Valorisation et couverture d'options dans des modèles à volatilité locale

Shakil ROHIMUN

Année 2023/2024

Plan - Partie 1

Plan - Partie 2

Hypothèse de Black-Scholes

Le modèle suit les hypothèses suivantes :

- Marchés efficients :
  - Pas de coûts de transaction
  - Pas de restrictions sur le volume de transactions
  - Pas d'opportunité d'arbitrage
- Les rendements du sous-jacent sont gaussiens, stationnaires et indépendants.
- Le placement à la banque est sans risque et le taux d'intérêt r est constant.

Modèle de Black-Scholes

Le modèle est défini par l'équation stochastique suivante :

$$dS_t = S_t \left(r \, dt + \sigma \, dB_t \right),$$

où :

- S_t est le prix de l'actif sous-jacent à l'instant t,
- r est le taux d'intérêt sans risque constant,
- σ est la volatilité constante de l'actif sous-jacent,
- B_t est un mouvement brownien standard sous la mesure risque-neutre.

Résultat du modèle de Black-Scholes

Posons $X_t = \log(S_t)$. En utilisant la formule d'Itô, nous avons :

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}(\sigma S_t)^2\, dt \\ &= \frac{1}{S_t} S_t(r\, dt + \sigma\, dB_t) - \frac{1}{2}\sigma^2\, dt \\ &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma\, dB_t. \end{aligned}$$

On intègre et on passe à l'exponentielle, d'où le résultat :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t\right).$$

Valorisation des Options

Les résultats du prix du Call et du Put sont :

$$Call(t, S_t, T, K) = S_t \Phi_{N(0,1)}(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \Phi_{N(0,1)}(d_2),$$

$$Put(t, S_t, T, K) = Ke^{-r(T-t)} \Phi_{N(0,1)}(-d_2) - S_t \Phi_{N(0,1)}(-d_1),$$

où $\Phi_{N(0,1)}$ est la fonction de répartition de la loi normale standard, et

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Démonstration du Put

À partir de :

$$S_T = S_t \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}G\right),$$

où $G \sim \mathcal{N}(0,1)$ est une variable aléatoire normale standard indépendante de $\mathcal{F}_t$, le prix de l'option Put à l'instant t devient :

$$P_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[\max\left(K - S_t \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}G\right),\right.\right.$$

Démonstration du Put (suite)

Posons :

$$Y = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) + \sigma\sqrt{T - t}G.$$

Ainsi, $S_T = S_t e^Y$. Le prix de l'option Put devient :

$$P_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[\max\left(K - S_t e^Y, 0\right) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

En prenant le logarithme, on a $Y < \ln\left(\frac{K}{S_t}\right)$. Y suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t), \sigma^2(T - t)\right)$.

Démonstration du Put (suite)

Nous définissons :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

L'expression de l'espérance peut être réécrite comme une intégrale sur la fonction de répartition de la loi normale :

$$Put(t, S_t, T, K) = Ke^{-r(T-t)}\Phi_{N(0,1)}(-d_2) - S_t\Phi_{N(0,1)}(-d_1),$$

où $d_2 = d_1 + \sigma\sqrt{T-t}$.

Démonstration du Call

À partir de la parité call/put :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-rT},$$

on isole C_t et remplaçons P_t, puis on factorise par S_t et Ke^{-rT} :

$$\begin{aligned} C_t &= S_t - Ke^{-rT} + P_t, \\ &= S_t - Ke^{-rT} + Ke^{-rT}\Phi_{N(0,1)}(-d_2) - S_t\Phi_{N(0,1)}(-d_1), \\ &= S_t\left[1 - \Phi_{N(0,1)}(-d_1)\right] - Ke^{-rT}\left[1 - \Phi_{N(0,1)}(-d_2)\right]. \end{aligned}$$

En utilisant $1 - \Phi_{N(0,1)}(-x) = \Phi_{N(0,1)}(x)$, on obtient :

$$C_t = S_t\Phi_{N(0,1)}(d_1) - Ke^{-rT}\Phi_{N(0,1)}(d_2).$$

Calcul du Delta pour un call

Le delta d'une option Call est :

$$\Delta_{\text{Call}} = \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi_{N(0,1)}(d_1).$$

Cela signifie que le delta d'une option Call est égal à la probabilité, sous la mesure neutre au risque, que l'option soit dans la monnaie à l'échéance.

