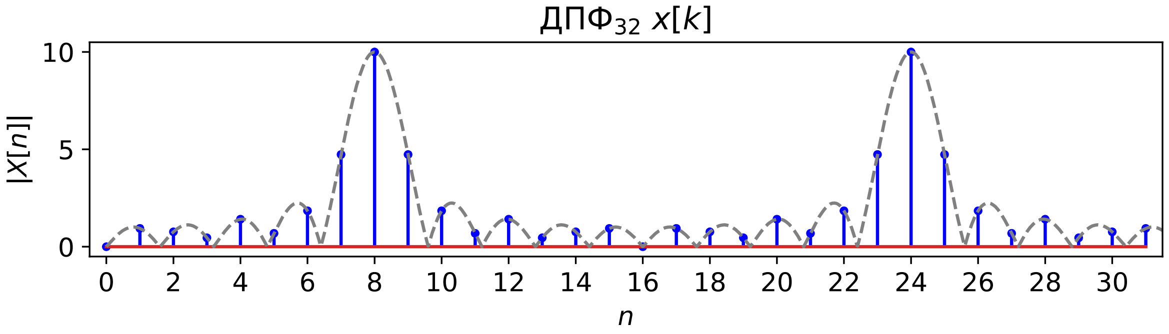
Лабораторная работа №2 «Дискретное и дискретное во времени преобразования Фурье (ДВПФ, ДПФ)»

Модуль 3. Связь между ДВПФ и ДПФ.



- ДПФ для последовательностей отсчетов конечной длительности.
    - Форма записи ДПФ
    - Связь между ДПФ и ДВПФ в точках $\nu = n / N$.
    - Интерполяция ДВПФ добавлением нулевых отсчетов в сигнал (Zero Padding)
    - Интерполяционная формула восстановления ДВПФ по коэффициентам ДПФ в точках $\nu \neq n / N$
- ДПФ периодических последовательностей
    - Форма записи ДПФ
    - Связь между ДПФ и ДВПФ для периодических последовательностей.
- Частотная ось ДПФ

ДПФ для последовательностей отсчетов конечной длительности.

Форма записи ДПФ

Пусть $x[k]$ — последовательность отсчетов сигнала длиной в N отсчетов $k=0,1,\ldots,N-1$. Тогда прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) определяется следующим образом

$$X[n]=\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nk\right),$$

$$x[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n]\exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right),\quad k=0,1,\ldots,N-1.$$

Функцию $X[n]$ обычно рассматривают только для значений $n=0,1,\ldots,N-1$, при этом она является периодической с периодом N, $n\in Z$.

В обратном преобразовании необходимо ограничить длительность восстанавливаемой последовательности отсчетов сигнала, т.е. рассматривать $x[k]$ для значений $k=0,1,\ldots,N-1$. Если длительность не ограничить, то будет восстановлена последовательность, являющаяся периодическим продолжением $x[k]$.

Связь между ДПФ и ДВПФ в точках $\nu=n/N$.

Рассмотрим N– точечную последовательность $x[k]$. Ее ДВПФ

$$X(\nu)=\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\exp(-j2\pi\nu k).$$

ДПФ для последовательности $x[k]$, имеет следующий вид:

$$X[n]=\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\exp\left(-j2\pi\frac{n}{N}k\right).$$

Сравнивая формулы, в точках $\nu=n/N$ получаем равенство

$$X(\nu)\big|_{\nu=n/N}=X[n]$$

Это означает, что коэффициенты ДПФ $X[n]$ равны отсчетам функции $X(\nu)$, взятым в точках $\nu=n/N$ (с шагом $\Delta\nu=1/N$).

ДПФ для последовательностей отсчетов конечной длительности.

Пример.

Рассмотрим для $N=20$ последовательность отсчетов

$$x[k]=\begin{cases}\sin\left(2\pi\dfrac{4,5}{20}k\right)+\sin\left(2\pi\dfrac{7,5}{20}k\right), 0\le k<N,\\ 0,\{k<0\}\cup\{k\ge N\}.\end{cases}$$

ДПФ и ДВПФ этой последовательности для частот $\nu\in[0;1]$ изображены по модулю на рисунке. Заметим, что в точках $\nu=n/20$

$$X(\nu)\big|_{\nu=n/20}=X[n],$$

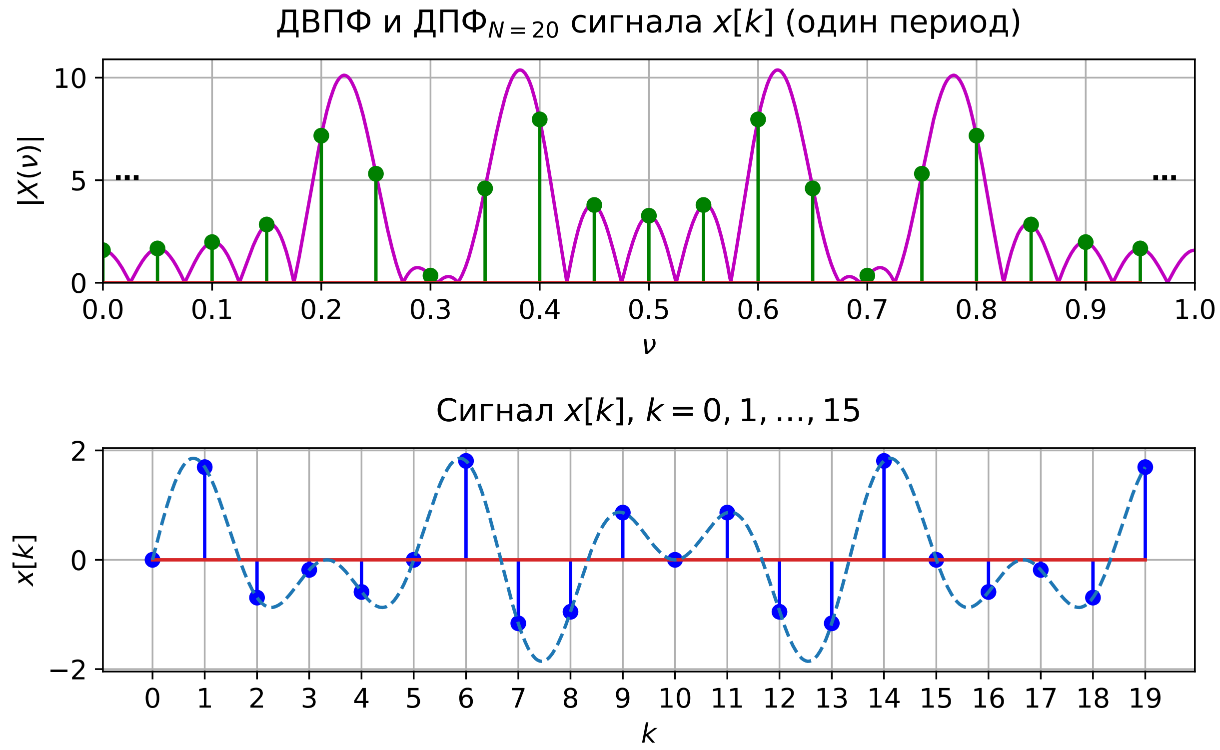
т.е. значения ДВПФ и ДПФ (с точностью до использованной нормировки) совпадают. Расстояние между соседними отсчетами по оси частот $\Delta\nu=1/N=1/20=0,05$.

