Valorisation et couverture d'options dans des modèles à volatilité locale

Shakil ROHIMUN

M1 MINT

ENCADRANTS :
Etienne CHEVALIER, Vincent TORRI

Année 2023/2024

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de mon stage et qui m'ont aidé lors de la rédaction de ce mémoire.

Je voudrais dans un premier temps remercier, mes directeurs de stage, Etienne Chevalier et Vincent Torri. Je les remercie sincèrement pour leur encadrement, leurs précieux conseils, et leur disponibilité tout au long de mon stage. Leur expertise et leur soutien constant ont grandement contribué à la réussite de ce travail.

Je souhaite également remercier toute l'équipe pédagogique du Master de Mathématiques et Interactions de l'Université Paris-Saclay. Grâce à leurs enseignements de qualité, j'ai pu acquérir les connaissances et compétences nécessaires pour mener à bien ce projet. Leur dévouement et leur passion pour l'enseignement ont été une source d'inspiration tout au long de mon parcours universitaire.

Enfin, je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma famille pour leur soutien inébranlable. Merci à mes parents, pour leur confiance, leurs encouragements constants et leur amour. Leur présence m'a permis de traverser chaque étape de cette aventure avec sérénité et détermination.

Table des Matières

Introduction

Dans le monde financier, gérer les risques et évaluer correctement les options est essentiel pour les institutions et les investisseurs. Les options, en tant que produits dérivés, offrent de belles opportunités de gains, mais elles comportent aussi des risques, ce qui rend leur valorisation complexe. Traditionnellement, le modèle de Black-Scholes a été une première solution en supposant une volatilité constante, mais cette simplification ne correspond pas toujours à la réalité, où la volatilité varie selon le marché et les prix.

Pour répondre à cette limite, les modèles à volatilité locale ont été développés. Ils capturent mieux les variations de volatilité, offrant ainsi une approche plus précise et adaptée pour valoriser et couvrir les options. Ces modèles permettent aux institutions financières de mieux ajuster les prix des options et de mettre en place des stratégies de gestion des risques plus solides.

Ce mémoire explore les techniques de valorisation et de couverture des options en s'appuyant sur deux approches : le modèle de Black-Scholes et le modèle à volatilité locale. Nous commencerons par les concepts de base, en introduisant le modèle de Black-Scholes, puis nous plongerons dans les modèles à volatilité locale pour mieux comprendre leur pertinence dans le contexte actuel des marchés financiers.

Chapitre 1

Le Modèle de Black-Scholes

Dans un premier temps, un modèle probabiliste est nécessaire pour décrire l'évolution des prix. En finance, contrairement aux sciences physiques, les prix des actifs sont influencés par des processus complexes et dynamiques d'offre et de demande, rendant les modèles stochastiques essentiels mais exigeant des ajustements réguliers basés sur des données historiques pour maintenir leur pertinence. Les modèles probabilistes, bien que soumis à l'incertitude, fournissent un cadre cohérent et robuste pour la valorisation des dérivés et la gestion des risques, s'adaptant aux fluctuations du marché.

1.1 Espace de probabilité et mouvement brownien

Pour modéliser les incertitudes du marché financier, nous utilisons un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$:

où :
- Ω correspond à l'ensemble des scénarios possibles du marché.
- La tribu $\mathcal{F}$ représente l'information totale disponible à un instant donné.
- Les incertitudes du marché sont modélisées par un mouvement brownien $(B_t)_{0\leq t\leq T}$, (voir Annexe A), générant une filtration $(\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_T)$ qui décrit l'évolution de l'information disponible au fil du temps. Cela suppose que tous les participants du marché partagent la même information, excluant ainsi tout délit d'initié.
- La probabilité $\mathbb{P}$ est appelée probabilité historique et reflète les probabilités objectives des événements de marché.

Ce cadre permet de modéliser la dynamique des prix des actifs en tenant compte des aléas du marché, fournissant une base mathématique rigoureuse pour l'évaluation des risques et la valorisation des produits dérivés.

1.2 Présentation du Modèle de Black-Scholes

Le modèle suit les hypothèses suivantes :

- Marchés efficients :
  - Pas de coûts de transaction
  - Pas de restrictions sur le volume de transactions
  - Pas d'opportunité d'arbitrage
- Les rendements du sous-jacent sont gaussiens, stationnaires et indépendants.
- Le placement à la banque est sans risque et le taux d'intérêt r est constant.

Le modèle est donc défini par l'équation stochastique suivante :

$$dS_t = S_t \left(r\, dt + \sigma\, dB_t \right),$$

où :

- S_t est le prix de l'actif sous-jacent à l'instant t,
- r est le taux d'intérêt sans risque constant,
- σ est la volatilité constante de l'actif sous-jacent,
- B_t est un mouvement brownien standard sous la mesure risque-neutre.

Sous ce modèle, la solution de l'équation différentielle stochastique (EDS) est donnée par :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right),$$

où S_0 est le prix initial de l'actif sous-jacent.

Démonstration : Posons $X_t = \log(S_t)$.

