Лабораторная работа №2 «Дискретное и дискретное во времени преобразования Фурье (ДВПФ, ДПФ)»

Курс: «Радиофизическая лаборатория» ФРКТ МФТИ

Данная лабораторная работа посвящена изучению дискретного и дискретного во времени преобразования Фурье. Эти два преобразования предназначены для сигнала с дискретным временем. Они позволяют получить спектр или оценки спектра для таких сигналов. В дальнейшем умение работать с этими спектрами позволит проводить спектральный анализ состава сигнала и его цифровую фильтрацию.

Лабораторная работа состоит из трех частей, каждая из которых рассчитана на одно занятие (4 ак. часа). Задания по моделированию выполняются с помощью библиотек языка программирования Python 3 (NumPy, SciPy, Matplotlib) либо в среде MATLAB.

Задание к допуску

Задание к допуску основано на теоретических частях трех занятий.

№1. Запишите пару формул дискретного во времени преобразования Фурье (ДВПФ) в нормированных частотах (в переменных ν). Пользуясь формулой прямого преобразования, определите ДВПФ следующих последовательностей:

а) $h[k]=\mathbf{1}[k]-\mathbf{1}[k-1]$ (импульсная характеристика простого дискретного дифференциатора),

б) $w[k]=\sum\limits_{m=0}^{N-1}\mathbf{1}[k-m]$, $N=10$ (прямоугольное окно длиной в N отсчетов),

в) $h_3[k]=\frac{1}{3}\mathbf{1}[k]+\frac{1}{3}\mathbf{1}[k-1]+\frac{1}{3}\mathbf{1}[k-2]$ (импульсная характеристика фильтра скользящего среднего второго порядка).

Для получившихся спектральных плотностей $X(\nu)=|X(\nu)|e^{j\varphi(\nu)}$.определите модуль $|X(\nu)|$ и фазовую часть $\varphi(\nu)=arctg\dfrac{\operatorname{Im}X(\nu)}{\operatorname{Re}X(\nu)}$.

№2. Определите ДВПФ $X(\nu)$ и 16-точечное ДПФ $\tilde{X}[n]$ (с нормировкой $1/N$ в прямом преобразовании) следующих дискретных гармонических сигналов:

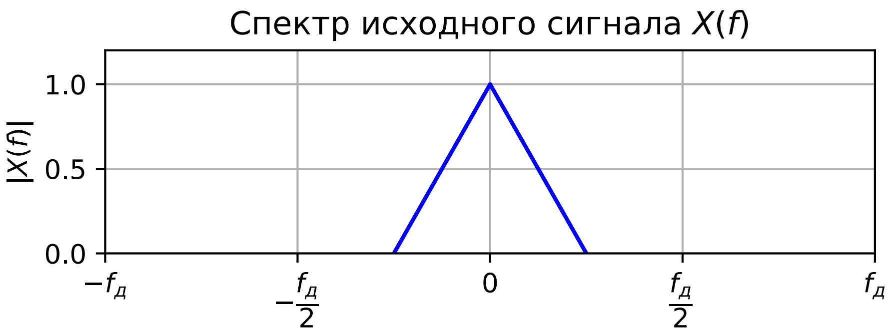
а) $x_1[k]=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\mathbf{1}\left[k-16m\right]$ (последовательность единичных импульсов с периодом 16),

б) $x_2[k]=\cos\left(2\pi\dfrac{5}{16}k\right)$ (косинусоида с относительной частотой $\nu_0=\dfrac{5}{16}$),

в) $x_3[k]=\sin\left(2\pi\dfrac{3}{16}k\right)$ (синусоида с относительной частотой $\nu_0=\dfrac{3}{16}$), г) $x_4[k] = \cos\left(2\pi\frac{5}{16}k\right) + \sin\left(2\pi\frac{3}{16}k\right)$.

Постройте графики действительной и мнимой части отсчетов ДПФ ($\operatorname{Re}\tilde{X}[n]$ и $\operatorname{Im}\tilde{X}[n]$), а также схематический график для ДВПФ с указанием весов дельта-функций. Сравните результаты. Указать, в чем заключается связь между ДВПФ и ДПФ для данных периодических последовательностей.

№3. Предположим, что спектр исходного сигнала для дискретизации был отличен от нуля лишь на интервале $\left[-\frac{f_д}{4}, \frac{f_д}{4}\right]$ где $f_д$ — частота дискретизации. График модуля спектра исходного сигнала изображен на рисунке ниже.



Установить, ли наблюдаться эффект наложения при дискретизации сигнала. Построить график модуля спектральной плотности дискретизованного сигнала.

№4. Пусть $x[k]$ — действительная последовательность конечной длительности, для которой известны отсчеты 10-точечного ДПФ $X[4] = 5 - j$, $X[0] = 5$ и $X[8] = 8 + j$. Указать все значения ДВПФ $X(\nu)$, которые можно установить из этих данных.

Модуль 1. Основные свойства ДВПФ

Первая часть лабораторной работы посвящена изучению дискретного во времени преобразования Фурье (ДВПФ). Оно отличается от преобразования Фурье тем, что сигнал в нем имеет форму функции дискретного времени $x[k]$, $k \in Z$. В этой части работы мы получим формулы ДВПФ, взяв преобразование Фурье от дискретизованного сигнала. Поскольку преобразование Фурье может быть применено для сигнала с континуальным временем $x(t)$, $t \in R$, нам потребуется также континуальная запись дискретизованного сигнала.

Теоретическая часть

Преобразование Фурье для дискретизованных сигналов

Спектр дискретизованного сигнала

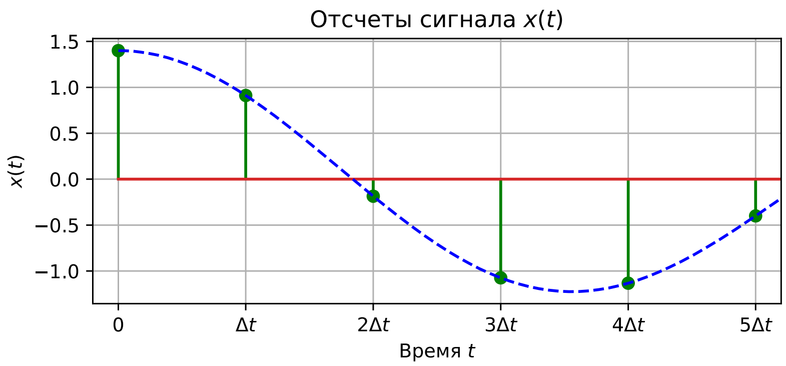
Рассмотрим способы описания дискретизованного сигнала, т.е. дискретного сигнала, получаемого из аналогового с помощью дискретизации.

1) Функция дискретного времени.

Это описание дискретного сигнала в виде последовательности отсчетов $x[k]$ в заданные моменты времени $k\Delta t$, $k \in Z$, где Δt — шаг дискретизации:

$$x[k] = \mathrm{T}x(k\Delta t),\ \ \mathrm{T} \in \{1;\ \ \Delta t\}$$

где T — константа с размерностью времени, равная единице или Δt. Выбор этой константы, как будет показано далее, влияет на связь между спектром дискретизованного и исходного сигнала.

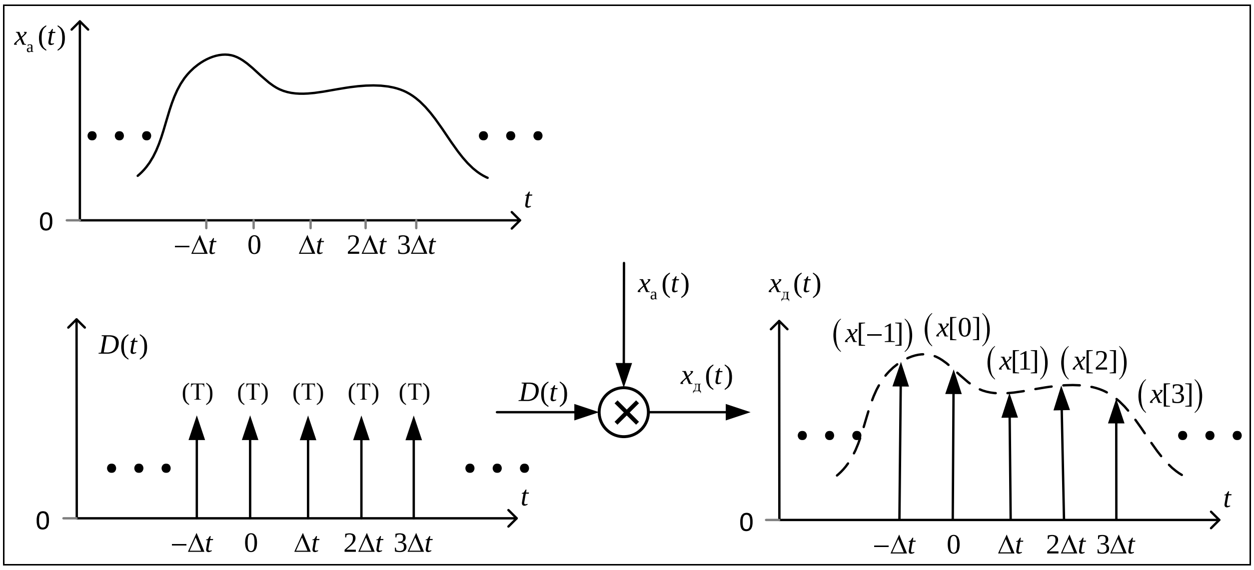


2) Функция непрерывного времени (континуальная запись).

$$x_{\text{д}}(t) = \mathrm{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - k\Delta t)$$

В этой записи дискретизованного сигнала представляется как результат умножения исходного аналогового сигнала $x(t)$ на идеальную функцию дискретизации, представляющую собой периодическую последовательность дельта-функций Дирака с площадями T

$$D(t) = \mathrm{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t).$$



В таком случае дискретизованный сигнал описывается последовательностью дельта-функций с площадями (весами) $x[k] = \mathrm{T}x(k\Delta t)$:

$$x_д(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{T}x(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t).$$

$$x_д(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - k\Delta t)$$

Определим спектр дискретизованного сигнала $X_д(f)$, зная спектр исходного аналогового сигнала до дискретизации $X(f)$. Воспользуемся континуальной формой записи дискретизованного сигнала

$$x_д(t) = \mathrm{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t) = D(t)x(t)$$

$$D(t) = \mathrm{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t).$$

Ряд Фурье для идеальной функции дискретизации

$$D(t) = \frac{\mathrm{T}}{\Delta t}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(jm\frac{2\pi}{\Delta t}t).$$

Таким образом, $x_{\text{д}}(t) = \dfrac{\mathrm{T}}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(jm\dfrac{2\pi}{\Delta t}t)x(t)$. Тогда по теореме смещения для преобразования Фурье:

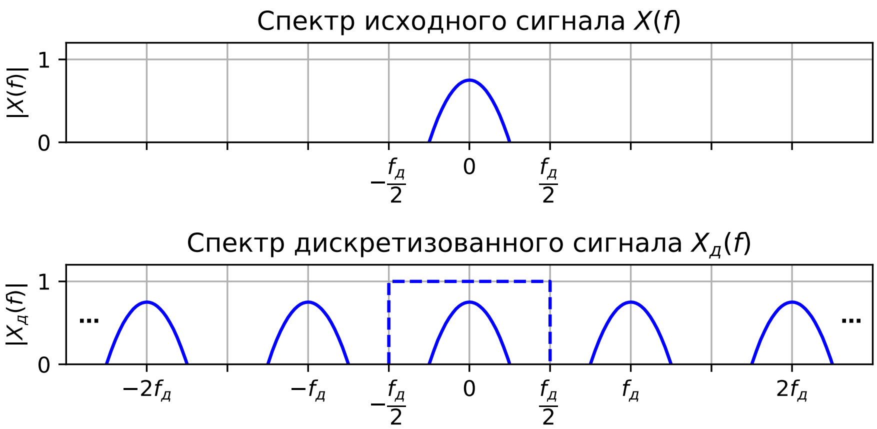
$$X_{\text{д}}(f) = \frac{\mathrm{T}}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_{\text{д}}).$$

При непосредственном взятии отсчетов $x[k] = x(k\Delta t)$ константа $\mathrm{T} = 1$, и спектр перед периодическим повторением масштабируется.

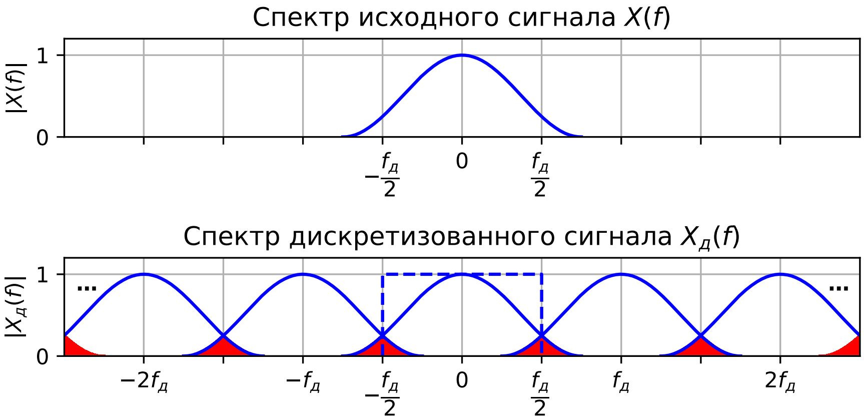
При $\mathrm{T} = \Delta t$ (когда $x[k] = \Delta t\, x(k\Delta t)$) дискретизация аналогового сигнала $x(t)$ по времени с шагом Δt приводит к периодическому повторению его спектра с периодом (по частоте), равным частоте дискретизации $f_{\text{д}} = 1/\Delta t$

$$X_{\text{д}}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_{\text{д}}).$$

Заметим, что при этом интервал $\left[-\dfrac{f_{\text{д}}}{2}, \dfrac{f_{\text{д}}}{2}\right]$ является одним периодом функции $X_{\text{д}}(f)$. Если спектр аналогового сигнала лежит в этом интервале, то он периодически повторяется без наложения.



Эффект наложения



Если спектр аналогового сигнала до дискретизации не был ограничен интервалом $\left[-\frac{f_д}{2}, \frac{f_д}{2}\right]$, то возникает ***эффект наложения*** (англ. **aliasing,** элайзинг, алиасинг). В таком случае спектр аналогово и дискретизованного на этом интервале не совпадают. Частично устранить этот эффект можно примирением фильтра нижних частот с частотой среза $f_c = f_д / 2$, при этом информация о высокочастотных спектральных компонентах $|f| > f_c$ не сохраняется.

Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов

Пусть есть последовательность выборок $x(k\Delta t), k \in Z$ некоторого аналогового сигнала $x(t)$, где Δt — шаг дискретизации — интервал времени между каждой парой соседних эквидистантных отсчетов, $k \in Z$ — номер отсчета. $f_д = 1/\Delta t$ — частота дискретизации — величина, обратная шагу дискретизации (размерность [Гц]=[с $^{-1}$]). Будем считать, что спектр исходного аналогового сигнала ограничен интервалом $\left[-f_д/2;\ f_д/2\right]$, а соответственно при дискретизации не наблюдается эффект наложения спектров ($f_д > 2f_в$).

Рассмотрим последовательность отсчетов (дискретный сигнал) $x[k]$, которую будем определять через выборки следующим образом

$$x[k] = \mathrm{T}x(k\Delta t),$$

где $\mathrm{T} = \Delta t$. Как ранее (в лекциях) было установлено, при $\mathrm{T} = \Delta t$ спектр дискретизованного сигнала $x[k]$ представляет собой периодическое повторение исходного спектра аналогового сигнала $x(t)$ с периодом, равным частоте дискретизации $f_д$:

$$X_д(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_а(f - nf_д).$$

Необходимая спектральная информация будет содержаться в полосе $\left[-f_д/2;\ f_д/2\right]$. Теперь оценим спектр исходного сигнала по его выборкам в этой полосе.

Континуальная запись дискретного сигнала $x[k]$ в данном случае

$$x_{д}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t-k\Delta t).$$

Вычислим его спектр (преобразование Фурье)

$$X_{д}\left(f\right)=\int_{-\infty}^{\infty} x_{д}(t)\exp(-j2\pi f t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t-k\Delta t)\exp(-j2\pi f t)dt=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-k\Delta t)\exp(-j2\pi f t)dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi fk\Delta t),$$

Таким образом, спектр дискретного сигнала определяется через его отсчёты по формуле

$$X_{д}\left(f\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi fk\Delta t). \tag{1.1}$$

Эта формула определяет прямое дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). Учитывая, что (1.1) представляет собой ряд Фурье для периодической функции $X_{д}\left(f\right)$[1], получаем, что отсчётные значения дискретного сигнала соответствуют коэффициентам Фурье в этом ряде:

$$x[k]=c_{-k}=\frac{1}{f_{д}}\int_{-f_{д}/2}^{f_{д}/2} X\left(f\right)\exp(j2\pi f k\Delta t)df. \tag{1.2}$$

В итоге получаем пару формул (1.1) и (1.2), определяющих прямое и обратное дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). ДВПФ в свою очередь показывает, каким является спектр дискретного сигнала $x[k]$, который на отрезке оси частот $\left[-f_{д}/2;\ f_{д}/2\right]$ в отсутствии наложения совпадает со спектром исходного аналогового сигнала. При этом важно помнить, что в данном случае выборки аналогового сигнала связаны с дискретной последовательностью как $x[k]=\Delta t x(k\Delta t)$.

Различные формы записи ДВПФ

Мы установили, что пара дискретного во времени преобразования Фурье (ДВПФ) имеет вид

$$X\left(f\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi f k\Delta t),$$

$$x[k]=\frac{1}{f_{д}}\int_{-f_{д}/2}^{f_{д}/2} X\left(f\right)\exp(j2\pi f k\Delta t)df.$$

---

[1] *Напоминание. Для* $2l$*- периодической функции* $f(x)$*, абсолютно интегрируемой на интервале* $(-l;l)$ *ряд Фурье по системе функций* $\phi_m(x)=\exp(jm\frac{\pi}{l}x)$*,* $m\in Z$*:* $f(x)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m\exp(jm\frac{\pi}{l}x)$*, где коэффициенты Фурье* $c_m=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\exp(-jm\frac{\pi}{l}x)dx$

Введем нормированные частоты $\nu = f / f_д = f\Delta t$. Тогда пара ДВПФ может быть записана следующим образом:

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi\nu k),$$

$$x[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)\exp(j2\pi\nu k)d\nu.$$

Если принять $2\pi f = \omega$, а частоту дискретизации взять в рад/с $\omega_д = 2\pi / \Delta t$, то

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j\omega k\Delta t),$$

$$x[k] = \frac{\Delta t}{2\pi}\int_{-\omega_д/2}^{\omega_д/2} X(\omega)\exp(j\omega k\Delta t)d\omega.$$

Приняв $\theta = 2\pi\nu$ (нормированный угол в радианах), получаем

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j\theta k),$$

$$x[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\theta)\exp(j\theta k)d\theta.$$

Частотная переменная	Размерность	Период повторения спектра	Основной период
f	Гц	$f_д = 1/\Delta t$	$[-f_д/2; f_д/2]$
$\omega = 2\pi f$	рад/с	$\omega_д = 2\pi/\Delta t$	$[-\omega_д/2; \omega_д/2]$
$\nu = f / f_д$	безразмерная	1	$[-0,5; 0,5]$
$\theta = 2\pi f / f_д$	рад	2π	$[-\pi; \pi]$

Пример.

Рассмотрим в качестве примера последовательность единичных импульсов $x[k] = \mathbf{1}[k+1] + \mathbf{1}[k] + \mathbf{1}[k-1]$, где $\mathbf{1}[k]$ — единичный импульс, определяемый как

$$\mathbf{1}[k] = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

ДВПФ такой последовательности

$$X(\nu)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]e^{-j2\pi\nu k}=\sum_{k=-1}^{1}x[k]e^{-j2\pi\nu k}=x[-1]e^{j2\pi\nu}+x[0]e^{0}+x[1]e^{-j2\pi\nu}=$$
$$=\exp(j2\pi\nu)+1+\exp(-j2\pi\nu)=1+2\cos(2\pi\nu)$$

Свойства ДВПФ

Линейность

Если $x[k]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}X(\nu)$ и $y[k]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}Y(\nu)$, то $\alpha x[k]+\beta y[k]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}\alpha X(\nu)+\beta Y(\nu)$, где α, β — фиксированные числа.

Это свойство следует непосредственно из соответствующих свойств интеграла и суммы.

Теорема запаздывания

Если $x[k]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}X(\nu)$, то $x[k-l]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}X(\nu)\exp(-j2\pi\nu l)$.

$x[k-l]$ — это сигнал, запаздывающий по времени относительно сигнала $x[k]$ на l отсчетов в случае $l>0$ и опережающий сигнал $x[k]$ на $-l$ отсчетов в случае $l<0$.

Докажем свойство. Для этого возьмем обратное ДВПФ для правой части выражения:

$$\int_{-1/2}^{1/2}X(\nu)\exp(-j2\pi\nu l)\exp(j2\pi\nu k)d\nu=\int_{-1/2}^{1/2}X(\nu)\exp(j2\pi\nu(k-l))d\nu=x[k-l].$$

Стоит отметить, что $|X(\nu)|$ для запаздывающего и исходного сигнала одинаков.

Пример

$$\mathbf{1}[k]=\begin{cases}1, & k=0,\\ 0, & k\neq 0.\end{cases}$$

$$\mathbf{1}[k]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}1$$
$$\mathbf{1}[k-1]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}e^{-j2\pi\nu}$$
$$\mathbf{1}[k+1]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}e^{j2\pi\nu}$$

Теорема смещения

Если $x[k]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}X(\nu)$, то $x[k]\exp(j2\pi\nu_0 k)\overset{DTFT}{\leftrightarrow}X(\nu-\nu_0)$

Умножение сигнала на комплексную экспоненту вида $\exp(j2\pi\nu_0 k)$, $\nu_0 \in R$ приводит к сдвигу спектральной функции вдоль оси частот на ν_0 вправо в случае $\nu_0 > 0$ и на $-\nu_0$ влево в случае $\nu_0 < 0$.

Пример.

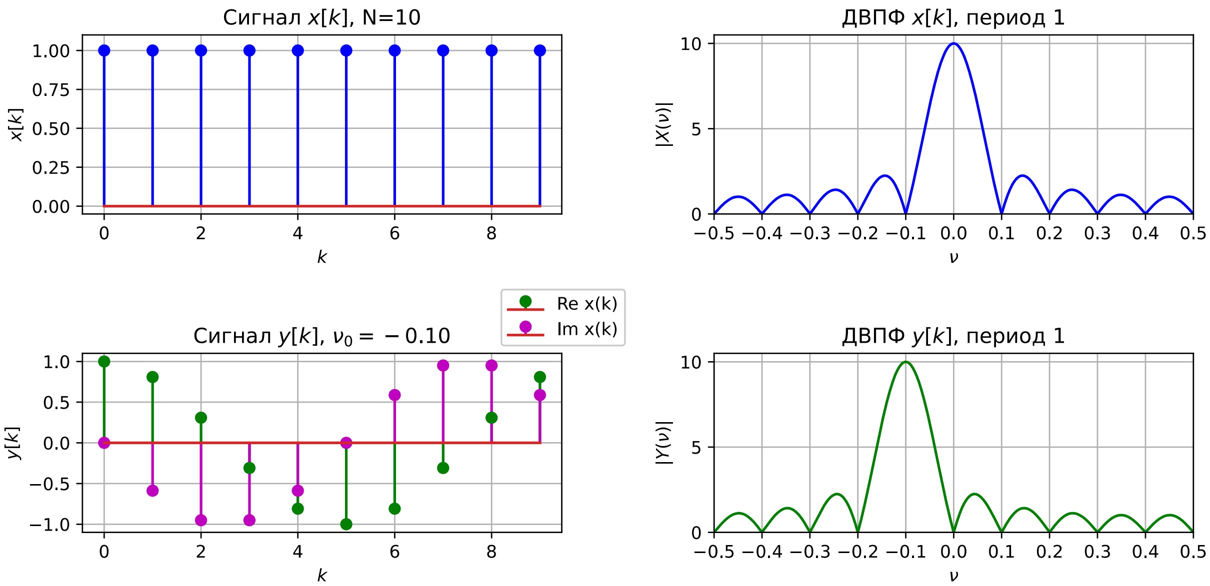
$$y[k] = x[k]\exp(j2\pi\nu_0 k), \text{ где } x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k-m].$$

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{k=0}^{N-1}\exp(-j2\pi\nu k) = \frac{1-\exp(-j2\pi\nu N)}{1-\exp(-j2\pi\nu)} =$$

$$= \frac{2j}{2j}\frac{e^{-j\pi\nu N}}{e^{-j\pi\nu}}\frac{(e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N})}{(e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu})} = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\exp(-j(N-1)\pi\nu).$$

$$|X(\nu)| = \left|\frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\right|.$$

$$Y(\nu) = X(\nu-\nu_0) = \frac{\sin(N\pi(\nu-\nu_0))}{\sin(\pi(\nu-\nu_0))}\exp(-j(N-1)\pi(\nu-\nu_0)).$$



Равенство Парсеваля

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 d\nu$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y^*[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)Y^*(\nu)d\nu$$

Пример.

Предположим, что имеется финитная последовательность $x[k]=\{1;\ 1;\ 1\}$. Тогда $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left|x[k]\right|^2=3$.
$\scriptstyle k=0$

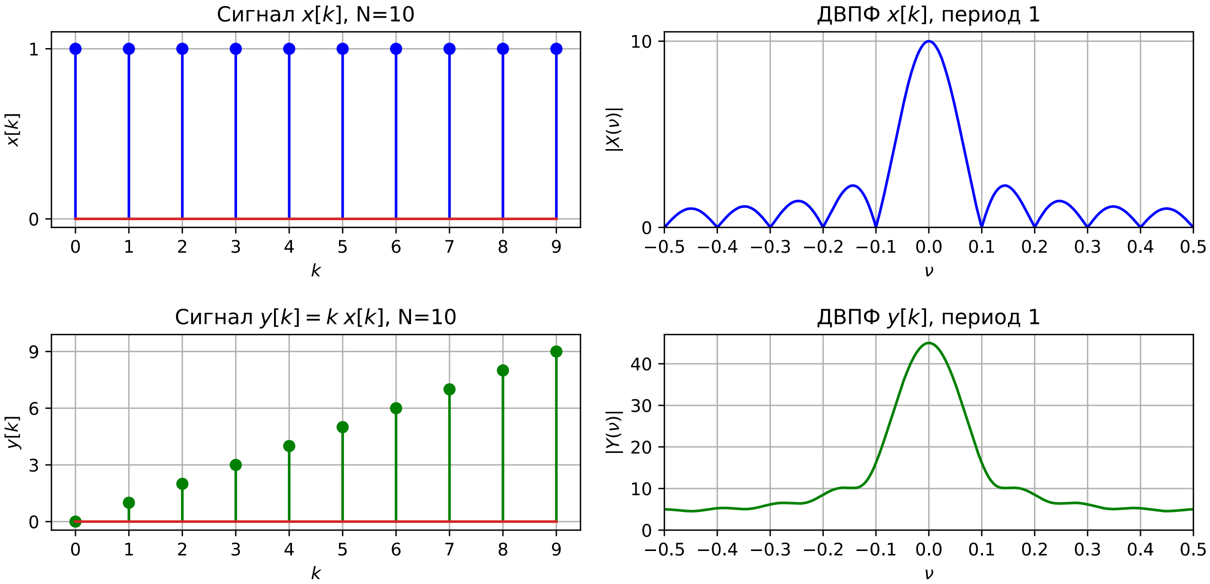
При этом $X(\nu)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}x[k]e^{-j2\pi\nu k}=x[-1]e^{j2\pi\nu}+x[0]e^{0}+x[1]e^{-j2\pi\nu}=$

$$=\exp(j2\pi\nu)+1+\exp(-j2\pi\nu)=1+2\cos(2\pi\nu).$$

$$\int_{-1/2}^{1/2}\left|X(\nu)\right|^2 d\nu=\int_{-1/2}^{1/2}\left|1+2\cos(2\pi\nu)\right|^2 d\nu=3.$$

Умножение на k и дифференцирование по частоте

Если $x[k]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}X(\nu)$, то $kx[k]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}\dfrac{j}{2\pi}\dfrac{dX(\nu)}{d\nu}$.