Заметим, что частоты синусоид в ней не совпадают с бинами ДПФ (1 бин соответствует $1/N$):

$$\nu_1=\frac{4,5}{20}=0,225,\ \nu_2=\frac{7,5}{20}=0,375.$$

В ДВПФ вблизи[1] этих частот мы наблюдаем максимумы.

Вопрос. Как улучшить качество визуализации этих максимумов с помощью ДПФ?



[1] Вопрос о смещении максимумов будет рассмотрен в весеннем семестре.

ДПФ для последовательностей отсчетов конечной длительности.

Интерполяция ДВПФ добавлением нулевых отсчетов в сигнал (Zero Padding)

Улучшим качество визуализации ДВПФ при помощи отсчетов ДПФ. Получим M – точечную последовательность. Добавим в исходную последовательность $x[k]$ $M-N$ отсчетов, равных нулю:

$$y[k]=\begin{cases} x[k], 0\le k\le N-1; \\ 0,\ \ N\le k\le M-1. \end{cases}$$

Ее ДПФ M – точечное и определяется формулой

$$Y[n]=\sum_{k=0}^{M-1} y[k]\exp\left(-j\frac{2\pi}{M}nk\right)=\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\exp\left(-j\frac{2\pi}{M}nk\right).$$

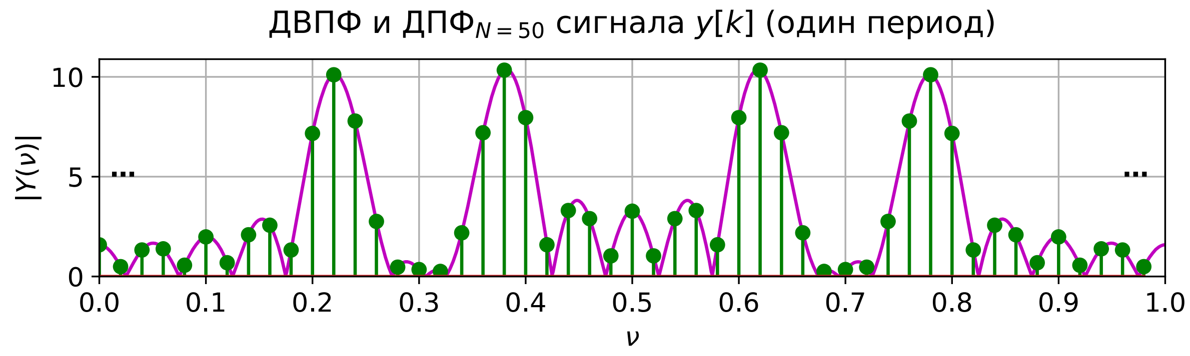
При этом ДВПФ не изменяется:

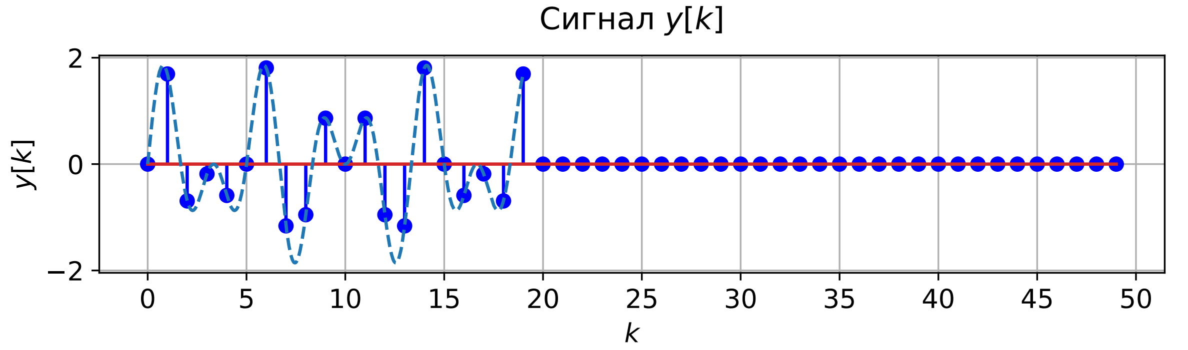
$$Y(\nu)=\sum_{k=0}^{M-1} x[k]\exp(-j2\pi\nu k)=\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\exp(-j2\pi\nu k).$$

С помощью добавления нулевых отсчетов улучшено качество визуализации ДВПФ, поскольку число точек $\nu_n=n/M$ на одном периоде больше, чем $\nu_n=n/N$.

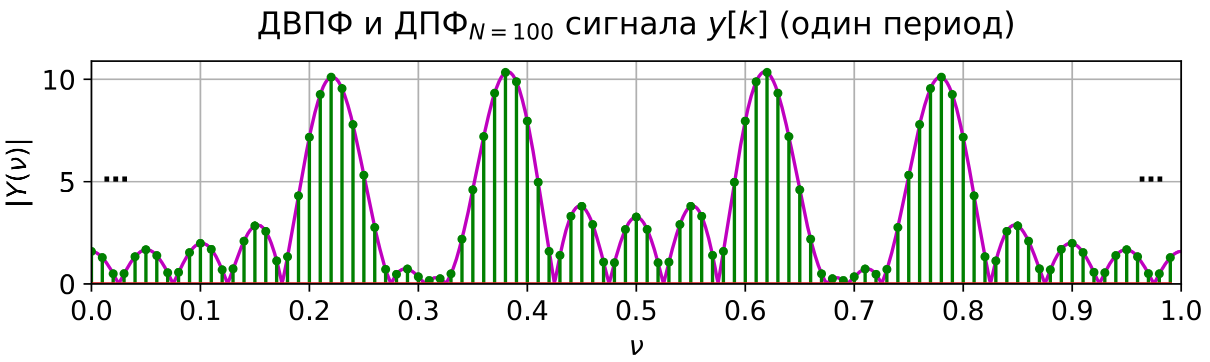
Возврат к примеру.

