חישוביות - תרגיל 1 - שאלה 3

יש להוכיח כי עבור שפה רגולרית A_1 ועבור שפה רגולרית A_2 נקבל ש$A_1 \bigcup A_2$גם שפה רגולרית.

הוכחה:

היות וA_1היא שפה רגולרית קיים אוטומט סופי M_1 שמכיר את A_1וכמו כן קיים אוטומט סופי M_2שמכיר את A_2על מנת להוכיח את הנדרש נראה כי קיים אוטומט סופי Mשמכיר את $A_1 \bigcup A_2$.

נגדיר :

- $M_1 = (Q_1, \sum, \delta_1, q_1, F_1)$
- $M_2 = (Q_2, \sum, \delta_2, q_2, F_2)$

יהי Mאוטומט סופי אשר מוגדר בצורה הבאה:

$M = (Q, \sum, \delta, q, F)$ נראה שMמכיר את $A_1 \bigcup A_2$

לפיכך נגדיר:

1. $Q = \{(r_1,r_2)|r_1 \in Q_1 \wedge r_2 \in Q_2\}$ שזהו סט קטרזי של כל המצבים מQ_1ומQ_2.
2. $\sum$יהיה מוגדר בצורה הבאה:
   (א) אם $\sum$ של M_1 זהה ל $\sum$ של M_2 אזי השפה של M תהיה מוגדרת באופן זהה $\sum$
   (ב) אם השפות של M_1וM_2שונות אזי נגדיר את השפה של Mכך $\sum = \sum_1 \bigcup \sum_2$
3. את פונקציית המעבר δנגדיר כך, שעבור כל $(r_1,r_2) \in Q$ ועבור כל $a \in \sum$מתקיים $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$ומכאן אנו נקבל ש$\delta$אכן מקבלת מצב מ$M$עבור כל קלט r_1,r_2ואות a.
4. נגדיר את q_0כזוג (q_1,q_2)
5. ו Fהוא קבוצה של זוגות בה כל פריט מקבל מצב של M_1 או של M_2ומוגדר כך $F = \{(r_1, r_2)|r_1 \in F_1 \quad or \quad r_2 \in F_2\}$

כעת, יש להראות כי לכל $w \in \sum^*$ מתקיים $w \in L(M)$ אמ"מ $w \in L(M_1) \bigcup L(M_2)$

<u>הוכחה:</u>

נביט על הריצה של M על w, נסמן $w = w_1...w_n$

ומצבי ריצה: $q_0 = r_0, ..., r_n$

לכל $0 \leqq i \leqq n$ r_i הוא מצב של M. נפרש את $r_0 \dots r_n$ בתור 2 סדרות:

- $r_0^1 \dots .r_n^1$
- $r_0^2 \dots .r_n^2$

כך שהראשונה המצב בתוך Q_1של כל הזוגות r_i והשנייה הוא המצב בתוך Q_2.

מכאן נקבל כי, $r_0^1 = q_0^1$ וגם $r_0^2 = q_0^2$ועל כן גן לפי הגדרת δלכל $0 \leqq i \leqq n$מתקיים:

- $\delta_1(r^1_{i-1}, w_i) = r^1_i, \quad \delta_2(r^2_{i-1}, w_i) = r^2_i$

לכן שני הסדרות הנ"ל הן ריצות של M_1על wושל M_2על w בהתאמה.

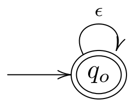
אם $w \in L(M)$אז הסדרה $\{r_i\}$מסתיימת במצב $r_n \in F$ משמע, מסתיימת בזוג q_1, q_2 כך ש $q_2 \in F_2 \quad or \quad q_1 \in F_1$.כלומר לפי הגדרת הסדרות $r^1_i \quad and \quad r^2_i$ לפחות אחת מהן מתאימה לריצה המקבלת . וניתן להסיק כי $w \in \quad or \quad w \in L(M_1)$ $L(M_2)$

מכאן אנו מקבלים כי קיים אוטומט סופי M אשר מכיר את $A_1 \bigcup A_2$

חישוביות - תרגיל 1 - שאלה 4

סעיף 1:

הראינו בשיעור ששפה היא רגולרית אם ורק קם קיים אוטומט סופי אשר מכיר אותו.
לכן בכדי להוכיח שהשפה $\emptyset$היא רגולרית יש לבנות אוטומט Mאשר מכירה.
נגדיר אוטומט עם מצב יחיד שאינו מקבל.
:



והיות והראינו קיימות של אוטומט אשר מכיר את השפה. סיימנו.

