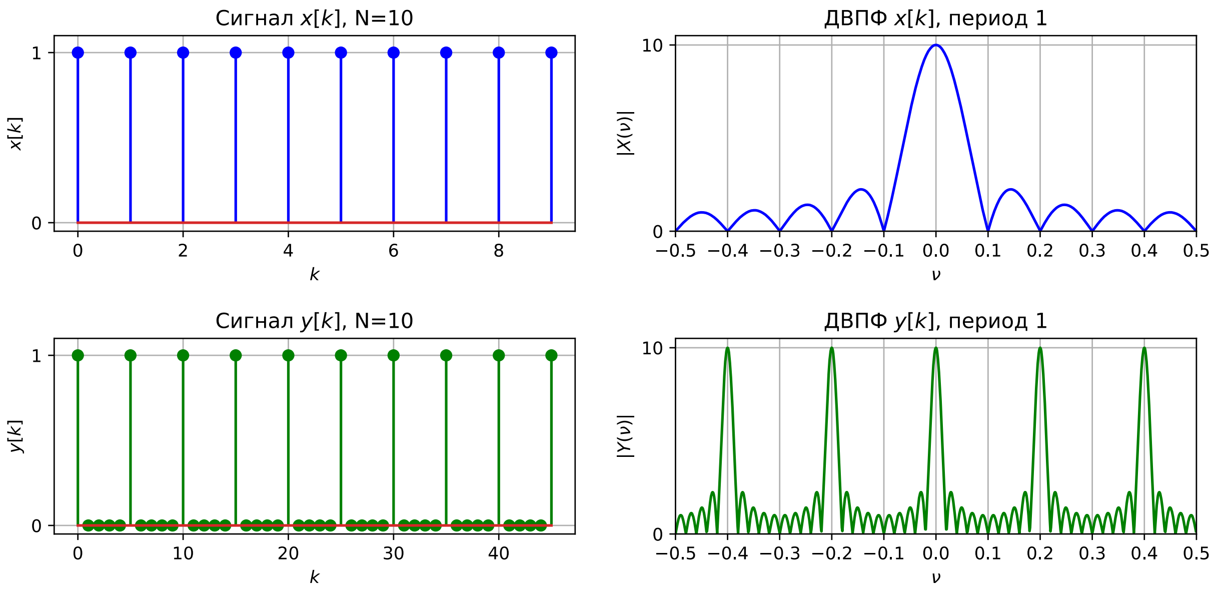
# Лабораторная работа №2 «Дискретное и дискретное во времени преобразования Фурье (ДВПФ, ДПФ)»

## Модуль 1. Основные свойства ДВПФ.

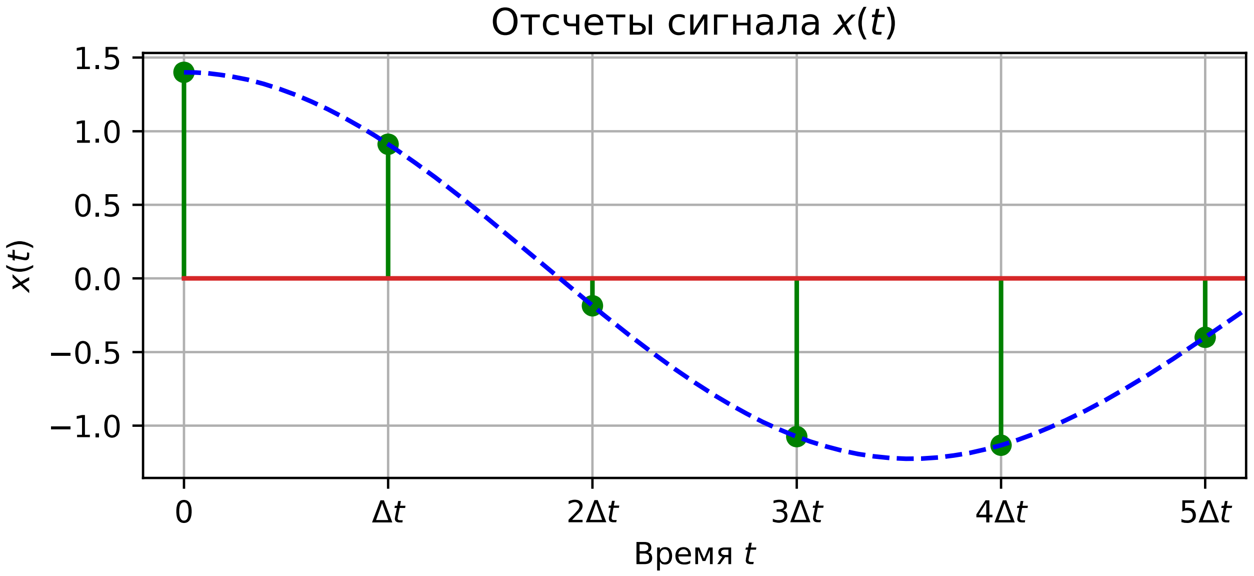
- Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов
- Различные формы записи ДВПФ
- Свойства ДВПФ



# Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов

## Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ)

### Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов




Пусть есть последовательность выборок $x(k\Delta t)$, некоторого аналогового сигнала $x(t)$, где $\Delta t$ — шаг дискретизации — интервал времени между каждой парой соседних эквидистантных отсчетов, $k \in Z$ — номер отсчета.

$f_{\text{д}} = 1/\Delta t$ — частота дискретизации — величина, обратная шагу дискретизации (размерность [Гц]=[с$^{-1}$]). Будем считать, что спектр исходного аналогового сигнала ограничен интервалом $\left[-f_{\text{д}}/2;\ f_{\text{д}}/2\right]$, а соответственно при дискретизации не наблюдается эффект наложения спектров ( $f_{\text{д}} > 2f_{\text{в}}$).

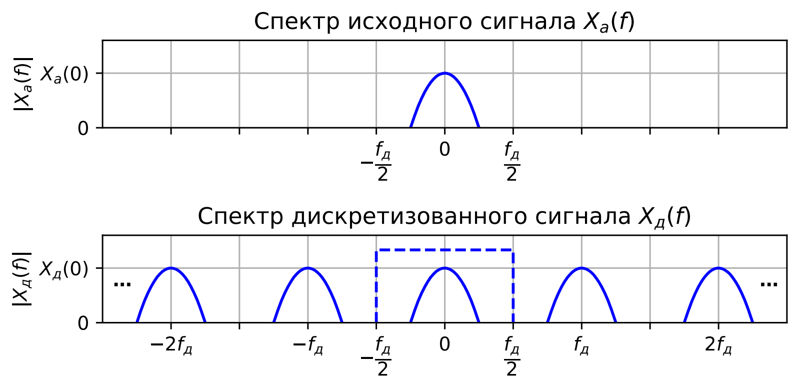
Рассмотрим последовательность отсчетов (дискретный сигнал) $x[k]$, которую будем определять через выборки следующим образом

$$x[k] = \mathrm{T}x(k\Delta t),$$

где $\mathrm{T} = \Delta t$. Как ранее было установлено, при $\mathrm{T} = \Delta t$ спектр дискретизованного сигнала $x[k]$ представляет собой периодическое повторение исходного спектра $X_{\text{а}}(f)$ аналогового сигнала $x(t)$ с периодом, равным частоте дискретизации $f_{\text{д}}$:

$$X_{\text{д}}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{\text{а}}(f - nf_{\text{д}}).$$

# Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов




$$X_{\text{д}}(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{\text{a}}(f-nf_{\text{д}}).$$

Необходимая спектральная информация будет содержаться в полосе $\left[-f_{\text{д}}/2;\, f_{\text{д}}/2\right]$. Теперь оценим спектр исходного сигнала по его выборкам в этой полосе.

Континуальная запись дискретного сигнала $x[k]$ в данном случае

$$x_{\text{д}}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t-k\Delta t).$$

Вычислим его спектр (преобразование Фурье)

$$X_{\text{д}}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x_{\text{д}}(t)\exp(-j2\pi f t)dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t-k\Delta t)\exp(-j2\pi f t)dt=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-k\Delta t)\exp(-j2\pi f t)dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi fk\Delta t),$$

Таким образом, спектр дискретного сигнала определяется через его отсчёты по формуле

$$X_{\text{д}}(f)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi fk\Delta t). \qquad (1)$$

Эта формула определяет прямое дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). Учитывая, что (1) представляет собой ряд Фурье для периодической функции $X_{\text{д}}(f)$[1], получаем, что отсчётные значения дискретного сигнала соответствуют коэффициентам Фурье в этом ряде:

$$x[k]=c_{-k}=\frac{1}{f_{\text{д}}}\int_{-f_{\text{д}}/2}^{f_{\text{д}}/2} X(f)\exp(j2\pi fk\Delta t)df. \qquad (2)$$

---

1 *Напоминание. Для* $2l$ *- периодической функции* $f(x)$*, абсолютно интегрируемой на интервале* $(-l;l)$ *ряд Фурье по системе функций* $\phi_m(x)=\exp(jm\frac{\pi}{l}x)$*,* $m\in Z$*:* $f(x)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m\exp(jm\frac{\pi}{l}x)$*, где коэффициенты Фурье* $c_m=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\exp(-jm\frac{\pi}{l}x)dx$.