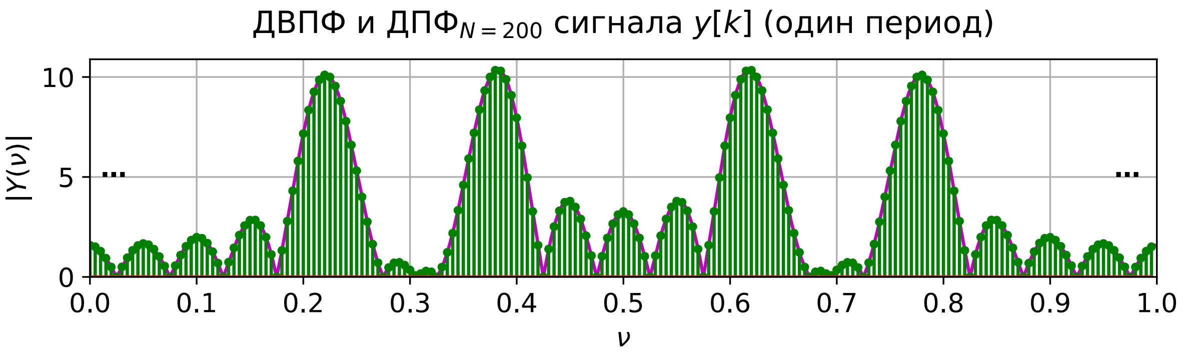
Теперь дополним рассматриваемый в ДПФ участок сигнала нулевыми отсчетами до длины 50. Отсчетов ДПФ на одном периоде станет больше, расстояние между ними $\Delta\nu=1/50$.

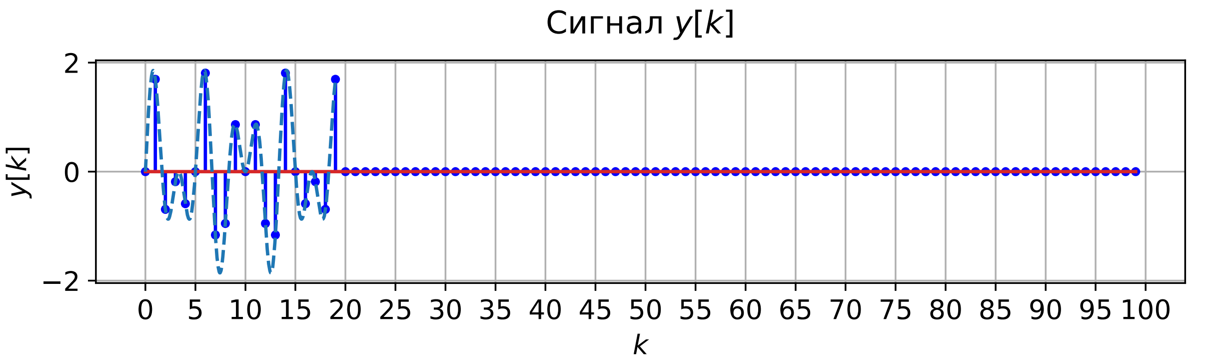


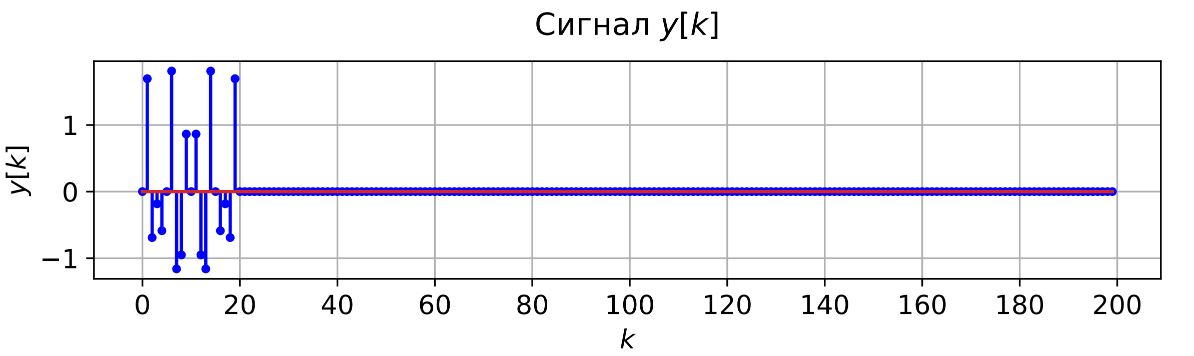


ДПФ для последовательностей отсчетов конечной длительности.









ДПФ для последовательностей отсчетов конечной длительности.

Интерполяционная формула восстановления ДВПФ по коэффициентам ДПФ в точках $\nu \neq n/N$

Рассмотрим N – точечную последовательность $x[k]$. Ее ДВПФ

$$X(\nu)=\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\exp\left(-j2\pi\nu k\right).$$

Обратное ДПФ для последовательности $x[k]$

$$x[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n]\exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right).$$

$$X(\nu)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1} X[n]\exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right)\right)\exp\left(-j2\pi\nu k\right)=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n]\sum_{k=0}^{N-1}\exp\left(-j2\pi\left(\nu-\frac{n}{N}\right)k\right).$$

Рассмотрим отдельно множитель $\sum_{k=0}^{N-1}\exp\left(-j2\pi\left(\nu-n/N\right)k\right)$.

Это сумма N членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1=1$, и знаменателем $q=\exp\left(-j2\pi\left(\nu-n/N\right)\right)$.

В точках $\nu \neq n/N$, где $q \neq 1$, получаем (используя известные формулы $S_N=b_1(1-q^N)/(1-q)$ и $\sin\varphi=(e^{j\varphi}-e^{-j\varphi})/(2j)$):

$$\sum_{k=0}^{N-1}\exp\left(-j2\pi\left(\nu-\frac{n}{N}\right)k\right)=\frac{1-\exp\left(-j2\pi\left(\nu-n/N\right)N\right)}{1-\exp\left(-j2\pi\left(\nu-n/N\right)\right)}=$$

$$=\frac{e^{-j\pi(\nu-n/N)N}\left\{\exp\left(j\pi\left(\nu-n/N\right)N\right)-\exp\left(-j\pi\left(\nu-n/N\right)N\right)\right\}}{e^{-j\pi(\nu-n/N)}\left\{\exp\left(j\pi\left(\nu-n/N\right)\right)-\exp\left(-j\pi\left(\nu-n/N\right)\right)\right\}}=$$

$$=\exp\left(-j\pi\left(\nu-n/N\right)(N-1)\right)\frac{\sin\left(\pi\left(\nu-n/N\right)N\right)}{\sin\left(\pi\left(\nu-n/N\right)\right)}$$

Подставив формулу для суммы в связь, получаем интерполяционную формулу восстановления континуальной функции $X(\nu)$ по коэффициентам ДПФ $X[n]$:

$$X(\nu)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n]\frac{\sin\left(\pi\left(\nu-n/N\right)N\right)}{\sin\left(\pi\left(\nu-n/N\right)\right)}\exp\left(-j\pi\left(\nu-n/N\right)(N-1)\right).$$

