[1] $f(x) = \frac{x}{\sin x} + \cos x$ $(0<x<\pi)$ の増減表をつくり，$x \to +0$，$x \to \pi - 0$ のときの極限をしらべよ．

$$f'(x) = x \cdot \frac{-\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} - \sin x$$
$$= \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \frac{x \cos x}{\sin^2 x}$$
$$= \cos x \cdot \frac{\sin 2x - 2x}{2\sin^2 x}$$

$g(x) = x - \sin x$ とおくと，$(0<x<\frac{\pi}{2})$

$g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ より，

$g(x) > g(0) = 0$

よって $\sin 2x - 2x = -g(2x) < 0$
$(0<2x<\pi)$

よって $0<x<\pi$ で $f'(x)=0$ となるxは，

$x = \frac{\pi}{2}$ のみである

よって $0<x<\pi$ について $\frac{\sin 2x - 2x}{2\sin^2 x} < 0$

より，$0<x<\frac{\pi}{2}$: $f'(x)<0$

$\frac{\pi}{2}<x<\pi$: $f'(x)>0$ よって

増減表をかくと，下のようになる

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	

ここで，$0<x<\frac{\pi}{2}$ について，導関数の増減をしらべることで，

$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ が成立するので，$0<x<\frac{\pi}{2}$ について，不等式

$$\frac{-\frac{4}{3}x^3}{2\sin^2 x} < \frac{\sin 2x - 2x}{2\sin^2 x} < \frac{1}{2\sin^2 x}\left\{-\frac{4}{3}x^3 + \frac{4x^5}{15}\right\}$$

$x \to +0$ のとき，左辺，右辺ともに0に収束するので，$\lim_{x\to+0} f'(x) = \underset{\cos x}{\underset{\uparrow}{1}} \cdot \underset{\frac{\sin 2x - 2x}{2\sin^2 x}}{\underset{\uparrow}{0}} = 0$

また，$x \to \pi - 0$ のとき，

$\sin^2 x \to 0$，$\sin 2x - 2x \to -\infty$

となる よって $\forall M<0$，$\exists \delta>0$，

$\pi - \delta < x < \pi \Rightarrow \frac{\sin 2x - 2x}{2\sin^2 x} < M$

よってこのとき，$\delta < \frac{\pi}{3}$ となるようにMをとれば $\pi - \delta < x < \pi$ のとき，

$f'(x) > \frac{1}{2}(-M)$ となる

よって $\lim_{x\to\pi-0} f'(x) = +\infty$．

また，明らかに

$\lim_{x\to+0} f(x) = 1+1 = 2$，

$\lim_{x\to\pi-0} f(x) = \infty$ $\left(\because \underset{x\to\pi}{\sin x \to 0}\right)$

となる．よって f の増減表をかくと，

x	$+0$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\pi-0$
f'	0	$-$	0	$+$	∞
f	2	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	∞

となる．

2 $a_n = \dfrac{{}_{2n+1}C_n}{n!}$ $(n \geq 1, n \in \mathbb{N})$ とする. (1) $n \geq 2$ のとき, $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{q_n}{p_n}$ となる

$\{p_n, q_n\} \subset \mathbb{N}$, $\gcd(p_n, q_n) = 1$, $p_n \geq 1$ となる. (p_n, q_n) を求めよ.

(2) $a_n \in \mathbb{Z}$ となる n を求めよ.

(1)

$$a_n = \frac{{}_{2n+1}C_n}{n!} = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!\,n!} \cdot \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n+1)!(n!)^2}$$ このとき,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!(n!)^2} \cdot \frac{n!((n-1)!)^2}{(2n-1)!}$$

$$= \frac{(2n+1)\cdot 2n}{(n+1)\cdot n^2} = \frac{2n+1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

ここで $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$ である

ここで, $p_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $q_n = 2n+1$ となることを示す.