# Различные формы записи ДВПФ

**Различные формы записи ДВПФ**

Итак, мы установили, что пара дискретного во времени преобразования Фурье (ДВПФ) имеет вид

$$X(f)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi f k\Delta t),$$

$$x[k]=\frac{1}{f_д}\int_{-f_д/2}^{f_д/2} X(f)\exp(j2\pi f k\Delta t)df.$$

Введем нормированные частоты $\nu = f / f_д = f\Delta t$. Тогда пара ДВПФ может быть записана следующим образом:

$$X(\nu)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi\nu k),$$

$$x[k]=\int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)\exp(j2\pi\nu k)d\nu.$$

Если принять $2\pi f=\omega$, а частоту дискретизации взять в рад/с $\omega_д = 2\pi/\Delta t$, то

$$X(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j\omega k\Delta t),$$

$$x[k]=\frac{\Delta t}{2\pi}\int_{-\omega_д/2}^{\omega_д/2} X(\omega)\exp(j\omega k\Delta t)d\omega.$$

Приняв $\theta=2\pi\nu$ (нормированный угол в радианах), получаем

$$X(\theta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j\theta k),$$

$$x[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\theta)\exp(j\theta k)d\theta.$$

| Частотная переменная | Размерность | Период повторения спектра | |
|---|---|---|---|
| $f$ | Гц | $f_Д=1/\Delta t$ | $[-f_Д/2; f_Д/2]$ |
| $\omega=2\pi f$ | рад/с | $\omega_Д=2\pi/\Delta t$ | $[-\omega_Д/2;\omega_Д/2]$ |
| $\nu=f/f_Д$ | безразмерная | $1$ | $[-0{,}5;0{,}5]$ |
| $\theta=2\pi f/f_Д$ | рад | $2\pi$ | $[-\pi;\pi]$ |

# Различные формы записи ДВПФ

**Пример.** Рассмотрим в качестве примера последовательность единичных импульсов

$$x[k]=\mathbf{1}[k+1]+\mathbf{1}[k]+\mathbf{1}[k-1],$$

где $\mathbf{1}[k]$ — единичный импульс, определяемый как

$$\mathbf{1}[k]=\begin{cases}1, k=0;\\ 0, k\neq 0.\end{cases}$$

ДВПФ $x[k]$ в нормированных частотах $\nu$

$$X(\nu)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]e^{-j2\pi\nu k}=\sum_{k=-1}^{1}x[k]e^{-j2\pi\nu k}=$$

$$=x[-1]e^{j2\pi\nu}+x[0]e^{0}+x[1]e^{-j2\pi\nu}=$$

$$=\exp(j2\pi\nu)+1+\exp(-j2\pi\nu)=1+2\cos(2\pi\nu).$$

Аналогично для частот в герцах ( $f$ )

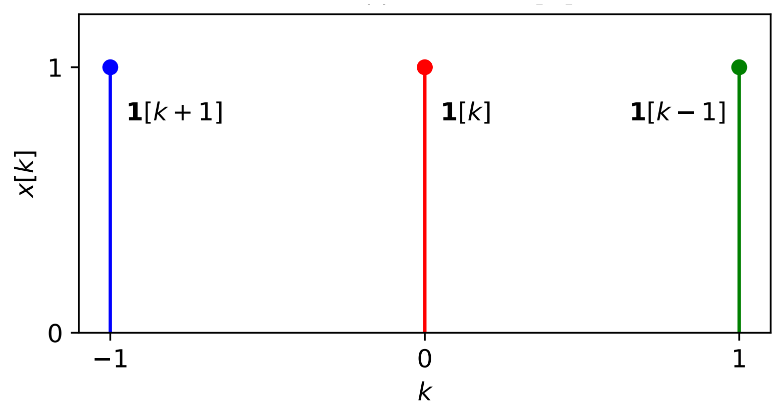
$$X(f)=1+2\cos(2\pi f\Delta t),$$

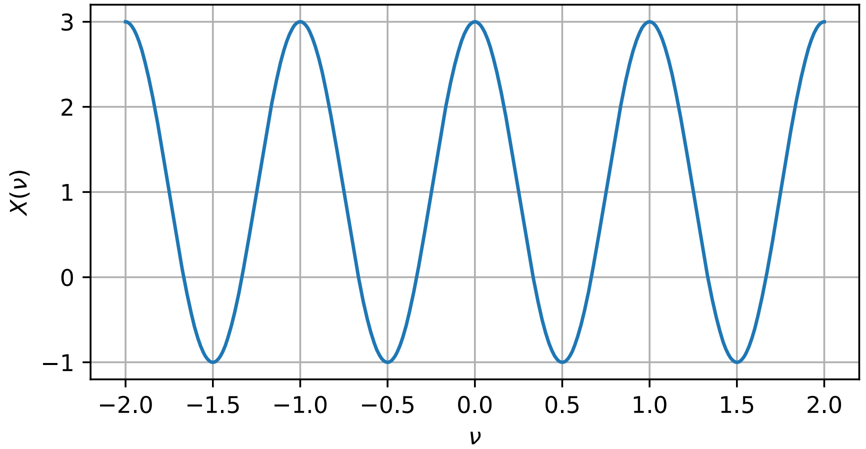
для частот в рад/с ($\omega=2\pi f$ )