Заметим, что для последовательностей конечной длительности ДВПФ непрерывно, а значит для интерполяционной формулы выполняется

$$\lim_{\nu\to n/N} X(\nu)=X[n].$$

ДПФ периодических последовательностей

ДПФ периодических последовательностей

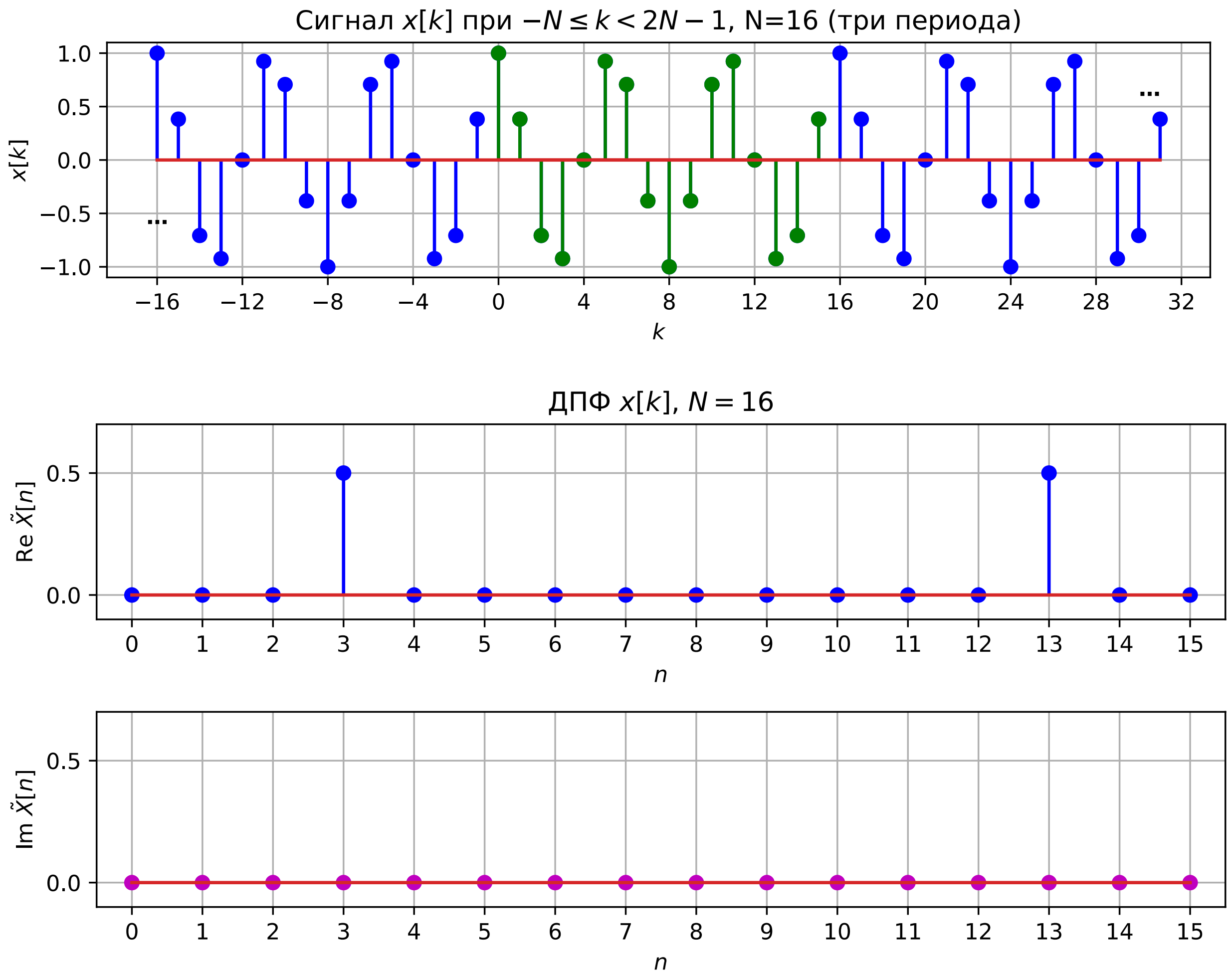
Форма записи ДПФ

Пусть $x[k]$, $k \in Z$ — периодическая последовательность отсчетов сигнала с периодом N. Тогда прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательности $x[k]$ определяется следующим образом

$$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nk\right),$$

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n]\exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right).$$

$\tilde{X}[n]$ может рассматриваться как $N-$ точечная последовательность коэффициентов ДПФ (отсчетов ДПФ), где $n = 0, 1, \ldots, N-1$. $\tilde{X}[n]$ может также рассматриваться как периодическая последовательность с периодом N, $n \in Z$. В обратном преобразовании последовательность $x[k]$ также получится периодической.

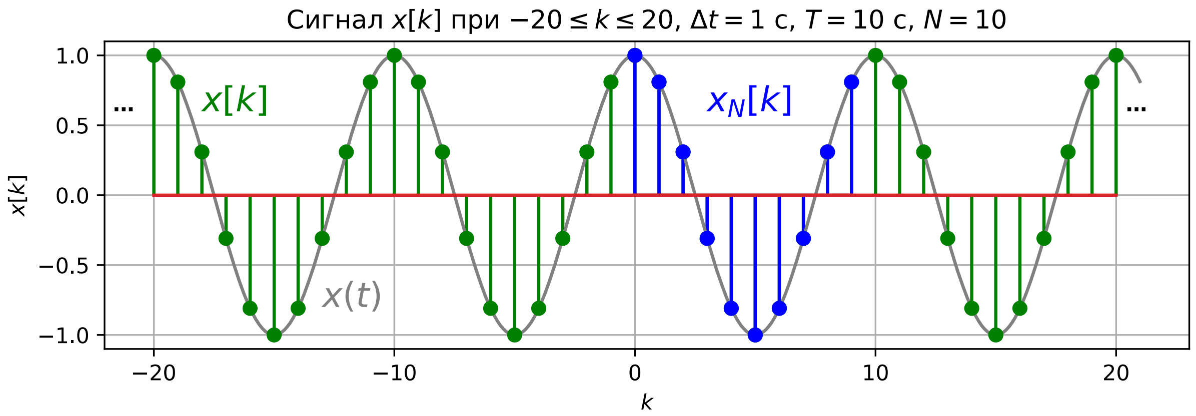


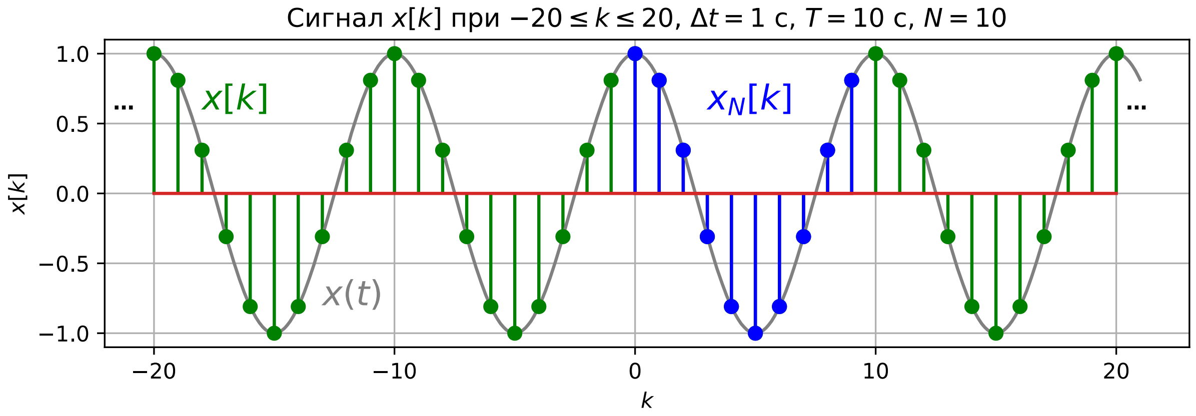
ДПФ периодических последовательностей

Связь между ДПФ и ДВПФ для периодических последовательностей.