そのためには. $\gcd\left(\dfrac{n(n+1)}{2}, 2n+1\right)$ を1を示せば十分である. 仮に $\gcd\left(\dfrac{n(n+1)}{2}, 2n+1\right) = g > 1$ とすると, g は n の約数か $n+1$ の約数である. g が n の約数とすると

$2n+1 \equiv 1 \pmod g$ より $2n+1 \not\equiv 0 \pmod g$

g が $n+1$ の約数とすると,

$2n+1 = -1 \pmod g$ より, $2n+1 \not\equiv 0 \pmod g$

よって矛盾. よって $\frac{n(n+1)}{2}$ と $2n+1$ は互いに素なので,

$p_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $q_n = 2n+1$ が成立する.

(2) $$a_n = \frac{q_n}{p_n} a_{n-1} = \frac{q_n}{p_n} \cdot \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} \cdot a_{n-2}$$

$$= \cdots = \frac{q_n}{p_n} \cdot \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} \cdots \frac{q_2}{p_2} \cdot \underset{a_1 = 3}{3}$$ となる

このとき, $2(p_n - q_n) = n(n+1) - 2(2n+1)$

$= n^2 - 3n - 2$

$= \left(n - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$ であり

$n \geq 4$ のとき. $p_n - q_n > 0$. $q_n, p_n > 0$ より

$n \geq 4$ では $\dfrac{q_n}{p_n} < 1$ となる.

ここで. $a_2 = \dfrac{q_2}{p_2} \cdot 3 = \dfrac{5}{3} \cdot 3 = 5$

$a_3 = \dfrac{q_3}{p_3} a_2 = \dfrac{7}{6} \cdot 5 = \dfrac{35}{6}$

$a_4 = \dfrac{q_4}{p_4} \cdot a_3 = \dfrac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{10}_{2}} \cdot \dfrac{\cancel{35}^{7}}{\cancel{6}_{2}} = \dfrac{21}{4}$

$a_5 = \dfrac{q_5}{p_5} \cdot a_4 = \dfrac{11}{15} \cdot \dfrac{21}{4} = \dfrac{231}{60}$

$a_6 = \dfrac{q_6}{p_6} \cdot a_5 = \dfrac{13}{\cancel{21}} \cdot \dfrac{\cancel{231}^{11}}{60} = \dfrac{143}{60}$

$a_7 = \dfrac{q_7}{p_7} \cdot a_6 = \dfrac{\cancel{15}^{1}}{28} \cdot \dfrac{143}{\cancel{60}_{4}} = \dfrac{143}{112}$

$a_8 = \dfrac{q_8}{p_8} \cdot a_7 = \dfrac{17}{36} \cdot \dfrac{143}{112} = \dfrac{2431}{4032}$

$n \geq 8$ においては,

$0 < a_8 < 1$ か $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ より.

$0 < a_n < 1$ となり. $a_n \notin \mathbb{Z}$ となる. よって $a_1 \sim a_8$ の結果より

$a_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 1, 2$ //

3

$C : \{(x, x^2) \mid x \in [-1,1]\}$, $O(0,0)$, $A(1,0)$, $k>0$, $P \in C$, $Q \in OA$,
$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{OQ}$, $S(k) = |\{R \mid P \in C, Q \in OA\}|$, このとき, $S(k)$, $\lim_{k \to +0} S(k)$, $\lim_{k \to \infty} S(k)$ を求めよ.

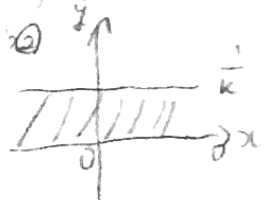
$s \in [0,1]$, $t \in [-1,1]$ とおくと,
$\overrightarrow{OP} = (t, t^2)$, $\overrightarrow{OQ} = (s, 0)$ となるので,
$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{k}(t, t^2) + k(s, 0) = \left(\frac{t}{k} + sk, \frac{t^2}{k}\right)$ と
なる. このとき $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ について,
$\frac{t}{k} + sk = x$, $\frac{t^2}{k} = y$ となる (s,t) が存在するじょうけんを考える.
(s,t) の組が存在するならば, $t^2 = ky$ より
$y \geq 0$ が必要 …① このとき, $t = \pm\sqrt{ky}$ となる
このとき, $t \in [-1,1]$ より $y \leq \frac{1}{k}$ が必要 …②
このとき, $x = sk \pm \sqrt{\frac{y}{k}}$ で,
$s = \frac{x}{k} \pm \frac{1}{k}\sqrt{\frac{y}{k}}$ となる s が存在するためには,