Calcul du Delta pour un Put

Le delta d'une option Put est :

$$\Delta_{\text{Put}} = \frac{\partial P}{\partial S} = \Phi_{N(0,1)}(d_1) - 1.$$

Cela reflète la relation entre les deltas du Call et du Put :

$$\Delta_{\text{Put}} = \Delta_{\text{Call}} - 1$$

Gamma

Le *Gamma* (Γ) mesure la sensibilité du Delta par rapport au prix de l'actif sous-jacent :

$$\Gamma = \frac{\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}},$$

où $\phi(\cdot)$ est la densité de probabilité de la loi normale standard.

Vega

Le *Vega* (ν) mesure la sensibilité du prix de l'option à la volatilité de l'actif sous-jacent :

$$\nu = S\sqrt{T - t}\phi(d_1).$$

Le Vega est élevé lorsque l'option est proche de la monnaie et diminue à mesure que l'option devient profondément dans ou hors de la monnaie.

Theta

Le *Theta* (Θ) mesure la sensibilité du prix de l'option à l'écoulement du temps :

$$\Theta_{\text{Call}} = -\frac{S\sigma\phi(d_1)}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}\Phi_{N(0,1)}(d_2),$$

$$\Theta_{\text{Put}} = -\frac{S\sigma\phi(d_1)}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}\Phi_{N(0,1)}(-d_2).$$

Rho

Le *Rho* (ρ) mesure la sensibilité du prix de l'option aux variations du taux d'intérêt sans risque :

$$\rho_{\text{Call}} = K(T - t)e^{-r(T-t)}\Phi_{N(0,1)}(d_2),$$

$$\rho_{\text{Put}} = -K(T - t)e^{-r(T-t)}\Phi_{N(0,1)}(-d_2).$$

Formulation du modèle

Sous le modèle à volatilité locale, le prix d'un actif financier S_t suit la dynamique stochastique suivante :

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2(u, S_u)\right) du + \int_0^t \sigma(u, S_u) dB_u\right),$$

où $\sigma(t, S_t)$ est la volatilité locale, une fonction déterministe de t et S_t.

Formulation du Modèle

Dans le contexte de la valorisation d'options sous un modèle de volatilité locale, l'EDP est donnée par :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)x^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + rx\frac{\partial v}{\partial x} - rv = 0,$$

avec une condition terminale spécifiée par le payoff de l'option à maturité T.

Discrétisation de l'EDP

Pour appliquer le schéma implicite, nous discrétisons l'espace des prix et le temps en intervalles de longueurs Δx et Δt, respectivement :

$$\frac{\partial v}{\partial t} \approx \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta t},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} \approx \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta x},$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \approx \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{(\Delta x)^2}.$$

Résolution avec l'Algorithme de Thomas

L'algorithme de Thomas est utilisé pour résoudre efficacement le système linéaire tridiagonal issu de la discrétisation implicite. Cela inclut :

1. Phase de décomposition : Modification des coefficients pour une résolution simplifiée.
2. Substitution avant : Calcul des nouvelles valeurs des termes constants.
3. Substitution arrière : Résolution des valeurs inconnues en remontant du dernier élément au premier.

Delta couverture

Pour dériver une stratégie de couverture, on calcule le Delta de l'option en utilisant la formule :

$$\Delta_{i,j} = \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta x}.$$

Cette valeur de Delta est utilisée pour ajuster dynamiquement le portefeuille de couverture afin de minimiser le risque.

Delta Couverture pour le Call

Le Delta pour une option Call est approximé numériquement par :

$$\Delta_{\text{Call}} \approx \frac{C(t, S + \Delta S) - C(t, S - \Delta S)}{2\Delta S},$$

où $C(t, S + \Delta S)$ et $C(t, S - \Delta S)$ sont les valeurs de l'option call pour des prix du sous-jacent ajustés de ΔS.

Delta Couverture pour le Put

Le Delta pour une option Put est approximé numériquement par :

$$\Delta_{\text{Put}} \approx \frac{P(t, S + \Delta S) - P(t, S - \Delta S)}{2\Delta S},$$

où $P(t, S + \Delta S)$ et $P(t, S - \Delta S)$ sont les valeurs de l'option put pour des prix du sous-jacent ajustés de ΔS. Cette valeur de Delta

est utilisée pour ajuster dynamiquement le portefeuille de couverture afin de minimiser le risque de variation du sous-jacent.