Изменение масштаба

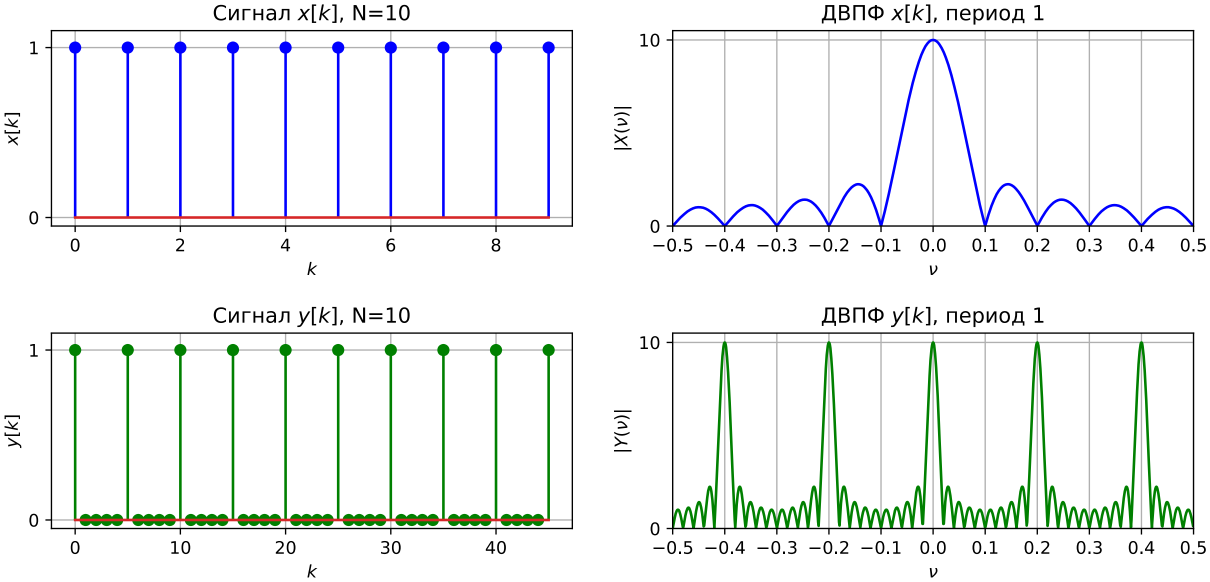
Если $x[k]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}X(\nu)$, то $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\mathbf{1}[k-mL]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}X(\nu L)$.

Для того, чтобы доказать свойство, вычислим ДВПФ для последовательности в левой части.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\mathbf{1}[k-mL]\exp(-j2\pi\nu k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbf{1}[k-mL]\exp(-j2\pi\nu k)=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\exp(-j2\pi(\nu L)m)=X(\nu L).$$

Пример



Рассмотрим последовательность из 10 единичных импульсов. Между каждой парой отсчетов добавим $L-1$ нулевой отсчет. Тогда модуль ДВПФ получившейся последовательности

$$|Y(\nu)| = \left|\frac{\sin(10\pi\nu L)}{\sin(\pi\nu L)}\right|.$$

Для $L=5$ результат показан на рисунке.

Теоремы о свертке

а) Теорема о свертке во временной области.

Если $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)$ и $y[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} Y(\nu)$, то $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[k-m] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)Y(\nu).$

В левой части стоит дискретная свертка сигналов, в правой — произведение спектров.

б) Теорема о свертке в частотной области

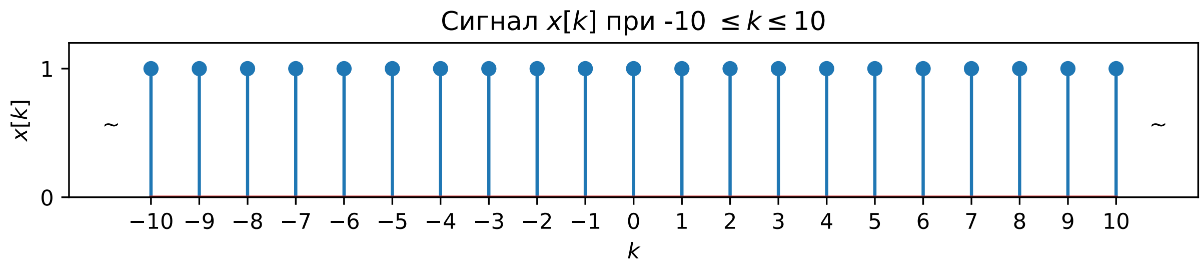
Если $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)$ и $y[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} Y(\nu)$, то $x[k]y[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{\nu})Y(\nu-\tilde{\nu})d\tilde{\nu}.$

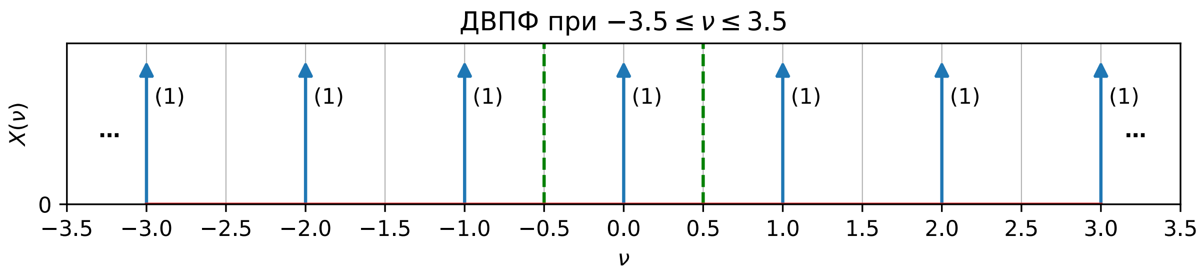
В левой части стоит произведение сигналов, в правой -- циклическая свертка спектров.

ДВПФ периодических последовательностей

а) последовательность единичных импульсов с периодом 1

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu-n)$$





Вычислим ДВПФ для последовательности $\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathbf{1}[k-m]$.

$$X(\nu)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\exp(-j2\pi\nu k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathbf{1}[k-m]\right)\exp(-j2\pi\nu k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbf{1}[k-m]\exp(-j2\pi\nu k).$$

$$X(\nu)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp(-j2\pi\nu m).$$

Заметим, что $\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp(-j2\pi\nu m)$ — это ряд Фурье для периодической (по частоте) последовательности δ-функций с периодом 1

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\nu-n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_{-m}\exp(-j2\pi\nu m),$$

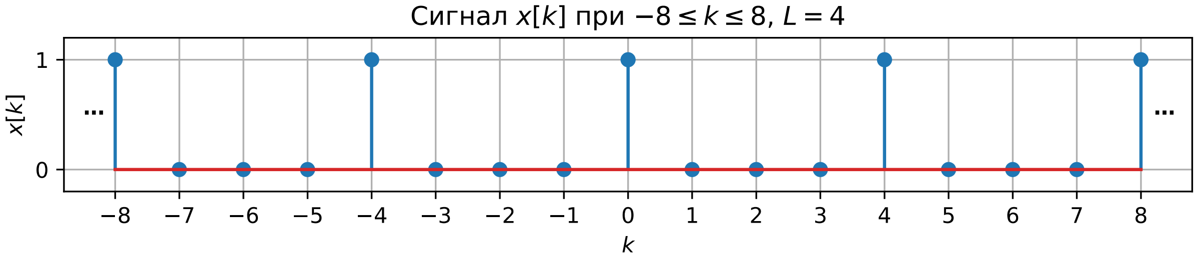
где коэффициенты Фурье

$C_{-m}=\int_{-1/2}^{1/2}\delta(\nu)\exp(j2\pi\nu m)d\nu=e^{0}=1$. Тогда получаем, что $X(\nu)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\nu-n)$.

б) Периодическая последовательность единичных импульсов с периодом L.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathbf{1}[k-mL]\overset{DTFT}{\longleftrightarrow}\frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\nu-\frac{n}{L}\right)$$

Найдем ДВПФ для последовательности $x(k)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathbf{1}[k-mL]$.



Используя свойство об изменении масштаба $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\mathbf{1}[k-mL] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu L)$, из

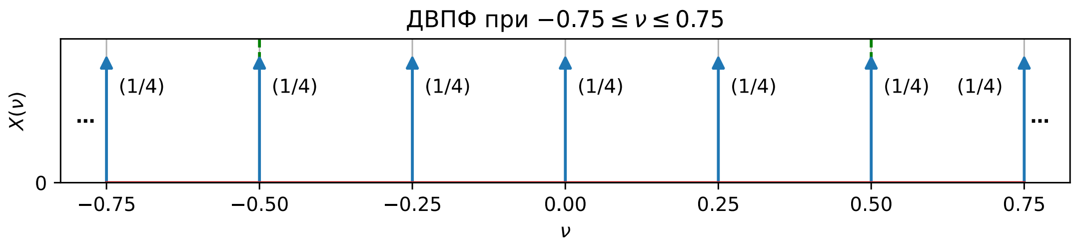
$\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n)$ получаем $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-mL] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu L - n)$

Воспользовавшись свойством δ-функции

$$\delta(a\nu - b) = \frac{1}{|a|}\delta\left(\nu - \frac{b}{a}\right),$$

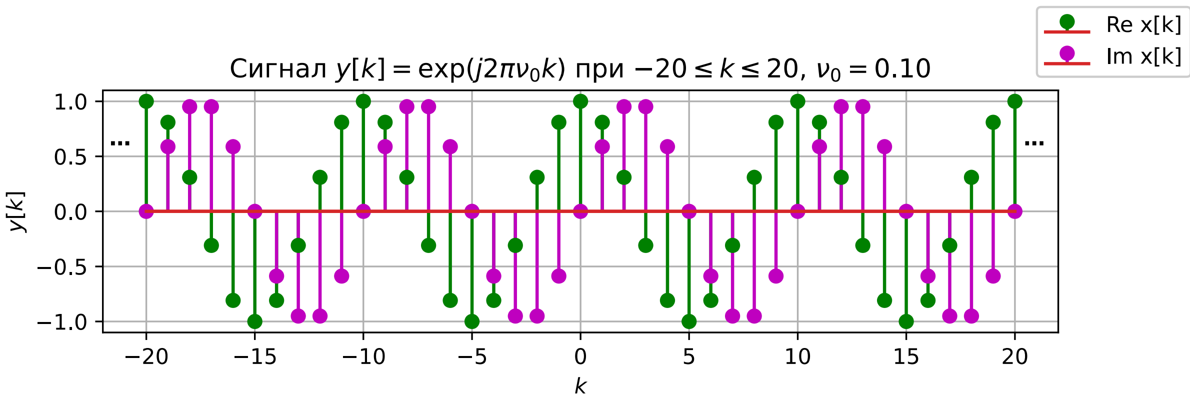
получаем, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-mL] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{L}\right)$$



в) Гармонические сигналы

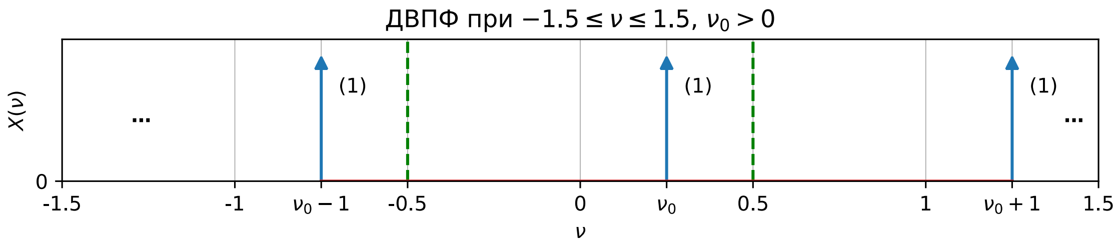
$$\exp(j2\pi\nu_0 k), -\infty < k < +\infty \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$



Если $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)$, то $x[k]\exp(j2\pi\nu_0 k) \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu-\nu_0)$. (теорема смешения для ДВПФ). При этом $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu-n)$. Получаем, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m]\exp(j2\pi\nu_0 k) \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu-\nu_0-n).$$

$$\exp(j2\pi\nu_0 k), -\infty < k < +\infty \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu-\nu_0-n).$$



Задание на моделирование

Далее значения N, L, ν_0 следует использовать из таблицы в соответствии с Вашим вариантом задания.

Вариант	N	L	ν_0		Вариант	N	L	ν_0
1	8	4	0,1		11	7	2	0,1
2	9	3	-0,1		12	8	3	-0,1
3	6	4	0,1		13	9	4	0,1
4	7	2	-0,1		14	7	2	-0,1
5	8	3	0,1		15	8	3	0,1
6	10	3	-0,1		16	10	2	-0,1
7	6	2	0,1		17	7	2	0,1
8	7	3	-0,1		18	8	4	-0,1
9	8	3	0,1		19	10	2	0,1
10	9	2	-0,1		20	8	3	-0,1

Задача 1.1. Прямоугольный импульс в дискретной форме. С помощью моделирования вычислите и постройте график для модуля и фазы ДВПФ $X_N(\nu)$ последовательности из N последовательных единичных импульсов $x_N[k] = \sum\limits_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k-m]$ для $\nu \in [-0,5; 0,5]$. Сравните результат с аналитической записью для $X_N(\nu)$ (задача 1.6 из задания к допуску). Заполнить таблицу, используя результаты моделирования и аналитические записи. Принять частоту дискретизации равной 1 Гц.

Значение $X(0)$	Ширина $\Delta\nu$ главного лепестка на нулевом уровне	Точки скачков фазы на π	Энергия[2] х Δt $\int_{-1/2}^{1/2} \lvert X(\nu)\rvert^2\, d\nu$

Задача 1.2. Свойство масштабирования.

Рассмотрите последовательность $x_L[k]$, получаемую добавлением между каждой парой отсчетов последовательности $x_N[k]$ (из задачи 1.1) $L-1$ нуля:

$$x_L[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_N[m]\mathbf{1}[k-mL].$$

С помощью моделирования постойте модуль ее ДВПФ для $\nu \in [-0,5;\, 0,5]$ и сравните результат с $X_N(\nu L)$.

Задача 1.3. Дифференцирование спектральной плотности.

Рассмотрите последовательность $x_D[k] = k\, x_N[k]$. Постойте с помощью моделирования график для модуля ДВПФ этой последовательности $X_D(\nu)$ для $\nu \in [-0,5;\, 0,5]$.

** Получить численным или символьным дифференцированием график для $\dfrac{j}{2\pi}\dfrac{dX_N(\nu)}{d\nu}$ и сравнить его с $X_D(\nu)$.[3]

Задача 1.4. Теорема смещения.

С помощью моделирования получите график модуля спектральной плотности $X_S(\nu)$ для сигнала $x_S[k] = x_N[k]\exp(j2\pi\nu_0 k)$. Приведите ответы на следующие вопросы.

а) Какую аналитическую форму записи имеет функция $X_S(\nu)$?

б) Как результат моделирования соотносится с теоремой смещения для ДВПФ?