En utilisant la formule d'Itô (voir Annexe B), nous avons :

$$\begin{aligned}
dX_t &= \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} (\sigma S_t)^2\, dt \\
&= \frac{1}{S_t} S_t (r\, dt + \sigma\, dB_t) - \frac{1}{2} \sigma^2\, dt \\
&= \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma\, dB_t.
\end{aligned}$$

On intègre et on passe à l'exponentielle, d'où le résultat :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right).$$

1.3 Valorisation des Options dans le Modèle de Black-Scholes

L'objectif est de déterminer le prix P_t d'une option à l'instant t, qui est l'espérance conditionnelle du payoff actualisé sous la mesure risque-neutre. Pour une option européenne avec un payoff $H_T = f(S_T)$ à l'échéance T, le prix de l'option est donné par :

$$P_t = \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}H_T \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Les résultats étant :

$$Call(t, S_t, T, K) = S_t\Phi_{N(0,1)}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi_{N(0,1)}(d_2).$$
$$Put(t, S_t, T, K) = Ke^{-r(T-t)}\Phi_{N(0,1)}(-d_2) - S_t\Phi_{N(0,1)}(-d_1).$$

où $\Phi_{N(0,1)}$ est la fonction de répartition de la loi normale standard (voir Annexe C), et :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad ; \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

1.3.1 Démonstration du Put

On commence par démontrer le prix d'une option Put européenne, nous commençons par substituer l'expression de S_T dans la formule du prix de l'option Put. En utilisant la formule pour S_T en termes de S_t donnée par :

$$S_T = S_t \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}G\right),$$

où $G \sim \mathcal{N}(0,1)$ est une variable aléatoire normale standard indépendante de $\mathcal{F}_t$, nous pouvons réécrire le prix de l'option Put à l'instant t comme suit :

$$P_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[\max\left(K - S_t\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}G\right), 0\right) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Pour simplifier cette expression, nous utilisons un changement de variable. Posons :

$$Y = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}G.$$

Ainsi, $S_T = S_te^Y$. Le prix de l'option Put devient :

$$P_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[\max\left(K - S_te^Y, 0\right) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Nous voulons maintenant évaluer l'espérance conditionnelle. La fonction $\max(K - S_te^Y, 0)$ est positive lorsque $K > S_te^Y$, ce qui est équivalent à :

$$e^Y < \frac{K}{S_t}.$$

On passe au logarithme :

$$Y < \ln\left(\frac{K}{S_t}\right).$$

Le terme Y est une somme de deux termes : un terme constant $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$ et un terme gaussien $\sigma\sqrt{T-t}G$. Comme $G \sim \mathcal{N}(0,1)$, cela signifie que Y suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$.

Nous définissons :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Alors, l'expression de l'espérance peut être réécrite comme une intégrale sur la fonction de répartition de la loi normale :

$$Put(t, S_t, T, K) = Ke^{-r(T-t)}\Phi_{N(0,1)}(-d_2) - S_t\Phi_{N(0,1)}(-d_1),$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale standard (voir Annexe C), et :

$$d_2 = d_1 + \sigma\sqrt{T-t}.$$

1.3.2 Démonstration du Call par la relation Call/Put

Propritété : Notons $\text{Call}_t(T, K)$ et $\text{Put}_t(T, K)$ le prix en t des options Call et Put avec un prix d'exercice K et une échéance T, écrites sur le titre de cours S. Si le titre ne distribue pas de dividendes, la relation de parité Call-Put est donnée par :

$$\text{Call}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) = S_t - KB(t, T), \text{ avec } B(t, T) = e^{-rT} \text{ dans le cas continue.}$$

Preuve : Comparons deux stratégies :

- La première consiste, à la date t, en l'achat d'un Call et la vente d'un Put, tous deux de maturité T et de prix d'exercice K. Le prix forward en t de cette stratégie est égal à $\text{Call}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K)$. À maturité, la valeur liquidative de ce portefeuille vaut $(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K$.

- La seconde stratégie consiste, à la date t, en l'achat à terme du sous-jacent S et l'emprunt à terme de K €. Le prix forward en t de cette stratégie est égal à $F_t(S, T) - K$, alors qu'en T, la position est évaluée à $S_T - K$.

Les deux stratégies conduisent donc à la même valeur en T ; par unicité des prix, elles ont le même prix forward en t, ce qui donne la relation annoncée. □

À partir de la parité call/put, on en déduit l'expression de C_t (puisque nous connaissons déjà celle de P_t). La parité call/put en temps continue s'écrit simplement :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-rT}.$$

Nous isolons alors C_t et remplaçons P_t par son expression, puis nous factorisons par S_t et Ke^{-rT} :

$$\begin{aligned}
C_t &= S_t - Ke^{-rT} + P_t, \\
C_t &= S_t - Ke^{-rT} + Ke^{-rT}\Phi_{N(0,1)}(-d_2) - S_t\Phi_{N(0,1)}(-d_1), \\
C_t &= S_t\left[1 - \Phi_{N(0,1)}(-d_1)\right] - Ke^{-rT}\left[1 - \Phi_{N(0,1)}(-d_2)\right].
\end{aligned}$$