Introduction aux DLL

Une DLL (Dynamic Link Library) est un fichier contenant du code, des données ou des ressources pouvant être utilisés par plusieurs programmes simultanément, permettant ainsi de partager des fonctionnalités communes et de réduire la duplication de code, ce qui optimise la mémoire et améliore l'efficacité des applications.

Du côté C++

```cpp
// d1 et d2
extern "C" __declspec(dllexport) double get_d1(double spot, double strike, double rate, double volatility, double timeToMaturity);
extern "C" __declspec(dllexport) double get_d2(double spot, double strike, double rate, double volatility, double timeToMaturity);
```

Figure – Définition dans le .hpp

```cpp
// d1 et d2
extern "C" __declspec(dllexport) double get_d1(double spot, double strike, double rate, double volatility, double timeToMaturity) {
    try {
        Option option(spot, strike, rate, volatility, timeToMaturity);
        return option.get_d1();
    }
    catch (const std::exception& e) {
        return 0;
    }
}

extern "C" __declspec(dllexport) double get_d2(double spot, double strike, double rate, double volatility, double timeToMaturity) {
    try {
        Option option(spot, strike, rate, volatility, timeToMaturity);
        return option.get_d2();
    }
    catch (const std::exception& e) {
        return 0;
    }
}
```

Figure – Définition dans le .cpp

Du côté VBA

```
' d1 et d2
Public Declare PtrSafe Function get_d1 Lib "C:\Users\shaki\OneDrive\Bureau\Stage M1\Projet_vollocale\x64\Debug\Projet_vollocale.dll" ( _
    ByVal spot As Double, _
    ByVal strike As Double, _
    ByVal rate As Double, _
    ByVal volatility As Double, _
    ByVal timeToMaturity As Double) As Double
```

Figure – Définition dans le VBA

```
' d1
Function OptionD1(spot As Double, strike As Double, rate As Double, volatility As Double, timeToMaturity As Double) As Double
    OptionD1 = get_d1(spot, strike, rate, volatility, timeToMaturity)
End Function
```

Figure – Apelle dans le VBA

Interface Excel

DONNÉES D'ENTRÉE	
PRIX SPOT	90
PRIX D'EXERCICE	100
TAUX D'INTÉRÊT	0,1
VOLATILITÉ	0,5
TEMPS À MATURITÉ	5

SORTIE		
	CALL	PUT
D1	0,91199328	
D2	-0,206040709	
PRIX DE L'OPTION	48,3442457	18,99731167
DELTA	0,819113872	-0,180886128
GAMMA	0,002615799	
VEGA	52,96992089	
THÉTA	-5,186096327	0,87921027
RHO	126,8800141	-176,3853158

DONNÉES DANS VOLATILITÉ LOCAL	
SIGMA 0	0,2
ALPHA	0,04
BETA	0
Pas deTemps	100
Pas d'Espace	100
Pas de Prix	0,01