Пусть аналоговый периодический сигнал $x(t)$ с периодом T дискретизован с шагом $\Delta t = T/N$. Тогда на одном периоде $x(t)$ будет содержаться N отсчетов (если крайний правый отсчет попадает на границу периода, то будем считать его относящимся к следующему периоду). Выделим для последовательности отсчетов $x[k]$ один период

$$x_N[k] = \begin{cases} x[k], 0 \le k \le N-1; \\ 0, \{k<0\} \cup \{k \ge N\}. \end{cases}$$





Пусть $x_N[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X_N(\nu)$. Последовательность $x[k]$ может быть представлена в виде дискретной сверки

$$x_N[k] \otimes \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-mN].$$

Причем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-mN] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{N}\right).$$

Тогда

$$X(\nu) = \frac{1}{N} X_N(\nu) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{N}\right).$$

Последовательность $x_N[k]$ имеет конечную длительность, является абсолютно суммируемой. $X_N(\nu)$ непрерывна.

ДПФ периодических последовательностей

$$X(\nu)=\frac{1}{N}X_N(\nu)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\nu-\frac{n}{N}\right).$$

При этом $X(\nu)$ (ДВПФ периодической последовательности $x[k]$) имеет дискретную структуру, которой в континуальной записи соответствует некоторый периодический набор δ-функции. Заметим, что для каждого слагаемого в сумме по свойствам δ-функции выполняется равенство

$$\frac{1}{N}X_N(\nu)\delta\left(\nu-\frac{n}{N}\right)=\frac{1}{N}X_N\left(\frac{n}{N}\right)\delta\left(\nu-\frac{n}{N}\right).$$

Введем периодическую функцию дискретного аргумента $\tilde{X}[n]$, значения которой будут соответствовать площадям дельта-функций в $X(\nu)$ в точках $\nu=n/N$:

$$X(\nu)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{X}[n]\,\delta\left(\nu-\frac{n}{N}\right).$$

При этом

$$\tilde{X}[n]=\frac{1}{N}X_N\left(\frac{n}{N}\right)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x[k]\exp(-j2\pi\frac{n}{N}k).$$

$$x[k]=\int_{-1/2}^{1/2}X(\nu)\exp(j2\pi\nu k)d\nu=\int_0^1 X(\nu)\exp(j2\pi\nu k)d\nu=$$

$$=\int_0^1 X_N(\nu)\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\nu-\frac{n}{N}\right)\exp(j2\pi\nu k)d\nu=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X_N(\frac{n}{N})\exp(j2\pi\frac{n}{N}k).$$

$$x[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{X}[n]\exp(j2\pi\frac{n}{N}k).$$

Получаем следующую пару формул

$$\tilde{X}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x[k]\exp(-j2\pi\frac{n}{N}k),$$

$$x[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{X}[n]\exp(j2\pi\frac{n}{N}k),$$

определяющую прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ). В ДПФ частотная (n) и временная (k) переменная дискретны, функция $\tilde{X}[n]$ периодична с периодом N, а в качестве главного периода для отсчетов ДПФ выбирают такой, на котором $n=0,\ldots,N-1$.

ДПФ периодических последовательностей

Пример. Предположим, что имеется периодическая последовательность $(\infty < k < +\infty)$

$$x[k] = \cos(2\pi \frac{3}{16} k).$$

Учитывая, что

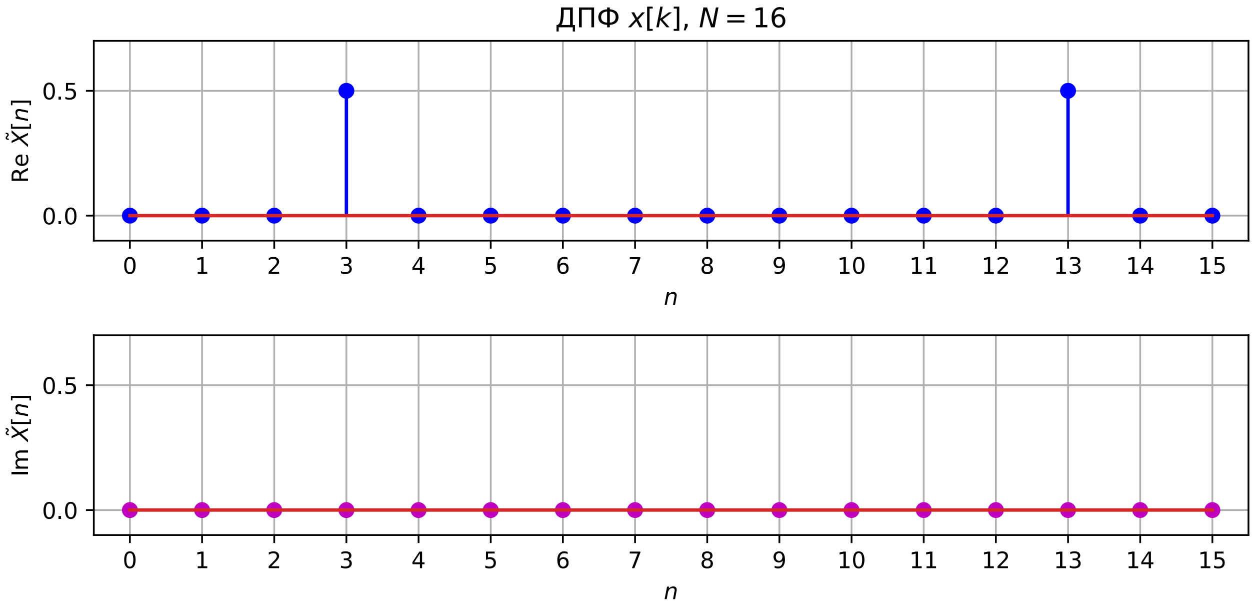
$$\cos(2\pi \frac{3}{16} k) = \frac{1}{2}\exp(j2\pi \frac{3}{16} k) + \frac{1}{2}\exp(-j2\pi \frac{3}{16} k),$$