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{x}{k} + \frac{1}{k}\sqrt{\frac{y}{k}} \leq 1 & (t = -\sqrt{ky}) \text{ または,} \\ 0 \leq \frac{x}{k} - \frac{1}{k}\sqrt{\frac{y}{k}} \leq 1 & (t = \sqrt{ky}) \text{ となる} \end{cases}$$

よって (i) $0 \leq \frac{x}{k} + \frac{1}{k}\sqrt{\frac{y}{k}} \leq 1$
$\iff 0 \leq x + \sqrt{\frac{y}{k}} \leq k$
$\iff -\sqrt{\frac{y}{k}} \leq x \leq k - \sqrt{\frac{y}{k}}$ …③
(ii) $0 \leq x - \sqrt{\frac{y}{k}} \leq k$
$\iff \sqrt{\frac{y}{k}} \leq x \leq k + \sqrt{\frac{y}{k}}$ …④

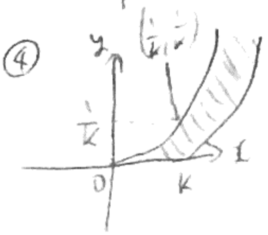
$R(x,y)$ が存在する点は ①かつ②かつ(③または④) が成立する. ここで (①かつ②) を図示すると
図のようになり (境界をふくむ)

①かつ②

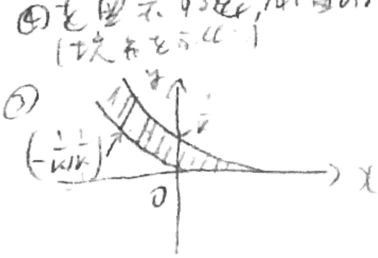


また, ③を図示すると 右図のようになる (境界を含む) 同様にして ④を図示すると 左下図のようになる (境界をふくむ)

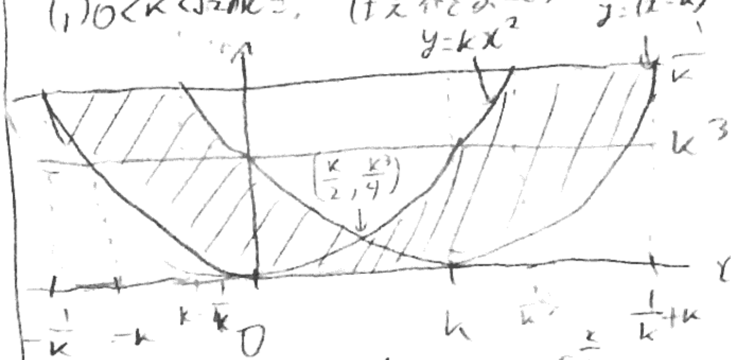
④



③

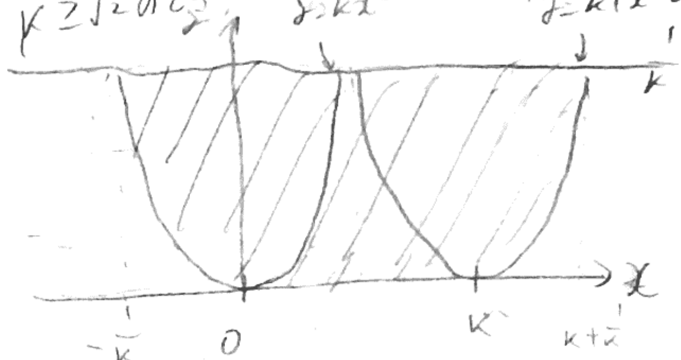


よって Rの領域を図示すると
(i) $0<k<\sqrt{2}$ のとき (境界をふくむ)