в) Почему получившийся спектр не симметричен относительно нулевой частоты?

Задача 1.5. Теорема о свертке во временной области.

---

[2] Для дискретного сигнала рассматривают энергию, приходящуюся на один период частоты, т.е. на полосу частот шириной $f_д$:

$$\int_{-0,5 f_д}^{0,5 f_д} |X(f)|^2\, df = \frac{1}{\Delta t}\int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2\, d\nu$$

Для ее вычисления можно воспользоваться равенством Парсеваля для ДВПФ.

[3] Двумя звездочками «**» здесь и далее отмечены задачи повышенной трудности.

Определите с помощью моделирования линейную дискретную свертку последовательности $x_N[k]=\sum_{m=0}^{N-1}\mathbf{1}\left[k-m\right]$ с точно такой же последовательностью. Постойте график для модуля ДВПФ. Воспользовавшись теоремой о свертке, получите аналитическую запись ДВПФ. Заполните таблицу.

Значение $X(0)$	Ширина $\Delta\nu$ главного лепестка на нулевом уровне	Энергия x Δt $\int_{-1/2}^{1/2}\lvert X(\nu)\rvert^2\,d\nu$

Контрольные вопросы и задачи к сдаче работы

№1. Пусть $X(\nu)$ — ДВПФ спектр некоторой последовательности $x[k]$. Как нужно изменить последовательность $x[k]$, чтобы ее ДВПФ спектр был сдвинут влево относительно исходного на $\nu_0=1/10$?

№2. Пусть $X_5(\nu)$ — ДВПФ спектр пяти последовательных единичных импульсов $x_5[k]=\sum_{m=0}^{4}\mathbf{1}\left[k-m\right]$, а $Y(\nu)$ — ДВПФ спектр последовательности $y[k]=kx_5[k]$. Пусть также

$$\Phi(\nu)=\int_{-1/2}^{1/2}X_5(\tilde{\nu})Y(\nu-\tilde{\nu})d\tilde{\nu},$$

$$\Psi(\nu)=\int_{-1/2}^{1/2}Y(\tilde{\nu})X_5(\nu-\tilde{\nu})d\tilde{\nu}.$$

Чему равно $\Phi(\nu)$? Выполняется ли $\Phi(\nu)\equiv\Psi(\nu)$?

№3. Предположим, что имеется финитная последовательность

$$x[k]=\{\underset{k=0}{1};\,5;\;2;\;4;1;1;3\}.$$

Не вычисляя непосредственно ее ДВПФ $X(\nu)$, определите значения следующих выражений:

$$X(0)\,;\,X(1/2)\,;\int_{-1/2}^{1/2}X(\nu)d\nu\,;\;\int_{-1/2}^{1/2}\left|X(\nu)\right|^2d\nu\,;\;\int_{-1/2}^{1/2}\left|\frac{dX(\nu)}{d\nu}\right|^2d\nu\,.$$

№4. Докажите для ДВПФ свойство: если $x[k]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}X(\nu)$, то $kx[k]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}\dfrac{j}{2\pi}\dfrac{dX(\nu)}{d\nu}$. Получите аналогичное свойство для спектра сигнала (последовательности) $k^M x[k]$, где М - натуральное число.

В качестве примера рассмотрите случай $x[k]=\sum_{m=0}^{N-1}\mathbf{1}\left[k-m\right]$. Постройте с помощью Octave/Python график последовательности и ДВПФ при $-0.5\le\nu\le0.5$ для различных M (М=1, 2, 3).

№5. Предположим, что аналоговый сигнал $x(t) = \cos(2\pi t f_0)$, $-\infty < t < \infty$, $f_0 = 250$ Гц был дискретизован с частотой дискретизации $f_д = 1$ кГц. Будет ли наблюдаться эффект наложения (aliasing)?

Определить и построить график ДВПФ для отсчетов сигнала $x[k] = \Delta t\, x(k\Delta t)$ в переменных ν.

Модуль 2. Основные свойства ДПФ

Теоретическая часть

Формы записи ДПФ

Пусть $x[k]$ — последовательность отсчетов сигнала либо длиной в N отсчетов, либо периодическая с периодом N. Тогда прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательности $x[k]$ определяется следующим образом

$$X[n]=\sum_{k=0}^{N-1}x[k]\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nk\right),$$

$$x[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X[n]\exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right).$$

Примечание. Именно в таком виде ДПФ реализовано в Matlab, библиотеках Python Numpy и Scipy.

Наряду с приведенной парой формул, существует запись ДПФ с нормирующем множителем $1/N$ в прямом преобразовании:

$$\tilde{X}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x[k]\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nk\right),$$

$$x[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{X}[n]\exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right).$$

Далее будет показано, что такая форма ДПФ удобна при рассмотрении периодических последовательностей отсчетов $x[k]$. Для того, чтобы различать две записи, будем использовать обозначения $\tilde{X}[n]$ и $X[n]$. Очевидно, что

$$\tilde{X}[n]=\frac{1}{N}X[n].$$

В ДПФ и сигнал $x[k]$, и последовательность ДПФ отсчетов $X[n]$ представляют собой функции дискретного аргумента. Функцию $X[n]$ обычно рассматривают только для значений $n=0,1,\ldots,N-1$, при этом она является периодической с периодом N.

В результате обратного ДПФ получается N –периодическая функция дискретного времени, что необходимо учитывать при использовании обратного ДПФ для последовательностей конечной длительности. Для них результат обратного преобразования нужно взять на периоде $[0,N-1]$, а остальные отсчеты приравнять к нулю.

Пример. Пусть $x[k]=\cos\left(2\pi\frac{3}{16}k\right)$. Вычислить 16-точечное ДПФ этой последовательности $\tilde{X}[n]$ по формуле с нормирующим множителем $1/N$ в прямом преобразовании.

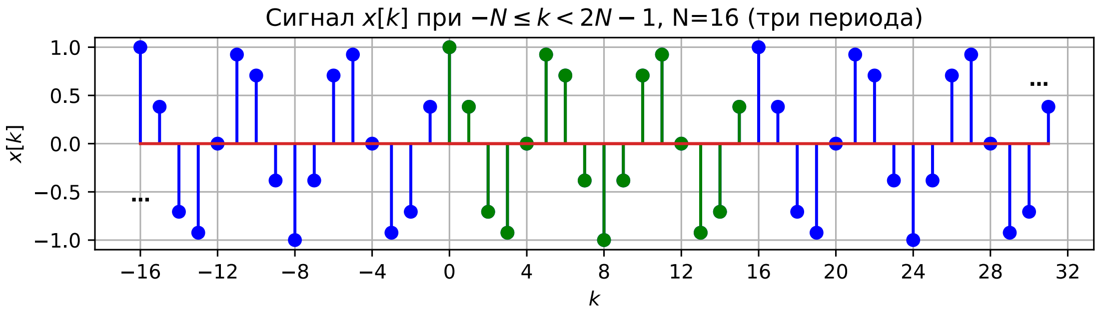
Решение.

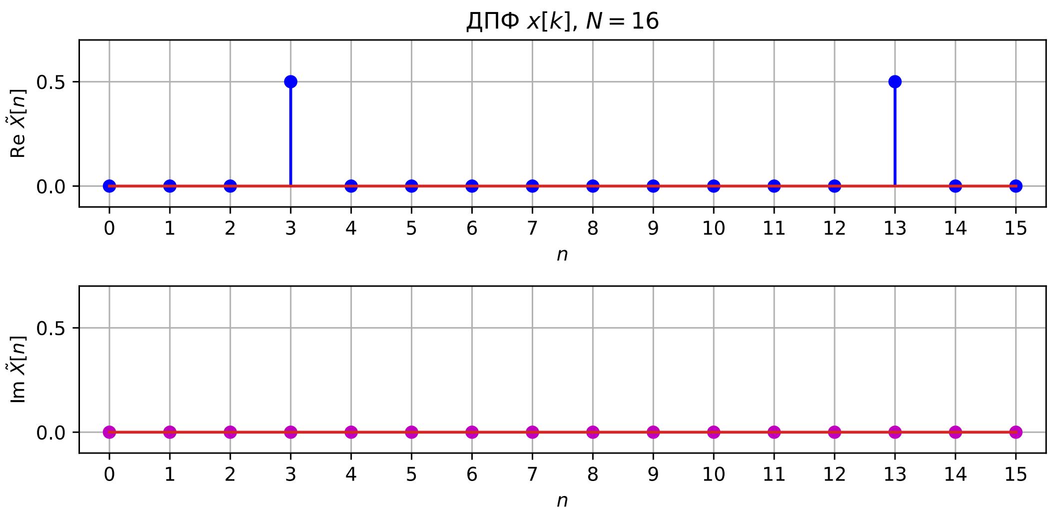
$$\tilde{X}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\cos(2\pi\frac{3}{16}k)\exp(-j2\pi\frac{n}{N}k)=$$
$$=\frac{1}{16}\sum_{k=0}^{15}\left\{\frac{1}{2}\exp\left(j2\pi k(\frac{3}{16}-\frac{n}{16})\right)+\frac{1}{2}\exp\left(-j2\pi k(\frac{3}{16}+\frac{n}{16})\right)\right\}$$

Рассмотрим отдельно сумму вида $\sum_{k=0}^{15}\exp\left(j2\pi k\frac{m}{16}\right)$ при условии, что m — целое число, не равное нулю и не кратное 16. В таком случае по формуле суммы геометрической прогрессии

$$\sum_{k=0}^{15}\exp\left(j2\pi k\frac{m}{16}\right)=\frac{1-\exp(j2\pi m)}{1-\exp(j2\pi m\frac{1}{16})}=0.$$

В случае когда m либо равно нулю, либо кратно 16, будет выполняться $\sum_{k=0}^{15}\exp\left(j2\pi k\frac{m}{16}\right)=\sum_{k=0}^{15}\mathrm{e}^{0}=16$. В итоге на периоде есть только два ненулевых отсчета ДПФ — $\tilde{X}[3]=1/2$ и $\tilde{X}[13]=1/2$.





Свойства ДПФ

Предложим, что для последовательности $x[k]$ ДПФ будет $X[n]$, что символически будем обозначать $x[k] \overset{DFT}{\leftrightarrow} X[n]$. Пусть также $y[k] \overset{DFT}{\leftrightarrow} Y[n]$. Тогда справедливы следующие утверждения — свойства ДПФ. Далее запись вида $x[k]_N$ обозначает $x[k \bmod N]$. Символ * обозначает здесь комплексное сопряжение.

Сигналы $x[k]$ и $y[k]$	N –точечные ДПФ $\tilde{X}[n]$ и $\tilde{Y}[n]$ (с нормирующим множителем $1/N$ в прямом преобразовании)	N –точечное ДПФ $X[n]$ и $Y[n]$ (без нормирующего множителя $1/N$ в прямом преобразовании)
Линейность		
$\alpha x[k]+\beta y[k]$, $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$	$\alpha\tilde{X}[n]+\beta\tilde{Y}[n]$	$\alpha X[n]+\beta Y[n]$
Единичный импульс		
$x[k]=\mathbf{1}[k]=\begin{cases}1, k=0,\\ 0, k\neq 0.\end{cases}$	$\tilde{X}[n]\equiv\frac{1}{N}$	$X[n]\equiv 1$
Теорема запаздывания		
$x[k-m]_N$	$\tilde{X}[n]\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nm\right)$	$X[n]\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nm\right)$
Теорема смещения		
$x[k]\exp\left(\pm j\frac{2\pi}{N}n_0 k\right)$, $n_0\in\mathbb{Z}$	$\tilde{X}[n\mp n_0]_N$	$X[n\mp n_0]_N$
Симметрия		
$x^*[k]$	$\tilde{X}^*[N-n]_N$,	$X^*[N-n]_N$,
$x[N-k]_N$	$\tilde{X}[N-n]_N$	$X[N-n]_N$
$x[k]=x^*[k]$ действительная последовательность	$\tilde{X}[n]=\tilde{X}^*[N-n]_N$	$X[n]=X^*[N-n]_N$
$x[k]=-x^*[k]$ мнимая последовательность	$\tilde{X}[n]=-\tilde{X}^*[N-n]_N$	$X[n]=-X^*[N-n]_N$
Теорема о свертке (во временной области)		
$\sum_{m=0}^{N-1}x[m]y[k-m]_N$	$N\tilde{X}[n]\tilde{Y}[n]$	$X[n]Y[n]$
Произведение сигналов (теорема о свертке в частотной области)		
$x[k]y[k]$	$\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{X}[m]\tilde{Y}[n-m]_N$	$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}X[m]Y[n-m]_N$
Равенство Парсеваля		
	$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x[k]y^*[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{X}[n]\tilde{Y}^*[n]$,	$\sum_{k=0}^{N-1}x[k]y^*[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X[n]Y^*[n]$,

	$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\lvert x[k]\rvert^2=\sum_{n=0}^{N-1}\lvert\tilde{X}[n]\rvert^2$.	$\sum_{k=0}^{N-1}\lvert x[k]\rvert^2=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\lvert X[n]\rvert^2$.

Пример. Циклический сдвиг последовательности.

Пусть $X[n]$ — восьмиточечное ДПФ последовательности

$$x[k]=\{0{,}1\ \ 0{,}2\ \ 0{,}3\ \ 0{,}4\ \ 0{,}5\ \ 0{,}6\ \ 0{,}7\ \ 0{,}8\}$$

изображенной на графике. Изобразить последовательность $y[k]$, ДПФ которой имеет вид $Y[n]=\exp\left(-j\frac{2\pi}{8}mn\right)X[n]$ для $m=3$ и $m=5$.