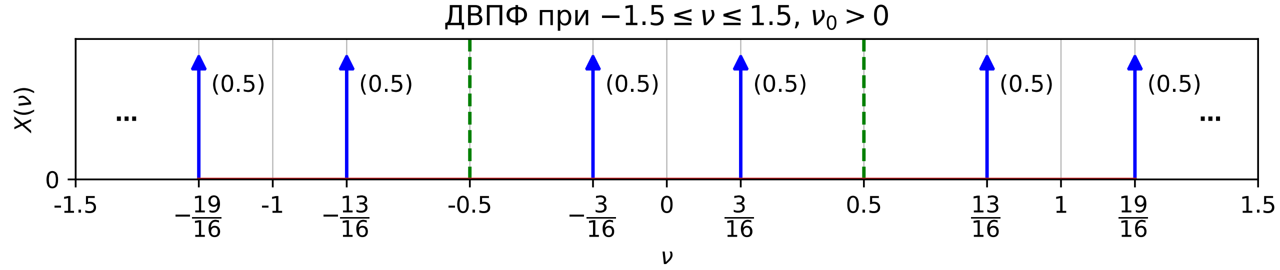
получаем для ДВПФ этой последовательности

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\delta(\nu - \frac{3}{16} - n) + \frac{1}{2}\delta(\nu + \frac{3}{16} - n).$$

$X(\nu)$ содержит две δ-функции с площадями $1/2$ на каждом периоде. Рассмотрим период $0 \le \nu < 1$ (правую крайнюю точку можем не включать из-за периодичности $X(\nu)$). На нем содержится две δ-функции в точках $\nu_1 = \frac{3}{16}$ и $\nu_2 = \frac{13}{16}$.

Последовательность имеет период $N = 16$ точек. Это означает, что можно установить значения 16-точечного ДПФ $\tilde{X}[3] = 1/2$, $\tilde{X}[13] = 1/2$, а в остальных точках главного периода $\tilde{X}[n] = 0$.





Пример. ДВПФ и окна

Пример.

Предположим, что нужно вычислить ДВПФ последовательности отсчетов $y[k]=x[k]w[k]$, где

$$x[k]=\cos(2\pi\frac{3}{16}k),$$

$w[k]$ — прямоугольное окно длиной $N=16$ отсчетов:

$$w[k]=\sum_{m=0}^{15}\mathbf{1}[k-m].$$

Решение. Заметим, что

$$W(\nu)=e^{-j(N-1)\pi\nu}\frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)},$$

$$X(\nu)=0.5\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\nu-\frac{3}{16}-m)+0.5\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\nu+\frac{3}{16}-m).$$

Способ 1. ДВПФ последовательности $Y(\nu)$ может быть представлено в виде циклической свертки

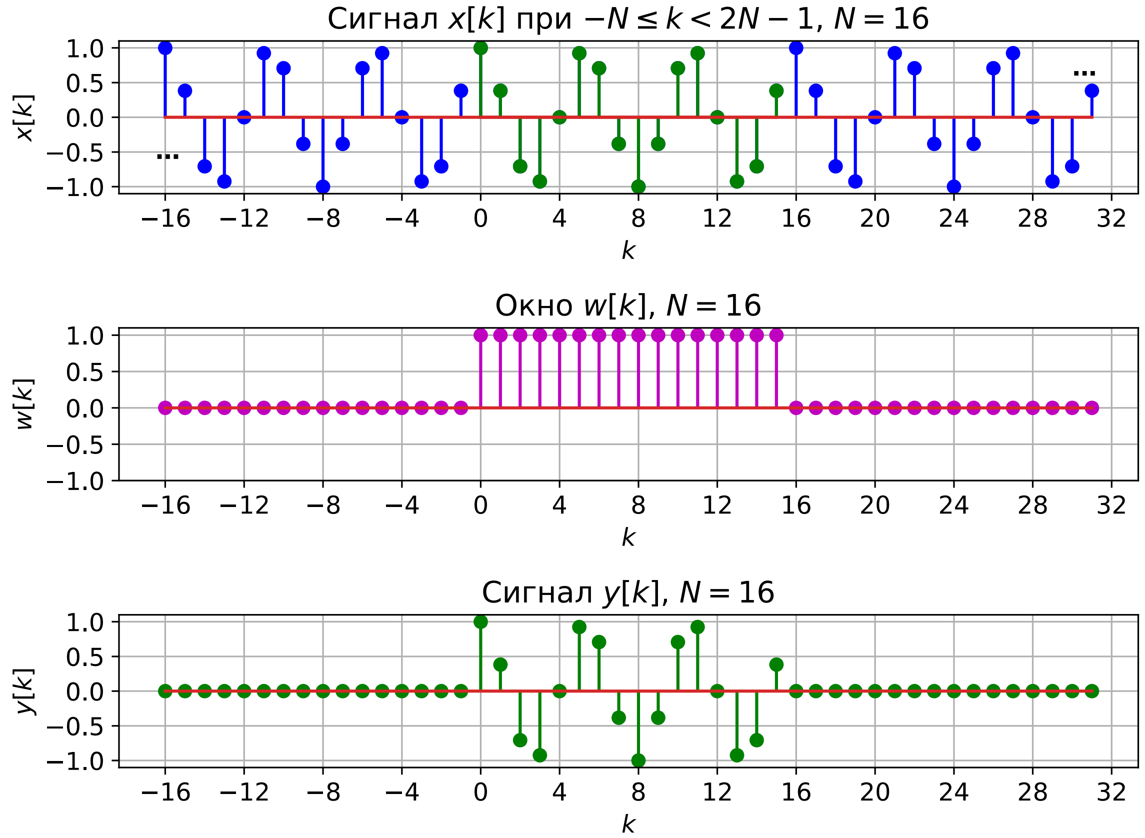
$$Y(\nu)=\int_{-1/2}^{1/2}X(\tilde{\nu})W(\nu-\tilde{\nu})d\tilde{\nu}=\int_{-1/2}^{1/2}W(\tilde{\nu})X(\nu-\tilde{\nu})d\tilde{\nu}$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции

$$\int_a^b W(\nu)\delta(\nu-\nu_1)d\nu=\begin{cases}W(\nu_1),\ a<\nu_1<b,\\0.5W(\nu_1),\ (\nu_1=a)\cup(\nu_1=b),\\0,\ (\nu_1<a)\cup(\nu_1>b),\end{cases}$$