Or, d'après la propriété de la loi normale, nous savons que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - \Phi_{N(0,1)}(-x) = \Phi_{N(0,1)}(x).$$

Nous obtenons ainsi l'expression de C_t en fonction de $\Phi_{N(0,1)}$:

$$C_t = S_t\Phi_{N(0,1)}(d_1) - Ke^{-rT}\Phi_{N(0,1)}(d_2).$$

Chapitre 2

Stratégie de Couverture

2.1 Introduction à la Couverture des Options

Une stratégie de couverture est une technique de gestion des risques utilisée par les investisseurs et les institutions financières pour protéger leurs portefeuilles contre les fluctuations défavorables des prix des actifs. En établissant des positions compensatoires, généralement via des instruments dérivés comme les options et les futures, une couverture permet de réduire ou d'éliminer le risque de perte associé à la volatilité des marchés financiers. Par exemple, un investisseur détenant un actif sous-jacent peut acheter une option de vente (Put) pour se protéger contre une baisse potentielle du prix de l'actif. La couverture est essentielle car elle permet de stabiliser les rendements, d'atténuer les impacts des mouvements adverses des marchés et d'assurer une gestion prudente du capital. Ainsi, elle constitue un outil fondamental pour les gestionnaires de portefeuilles cherchant à équilibrer leurs risques tout en poursuivant des objectifs de rendement.

2.2 La couverture de Black-Scholes

Supposons le modèle de Black-Scholes vu au chapitre 1, le prix d'une option européenne $V(S,t)$ dépend de S_t et du temps t, et il est donné par la solution de l'équation de Black-Scholes :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV.$$

La stratégie de couverture consiste à créer un **portefeuille auto-financé** (voir Annexe D) composé de l'option et de l'actif sous-jacent de manière à ce que la variation de ce portefeuille soit indépendante des petites variations de S_t.

Soit $\Delta_t = \frac{\partial V}{\partial S}$ le *delta* de l'option. Pour une couverture delta-neutre, on ajuste continuellement la position Δ_t dans l'actif sous-jacent pour neutraliser le risque. Considérons un portefeuille composé de :

— Une position longue de Δ_t unités de l'actif sous-jacent S_t,

— Une position courte de l'option.

Le portefeuille à l'instant t a alors une valeur Π_t donnée par :

$$\Pi_t = \Delta_t S_t - V(S_t, t).$$

En appliquant la formule d'Itô à $V(S_t, t)$, nous avons :

$$dV(S_t, t) = \frac{\partial V}{\partial t}\, dt + \frac{\partial V}{\partial S}\, dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\, dS_t^2.$$

En substituant la dynamique de S_t, on obtient :

$$dV(S_t, t) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + rS_t\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} S_t\sigma\, dB_t.$$

Utilisant l'équation de Black-Scholes, nous simplifions l'expression à :

$$dV(S_t, t) = rV(S_t, t)\, dt + \frac{\partial V}{\partial S} S_t\sigma\, dB_t.$$

La dynamique de la position dans l'actif sous-jacent est donnée par :

$$d(\Delta_t S_t) = \Delta_t\, dS_t + S_t\, d\Delta_t.$$

Puisque $\Delta_t = \frac{\partial V}{\partial S}$, et que nous négligeons les termes en $d\Delta_t$ car ils sont d'ordre supérieur en infinitésimaux, nous avons :

$$d(\Delta_t S_t) \approx \Delta_t\, dS_t = \frac{\partial V}{\partial S} S_t(r\, dt + \sigma\, dB_t).$$

La variation du portefeuille Π_t est alors :

$$d\Pi_t = d(\Delta_t S_t) - dV(S_t, t).$$

En substituant les expressions de $d(\Delta_t S_t)$ et $dV(S_t, t)$, on obtient :

$$d\Pi_t = \frac{\partial V}{\partial S} S_t(r\, dt + \sigma\, dB_t) - \left(rV(S_t, t)\, dt + \frac{\partial V}{\partial S} S_t\sigma\, dB_t\right).$$

Simplifions cette expression :

$$d\Pi_t = r\left(\frac{\partial V}{\partial S} S_t - V(S_t, t)\right) dt.$$

Ainsi, le terme dB_t disparaît, ce qui signifie que le portefeuille est **sans risque**. La variation du portefeuille est déterminée uniquement par le terme en dt, avec un taux de rendement r.

On obtient donc le résultat suivant :

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S},$$

est bien une stratégie de couverture.

On effectuera le calcul pour obtenir le Delta du call et du put dans la section suivante.

2.3 Les Greeks : Outils pour la Gestion des Risques

Les Greeks sont des mesures de la sensibilité du prix d'une option par rapport à divers paramètres du modèle. Ils sont essentiels pour la gestion des risques et l'élaboration de stratégies de couverture.