$$X(\omega)=1+2\cos(\omega\Delta t),$$

для $\theta=2\pi\nu$

$$X(\theta)=1+2\cos(\theta).$$




Функция $X(\nu)$ периодическая и в силу четной симметрии $x[k]$ относительно нуля действительная.

# Свойства ДВПФ

## Свойства ДВПФ

### 1) Линейность

Если $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)$ и $y[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} Y(\nu)$, то

$\alpha x[k] + \beta y[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \alpha X(\nu) + \beta Y(\nu)$, где $\alpha$, $\beta$ — фиксированные числа.

Это свойство следует непосредственно из соответствующих свойств интеграла и суммы.

### 2) Теорема запаздывания

Если

$$x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu), \text{ то } x[k-l] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)\exp(-j2\pi\nu l).$$

где $x[k-l]$ — это сигнал, запаздывающий по времени относительно сигнала $x[k]$ на $l$ отсчетов в случае $l>0$ и опережающий сигнал $x[k]$ на $-l$ отсчетов в случае $l<0$.

Стоит отметить, что $|X(\nu)|$ для запаздывающего и исходного сигнала одинаков.

Докажем свойство. Для этого возьмем обратное ДВПФ для правой части выражения:

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)\exp(-j2\pi\nu l)\exp(j2\pi\nu k)d\nu =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)\exp(j2\pi\nu(k-l))d\nu = x[k-l].$$

**Пример**

$$\mathbf{1}[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} 1$$

$$\mathbf{1}[k-1] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} e^{-j2\pi\nu}$$

$$\mathbf{1}[k+1] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} e^{j2\pi\nu}$$

**3) Теорема смещения**

Если $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)$, то $x[k]\exp(j2\pi\nu_0 k) \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu-\nu_0)$.

Умножение сигнала на комплексную экспоненту вида $\exp(j2\pi\nu_0 k)$, $\nu_0 \in R$ приводит к сдвигу спектральной функции вдоль оси частот на $\nu_0$ вправо в случае $\nu_0 > 0$ и на $-\nu_0$ влево в случае $\nu_0 < 0$.

**Пример.**

$$y[k] = x[k]\exp(j2\pi\nu_0 k), \text{где } x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k-m].$$

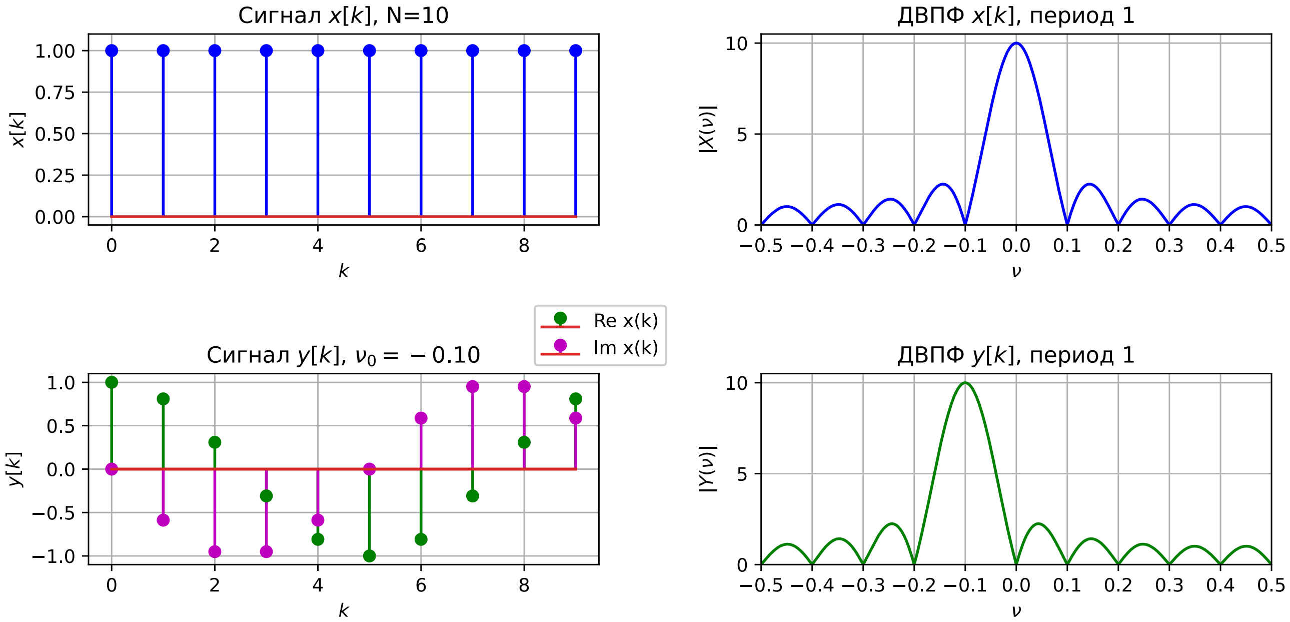
$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi\nu k) =$$