よって $S(k)_{0<k<\sqrt{2}} = k \times \frac{1}{k} \times 2 - 2\int_0^{\frac{k}{2}} kx^2\,dx$
$= 2 - 2\left[\frac{k}{3}x^3\right]_0^{\frac{k}{2}} = 2 - 2\cdot\frac{k}{3}\cdot\frac{k^3}{8}$
$\left(0<k<\sqrt{2} \Rightarrow \frac{k^3}{4} < \frac{1}{k}\right)$ $= 2 - \frac{k^4}{12}$

$k \geq \sqrt{2}$ のとき



斜線部分のようになり, このとき,
$S(k) = k \cdot \frac{1}{k} + 2\left\{\frac{1}{k^2} - \int_0^{\frac{1}{k}} kx^2\,dx\right\}$
$= 1 + 2\left\{\frac{1}{k^2} - \left[\frac{k}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{k}}\right\}$
$= 1 + 2\left\{\frac{1}{k^2} - \frac{k}{3}\cdot\frac{1}{k^3}\right\}$
$= 1 + \frac{4}{3k^2}$

よって $S(k) = \begin{cases} 2 - \frac{k^4}{12} & (0<k<\sqrt{2}) \\ 1 + \frac{4}{3k^2} & (\sqrt{2} \leq k) \end{cases}$

であり, $\lim_{k \to +0} S(k) = 2$,

$\lim_{k \to \infty} S(k) = 1$

である.

4 $f(x)=x^3-3a^2x$, $a>0$ とし、次の2条件をみたす (a,b) の動きうるはんいを ab 平面上に図示

条件1: $f(x)=b$ は実数解を3つもつ(重解なし)

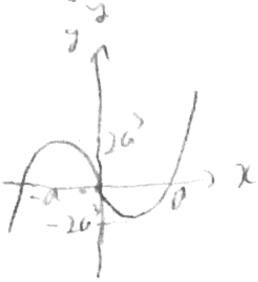
条件2: $f(x)=b$ の解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると、$\beta>1$ である。

$f'(x)=3x^2-3a^2$ より $f'(x)=0$
$=3(x-a)(x+a)$ $\Leftrightarrow x=\pm a$

よって $f(x)$ の増減表をかくと、

x		$-a$		0		a	
f'	$+$	0	$-$	$-3a^2$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$

のようになるので、$f(x)$ のグラフは



のようになる よって
条件1をみたすためには、
$-2a^3<b<2a^3$ が
必要十分条件である。

次に条件2について考える。

$f(x)=b$ の解が3つ存在する場合、

$f(-2a)=-2a^3$, $f(-a)=2a^3$, $f(a)=-2a^3$,
$f(2a)=2a^3$ より、中間値の定理から、

$\alpha\in(-2a,-a)$, $\beta\in(-a,a)$, $\gamma\in(a,2a)$

となる。ここで、区間 $(-a,a)$ については
$f'(x)<0$ より、$f(x)$ は単調減少。

ここで、$0<a\leq 1$ と $1<a$ で場合分けして考える

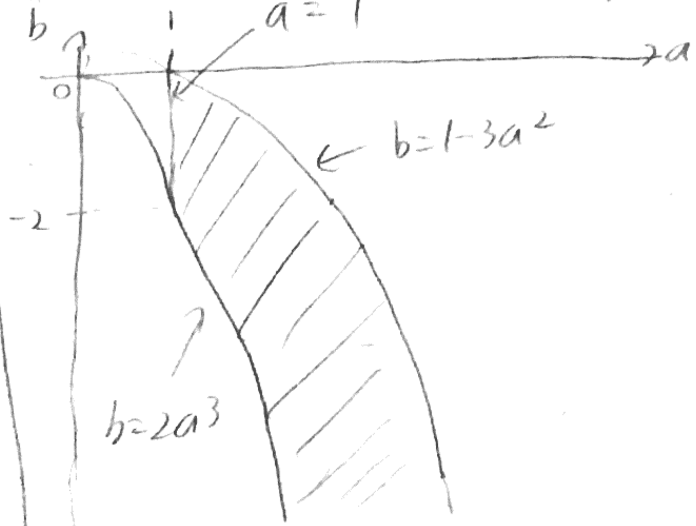
(i) $1<a$ のとき、$1\in(-a,a)$ であるため
$\beta>1 \Leftrightarrow f(\beta)<f(1)$
$\Leftrightarrow b<1-3a^2$