2.3.1 Delta (Δ)

Comme expliqué dans la partie précédente, le delta d'une option, noté Δ, mesure la sensibilité du prix de l'option par rapport aux variations du prix de l'actif sous-jacent. Il quantifie combien le prix de l'option change pour une variation infinitésimale du prix du sous-jacent. Pour une option Call ou Put européenne, le delta est exprimé par les formules suivantes :

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S},$$

où $V(S,t)$ est le prix de l'option (Call ou Put) en fonction du prix de l'actif sous-jacent S et du temps t.

Calcul du Delta pour un Call Européen

A partir du prix d'un call Européen obtenu dans le chapitre 1, le delta d'une option Call est :

$$\Delta_{\text{Call}} = \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}\left(S_t\Phi_{N(0,1)}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi_{N(0,1)}(d_2)\right).$$

Puisque d_2 ne dépend pas directement de S, la dérivée de $\Phi_{N(0,1)}(d_2)$ par rapport à S est nulle. Par conséquent, nous avons :

$$\Delta_{\text{Call}} = \Phi_{N(0,1)}(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial S} = \Phi_{N(0,1)}(d_1).$$

Ainsi, le delta d'une option Call européenne est :

$$\Delta_{\text{Call}} = \Phi_{N(0,1)}(d_1).$$

Cela signifie que le delta d'une option Call est égal à la probabilité, sous la mesure neutre au risque, que l'option soit dans la monnaie à l'échéance.

Calcul du Delta pour un Put Européen

Le delta d'une option Put est :

$$\Delta_{\text{Put}} = \frac{\partial P}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}\left(Ke^{-r(T-t)}\Phi_{N(0,1)}(-d_2) - S_t\Phi_{N(0,1)}(-d_1)\right).$$

Comme d_2 ne dépend pas directement de S, la dérivée de $\Phi_{N(0,1)}(-d_2)$ par rapport à S est nulle. Par conséquent, nous avons :

$$\Delta_{\text{Put}} = -\Phi_{N(0,1)}(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial S} = -\Phi_{N(0,1)}(-d_1).$$

En utilisant la propriété de la loi normale $\Phi_{N(0,1)}(-x) = 1 - \Phi_{N(0,1)}(x)$, nous obtenons :

$$\Delta_{\text{Put}} = -(1 - \Phi_{N(0,1)}(d_1)) = \Phi_{N(0,1)}(d_1) - 1.$$

Ainsi, le delta d'une option Put européenne est :

$$\Delta_{\text{Put}} = \Phi_{N(0,1)}(d_1) - 1.$$

Remarque : Il est intéressant de noter que le delta d'un Put européen est lié au delta d'un Call européen par la relation suivante :

$$\Delta_{\text{Put}} = \Delta_{\text{Call}} - 1.$$

Cette relation découle de la parité Call-Put qui, dans le cadre du modèle de Black-Scholes, est donnée par :

$$C(S,t) - P(S,t) = S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

En différentiant cette relation par rapport à S, nous obtenons :

$$\frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\partial P}{\partial S} = 1,$$

ce qui montre que :

$$\Delta_{\text{Call}} - \Delta_{\text{Put}} = 1.$$

Ainsi, connaissant le delta d'un Call, on peut facilement déduire celui d'un Put, et vice versa.

2.3.2 Gamma (Γ)

Le *Gamma* (Γ) mesure la sensibilité du Delta par rapport au prix de l'actif sous-jacent. Le Gamma est définie par :

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}.$$

Pour une option sous le modèle de Black-Scholes, le Gamma est le même pour les options Call et Put et est donné par :

$$\Gamma = \frac{\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}},$$

où $\phi(\cdot)$ est la densité de probabilité de la loi normale standard (voir Annexe E), donnée par :

$$\phi(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right).$$

Le Gamma mesure la courbure de la relation entre le prix de l'option et le prix du sous-jacent. Il est crucial pour comprendre comment le Delta change lorsque le prix du sous-jacent change, ce qui est important pour ajuster la couverture. Pour les options Call et Put, le Gamma est identique, car la dérivée seconde du prix par rapport au sous-jacent dépend seulement de d_1, pas du signe de d_1.

Démonstration : Gamma est la dérivée seconde du prix par rapport au prix du sous-jacent :

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial C}{\partial S}\right).$$

Sachant que $\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial S} = \phi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S}$, et

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}},$$

on obtient :

$$\Gamma = \frac{\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}.$$

2.3.3 Vega (ν)

Le *Vega* (ν) mesure la sensibilité du prix de l'option à la volatilité de l'actif sous-jacent :

$$\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}.$$

Sous le modèle de Black-Scholes, le Vega est également identique pour les options Call et Put et est donné par :

$$\nu = S\sqrt{T-t}\phi(d_1).$$

Le Vega est particulièrement important pour évaluer l'impact des variations de la volatilité sur le prix de l'option, surtout dans des marchés où la volatilité est instable. Le Vega est élevé lorsque l'option est proche de la monnaie et diminue à mesure que l'option devient profondément dans ou hors de la monnaie.

Démonstration : Vega est la dérivée du prix par rapport à la volatilité σ :

$$\nu = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S_t\sqrt{T-t}\phi(d_1).$$

Cela provient du fait que d_1 dépend de σ, et la dérivée de $\Phi(d_1)$ par rapport à σ implique l'utilisation de la densité de probabilité $\phi(d_1)$.