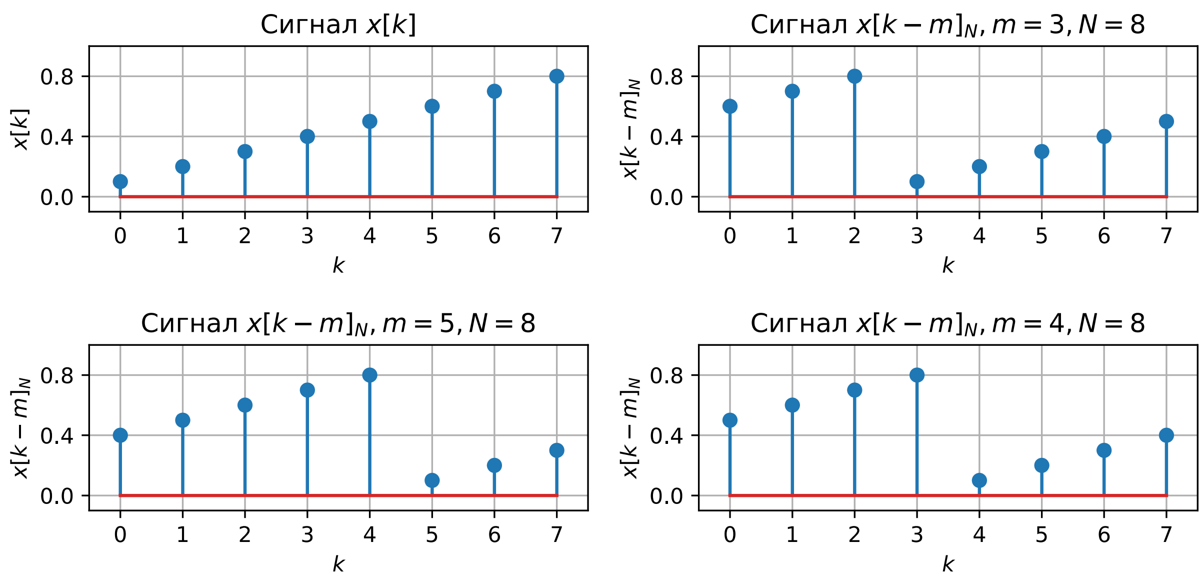
Решение.

Воспользуемся теоремой запаздывания для ДПФ:

Если $x[k]\overset{DFT}{\leftrightarrow}X[n]$, то $x[k-m]_N\overset{DFT}{\leftrightarrow}X[n]\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nm\right)$.

Тогда последовательность $y[k]$ получается путем циклического сдвига $x[k]$ на m отсчетов вправо (для положительных m):

$$y[k]=x[k-m]_N=x\left[(k-m)\mod N\right].$$



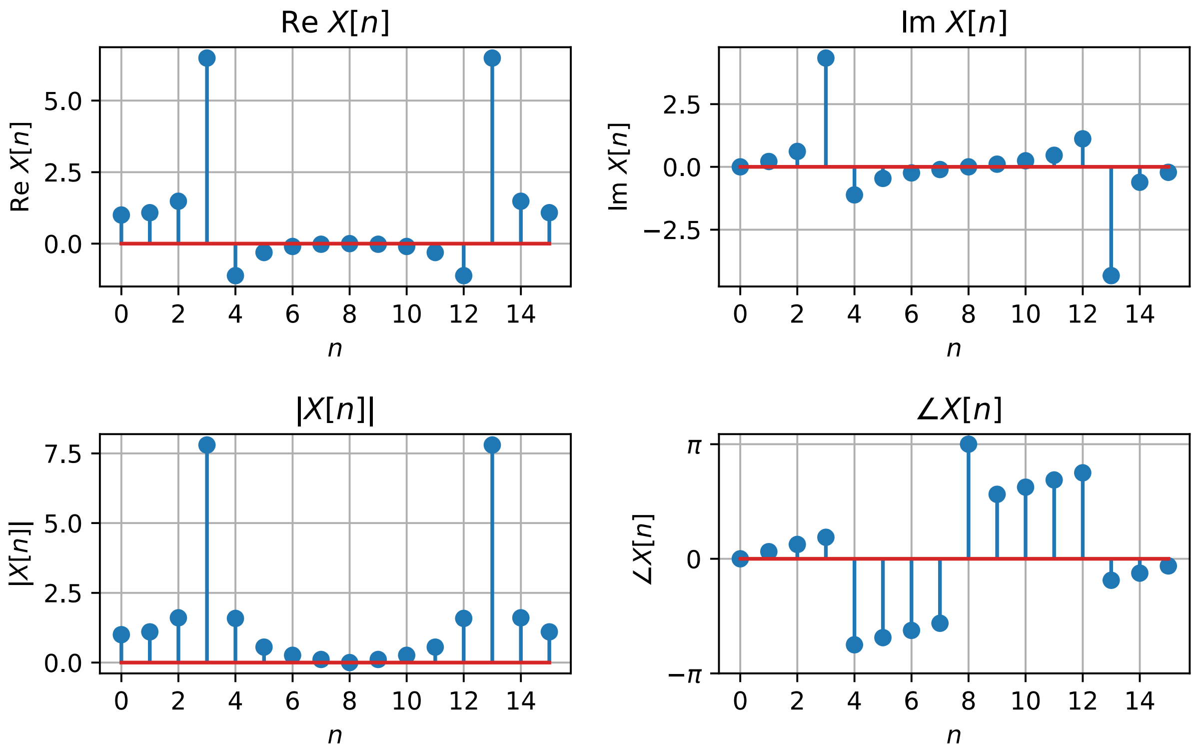
Пример. Симметрия ДПФ.

Пусть дана последовательность

$$x[k]=\cos(2\pi k0{,}2),\ k=0,1,2,\ldots,15.$$

Эта последовательность не является периодом для $\cos(2\pi k 0,2)$. Частота косинусоиды $\nu_{\cos} = 0,2$ не совпадает с частотами отсчетов ДПФ $\nu_n = n / N$, $N = 16$. Максимально близкий отсчет к частоте $\nu_{\cos} = 0,2$ — это $n = 3$ ($\nu_3 = 0,1875$).

ДПФ этой последовательности представлено на рисунке.



Для действительной последовательности $x[k] = x^*[k]$

$$x[k] \overset{DFT}{\leftrightarrow} X^*[N-n]_N .$$

Это означает, что $X[n] = X^*[N-n]_N$. Например, $X[3] = X^*[13]$.

В данном случае мы наблюдаем симметрию действительной части и модуля и антисимметрию мнимой части и фазы коэффициентов ДПФ относительно отсчета с номером $n = N/2 = 8$.

Матричная форма ДПФ

Введем в рассмотрение квадратную матрицу $[W]_N$ порядка N с элементами

$$W_N^{nk} = \exp(-j \frac{2\pi}{N} n\, k), \quad n,\ k \in 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$

так, что номер строки совпадает с номером дискретной экспоненциальной функции, а номер столбца совпадает с номером отсчета функций. При этом произведение $n \cdot k$ обычно берется по модулю N, т. е.

$$W_N^{n\,k} = W_N^{n\,k \mod N}.$$

Например, $nk = 17$, тогда $nk \mod 8 = 1$. Эти свойства матрицы ДПФ следуют из N-периодичности функции $W_N^{n\,k}$ по обоим аргументам. Для случая $N = 8$ матрица ДПФ имеет вид

$$
[W]_8 = \begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} k\to\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\
\begin{matrix} n\downarrow\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\
W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\
W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\
W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\
W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\
W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\
W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\
W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Эта же матрица с минимальными фазами будет

$$
[W]_8 = \begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} k\to 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\
\begin{matrix} n\downarrow\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\
W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\
W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 \\
W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^1 & W_8^4 & W_8^7 & W_8^2 & W_8^5 \\
W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 \\
W_8^0 & W_8^5 & W_8^2 & W_8^7 & W_8^4 & W_8^1 & W_8^6 & W_8^3 \\
W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 & W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 \\
W_8^0 & W_8^7 & W_8^6 & W_8^5 & W_8^4 & W_8^3 & W_8^2 & W_8^1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Через множители W_N^{nk} пара ДПФ записывается в виде

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] W_N^{nk},$$

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] W_N^{-nk}.$$

Пусть $\vec{X}$ и $\vec{x}$ – N-мерные вектор-столбцы:

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}.$$

Тогда в матричной форме пара ДПФ (с нормирующим множителем в обратном преобразовании) имеет вид

$\vec{X} = [W]_N\ \vec{x}$ – прямое ДПФ,

$\vec{x} = [W_N]^{-1} \vec{X}$ – обратное ДПФ.

Чтобы найти обратную матрицу $[W_N]^{-1}$, достаточно заметить, что

$$\frac{1}{N}[W_N]^*[W_N]=I_N,$$

где I_N – единичная матрица размером $N\times N$. В итоге получаем, что

$$[W_N]^{-1}=\frac{1}{N}[W_N]^*,$$

т.е. для нахождения обратной матрицы достаточно выполнить комплексное сопряжение для $[W_N]$ и нормировать результат на N.

Задание на моделирование

Вариант	$x[k]$	m	**Вариант**	$x[k]$	m
1	$\{1;-3;2;4;6;7;4;6\}$	3	11	$\{9;3;2;4;6;3;4;4\}$	3
2	$\{7;3;2;-4;6;0;-4;1\}$	4	12	$\{9;-3;2;4;2;7;1;3\}$	4
3	$\{5;3;2;0;6;-7;4;-6\}$	-1	13	$\{3;-6;-8;4;6;7;4;9\}$	6
4	$\{1;-3;2;4;1;7;1;1\}$	-3	14	$\{1;-6;0;-4;6;-7;4;-9\}$	-3
5	$\{9;-3;2;4;2;7;1;3\}$	4	15	$\{1;-6;0;-4;6;-7;0;9\}$	-4
6	$\{1;7;2;2;6;5;4;1\}$	-2	16	$\{8;6;-8;-4;6;-7;4;9\}$	-1
7	$\{3;6;-8;4;6;-7;4;9\}$	6	17	$\{-1;-7;-2;2;-6;5;5;1\}$	6
8	$\{8;6;8;4;3;-7;4;5\}$	1	18	$\{1;-3;2;7;1;7;1;1\}$	2
9	$\{1;-6;8;4;6;-7;4;-9\}$	2	19	$\{9;-3;2;5;2;7;1;3\}$	-2
10	$\{1;-6;8;-4;0;-7;4;-9\}$	-3	20	$\{1;-1;8;4;6;-2;4;-6\}$	-3

Задача 2.1. Алгоритмы вычисления ДПФ.

Вычислите ДПФ $X[n]$ для последовательности $x[k]$ (в соответствии с Вашим вариантом). Воспользуйтесь следующими способами:

а) вычисление с использованием матричной формы ДПФ;

б) алгоритм быстрого преобразование Фурье (БПФ).

Сравните результаты.

Задача 2.2 Свойства симметрии ДПФ.

Для последовательности $x[k]$ постройте графики $\operatorname{Re} X[n]$, $\operatorname{Im} X[n]$, $|X[n]|$, $\angle X[n]$.

Сравните получившиеся результаты со свойствами симметрии ДПФ.

Задача 2.3. Циклический сдвиг в ДПФ.

Постойте график для последовательности $x[k]$.

Вычислите последовательность $y[k]$, ДПФ которой

$$Y[n]=\exp\left(-j\frac{2\pi}{8}mn\right)X[n].$$

Сравните получившиеся последовательности.

Контрольные вопросы и задачи к сдаче работы

№1. Записать матрицу, задающую ДПФ преобразование над последовательностью (вектором) длины 4. Указать также обратную матрицу, задающую обратное преобразование.

№2. Для последовательности из трех единичных импульсов $x[k]=\mathbf{1}[k]+\mathbf{1}[k-1]+\mathbf{1}[k-2]$ изобразить

а) линейную дискретную свертку $\sum_{m=0}^{N-1}x[m]x[k-m]$,

б) циклическую дискретную свертку $\sum_{m=0}^{N-1}x[m]x[k-m]_N$.

Сравнить результаты.

№3. Найти ДПФ$_{16}$ 16 - точечных последовательностей

а) $x[k]=\sum_{m=0}^{15}\mathbf{1}[k-m]$,

б) $y_1[k]=x[k]\cos(2\pi k5/16)$,

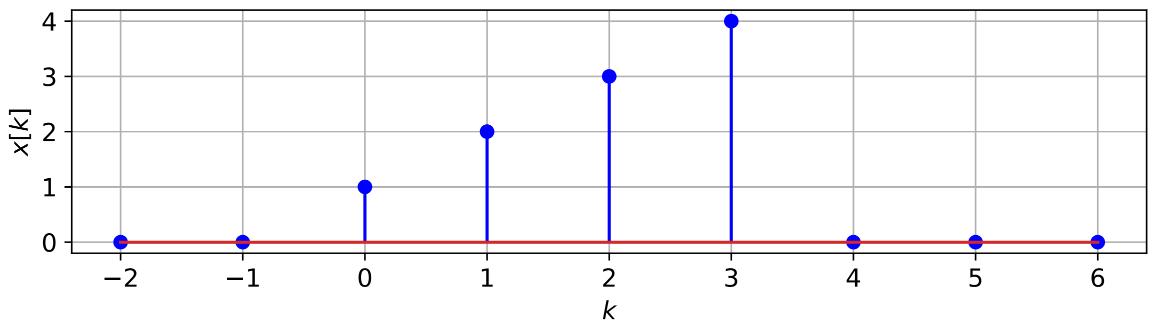
в) $y_2[k]=x[k]\sin(2\pi k5/16)$.

Для всех пунктов задания изобразить график действительной и мнимой части коэффициентов ДПФ.

№4. Определить для $N=16$ ДПФ$_{16}$ $W_B[n]$ окна Блэкмана $w_B[k]$. Построить график для $|W_B[n]|$.

$$w_B[k]=\begin{cases}0,42-0,5\cos\left(2\pi\frac{1}{N}k\right)+0,08\cos\left(2\pi\frac{2}{N}k\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } k=0,1,2,\ldots,N-1, \\ 0, \text{ при других } k.\end{cases}$$

№5. Пусть $X[n]$- четырехточечное ДПФ последовательности $x[k]$, изображенной на графике.



Изобразить последовательность $y[k]$, ДПФ которой имеет вид $Y[n]=\exp\left(-j2\pi\frac{1}{4}n\right)X[n]$.

Модуль 3. Связь между ДВПФ и ДПФ.

Теоретическая часть

ДПФ последовательностей конечной длительности

Форма записи ДПФ

Пусть $x[k]$ — последовательность отсчетов сигнала длиной в N отсчетов $k = 0,1,\ldots,N-1$. Тогда прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) определяется следующим образом

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nk\right),$$

$$x[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n]\exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right), \quad k = 0,1,\ldots,N-1.$$

Функцию $X[n]$ обычно рассматривают только для значений $n = 0,1,\ldots,N-1$, при этом она является периодической с периодом N, $n \in Z$.

В обратном преобразовании необходимо ограничить длительность восстанавливаемой последовательности отсчетов сигнала, т.е. рассматривать $x[k]$ для значений $k = 0,1,\ldots,N-1.$ Если длительность не ограничить, то будет восстановлена последовательность, являющаяся периодическим продолжением $x(k)$.

Связь между ДПФ и ДВПФ в точках $\nu = n/N$.