よって $1<a$ の場合は $b<1-3a^2$ となる。

(ii) $0<a\leq 1$ のとき、条件1のもとで
すでに $-a<\beta<a$ であるため、
このときは追加の仮定をすることなく、
$\beta<1$ が成立するので不適。

よってこれらの議論から、(a,b) の動きうるはんいは、
$(-2a^3<b<2a^3)$ かつ $(1<a$ かつ $b<1-3a^2)$
の条件を満たしていることが必要十分である

よって図示すると、

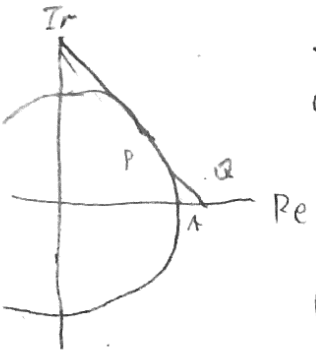


の斜線部分のようになる。
ただし境界は含まない。

5 $C=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$, $P(z)\in C$, $P(z)\neq A(1)$. Pにおける Cの接線に対して Aと対称な点：$Q(u)$.

$w=\dfrac{1}{1-u}$ (1) $u(z)$, $\dfrac{\overline{w}}{w}(z)$ を求めて $\dfrac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}$ を求めよ. (2) $C'=C\cap\{z \mid \mathrm{Re}\, z\leq\frac{1}{2}\}$, ~~C上を~~ C'をPが動くときのP(w)の軌跡.

A, P, Qの関係を図示すると図のようになる



ここで，Pを $a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ とおくと，Pにおける Cの接線の方程式（$z=x+yi$ とおく）は，$\underline{ax+by=1}$ というふうになる このとき，法線ベクトルは (a,b) となり，（$P(z)\in C$ より $a^2+b^2=1$）

$A(1,0)$ と $ax+by=1$ のきょりは $\dfrac{|a\cdot1+b\cdot0-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$=1-a$ となる よってQのざひょうは

$(1,0)+2(1-a)\cdot(a,b)$

$=(1+2a-2a^2,\ 0+2b-2ab)$

$=(1+2a-2a^2,\ 2b-2ab)$

∴ Qは $(1+2a-2a^2)+i(2b-2ab)$

$=1+2(a+bi)-2a(a+bi)$

$z=a+bi$, $a=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ より

$u=1+2z-(z+\overline{z})\cdot z$

$=1+2z-z^2-z\overline{z}$

$=\underline{2z-z^2}$ （∵ $z\overline{z}=|z|^2=1$）

よって $w=\dfrac{1}{1-(2z-z^2)}=\dfrac{1}{(z-1)^2}$

より $\overline{w}=\dfrac{1}{(\overline{z}-1)^2}$ となることから，

$\dfrac{\overline{w}}{w}=\dfrac{(z-1)^2}{(\overline{z}-1)^2}$ となる ここで zはC上の点

であることから，$|z|^2=z\cdot\overline{z}=1$, $z\neq0$ より，

$\overline{z}=\frac{1}{z}$ となる よって

$\dfrac{\overline{w}}{w}=\dfrac{(z-1)^2}{(\frac{1}{z}-1)^2}=\dfrac{(z-1)^2}{(z-1)^2}\cdot z^2=z^2$ （∵ $z\neq1$）

∴ $\begin{cases} u=-z^2+2z \\ \dfrac{\overline{w}}{w}=z^2 \end{cases}$

//

(2) C'上の点は実数 θ $\left(\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{5}{3}\pi\right)$ を用いて，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおける このとき，