2.3.4 Theta (Θ)

Le *Theta* (Θ) mesure la sensibilité du prix de l'option à l'écoulement du temps, également appelé *decay* temporel :

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Pour une option Call sous Black-Scholes, le Theta est donné par :

$$\Theta_{\text{Call}} = -\frac{S\sigma\phi(d_1)}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

et pour une option Put :

$$\Theta_{\text{Put}} = -\frac{S\sigma\phi(d_1)}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}\Phi(-d_2).$$

Le premier terme dans les deux équations représente le coût de la décadence temporelle due à la volatilité, tandis que le deuxième terme représente l'effet des intérêts sur la valeur de l'option. Le Theta est crucial pour les traders d'options car il indique combien de valeur l'option perd chaque jour en l'absence de mouvements du sous-jacent.

Démonstration : Theta est la dérivée du prix par rapport au temps t. Pour un Call :

$$\Theta_{\text{Call}} = \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{S\sigma\phi(d_1)}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}\Phi(d_2).$$

Pour un Put :

$$\Theta_{\text{Put}} = \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{S\sigma\phi(d_1)}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}\Phi(-d_2).$$

Ces formules résultent de la différentiation par rapport au temps des termes de prix des options dans l'équation de Black-Scholes.

2.3.5 Rho (ρ)

Le *Rho* (ρ) mesure la sensibilité du prix de l'option aux variations du taux d'intérêt sans risque :

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}.$$

Sous Black-Scholes, le Rho pour une option Call est :

$$\rho_{\text{Call}} = K(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi_{N(0,1)}(d_2),$$

et pour une option Put :

$$\rho_{\text{Put}} = -K(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi_{N(0,1)}(-d_2).$$

Le Rho est important pour évaluer l'impact des changements de la politique monétaire ou des taux d'intérêt sur le prix des options. Un Rho positif pour une option Call indique que le prix de l'option augmente lorsque les taux d'intérêt augmentent, tandis qu'un Rho négatif pour une option Put montre que le prix de l'option diminue lorsque les taux d'intérêt augmentent.

Démonstration : Rho est la dérivée du prix par rapport au taux d'intérêt r. Pour un Call :

$$\rho_{\text{Call}} = \frac{\partial C}{\partial r} = K(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi_{N(0,1)}(d_2),$$

et pour un Put :

$$\rho_{\text{Put}} = \frac{\partial P}{\partial r} = -K(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi_{N(0,1)}(-d_2).$$

Ces formules montrent comment les taux d'intérêt affectent le prix des options, ce qui est particulièrement important dans les environnements de taux d'intérêt variables.

Chapitre 3

Le Modèle à Volatilité Locale

3.1 Introduction au Modèle à Volatilité Locale

Le modèle à volatilité locale est une extension du modèle de Black-Scholes qui permet à la volatilité de dépendre non seulement du temps, mais aussi du niveau du prix de l'actif sous-jacent. Ce modèle a été développé pour mieux capturer les dynamiques de marché observées, notamment les sourires et sourcils de volatilité, qui ne peuvent pas être expliqués par une volatilité constante.

3.2 Formulation du Modèle

Sous le modèle à volatilité locale, le prix d'un actif financier S_t suit la dynamique stochastique suivante :

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2(u, S_u)\right) du + \int_0^t \sigma(u, S_u) dB_u\right),$$

où :
- S_t est le prix de l'actif sous-jacent à l'instant t,
- r est le taux d'intérêt sans risque constant,
- $\sigma(t, S_t)$ est la volatilité locale, une fonction déterministe de t et S_t,
- B_t est un mouvement brownien standard sous la mesure risque-neutre.

Ce modèle permet à la volatilité d'évoluer avec le temps et en fonction du prix de l'actif, offrant une flexibilité accrue par rapport au modèle de Black-Scholes.

3.3 Valorisation des Options dans le Modèle à Volatilité Locale

Le prix d'une option dans le modèle à volatilité locale est donné par :

$$P_t = \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)} H_T \mid \mathcal{F}_t\right],$$

où $H_T = f(S_T)$ est le payoff de l'option à l'échéance T. Comme dans le modèle de Black-Scholes, ce prix peut être formulé en termes d'une EDP.

3.3.1 EDP pour la Volatilité Locale

En supposant que le prix de l'option P_t peut être représenté sous la forme $P_t = v(t, S_t)$, où $v(t, x)$ est une fonction suffisamment régulière, on obtient l'EDP suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)x^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + rx\frac{\partial v}{\partial x} - rv = 0,$$

avec la condition terminale :

$$v(T, x) = f(x).$$

Cette EDP est une généralisation de l'équation de Black-Scholes, où la volatilité constante est remplacée par une fonction $\sigma(t, x)$.