סעיף 2:

על מנת להראות שעבור כל מילה$^* \sum \in \gamma$ השפה γהיא רגולרית נבנה אוטומט שמקבל את המילה γ
ראשית, נגדיר כ $N = the \quad len \quad of \quad \gamma$ (נוכל לעשות זאת כי מהגדרתה של מילה היא סופית)
יהי אוטומט $M = (Q, \sum, \delta, q, F)$
כך ש

1. $Q = \{q_1 \dots q_{N+1}\}$ שזהו מספר המצבים של qשמוגדר לפי האורך של γ.
2. $\sum = \{a \in \sum :: a \in \gamma\}$

המעברים δנגדיר כך, שעבור כל זוג $\{a \in \sum\} : (Q, a)$ $\delta(q_i, a)_{1 \leqq i \leqq n} = \begin{cases} q_{i+1} & a_i = \gamma_i (\text{the letter in the i place of } \gamma) \\ sink & else \end{cases}$

4. נגדיר את q_0כמצב המקבל את האות הראשונה בγכמתואר בפונקציית המעברים
5. ו Fהוא מצב המקבל את האות האחרונה של γומעביר לכיור כל קלט נוסף.

במעבר על אוטומט M אשר הגדרנו נראה שעבור כל $\gamma \in \sum^*$ האוטומט מקבלה. אם ניתן בשלילה שלא כך, אזי קיים מצב q_k כאשר $0 \leqq k \leqq N+1$ אשר בו
$\delta(q_k, a) = sink$ אזי מהגדרה $\gamma_k \neq k$ בסתירה לכך שהקלט הוא המילה γ.

סעיף 3:

עלינו להוכיח כי כל שפה סופית $\sum$היא REG
נוכיח זאת באינדוקציה בהסתמכות על מה שהוכחנו עד כה.

טענת האינדוקציה:

כל שפה סופית $\sum$היא REG.
נוכיח על באינדוקציה על גודל העוצמה (הסופית) של $\sum^*$

בסיס : עבור שפה $\{\sum^* : |\sum^*| = 0\}$הוכחנו בסעיף 1 כי עבור השפה $\emptyset$היא רגולרית.(וגם עבור השפה בעלת עוצמה 1 הוכחנו בסעיף 2)

הנחה : נניח שהטענה מתקיימת עבור כל שפה $^* \sum$שעוצמתה kונוכיח עבור שפה שעוצמתה $k+1$.

הוכחה :

יהי שפה $^* \sum$שעוצמתה היא $k+1$אזי נוכל להציגה בצורה הבאה.
$$\sum^* = \{\sum^{*1} \bigcup \sum^{*k} :: \forall \lambda \in \sum^{*k} \lambda \notin \sum^{*1} \quad and \quad \sum^{*1} \subset \sum^*, \sum^{*k} \subset \sum^*\}$$
עבור $^{*1} \sum$הוכחנו שהיא רגולרית בסעיף 1 ועבור $\sum^{*k}$ אנו יודעים השפה רגולרית מהנחת האינדוקציה.

מכאן קיבלנו ש2 השפות הינם רגולריות, היות ומהגדרתם $\sum^{*k}\bigcup\sum^{*1}=\sum^{*}$ והוכחנו בשאלה 3 שמאיחוד שפות רגולריות מתקבלת שפה רגולרית גם כן.
סיימנו.

שאלה 5:

יהי DFA $A =< Q_A, \sum, \delta_A, q_0^A, F_A >$ כאשר $n \in$ $|Q_A| = n|$ אזי קיימים $\{q_0 ... q_n\}$ מצבים.
נוכיח באינדוקציה שקיימת מילה wשA מקבלה.

<u>בסיס:</u>

$\underline{n = 1}$ אזי קיים רק q_0 והיות $|F| > 0$ כי אם לא כן A אינו אוטומוט חוקי נסיק כי $q_0 \in F$ והיות וקיים רק מצב אחד הוא חייב להיות לעצמו.
ומכאן נסיק שקיימת אות בשפה $\sum$שq_0 מעביר לעצמו. וסיימנו.

<u>טענה:</u>

נטען כי עבור כל $|Q_A| = \mathrm{k}$ מתקיים שקיימת מילה wשA מקבלה. ונוכיח עבור $|Q_A| = \mathrm{k+1}$

<u>הוכחה:</u>