Рассмотрим N – точечную последовательность $x[k]$. Ее ДВПФ

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\exp(-j2\pi\nu k).$$

ДПФ для последовательности $x(k)$, имеет следующий вид:

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\exp\left(-j2\pi\frac{n}{N}k\right).$$

Сравнивая формулы, в точках $\nu = n/N$ получаем равенство

$$X(\nu)\big|_{\nu=n/N} = X[n]$$

Это означает, что коэффициенты ДПФ $X[n]$ равны отсчетам функции $X(\nu)$, взятым в точках $\nu = n/N$ (с шагом $\Delta\nu = 1/N$).

Интерполяция ДВПФ добавлением нулевых отсчетов в сигнал (Zero Padding)

Улучшим качество визуализации ДВПФ при помощи отсчетов ДПФ. Получим M – точечную последовательность — добавим в исходную последовательность $x[k]$ $M-N$ отсчетов, равных нулю:

$$y[k]=\begin{cases} x[k],\ 0\le k\le N-1; \\ 0,\ \ N\le k\le M-1. \end{cases}$$

Ее ДПФ M – точечное и определяется формулой

$$Y[n]=\sum_{k=0}^{M-1} y[k]\exp\left(-j\frac{2\pi}{M}nk\right)=\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\exp\left(-j\frac{2\pi}{M}nk\right).$$

При этом ДВПФ не изменяется:

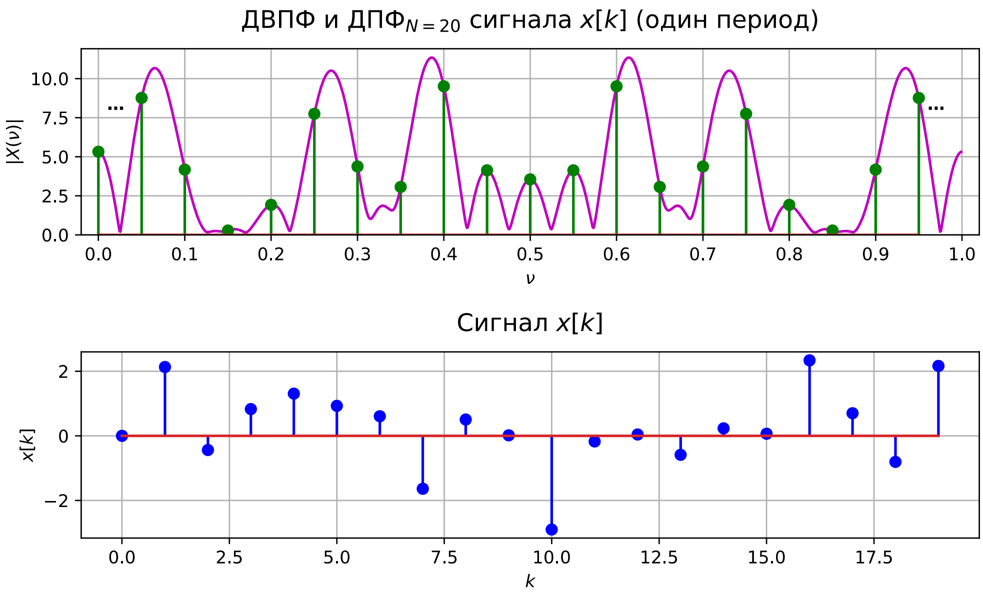
$$Y(\nu)=\sum_{k=0}^{M-1} x[k]\exp(-j2\pi\nu k)=\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\exp(-j2\pi\nu k).$$

С помощью добавления нулевых отсчетов улучшено качество визуализации ДВПФ, поскольку число точек $\nu=n/N$ на одном периоде больше, чем в исходной последовательности.

Пример.

Рассмотрим последовательность отсчетов

$$x[k]=\begin{cases} \sin\left(2\pi\frac{1,5}{20}k\right)+\sin\left(2\pi\frac{5,4}{20}k\right)+\sin\left(2\pi\frac{7,6}{20}k\right), 0\le k<N, \\ 0, \{k<0\}\cup\{k\ge N\}. \end{cases}$$



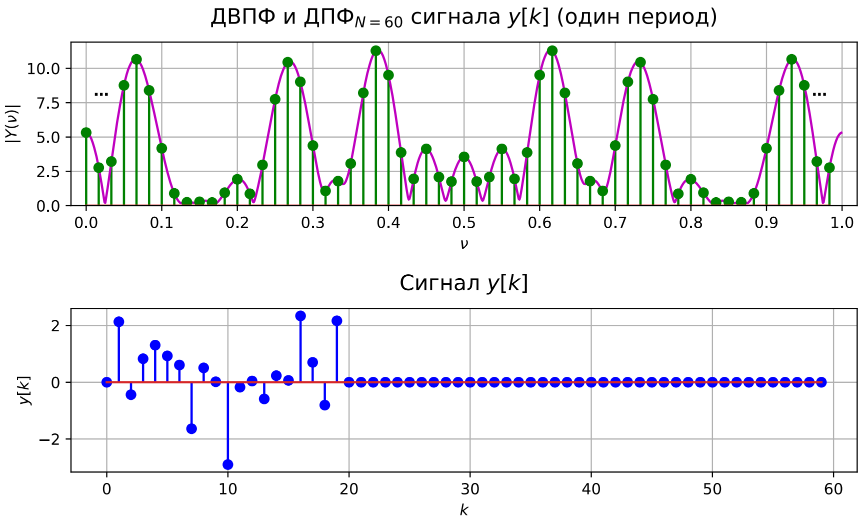
Заметим, что частоты синусоид в ней не совпадают с бинами ДПФ:

$$\nu_1=\frac{1,5}{20},\ \nu_2=\frac{5,4}{20},\ \nu_3=\frac{7,6}{20}.$$

На рисунке изображен модуль ДВПФ этой последовательности для частот $\nu\in[0;1]$. Приведено соответствие с 16–точечным ДПФ этой последовательности, вычисленным по формуле без нормирующего множителя $1/N$. В точках $\nu = n/N$ значение ДВПФ совпадают с величиной отсчетов ДПФ в этих точках:

$$X(n\Delta\nu) = X[n],\ \ \Delta\nu = 1/N.$$

Теперь дополним рассматриваемый в ДПФ участок сигнала нулевыми отсчетами. ДВПФ при этом не изменится (мы даже не изменили сигнал $x[k]$), а число отсчетов ДПФ на одном периоде станет больше. Таким образом улучшено качество визуализации ДВПФ с помощью отсчетов ДПФ.



Интерполяционная формула восстановления ДВПФ по коэффициентам ДПФ в точках $\nu \neq n/N$

Рассмотрим N – точечную последовательность $x[k]$. Ее ДВПФ

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\exp(-j2\pi\nu k).$$

Обратное ДПФ для последовательности $x[k]$

$$x[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n]\exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right).$$

Получаем, что

$$X(\nu) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1} X[n]\exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right)\right)\exp(-j2\pi\nu k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n]\sum_{k=0}^{N-1}\exp\left(-j2\pi\left(\nu-\frac{n}{N}\right)k\right).$$

Рассмотрим отдельно множитель $\sum_{k=0}^{N-1}\exp(-j2\pi(\nu - n/N)k)$. Это сумма N членов геометрической прогрессии с первым членом

$b_1 = 1$, и знаменателем $q = \exp(-j2\pi(\nu - n/N))$.

В точках $\nu \neq n/N$, где $q \neq 1$, получаем (используя известные формулы $S_N = b_1(1-q^N)/(1-q)$ и $\sin\varphi = (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})/(2j)$):

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-j2\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)k\right) = \frac{1-\exp\left(-j2\pi\left(\nu - n/N\right)N\right)}{1-\exp\left(-j2\pi\left(\nu - n/N\right)\right)} =$$

$$= \frac{\exp\left(-j\pi\left(\nu - n/N\right)N\right)\left\{\exp\left(j\pi\left(\nu - n/N\right)N\right) - \exp\left(-j\pi\left(\nu - n/N\right)N\right)\right\}}{\exp\left(-j\pi\left(\nu - n/N\right)\right)\left\{\exp\left(j\pi\left(\nu - n/N\right)\right) - \exp\left(-j\pi\left(\nu - n/N\right)\right)\right\}} =$$

$$= \exp\left(-j\pi\left(\nu - n/N\right)(N-1)\right)\frac{\sin\left(\pi\left(\nu - n/N\right)N\right)}{\sin\left(\pi\left(\nu - n/N\right)\right)}$$

Подставив формулу для суммы в связь, получаем интерполяционную формулу восстановления континуальной функции $X(\nu)$ по коэффициентам ДПФ $X[n]$:

$$X(\nu) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n]\frac{\sin\left(\pi\left(\nu - n/N\right)N\right)}{\sin\left(\pi\left(\nu - n/N\right)\right)}\exp\left(-j\pi\left(\nu - n/N\right)(N-1)\right).$$

Заметим, что для последовательностей конечной длительности ДВПФ непрерывно, а значит для интерполяционной формулы выполняется

$$\lim_{\nu \to n/N} X(\nu) = X[n],$$

что согласуется с тем, что в точках $\nu = n/N$ выполняется $X(\nu)\big|_{\nu=n/N} = X[n]$.

ДПФ периодических последовательностей

Форма записи ДПФ

Пусть $x[k]$, $k \in Z$ — периодическая последовательность отсчетов сигнала с периодом N. Тогда прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательности $x[k]$ определяется следующим образом

$$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nk\right),$$

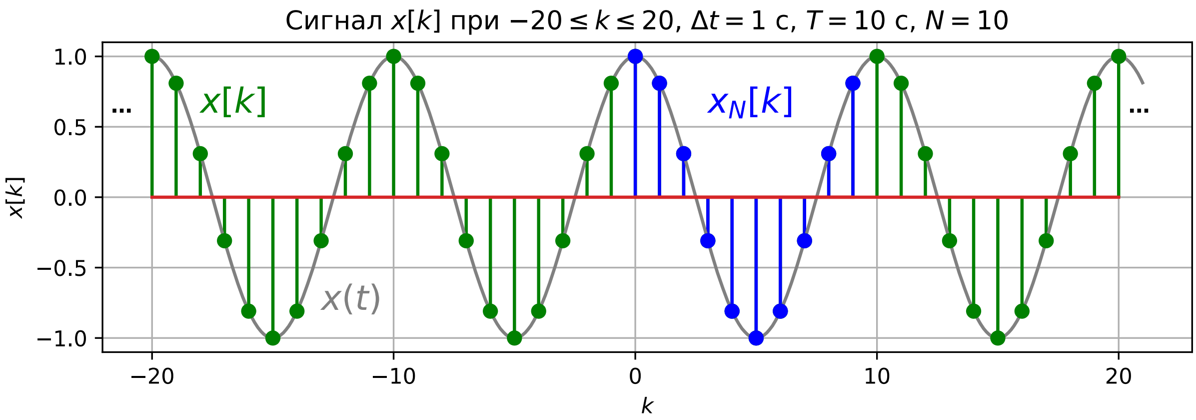
$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n]\exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right).$$

$\tilde{X}[n]$ может рассматриваться как $N-$ точечная последовательность коэффициентов ДПФ (отсчетов ДПФ), где $n = 0, 1, \ldots, N-1$. $\tilde{X}[n]$ может также рассматриваться как периодическая последовательность с периодом N, $n \in Z$. В обратном преобразовании последовательность $x(k)$ также получится периодической.

Связь между ДПФ и ДВПФ для периодических последовательностей.

Пусть аналоговый периодический сигнал $x(t)$ с периодом T дискретизован с шагом $\Delta t = T/N$. Тогда на одном периоде $x(t)$ будет содержаться N отсчетов (если крайний правый отсчет попадает на границу периода, то будем считать его относящимся к следующему периоду). Выделим для последовательности отсчетов $x[k]$ один период

$$x_N[k] = \begin{cases} x[k],\ 0 \le k \le N-1; \\ 0,\ \{k<0\} \cup \{k \ge N\}. \end{cases}$$



Пусть $x_N[k] \leftrightarrow X_N(\nu)$. Последовательность $x(k)$ может быть представлена в виде дискретной сверки $x_N[k]$ и $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-mN]$. Причем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-mN] \leftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{N}\right).$$

Тогда

$$X(\nu) = \frac{1}{N} X_N(\nu) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{N}\right).$$

Последовательность $x_N[k]$ имеет конечную длительность, является абсолютно суммируемой. $X_N(\nu)$ непрерывна. При этом ДВПФ периодической последовательности $x[k]$ имеет дискретную структуру, которой в континуальной записи соответствует некоторый периодический набор δ-функции. Заметим, что по свойствам δ-функции выполняется равенство

$$\frac{1}{N} X_N(\nu)\delta\left(\nu - \frac{n}{N}\right) = \frac{1}{N} X_N\left(\frac{n}{N}\right)\delta\left(\nu - \frac{n}{N}\right).$$

Введем периодическую функцию дискретного аргумента $\tilde{X}[n]$, значения которой будут соответствовать площадям дельта-функций в $X(\nu)$ в точках $\nu = n/N$:

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{X}[n]\,\delta\left(\nu - \frac{n}{N}\right).$$

В таком случае

$$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N} X_N(\frac{n}{N}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\exp(-j2\pi\frac{n}{N}k).$$

$$x[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)\exp(j2\pi\nu k)d\nu = \int_0^1 X(\nu)\exp(j2\pi\nu k)d\nu =$$
$$= \int_0^1 X_N(\nu)\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\nu - \frac{n}{N}\right)\exp(j2\pi\nu k)d\nu = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_N(\frac{n}{N})\exp(j2\pi\frac{n}{N}k).$$

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{X}[n]\exp(j2\pi\frac{n}{N}k).$$

Получаем следующую пару формул

$$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\exp(-j2\pi\frac{n}{N}k),$$

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{X}[n]\exp(j2\pi\frac{n}{N}k),$$

определяющие прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ). В ДПФ частотная (n) и временная (k) переменная дискретны, функция $\tilde{X}[n]$ периодична с периодом N, а в качестве главного периода для отсчетов ДПФ выбирают такой, на котором $n = 0,\ldots,N-1$.

Пример.