$$= \frac{1-\exp(-j2\pi\nu N)}{1-\exp(-j2\pi\nu)} =$$

$$= \frac{2j}{2j}\frac{e^{-j\pi\nu N}}{e^{-j\pi\nu}}\frac{(e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N})}{(e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu})} = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\exp(-j(N-1)\pi\nu).$$

$$|X(\nu)| = \left|\frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\right|.$$

$$Y(\nu) = X(\nu-\nu_0) = \frac{\sin(N\pi(\nu-\nu_0))}{\sin(\pi(\nu-\nu_0))}\exp(-j(N-1)\pi(\nu-\nu_0))$$



# Свойства ДВПФ

## 4) Равенство Парсеваля

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 d\nu$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y^*[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)Y^*(\nu)d\nu$$

**Пример.**

Предположим, что имеется финитная последовательность

$x[k]=\{1;\ \underset{k=0}{1};\ 1\}$. Тогда $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = 3$. При этом

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j2\pi\nu k} = x[-1]e^{j2\pi\nu} + x[0]e^{0} + x[1]e^{-j2\pi\nu} =$$

$$= \exp(j2\pi\nu) + 1 + \exp(-j2\pi\nu) = 1 + 2\cos(2\pi\nu).$$

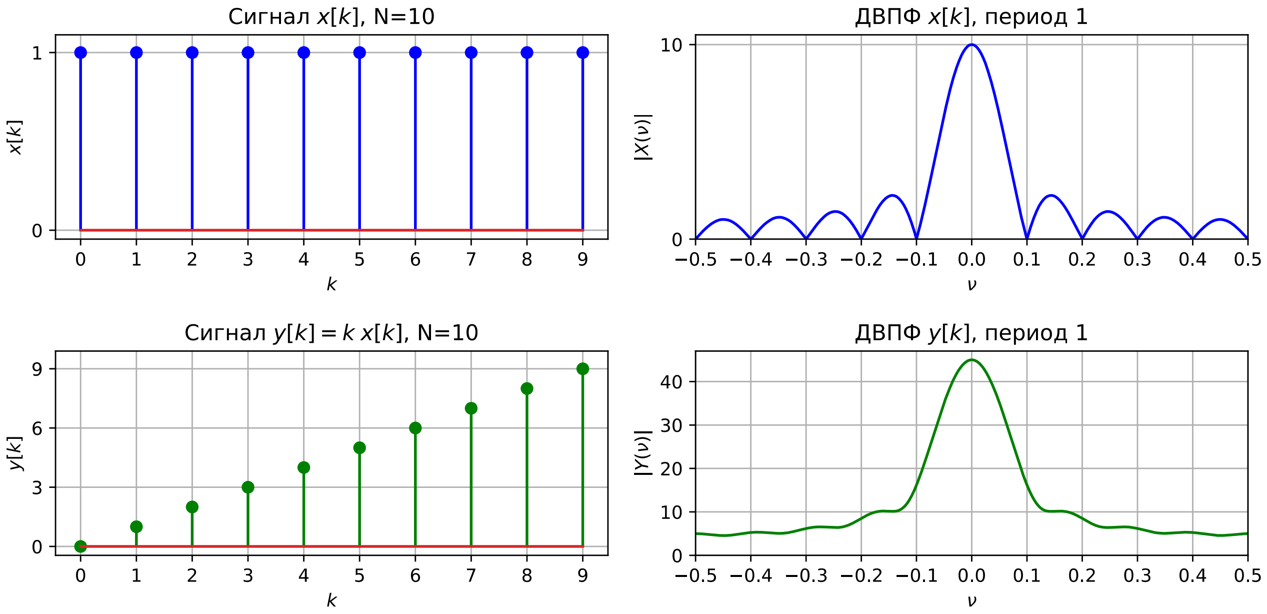
$$\int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 d\nu = \int_{-1/2}^{1/2} |1+2\cos(2\pi\nu)|^2 d\nu = 3.$$

## 5) Умножение на $k$ и дифференцирование по частоте

Если $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)$, то $y[k] = kx[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \dfrac{j}{2\pi}\dfrac{dX(\nu)}{d\nu}$.