3.3.2 Rôle de la Fonction de Volatilité Locale $\sigma(t, S)$

La fonction de volatilité locale $\sigma(t, S)$ joue un rôle crucial dans les modèles de volatilité locale en décrivant la volatilité instantanée de l'actif sous-jacent à un moment donné t et pour un prix donné S. Contrairement à la volatilité constante utilisée dans le modèle de Black-Scholes classique, la volatilité locale permet de modéliser des phénomènes observés sur les marchés, tels que le sourire de volatilité, où la volatilité implicite varie en fonction du prix d'exercice et du temps à l'échéance.

Forme Générale de la Fonction de Volatilité Locale : La forme générale de la fonction de volatilité locale peut être exprimée comme :

$$\sigma(t, S) = \sigma_0 \left(1 + \alpha \cdot f(t, S)\right),$$

où :

- σ_0 est un paramètre de volatilité de base,
- α est un facteur d'ajustement qui contrôle la sensibilité de la volatilité à la fonction $f(t, S)$,
- $f(t, S)$ est une fonction qui capture la dépendance spécifique au temps t et au prix S.

Une forme couramment utilisée, et que nous utiliserons, pour $f(t, S)$ est une dépendance linéaire ou quadratique par rapport à S, ce qui permet de modéliser différentes structures de volatilité observées sur les marchés :

$$\sigma(t, S) = \sigma_0 + \alpha \cdot S + \beta \cdot S^2,$$

où α et β sont des coefficients ajustables en fonction des conditions de marché.

Exemple : Un exemple simple de fonction de volatilité locale est donné par :

$$\sigma(t, S) = 0.2 + 0.04 \times S,$$

où la volatilité augmente linéairement avec le prix S. Ce modèle reflète un scénario dans lequel les actifs plus chers sont perçus comme plus risqués, entraînant une augmentation de la volatilité. Ici, $\sigma_0 = 0.2$ représente une volatilité de base, tandis que $\alpha = 0.04$ capture la sensibilité de la volatilité à l'augmentation du prix de l'actif.

Remarque : La résolution analytique de l'EDP de Black-Scholes est souvent impossible pour des formes complexes de $\sigma(t, S)$. Par conséquent, des méthodes numériques comme les différences finies sont utilisées pour obtenir une approximation du prix des options.

3.4 Schéma Implicite de Différences Finies pour les Modèles à Volatilité Locale

Le schéma implicite de différences finies est une méthode numérique robuste pour résoudre les EDP associées aux modèles financiers. Ce schéma est particulièrement utile pour sa stabilité inconditionnelle, ce qui le rend approprié pour les applications impliquant des marches arrière dans le temps, comme la valorisation des options.

3.4.1 Concepts Fondamentaux

Les différences finies sont une méthode de discrétisation des EDP, où les dérivées continues sont remplacées par des différences entre les valeurs discrètes de la fonction. Le schéma implicite évalue les dérivées à l'instant futur, ce qui entraîne la formation d'un système d'équations linéaires à chaque pas de temps. Dans le contexte de la valorisation d'options sous un modèle de volatilité locale, l'EDP est donnée par :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)x^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + rx\frac{\partial v}{\partial x} - rv = 0,$$

avec une condition terminale spécifiée par le payoff de l'option à maturité T.

3.4.2 Discrétisation de l'EDP

Pour appliquer le schéma implicite, nous discrétisons l'espace des prix et le temps en intervalles de longueurs Δx et Δt, respectivement. Pour un point discret (i, j), où i est l'indice temporel et j l'indice spatial, les dérivées sont approximées par :

— **Dérivée temporelle** :
$$\frac{\partial v}{\partial t} \approx \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta t}.$$

— **Dérivée première en espace** :
$$\frac{\partial v}{\partial x} \approx \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta x}.$$

— **Dérivée seconde en espace** :
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \approx \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{(\Delta x)^2}.$$

En substituant ces approximations dans l'EDP, nous obtenons l'équation discrétisée suivante :

$$\frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t_i, x_j)x_j^2\frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{(\Delta x)^2} + rx_j\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta x} - rv_{i,j} = 0. \quad (3.1)$$

Cette équation peut être réorganisée pour former un système linéaire :

$$-\alpha_j v_{i+1,j-1} + (1+\beta_j) v_{i+1,j} - \gamma_j v_{i+1,j+1} = v_{i,j}, \tag{3.2}$$

où les coefficients α_j, β_j, et γ_j sont définis par :

$$\begin{aligned}
\alpha_j &= \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\sigma^2(t_i,x_j)x_j^2}{(\Delta x)^2} - \frac{r x_j}{\Delta x}\right), \\
\beta_j &= \Delta t\left(\frac{\sigma^2(t_i,x_j)x_j^2}{(\Delta x)^2} + r\right), \\
\gamma_j &= \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\sigma^2(t_i,x_j)x_j^2}{(\Delta x)^2} + \frac{r x_j}{\Delta x}\right).
\end{aligned}$$

3.4.3 Résolution du Système Linéaire avec l'Algorithme de Thomas

Le système linéaire obtenu à partir de la discrétisation implicite de l'EDP est tridiagonal, c'est-à-dire qu'elle a la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_3 & b_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i+1,1} \\ v_{i+1,2} \\ v_{i+1,3} \\ \vdots \\ v_{i+1,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

où a_j, b_j, et c_j sont les coefficients des sous-diagonales, diagonales principales, et sur-diagonales, respectivement, et d_j sont les termes constants résultant de la discrétisation de l'EDP.