Предположим, что имеется периодическая последовательность

($\infty < k < +\infty$)

$$x[k] = \cos(2\pi\frac{3}{16}k).$$

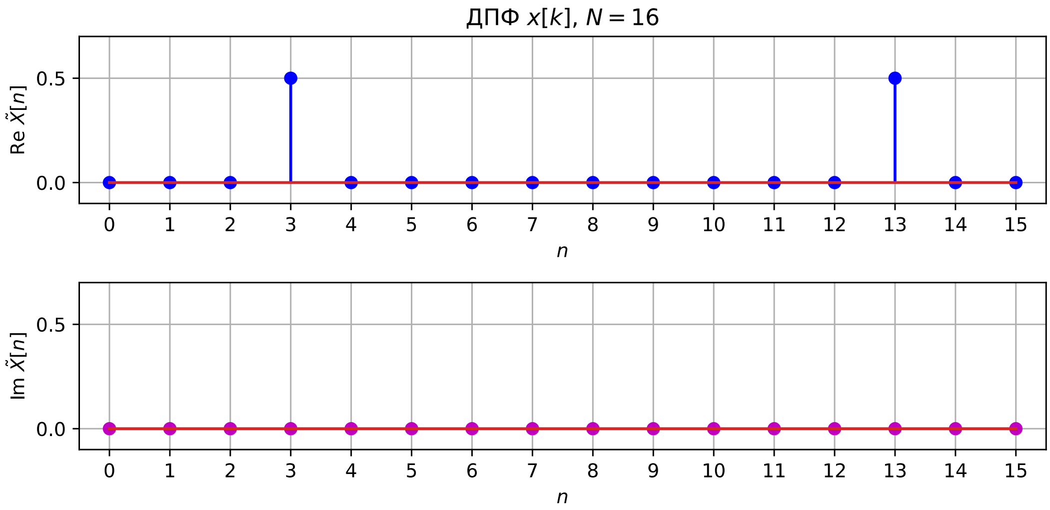
Учитывая, что

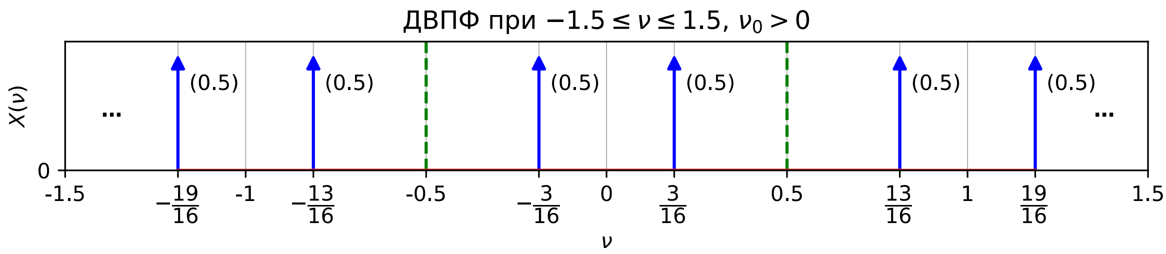
$$\cos(2\pi\frac{3}{16}k) = \frac{1}{2}\exp(j2\pi\frac{3}{16}k) + \frac{1}{2}\exp(-j2\pi\frac{3}{16}k),$$

получаем для ДВПФ этой последовательности

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\delta(\nu - \frac{3}{16} - n) + \frac{1}{2}\delta(\nu + \frac{3}{16} - n).$$

$X(\nu)$ содержит две δ-функции с площадями $1/2$ на каждом периоде. Рассмотрим период $0 \le \nu < 1$ (правую крайнюю точку можем не включать из-за периодичности $X(\nu)$). На нем содержится две δ-функции в точках $\nu_1 = \dfrac{3}{16}$ и $\nu_2 = \dfrac{13}{16}$. Последовательность имеет период $N = 16$ точек. Это означает, что можно установить значения 16-точечного ДПФ $\tilde{X}[3] = 1/2$, $\tilde{X}[13] = 1/2$, а в остальных точках главного периода $\tilde{X}[n] = 0$.





Предположим, что нужно вычислить ДВПФ для одного периода последовательности $x[k] = \cos(2\pi \dfrac{3}{16} k)$, т.е. для последовательности $x_N[k] = x[k]w[k]$, где $w[k] = \sum\limits_{m=0}^{15} \mathbf{1}[k-m]$.

Заметим, что

$$W(\nu) = e^{-j(N-1)\pi\nu} \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)},$$

$$X(\nu) = 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \frac{3}{16} - m) + 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\nu + \frac{3}{16} - m).$$

Способ 1. ДВПФ последовательности $Y(\nu)$ может быть представлено в виде циклической свертки

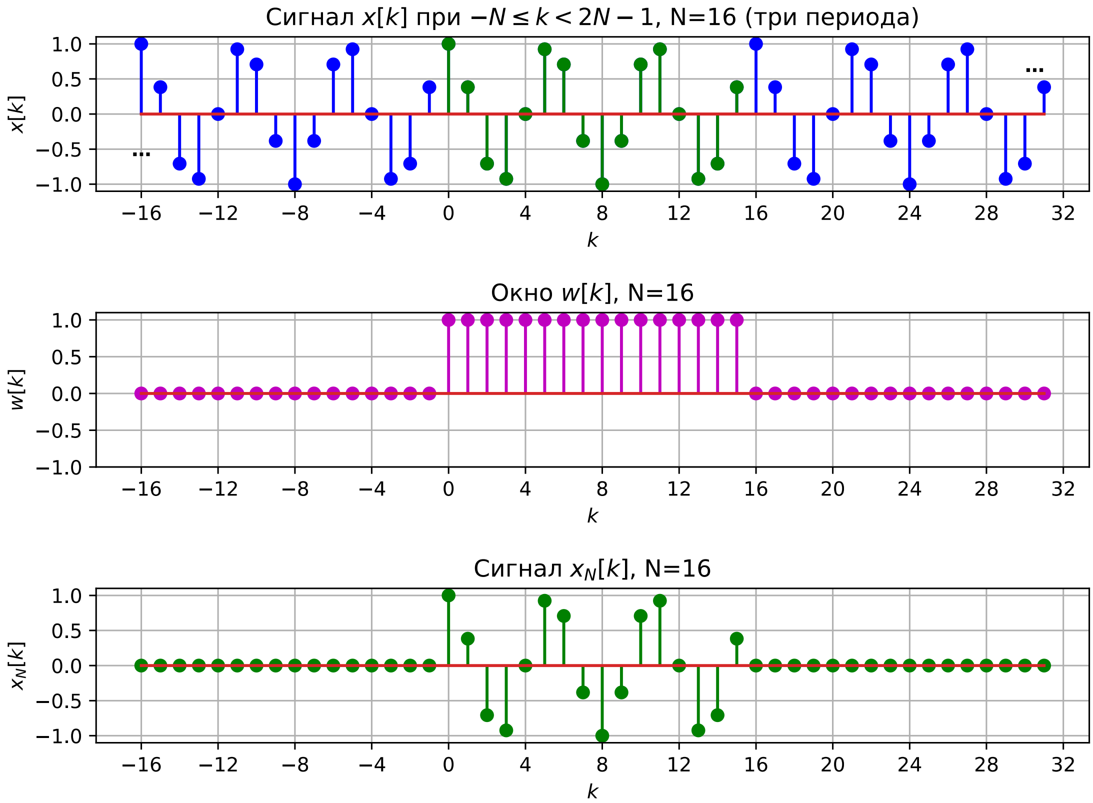
$$Y(\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{\nu}) W(\nu - \tilde{\nu}) d\tilde{\nu} = \int_{-1/2}^{1/2} W(\tilde{\nu}) X(\nu - \tilde{\nu}) d\tilde{\nu}$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции

$$\int_a^b W(\nu)\delta(\nu-\nu_1)d\nu = \begin{cases} W(\nu_1),\ a<\nu_1<b, \\ 0.5W(\nu_1),\ (\nu_1=a)\cup(\nu_1=b), \\ 0,\ (\nu_1<a)\cup(\nu_1>b), \end{cases}$$

получаем, что

$$Y(\nu) = 0.5W(\nu-\frac{3}{16}) + 0.5W(\nu+\frac{3}{16}).$$

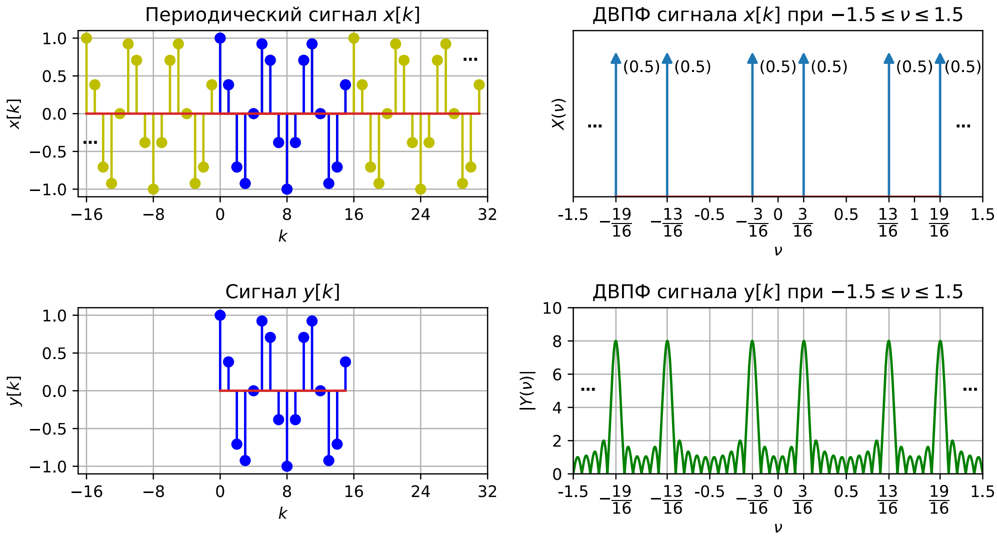


Способ 2. Аналогично через теорему смещения

$$y[k] = \left(\frac{1}{2}\exp(j2\pi k\frac{3}{16}) + \frac{1}{2}\exp(-j2\pi k\frac{3}{16})\right)w[k],$$

$$Y(\nu) = 0.5W(\nu-\frac{3}{16}) + 0.5W(\nu+\frac{3}{16}).$$

$$Y(\nu) = \frac{1}{2}\exp\left(-j(N-1)\pi(\nu-\frac{3}{16})\right)\frac{\sin(N\pi(\nu-\frac{3}{16}))}{\sin(\pi(\nu-\frac{3}{16}))} + \frac{1}{2}\exp\left(-j(N-1)\pi(\nu+\frac{3}{16})\right)\frac{\sin(N\pi(\nu+\frac{3}{16}))}{\sin(\pi(\nu+\frac{3}{16}))}.$$



Частотная ось ДПФ

Отчету N – точечного ДПФ с номером n в случае сигнала конечной длительности соответствует значение ДВПФ в точке $\nu = n/N$ по оси нормированных частот:

$$X(\nu)\big|_{\nu=n/N} = X[n].$$

Если рассматривается периодическая последовательность отсчетов, и коэффициенты ДПФ вычисляются по периоду последовательности, то весам дельта-функций в точках $\nu = n/N$ в ДВПФ соответствуют отсчеты ДПФ с номерами n:

$$X(\nu) = \tilde{X}[n]\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\nu - \frac{n}{N}\right).$$

Эти два обстоятельства позволяют сопоставить отсчётам ДПФ частоты в спектре дискретизованного сигнала. Учитывая, что $\nu = f / f_д = f\Delta t$, где $f_д$ – частота дискретизации, Δt – шаг дискретизации, получаем, что отсчету с номером n соответствует частота $f = nf_д / N = n/(N\Delta t)$ Гц. Разрешение по оси частот при ДПФ анализе составляет $f_д / N$ Гц.

В таблице ниже рассмотрены основные способы введения частотной оси для отсчетов ДПФ.

Частотная переменная и ее размерность	Связь частотной переменной с номером отсчета ДПФ	Разрешение по частоте	Диапазон изменения частоты, соответствующий отсчетам $[0, N)$
f, [Гц]	$f = \dfrac{nf_д}{N}$	$\Delta f = \dfrac{f_д}{N}$	$[0, f_д)$
ω, [рад/с]	$\omega = \dfrac{n\omega_д}{N}$	$\Delta\omega = \dfrac{\omega_д}{N}$	$[0, \omega_д)$
ν, безразмерная	$\nu = \dfrac{n}{N}$	$\Delta\nu = \dfrac{1}{N}$	$[0,1)$
θ, [рад]	$\theta = 2\pi\dfrac{n}{N}$	$\Delta\theta = \dfrac{2\pi}{N}$	$[0, 2\pi)$

Заметим, что $f = nf_д / N$ Гц – это частота в спектре дискредитированного сигнала, который при отсутствии наложения спектров образуется путем периодического продолжения (повторения) спектра исходного аналогово сигнала с периодом, равным частоте дискретизации ($f_д$ в случае оси в Гц или 1 в случае оси нормированных частот). Это означает, что отсчет ДПФ с номером n будет соответствовать в спектре аналогового сигнала частоте $f \in [-f_д/2;\ f_д/2]$, такой, что $f = (n+mN) f_д / N$, где m – целое число.

Задание на моделирование

Вариант	m_0	m_1	**Вариант**	m_0	m_1
1	1	0,25	**11**	1	0,6
2	2	0,2	**12**	2	0,5
3	3	-0,25	**13**	3	-0,5
4	4	-0,2	**14**	4	0,85
5	5	0,8	**15**	5	0,6
6	6	0,75	**16**	6	0,5
7	7	0,6	**17**	7	-0,5
8	8	0,5	**18**	8	0,85
9	9	-0,5	**19**	9	-0,25
10	10	0,85	**20**	10	-0,2

Задача 3.1. Интерполяция ДВПФ добавлением нулевых отсчетов в сигнал.

Постройте на одном графике модули ДВПФ $|X(\nu)|$ и ДПФ $|X[n]|$ последовательности $N = 32$

$$x[k] = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{2\pi}{N} m_0 k\right) + \sin\left(\dfrac{2\pi}{N}(m_0 + 0,25)k\right), 0 \le k \le N-1; \\ 0,\ \text{при других } k. \end{cases}$$

Увеличите размерность ДПФ путем добавления нулевых отсчетов так, чтобы все относительные частоты синусоид попадали на бины ДПФ. Приведите на одном графике модули ДВПФ $|X(\nu)|$ и ДПФ $|X[n]|$ для этого случая. Сравните результаты.

Задача 3.2. ДВПФ и ДПФ периодической последовательсти.

Постройте графики для действительной и мнимой части коэффициентов ДПФ $\tilde{X}[n]$ периодической последовательности $x[k] = \cos\left(\dfrac{2\pi}{N} mk\right) + \sin\left(\dfrac{2\pi}{N} mk\right)$ с периодом $N = 32$, для случаев $m = m_0$ и $m = m_0 + m_1$. Получите аналитическую запись ДПФ. Сравните ДПФ последовательности с ее ДВПФ. Определите, выполняется ли связь между весами дельта-функций в ДВПФ и величинами отсчетов ДПФ.