получаем, что

$$Y(\nu)=0.5W(\nu-\frac{3}{16})+0.5W(\nu+\frac{3}{16}).$$



Пример. ДВПФ и окна

Способ 2. Аналогично через теорему смещения

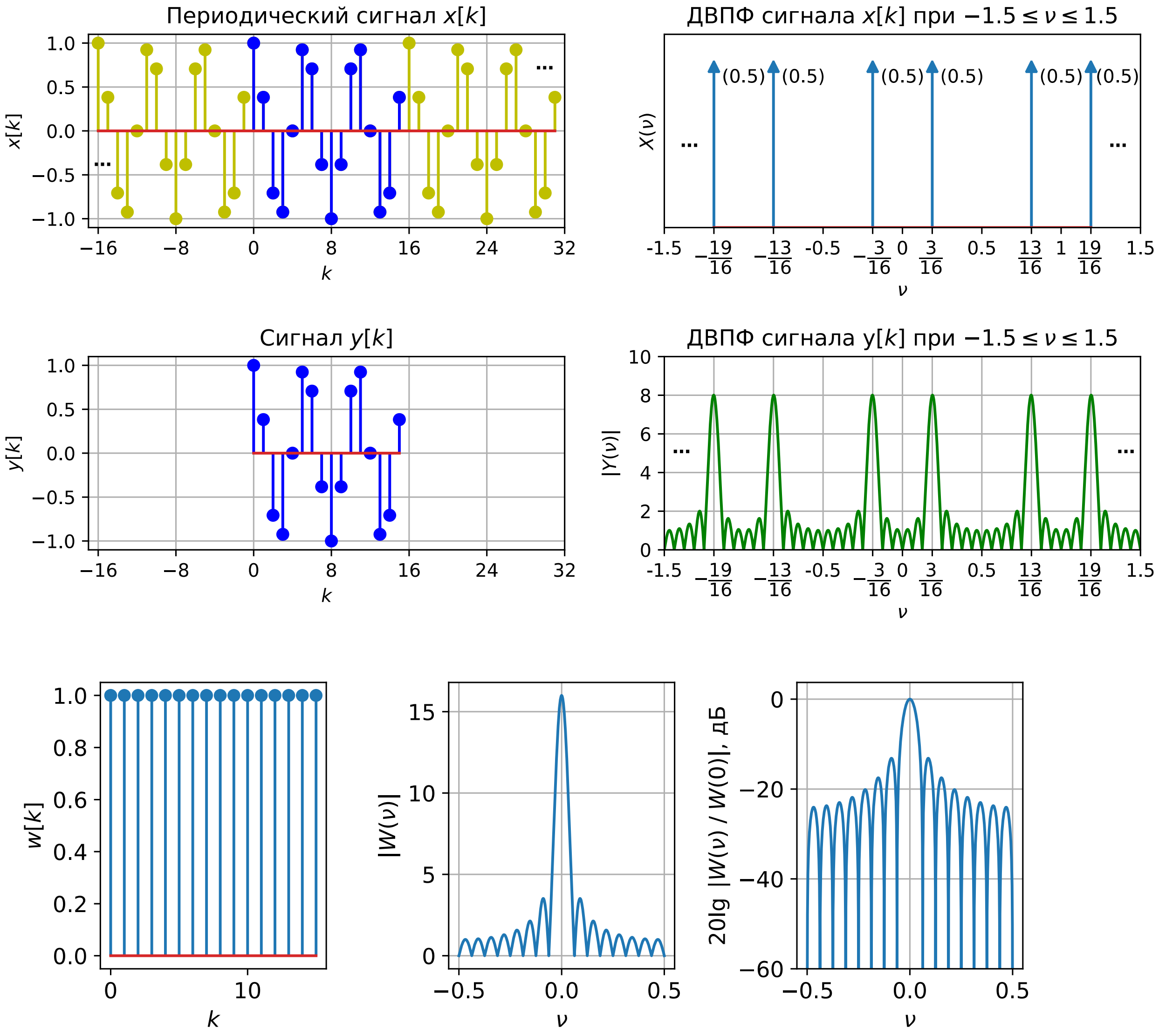
$$y[k]=\left(\frac{1}{2}\exp(j2\pi k\frac{3}{16})+\frac{1}{2}\exp(-j2\pi k\frac{3}{16})\right)w[k],$$

$$Y(\nu)=0.5W(\nu-\frac{3}{16})+0.5W(\nu+\frac{3}{16}).$$

ДПВФ последовательности $y[k]$

$$Y(\nu)=\frac{1}{2}\exp\left(-j(N-1)\pi(\nu-\frac{3}{16})\right)\frac{\sin(N\pi(\nu-\frac{3}{16}))}{\sin(\pi(\nu-\frac{3}{16}))}+$$

$$+\frac{1}{2}\exp\left(-j(N-1)\pi(\nu+\frac{3}{16})\right)\frac{\sin(N\pi(\nu+\frac{3}{16}))}{\sin(\pi(\nu+\frac{3}{16}))}.$$



Частотная ось ДПФ

Отчету N– точечного ДПФ с номером n в случае сигнала конечной длительности соответствует значение ДВПФ в точке $\nu = n / N$ по оси нормированных частот:

$$X(\nu)\big|_{\nu=n/N} = X[n].$$

Если рассматривается периодическая последовательность отсчетов, и коэффициенты ДПФ вычисляются по периоду последовательности, то весам дельта-функций в точках $\nu = n / N$ в ДВПФ соответствуют отсчеты ДПФ с номерами n:

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{X}[n]\,\delta\left(\nu - \frac{n}{N}\right).$$

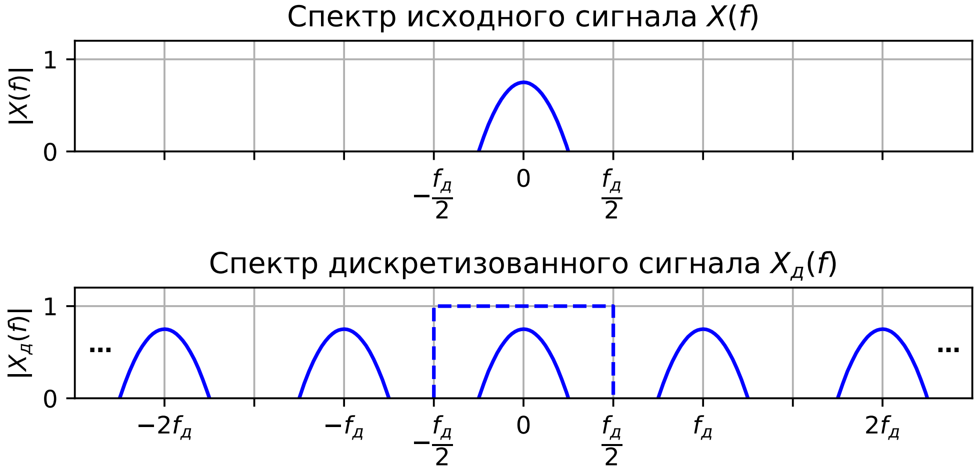
Эти два обстоятельства позволяют сопоставить отсчётам ДПФ частоты в спектре дискретизованного сигнала. Учитывая, что $\nu = f / f_д = f\Delta t$, где $f_д$ – частота дискретизации, Δt– шаг дискретизации, получаем, что отсчету с номером n соответствует частота $f = nf_д / N = n / (N\Delta t)$ Гц. Разрешение по оси частот при ДПФ анализе составляет $f_д / N$ Гц.