L'algorithme de Thomas est une méthode spécialisée pour résoudre efficacement ce type de systèmes en trois étapes principales : la phase de décomposition (ou réduction), la phase de substitution avant (ou forward substitution), et la phase de substitution arrière (ou backward substitution).

1. Phase de Décomposition : Dans cette phase, nous modifions les coefficients pour transformer le système d'équations afin que la matrice devienne diagonale par blocs, facilitant la résolution. Cela se fait en modifiant les coefficients des diagonales b_j et les termes constants d_j de la manière suivante :

$$\tilde{b}_1 = b_1, \quad \tilde{d}_1 = d_1,$$

et pour $j = 2$ à n :

$$\tilde{b}_j = b_j - \frac{a_j c_{j-1}}{\tilde{b}_{j-1}}, \quad \tilde{d}_j = d_j - \frac{a_j \tilde{d}_{j-1}}{\tilde{b}_{j-1}}.$$

Cette modification élimine les sous-diagonales a_j de la matrice, ce qui facilite la résolution des valeurs inconnues par substitution.

2. Phase de Substitution Avant (Forward Substitution) : Dans cette étape, nous utilisons les coefficients modifiés pour calculer de manière récursive les nouvelles valeurs des termes constants. On a déjà modifié $\tilde{d}_j$ dans la phase précédente.

3. Phase de Substitution Arrière (Backward Substitution) : Dans cette étape finale, nous résolvons pour les valeurs inconnues $v_{i+1,j}$ en remontant du dernier élément au premier. On utilise les valeurs modifiées des termes constants $\tilde{d}_j$ et des diagonales principales $\tilde{b}_j$:

$$v_{i+1,n} = \frac{\tilde{d}_n}{\tilde{b}_n},$$

et pour $j = n - 1$ à 1 :

$$v_{i+1,j} = \frac{\tilde{d}_j - c_j v_{i+1,j+1}}{\tilde{b}_j}.$$

Complexité de l'Algorithme :

L'algorithme de Thomas est très efficace avec une complexité en temps de $\mathcal{O}(n)$, car chaque étape nécessite une seule passe sur les coefficients de la matrice. Cela contraste fortement avec les méthodes générales de résolution des systèmes linéaires qui ont une complexité de $\mathcal{O}(n^3)$. Cette efficacité rend l'algorithme de Thomas particulièrement adapté aux problèmes de valorisation d'options qui nécessitent une résolution rapide et stable des systèmes linéaires tridiagonaux résultant des schémas implicites de différences finies.

3.5 Application à la Couverture d'Options

Comme vu dans le chapitre 2, la stratégie de couverture pour le modèle à volatilité local est la même que celle du modèle de Black-Scholes. Pour dériver une stratégie de couverture à partir de l'approximation numérique, on calcule le Delta de l'option en utilisant la formule suivante :

$$\Delta_{i,j} = \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta x}.$$

Hedge Numérique pour le Call Le Delta pour une option call est approximé numériquement par :

$$\Delta_{\text{Call}} \approx \frac{C(t, S + \Delta S) - C(t, S - \Delta S)}{2\Delta S},$$

où $C(t, S + \Delta S)$ et $C(t, S - \Delta S)$ sont les valeurs de l'option call pour des prix du sous-jacent ajustés de ΔS.

Hedge Numérique pour le Put Le Delta pour une option put est approximé numériquement par :

$$\Delta_{\text{Put}} \approx \frac{P(t, S + \Delta S) - P(t, S - \Delta S)}{2\Delta S},$$

où $P(t, S + \Delta S)$ et $P(t, S - \Delta S)$ sont les valeurs de l'option put pour des prix du sous-jacent ajustés de ΔS.

Cette valeur de Delta est utilisée pour ajuster dynamiquement le portefeuille de couverture afin de minimiser le risque de variation du sous-jacent.

Conclusion

Le modèle de Black-Scholes et le modèle à volatilité locale constituent des outils fondamentaux pour la valorisation des options, mais ils présentent certaines limitations, notamment dans la représentation des comportements complexes des marchés financiers. Pour pallier ces limites, des modèles plus avancés, tels que les modèles à volatilité implicite et à volatilité stochastique, ont été développés, offrant des améliorations significatives.

Les modèles à volatilité implicite ajustent la volatilité en fonction des prix du marché des options, ce qui permet de mieux capturer les phénomènes observés, tels que les *smiles* et les *smirks* de volatilité. Ces ajustements rendent le modèle plus flexible et mieux aligné avec les données de marché actuelles, améliorant ainsi la précision des prix des options.

Les modèles à volatilité stochastique, quant à eux, introduisent une dynamique aléatoire dans l'évolution de la volatilité elle-même, reconnaissant que la volatilité des actifs financiers n'est pas constante mais varie de manière imprévisible. Ces modèles, tels que le modèle de Heston, permettent de modéliser les comportements de volatilité observés sur les marchés financiers de manière plus réaliste, en tenant compte des effets de volatilité de volatilité (vol of vol) et de la corrélation entre les variations de prix et de volatilité.