**Пример.**

$$x[k] = \sum_{m=0}^{9} \mathbf{1}[k-m].$$



**6) Изменение масштаба**

Если $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)$, то $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\mathbf{1}[k-mL] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu L)$.

Для того, чтобы доказать свойство, вычислим ДВПФ для последовательности в левой части.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\mathbf{1}[k-mL]\exp(-j2\pi\nu k)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbf{1}[k-mL]\exp(-j2\pi\nu k)=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\exp(-j2\pi(\nu L)m)=X(\nu L).$$

**Пример**

Рассмотрим последовательность из 10 единичных импульсов.

$$x[k]=\sum_{m=0}^{N-1}\mathbf{1}[k-m].$$

$$X(\nu)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi\nu k)=\sum_{k=0}^{N-1}\exp(-j2\pi\nu k)=$$

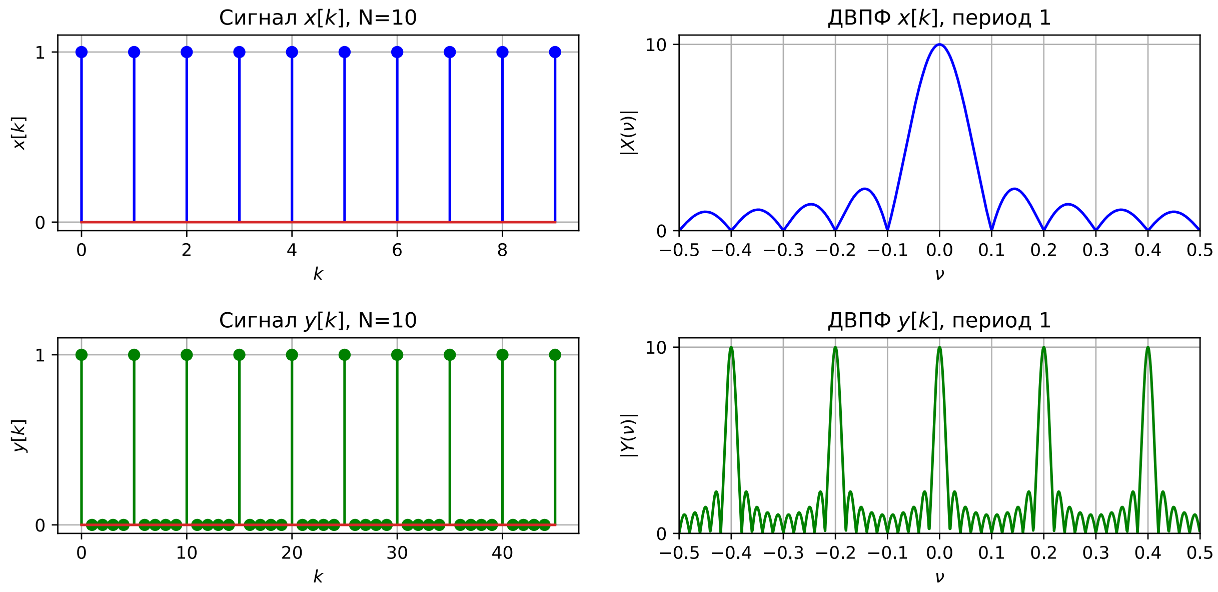
$$=\frac{1-\exp(-j2\pi\nu N)}{1-\exp(-j2\pi\nu)}=$$

$$=\frac{e^{-j\pi\nu N}}{e^{-j\pi\nu}}\frac{(e^{j\pi\nu N}-e^{-j\pi\nu N})}{(e^{j\pi\nu}-e^{-j\pi\nu})}=\frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\exp(-j(N-1)\pi\nu).$$

$$|X(\nu)|=\left|\frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\right|.$$

Между каждой парой отсчетов добавим $L-1$ нулевой отсчет. Тогда модуль ДВПФ получившейся последовательности