$w=\dfrac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta-1)^2}$

$=\dfrac{(\cos\theta-1-i\sin\theta)^2}{(\cos\theta-1+i\sin\theta)^2(\cos\theta-1-i\sin\theta)^2}$

$=\dfrac{(\cos\theta-1)^2-\sin^2\theta-2i\sin\theta(\cos\theta-1)}{\{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta\}^2}$

$=\dfrac{(\cos\theta-1)^2+(\cos\theta-1)(\cos\theta+1)+i\sin\theta(2-2\cos\theta)}{(2-2\cos\theta)^2}$

$=\dfrac{(1-\cos\theta)\{1-\cos\theta-(1+\cos\theta)+2i\sin\theta\}}{2(1-\cos\theta)\cdot2(1-\cos\theta)}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-2\cos\theta+2i\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{-\cos\theta}{1-\cos\theta}+\dfrac{i\sin\theta}{1-\cos\theta}\right\}$

このとき，$\phi=2\pi-\theta$ とおくすると $\frac{\pi}{3}\leq\phi\leq\frac{5}{3}\pi$ となり

$=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{-\cos\theta}{1-\cos\theta}+\dfrac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}i\right\}$

よって $P(w)$ は (r,θ) とおくと，これは極方程式 $r=\dfrac{-1}{2(1-\cos\theta)}$ 上にある．よって

$\Leftrightarrow 2r(1-\cos\theta)=-1$

$\Leftrightarrow 2r=2r\cos\theta-1$

$\Leftrightarrow 4r^2=(2r\cos\theta-1)^2$

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ より

$\Leftrightarrow 4(x^2+y^2)=(2x-1)^2$

$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2-4x^2+4x-1=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}-y^2$. よって wのきせきは

焦点：原点

準線：$\mathrm{Re}\, z=1$ の放物線

//

[6] $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(1,1,1)$, $\frac{1}{2}<r<1$. P: ~~OA→AB→BC~~ $O\to A\to B\to C$

V_1: OAをPがうごくときの$B(P,r)$の通過領域 C r ×.

(1) $\{y=t\}\cap V_1\neq\emptyset$, $\{y=t\}\cap V_3\neq\emptyset$ となるtのはんい. このときの $\{y=t\}\cap V_1$, $\{y=t\}\cap V_3$を図示.

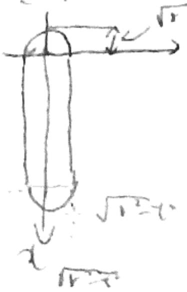
(2) $\{V_1\cap V_3\}\subset V_2$ となるrの条件. (3) $|V_1|=S$, $|V_1\cap V_2|=T$, $|V|(S,T)=?$

(4) rは(2)のじょうけんをみたす このとき, S,Tをもとめて$|V|$を決定せよ.

(1)

$s\in[0,1]$として, OA上の点は $(s,0,0)$となる このとき, この点を中心とし半径rの球は, $(s-x)^2+y^2+z^2\le r^2$ となる. $y=t$のとき, $(x-s)^2+z^2\le r^2-t^2$ $(t\le r)$ となるが,

このときのV_1の断面図を図示すると下のようになる.



よって$y=t$がV_1と共有点をもつ場合, $r\ge t\ge -r$ であればよい. 逆にこの条件をみたしてないとき, $V_1\cap\{y=t\}=\emptyset$となり不適 よってV_1については $-r\le t\le r$ である. V_3については $t\to 1-t$ と置換して同様の議論をすればよくて