Ces améliorations offrent des avantages notables, notamment une meilleure gestion des risques et des stratégies de couverture plus robustes, en s'adaptant plus finement aux conditions du marché. En intégrant les variations de la volatilité et en ajustant continuellement aux nouvelles données de marché, les modèles à volatilité implicite et stochastique permettent d'obtenir des estimations de prix et des stratégies de gestion des risques plus précises, rendant ces approches plus efficaces pour les praticiens de la finance.

Néanmoins, les modèles de Black-Scholes et à volatilité locale restent des outils importants et largement utilisés, offrant une base solide et des solutions analytiques utiles pour de nombreuses applications pratiques, tout en posant les fondations sur lesquelles les modèles plus avancés ont été construits.

Annexes

A Définition du Mouvement Brownien

Un processus stochastique $\{W_t, t \geq 0\}$ est appelé un mouvement brownien (ou processus de Wiener) s'il satisfait les conditions suivantes :

1. $W_0 = 0$ presque sûrement.
2. W_t possède des accroissements indépendants : pour tout $0 \leq s < t$, l'accroissement $W_t - W_s$ est indépendant du passé $\{W_u : u \leq s\}$.
3. Les accroissements de W_t sont stationnaires et normalement distribués : pour tout $0 \leq s < t$, $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, c'est-à-dire que l'accroissement suit une loi normale de moyenne 0 et de variance $t - s$.
4. W_t a des trajectoires continues : presque sûrement, la fonction $t \mapsto W_t$ est continue.

B Formule d'Itô pour le mouvement brownien géométrique

Théorème 3.1.3 (Formule d'Itô) Soit $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, une fonction continûment dérivable une fois en t et deux fois en x. Alors, avec probabilité 1, on a pour tout $t \geq 0$:

$$f(t, S_t) = f(0, S_0) + \int_0^t f'_x(s, S_s)\, dS_s + \int_0^t \left[f'_t(s, S_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_s^2 f''_{xx}(s, S_s) \right] ds.$$

Le terme $\int_0^t f'_x(s, S_s)\sigma S_s\, dW_s$ est une intégrale stochastique : c'est la limite presque sûre de la somme $\sum_{t_i \leq t} f'_x(t_i, S_{t_i})\sigma S_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ le long de la subdivision dyadique d'ordre n. Lorsque f a des dérivées bornées, cette intégrale stochastique est centrée.

La forme intégrale s'écrit également sous forme différentielle :

$$d[f(t, S_t)] = f'_x(t, S_t)\sigma S_t\, dW_t + \left[f'_t(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f''_{xx}(t, S_t) \right] dt.$$

C Définition de la Fonction de Répartition de la Loi Normale

La fonction de répartition de la loi normale, aussi appelée fonction de distribution cumulative de la loi normale, est définie pour une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2, notée $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. La fonction de répartition $F_X(x)$ est donnée par :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt.$$

Dans le cas particulier où $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, c'est-à-dire pour la loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$, la fonction de répartition devient :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

D Définition d'un Portefeuille Auto-financé

Un portefeuille est dit **auto-financé** s'il ne nécessite aucune injection ou retrait de capital extérieur après sa constitution initiale. En d'autres termes, toutes les variations de la valeur du portefeuille sont dues aux mouvements des prix des actifs qui le composent et aux stratégies de réallocation des actifs, sans apport ou retrait de liquidités supplémentaires.

Formellement, si l'on considère un portefeuille composé de plusieurs actifs dont les poids sont ajustés dynamiquement, le portefeuille est auto-financé si la variation de sa valeur au cours du temps t est donnée uniquement par les gains ou pertes résultant des variations de prix des actifs. Cela peut être exprimé par l'équation suivante :

$$dV_t = \sum_{i=1}^{n} \phi_{i,t} \, dS_{i,t},$$

où :

- V_t est la valeur du portefeuille à l'instant t,
- $\phi_{i,t}$ est la quantité d'actif i détenue à l'instant t,
- $S_{i,t}$ est le prix de l'actif i à l'instant t,
- $dS_{i,t}$ représente la variation de prix de l'actif i.

E Définition de la Densité de Probabilité de la Loi Normale

La densité de probabilité d'une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2, notée $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, est donnée par la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

où :
- μ est la moyenne (ou espérance) de la distribution,
- σ^2 est la variance de la distribution,

Pour la loi normale standard, où $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, la densité de probabilité se simplifie en :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Bibliographie

[1] Martin Haugh. *The Black-Scholes Model*. PDF scientifique. 2016.

[2] Nicole El Karoui et Emmanuel Gobet. *Les outils stochastiques des marchés financiers : Une visite guidée de Einstein à Black-Scholes*. Les Éditions de l'École Polytechnique, 2011.

[3] Peter Tankow. *Calibration de Modèles et Couverture de Produits Dérivés*. `Université Paris VII`. PDF scientifique. 2008.