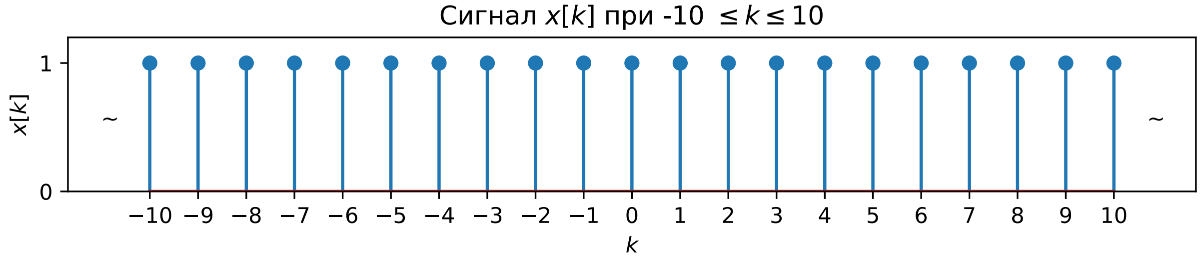
$$|X_L(\nu)|=\left|\frac{\sin(10\pi\nu L)}{\sin(\pi\nu L)}\right|.$$

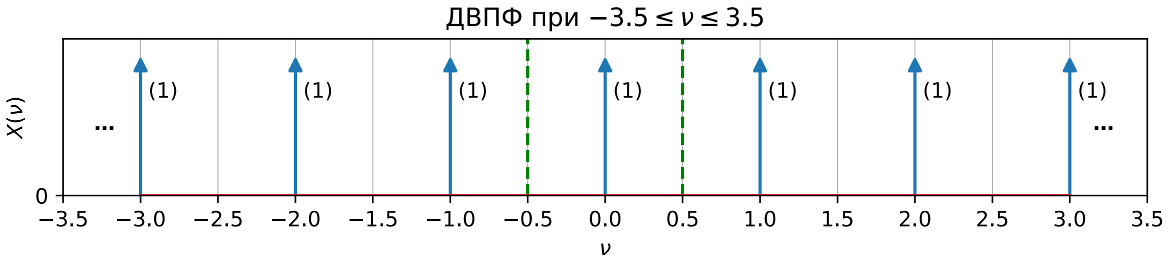


## 7) ДВПФ периодических последовательностей

### а) последовательность единичных импульсов с периодом 1

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu-n)$$




Вычислим ДВПФ для последовательности $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m]$.

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m]\right)\exp(-j2\pi\nu k) =$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m]\exp(-j2\pi\nu k).$$

$$X(\nu) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu m).$$

Заметим, что $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu m)$ — это ряд Фурье для периодической (по частоте) последовательности $\delta$-функций с периодом $1$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu-n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{-m}\exp(-j2\pi\nu m),$$

где коэффициенты Фурье

$$C_{-m} = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(\nu)\exp(j2\pi\nu m)d\nu = e^{0} = 1.$$

Тогда получаем, что

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu-n).$$

**б) Периодическая последовательность единичных импульсов с периодом $L$.**

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-mL] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu-\frac{n}{L}\right)$$

Найдем ДВПФ для последовательности $x[k]=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-mL]$.

Используя свойство об изменении масштаба

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\mathbf{1}[k-mL] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu L),$$ из

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu-n)$$ получаем

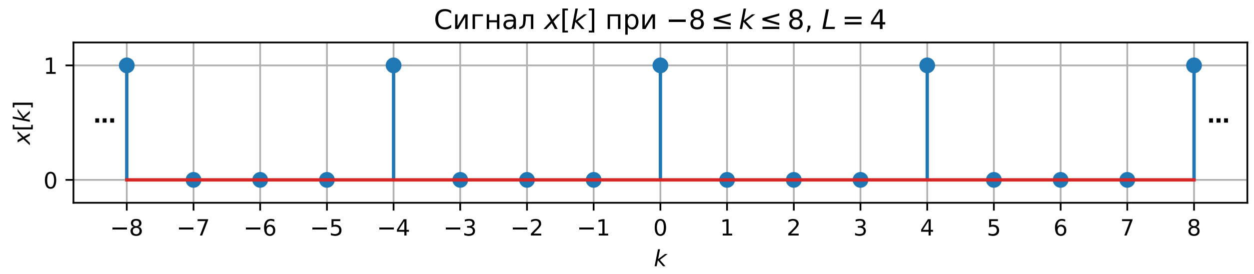
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-mL] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu L-n)$$

