +) & a_n + b_n + c_n + d_n = 1 \\ \hline & 4a_n = 1 + \quad = \end{array}$$

より. $p+q+r = 1$ に注意すると.

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{4}\{1 + (1-2p)^n + (1-2q)^n + (1-2r)^n\} & (n: \text{even}) \\ 0 & (n: \text{odd}) \end{cases}$$

である