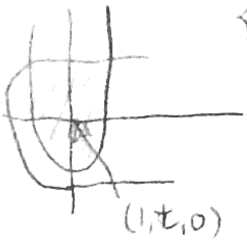
$r\ge 1-t\ge -r \iff 1+r\ge t\ge 1-r$

よって $\frac{1}{2}<r<1$ より $r>1-r$ となるので,

$V_1\cap\{y=t\}\neq\emptyset$ かつ $V_3\cap\{y=t\}\neq\emptyset$ となるtの条件は

$r\ge t\ge 1-r$ となる

(2) V_1とV_3の共通部分$(y=t)$を図示すると, 下図のようになる. このとき, この領域は



$\{(x,y,z)\mid |x|\le\sqrt{r^2-t^2}, |z-1|\le\sqrt{r^2-(1-t)^2}, y=t\}$

に含まれている. この領域を完全に含んでいる円の半径は

$\sqrt{r^2-t^2+r^2-(1-t)^2}$

$=\sqrt{2r^2-2t^2+2t-1}$ 以上であり逆にそれ未満の半径の円は

点 $(\sqrt{r^2-t^2}, t, -\sqrt{r^2-(1-t)^2}+1)$ を含んでいないため.

よって $\sqrt{2r^2-2t^2+2t-1}\le r$

$\iff 2r^2-2t^2+2t-1-r^2\le 0$

$\iff r^2-2t^2+2t-1\le 0$ がV_1とV_3と$y=t$が共有点をもつ, $1-r\le t\le r$ のはんいで常に成立することが必要十分条件である

ここで $r^2-2t^2+2t-1=r^2-2t^2+2t-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$

$=r^2-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

でありこれは $t=\frac{1}{2}$ $\left(1-r\le\frac{1}{2}\le r\right)$ で最小となる

よって $r^2-\frac{1}{2}\le 0 \iff \frac{1}{2}<r\le\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) このとき, $|V|=|V_1\cup V_2\cup V_3|$

$=|V_1|+|V_2|+|V_3|-|V_1\cap V_2|-|V_2\cap V_3|-|V_3\cap V_1|$

$+|V_1\cap V_2\cap V_3|$ となるが.

(2)のときには $(V_1\cap V_3)\subset V_2$ より.

$V_1\cap V_2\cap V_3=V_1\cap V_3$ である.

よって $|V|=|V_1|+|V_2|+|V_3|-|V_1\cap V_2|-|V_2\cap V_3|$

ここで $|V_1|=|V_2|=|V_3|=S$, $|V_1\cap V_2|=|V_2\cap V_3|=T$

より $|V|=3S-2T$

(4) $S=\pi r^2\cdot 1+\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{\pi r^2}{3}(3+4r)$

Tについては, $y=t$のとき, V_2の断面が

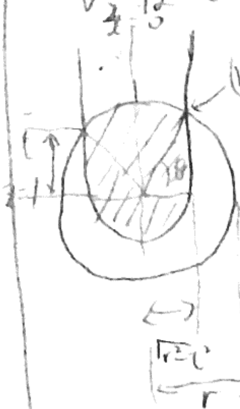
$x^2+(z-1)^2\le r^2-t^2$ $(0\le t\le r)$ となり

$(V_1\cap\{y=t\})\supset(V_2\cap\{y=t\})$ となるので.

$0>y$のときの部分の体積は $\frac{2}{3}\pi r^3$.

$0\le y$のときについては $y=t$のとき,

V_2は $z^2+(x-1)^2\le r^2$ より 図示すると下のようになる



よってこのときの断面積は,

$t=r\sin\theta$ $\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと.

 : $\frac{1}{2}r^2(2\pi-2\theta)=r^2(\pi-\theta)$

 : $t\sqrt{r^2-t^2}=\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta$

 : $\frac{1}{2}\pi(r\cos\theta)^2=\frac{1}{2}\pi r^2\cos^2\theta$

ここで $dt=r\cos\theta\,d\theta$ なので.

$T-\frac{2}{3}\pi r^3=\frac{1}{2}r^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{(2\pi-2\theta)+\sin 2\theta+\pi\cos^2\theta\}\cos\theta\,d\theta$

$=\frac{1}{2}r^3\cdot\frac{1}{3}(8+5\pi)$

$\therefore T=\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{4}{3}\right)r^3$ よって

$|V|=\cancel{3}\cdot\frac{\pi r^2}{\cancel{3}}(3+4r)+\left(3\pi+\frac{8}{3}\right)r^3$

$=3\pi r^2+7\pi r^3+\frac{8}{3}r^3$