SORTIE		
	CALL	PUT
VOLATILITÉ LOCAL	1,4147E-07	-2,8387E-06
HEDGE	-3,87229E-08	8,92063E-07

Figure – Interface Excel

Prix du Call/Put

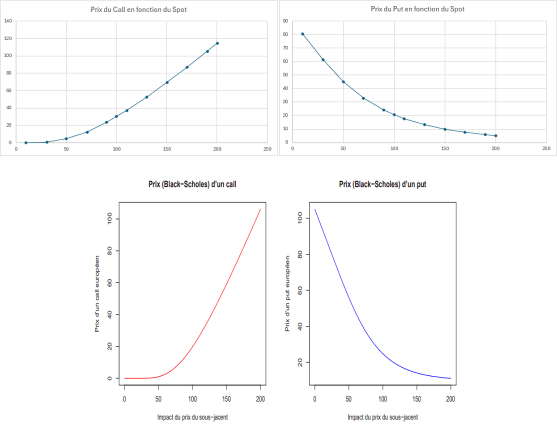


Figure – Comparaison du Call/Put en fonction du Spot

Prix du Call/Put

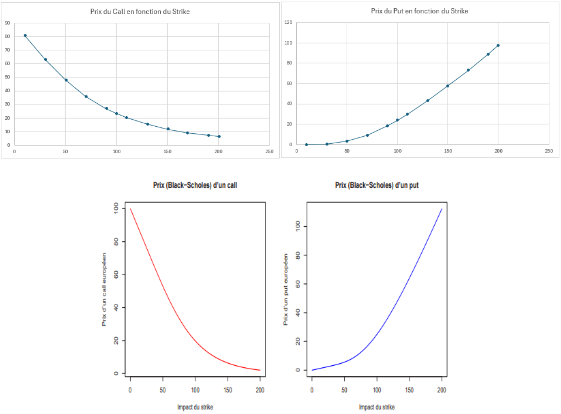
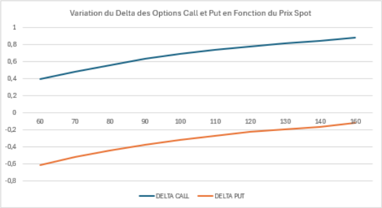


Figure – Comparaison du Call/Put en fonction du Strike

Delta



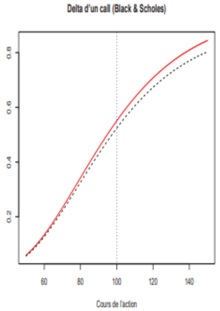
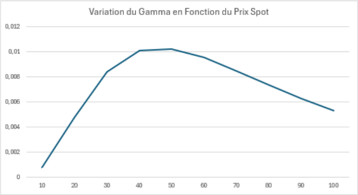


Figure – Comparaison du Delta en fonction du Spot

Gamma



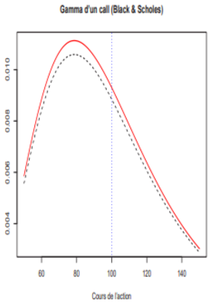
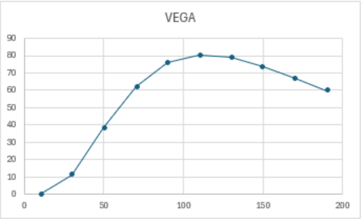


Figure – Comparaison du Gamma en fonction du Spot

Véga



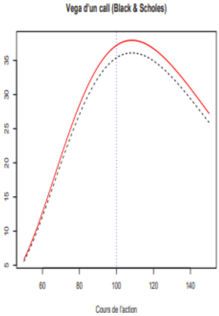
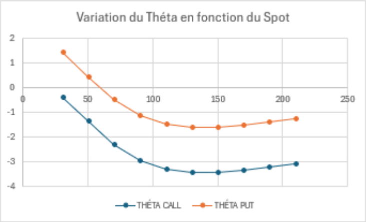


Figure – Comparaison du Véga en fonction du Spot

Théta



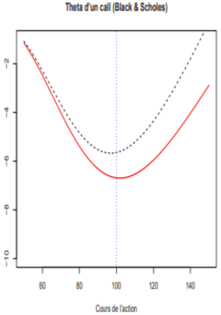
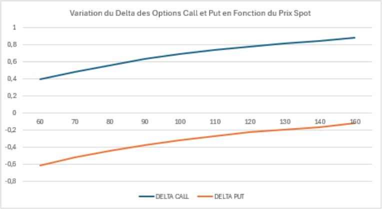


Figure – Comparaison du Théta en fonction du Spot

Rho



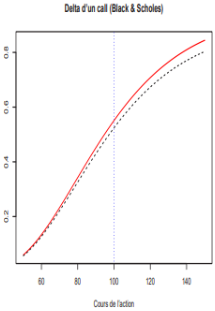
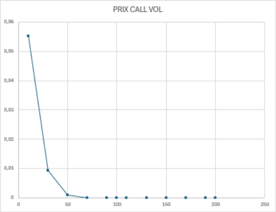


Figure – Comparaison du Rho en fonction du Spot

Prix du Call/Put avec le modèle de Volatilité Local



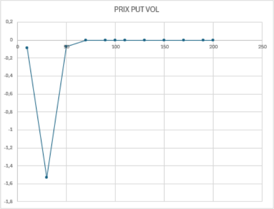


Figure – Comparaison du Call/Put en volatilité local en fonction du Spot