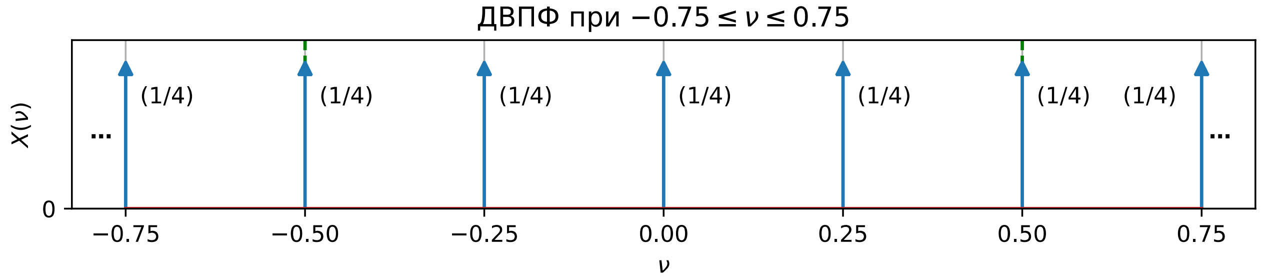
Воспользовавшись свойством $\delta$-функции

$$\delta(a\nu-b)=\frac{1}{|a|}\delta\left(\nu-\frac{b}{a}\right),$$

получаем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-mL] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu-\frac{n}{L}\right)$$

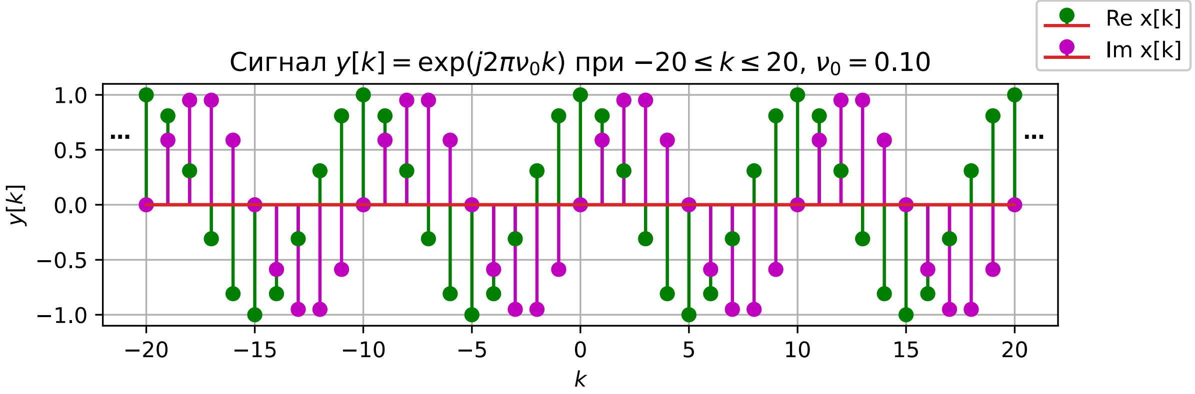


## в) Гармонические сигналы

$$\exp(j2\pi\nu_0 k), -\infty < k < +\infty \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$

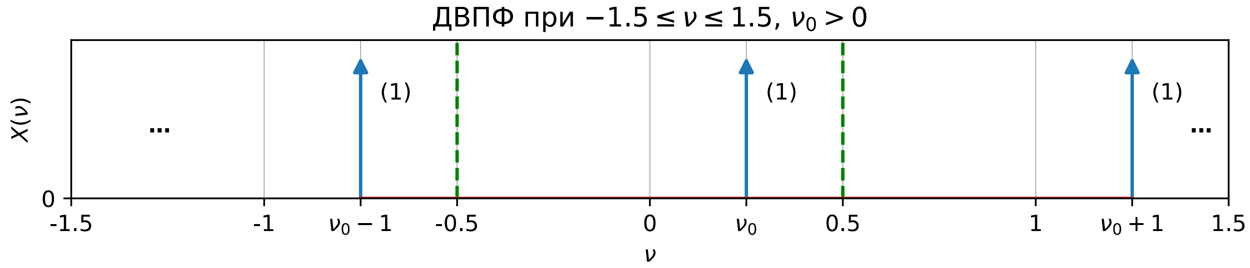
$$y[k] = \exp(j2\pi\nu_0 k)$$




Если $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)$, то $x[k]\exp(j2\pi\nu_0 k) \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu - \nu_0)$. (теорема смешения для ДВПФ). При этом $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n)$. Получаем, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m]\exp(j2\pi\nu_0 k) \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$

$$\exp(j2\pi\nu_0 k), -\infty < k < +\infty \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$




## 8) Теорема о свертке во временной области.

Если $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)$ и $y[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} Y(\nu)$, то

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[k-m] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)Y(\nu).$$

В левой части стоит дискретная свертка сигналов, в правой — произведение спектров.

## 9) Теорема о свертке в частотной области

Если $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)$ и $y[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} Y(\nu)$, то

$$x[k]y[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{\nu})Y(\nu - \tilde{\nu})d\tilde{\nu}.$$

В левой части стоит произведение сигналов, в правой -- циклическая свертка спектров.