Частотная переменная и ее размерность	Связь частотной переменной с номером отсчета ДПФ	Разрешение по частоте	Диапазон изменения частоты, соответствующий отсчетам $[0, N)$
f, [Гц]	$f = \dfrac{nf_д}{N}$	$\Delta f = \dfrac{f_д}{N}$	$[0, f_д)$
ω, [рад/с]	$\omega = \dfrac{n\omega_д}{N}$	$\Delta\omega = \dfrac{\omega_д}{N}$	$[0, \omega_д)$
ν, безразмерная	$\nu = \dfrac{n}{N}$	$\Delta\nu = \dfrac{1}{N}$	$[0,1)$
θ, [рад]	$\theta = 2\pi\dfrac{n}{N}$	$\Delta\theta = \dfrac{2\pi}{N}$	$[0, 2\pi)$

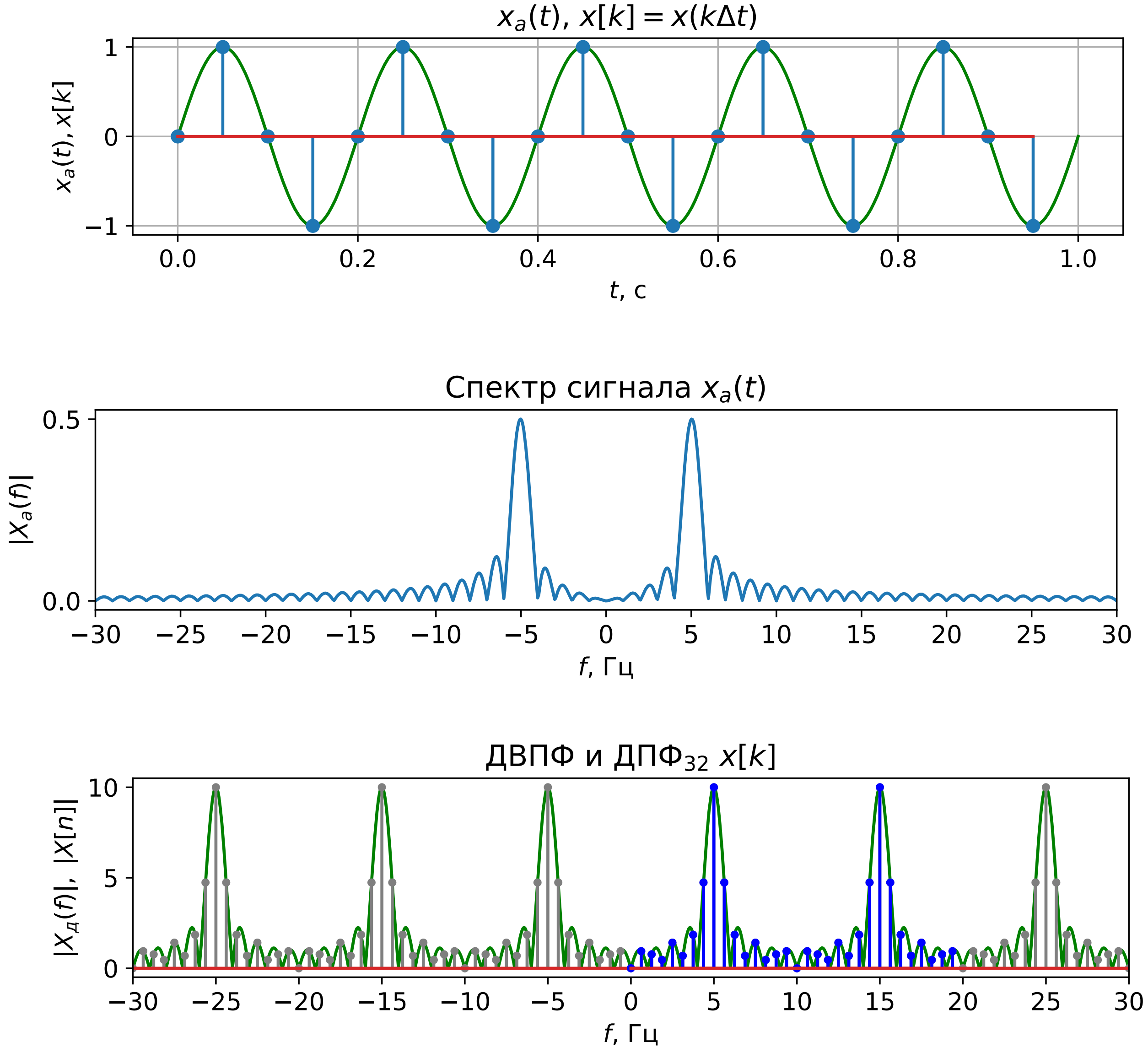
В таблице ниже рассмотрены основные способы введения частотной оси для отсчетов ДПФ.

Частотная ось ДПФ

Заметим, что $f = nf_д / N$ Гц – это частота в спектре дискредитированного сигнала, который при отсутствии наложения спектров образуется путем периодического продолжения (повторения) спектра исходного аналогово сигнала с периодом, равным частоте дискретизации ($f_д$ в случае оси в Гц или 1 в случае оси нормированных частот). Это означает, что отсчет ДПФ с номером n будет соответствовать в спектре аналогового сигнала частоте $f \in [-f_д / 2; \ f_д / 2]$, такой, что $f = (n + mN) f_д / N$, где m – целое число.



Пример.



Пояснения к примеру.

Рассмотрим для $f_0 = 5$ Гц сигнал длительностью 1 с вида

$$x_a(t) = \sin(2\pi f_0 t),\ 0 \le t < 1.$$

Выберем частоту дискретизации $f_д = 20$ Гц ($\Delta t = 0{,}05$ с)

Последовательность отсчетов дискретизованного сигнала

$$x[k] = x_a(k\Delta t) = \sin\left(2\pi \frac{f_0}{f_д} k\right).$$

Спектр $X_д(f)$ дискретизованного сигнала связан со спектром $X_a(f)$ аналогового сигнала соотношением

$$X_д(f) = \frac{\mathrm{T}}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_а(f - mf_д).$$

где T определено соотношением $x[k] = \mathrm{T} x_a(k\Delta t)$. Если бы эффекта наложения не было, то $X_д(f)$ и $X_a(f)$ совпадали бы на интервале $\left[-f_д/2,\ f_д/2\right]$, т.е. от -10 Гц до 10 Гц.

Заметим, что отсчеты ДПФ размерности $N = 32$ для $n = 0, 1, \ldots, N-1$ находятся на полуинтервале $[0,\ f_д)$.