Контрольные вопросы и задачи к сдаче работы

№1. Построить графики ДВПФ сигналов (последовательностей) $x_1[k]=\cos(2\pi k\nu_0)$ и $x_2[k]=\sin(2\pi k\nu_0)$, $\nu_0=0.2$, $-\infty<k<\infty$. Определить ДВПФ для последовательностей $y_1[k]$ и $y_2[k]$ взвешанных прямоугольной оконной функцией $w[k]=\sum_{m=0}^{N-1}\mathbf{1}[k-m]$, т.е. $y_1[k]=x_1[k]w[k]$ и $y_2[k]=x_2[k]w[k]$ (это можно сделать, зная ДВПФ окна и используя теорему смещения).

№2. Пусть имеется $N=10$ точечное ДПФ некоторой последовательности отсчетов конечной длительности. Частота дискретизации $f_д=1$ кГц. Указать, сколько дополнительных нулей нужно добавить к этой последовательсноти, чтобы растояние между отсчетами стало равным $\Delta f=10$ Гц.

№3. Воспользовавшись интерполяционной формулой восстановления ДВПФ по коэффициентам ДПФ получить спектральную плотность для последовательности отсчетов конечной длительности, ДПФ которой имеет вид

$$X[n]=\begin{cases}5, \text{ при } n=5+mN, m\in Z,\\ \qquad 0, \text{ иначе.}\end{cases}$$

Сравнить результат со спектральной плотностью сигнала, получаемого обратным ДПФ для $X[n]$.

№4. Вычислить ДВПФ прямоугольного окна длины $N=8$:

$$w_{пр}[k]=\begin{cases}1, & \text{при } 0\le k\le N-1,\\ 0, & \text{при других } k.\end{cases}$$

Изобразить по модулю на одном графике:

а) ДВПФ и 8-точечное ДПФ для последовательности отсчетов данного окна;

б) ДВПФ и 16-точечное ДПФ для той же последовательности (дополненной нулями справа до 16 отсчетов).

Список литературы

В качестве учебной литературы рекомендуется использовать учебные пособия [1], [2] и [3]. Все книги есть в библиотеке МФТИ.

1. Солонина А.И. Цифровая обработка сигналов в зеркале Matlab. СПб.: БХВ-Петербург, 2021. 560 с.

2. Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. В 3-ч ч. Ч.1. Свойства и преобразования дискретных сигналов. Изд. 2-Е, . М.: МФТИ, 2007. 332 с.

3. Романюк Ю.А. Дискретное преобразование Фурье в цифровом спектральном анализе. Учебное пособие. М.: МФТИ, 2007. 120 с.

Приложение 1. Работа в среде GNU Octave или MATLAB

Помимо библиотек Python, лабораторную работу можно выполнять в среде MATLAB или GNU Octave. Далее по тексту GNU Octave и MATLAB можно считать синонимами.

Рабочая директория

В среде GNU Octave можно использовать не только встроенные команды, но и расширять функционал с помощью дополнительных файлов-скриптов (*.m). Без указания полного пути в среде доступны файлы из так называемой «рабочей директории». Сменить ее можно с помощью команды `cd`, а также используя соответствующие кнопки в панели инструментов.

Рабочая область

В ходе работы все вычисленные ранее переменные сохраняются в так называемой «рабочей области». Посмотреть содержимое «рабоче области» можно как в отдельно окне, так и с помощью команды `who`. Очистить рабочую область можно командой `clear`.

Язык сценариев (m-файлы)

Переменные

Имена переменных могут состоять из произвольных букв, цифр и знаков «_». Не рекомендуется использовать в качестве имен переменных имена стандартных функций, а также имена стандартных переменных:

- `i` или `j` – мнимая единица
- `inf` – неопределенность 1/0
- `NaN` – неопределенность 0/0
- `ans` – результат последней операции.
- `pi` – число Пи
- `rand` – псевдослучайное число из интервала [0;1]
- `eps` – текущая относительная точность вычислений

Матрицы

Матрицы – основной объект, с которым работает GNU Octave. Вектор – матрица размерности 1xN или Nx1. Скаляр – матрица 1x1. В записи размерности матрицы «MxN» M обозначает число строк, N – число столбцов.

Скаляры создаются с помощью оператора присваивания: `scalar = 1.234;`

Для ввода матриц большей размерности используются символы «`[]`». Матрицы задаются построчно, элементы одной строки разделяются пробелом, а строки – символом «`;`». Например, матрицы можно задать так:

```
matrix = [1 2;3 4; 5 6];       % матрица 3x2

vector = [1 2 3];              %вектор — строка

vector1 = [1;2;3];             %вектор – столбец
```

Большие матрицы можно формировать из матриц меньшей размерности. Например, используя матрицу и вектор, заданные выше, команда `a = [matrix vector1; 0 1 2]` определяет матрицу `[1 2 1; 3 4 2; 5 6 3; 0 1 2]`.

Для обращения к элементам матрицы используются «`()`». Чтобы получить элемент из строки `i` и столбца `j` используется запись `A(i,j)`. Нумерация строк и столбцов начинается с единицы. Можно обращаться не только к отдельным элементам матриц, но также получить целые строки и столбцы. `A(:,j)` – j-ый вектор-столбец, `A(i,:)` – i-ая строка.

Для создания вектора-строки из последовательных элементов есть специальный оператор перечисления «`:`»

```
u = start : step : end;
```

В результате в u будет вектор, состоящий из элементов арифметической прогрессии, первый элемент которой равен start, а шаг – step. Последний элемент вектора будет максимальным членом прогрессии, который не превышает end. Если step = 1, то можно его не указывать: v = 1:5 задает вектор [1 2 3 4 5] Для матриц доступны следующие полезный функции:

- оператор «`'`» – транспонирует матрицу
- `size(A)` – определяет размеры матрицы, возвращает вектор 1x2 вида `[M, N]`, где `M` – число строк, `N` – число столбцов.
- `length(A)` – максимальный из размеров матрицы `A`. Удобно определять число элементов в векторе.

Арифметические операции

Т.к. все объекты в GNU Octave – это матрицы, то и операции с ними соответствуют операциям с матрицами. Ниже приведен список основных операций:

- `=` – присваивание;
- `+` – сложение;
- `*` – умножение;
- `\` – деление слева (`X = A \ B` – результат решения уравнения $A \cdot X = B$, $X = A^{-1} \cdot B$);
- `/` – деление справа (`X = A / B` – результат решения уравнения $X \cdot B = A$, $X = A \cdot B^{-1}$);
- `^` – возведение в степень;
- `.*` – поэлементное умножение;
- `.^` – поэлементное возведение в степень;
- `./` – поэлементное деление.

Следуют помнить, что операции подчиняются требованиям традиционной матричной алгебры. GNU Octave автоматически проверяет размерность операндов.

Сценарии

Сценарий записываются в текстовых файлах с расширением «.m». В этом файле перечислена последовательность операций, так, как если бы она же выполнялась посредством ввода отдельных команд в командной строке. Все переменные, объявленные в сценарии, сохраняются в рабочей области и доступны для дальнейшего использования в командной строке или других сценариях. Чтобы вызвать сценарий, нужно набрать имя его файла без расширения в командной строке. Например, запуск сценария `my_script.m` из рабочей директории осуществляется вводом `my_script` в окне команд.

Функции

Чтобы не засорять рабочую область лишними переменными, часть кода сценариев можно оформить в виде функций. Функции также записываются в текстовых файлах с расширением «.m». В отличие от сценариев в файле функции первым должен быть специальный оператор, содержащей описание функции:

```
function[out_params] = function_name(in_params)
```

Это означает, что в файле записана функция с именем `function_name`, у которой есть входные аргументы `in_params`, а результат сохраняется в выходных переменных `out_params`.

Завершается описание функции ключевым словом `end`.

Название функции должно совпадать с названием файла, в котором она описана.

Входные аргументы передаются в функцию «по значению». Любые изменения этих переменных в теле функции не отразятся на их значениях в рабочей области.

Чтобы вызвать функцию, нужно указать ее имя и список аргументов в круглых скобках:

```
val = function_name(some_arg);
```

Если указаны несколько входных/выходных значений:

```
function[out1out2] = function_name(in1,in2)
```

то функцию можно вызывать так:

```
[a1 a2] = function_name(b1,b2);
```

Некоторые стандартные операции

В стандартной поставке GNU Octave доступны основные математический функции (`exp, cos, sin, acos, atan, sqrt, abs, log, log10` и т.п.)

Для округления можно пользоваться функциями `round(x)` (до ближайшего целого), `fix(x)` (до целого в сторону нуля), `ceil(x)` / `floor(x)` (до ближайшего целого в сторону увеличения/уменьшения).

Для работы с комплексными числами доступны следующие функции:

- `arg(x)` – аргумент комплексного числа;
- `abs(x)` – модуль комплексного числа;
- `real(x)` – действительная часть;
- `imag(x)` – мнимая часть;
- `conj(x)` – комплексное сопряжение.

Иногда требуется сформировать вектора или матрицы определенного вида. Для этого есть следующие функции:

- `linspace(start, end, N)` – формирует вектор-строку из `N` элементов равномерно расположенных между `start` и `end`.

- `zeros(N, M)` – создает нулевую матрицу размером NxM. Вектор-строку из `M` нулей можно получить с помощью команды `zeros(1, M)`.

- `ones(N, M)` – создает матрицу размером NxM, все элементы которой равны единице. Вектор-строку из `M` единиц можно получить с помощью команды `ones(1, M)`.

- `rand(N,M)` – создает матрицу размером NxM, все элементы которой – случайные числа, равномерно распределенные на интервале (0.0, 1.0).

Рисование графиков

Команда `figure` создает новое окно для рисования графиков. Все команды рисования влияют на последнее созданное окно.

Непрерывные графики выводятся с помощью команды `plot(x,y)`. Аргументами могут быть:

- вектора одинаковой размерности, `x` – значения по оси абсцисс, `y` – значения по оси ординат;

- матрицы одинаковой размерности: для каждого столбца из `x` выбирается соответствующий столбец из `y` и строится график, как в случае выше;

- `x` - вектор, а `y` – матрица (или наоборот), такие, что длина вектора совпадает с одной из размерностей матрицы: для каждого столбца (строки) матрицы строится отдельный график, где в качестве значений для второй оси используются элементы вектора

Также можно задать несколько пар аргументов `(x,y)`, чтобы построить несколько графиков на одном рисунке:

```
plot(x1,y1, x2,y2)
```

Если нужно нарисовать график отдельных отсчетов, то следует использовать команду `stem`. Ее аргументы аналогичны команде `plot`.

Повторные вызовы команд `plot` или `stem` заменяют график в последнем окне, созданном командой `figure`. Для того, чтобы отобразить в одном окне несколько отдельных графиков, существует команда `subplot(i,j, p)`. Эта команда делит окно вывода графиков на сетку из `i` строк и `j` столбцов. Параметр `p` выбирает область окна, в которой следующая команда `plot` или `stem` будет осуществлять рисование графика. Области нумеруются слева направо сверху вниз (для вывода четырех графиков (i,j – p): 1,1 – 1, 1,2 – 2, 2,1 – 3, 2,2 – 4).

Приложение 2. Вычисление ДПФ и ДВПФ в GNU Octave / MATLAB

Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

Можно заметить, что вычисление всех отсчетов дискретного преобразования Фурье (ДПФ) непосредственно по формуле

$$X[n]=\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{N}\right)$$

в случае последовательностей $x[k]$ большой длительности N требует значительного времени вычислений. Это связано с тем, что такой алгоритм требует N^2 комплексных умножений и N^2-N комплексных сложений. С ростом N мы получаем квадратичный рост числа операций, что делает такой алгоритм не применимым на практике.

Однако число операций можно значительно сократить, воспользовавшись алгоритмом быстрого преобразования Фурье (БПФ, также FFT – от англ. Fast Fourier transform). Построение таких алгоритмов рассматривается или будет рассмотрено в лекционном курсе «Дискретные преобразования сигналов». Пока лишь подчеркнем, что для случая, когда N является степенью двух ($N=2^m,\ m\in N$), асимптотическая сложность алгоритма БПФ будет $O(N\log_2 N)$.

Вычисление по алгоритму БПФ для одномерной последовательности отсчетов производится с помощью функции `fft`. Если она принимает на вход одно значение `fft(x)`, то в результате получится ДПФ той же размерности, что и сам сигнал. Если используется и второй аргумент `fft(x, n)`, то зависимости от `n` возможны следующие ситуации.

а) `n` меньше длины вектора `x`. В таком случае ДПФ определяется для сигнала, состоящего из `n` первых отсчетов вектора `x`.

б) `n` равно длине вектора `x`. Этот случай эквивалентен `fft(x)`. Размерность ДПФ совпадает с длиной вектора входных данных.

в) `n` больше длины вектора `x`. Это означает, что будет определено ДПФ для последовательности x, дополненной нулевыми отсчетами справа до размера `n`. При таком дополнении спектр (ДВПФ) последовательности не изменяется, а размерность ДПФ (число отсчетов на периоде) становится равной `n`.

Обратное преобразование выполняется с помощью вызова `ifft(X)` или `ifft(X, n)`, где второй аргумент функции определяется аналогичным образом. Если требуется определить ДПФ, нормированное на число отчетов,

$$\tilde{X}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{N}\right)$$

что нужно, например, при анализе периодических последовательностей, то необходимо разделить вектор, описывающий результат, поэлементно на N.

Далее приведен пример кода для построения графика модуля отсчетов ДПФ с нормирующим множителем для последовательности отсчетов, записанной в векторе `x`.

```
N=64;

k=0:1:N-1;

x=cos(2*pi*25/N*k);

Xn=fft(x)/length(x); % вычисляем ДПФ и нормируем результат

stem([0:1:(length(Xn)-1)], abs(Xn)); % строим график модуля отсчетов ДПФ

xlabel("n");

ylabel("|X[n]| / N");
```

Заметим, что в Matlab индексы массивов нумеруются с единицы. Так, например, отсчету ДПФ $X[11]$ соответствует `Xn(11+1)`.

В таблице ниже приведены стандартные функции для работы с ДПФ и БПФ в MATLAB и библиотеках Python.

	Python (SciPy, NumPy)	MATLAB
Матрица $[W]_N$ матричной формы ДПФ	`scipy.linalg.dft(n, scale)`	`dftmtx(n)`
Вычисление прямого ДПФ по алгоритму БПФ	`scipy.fft.fft(x)` `np.fft.fft(x)`	`fft(x)`
Вычисление обратного ДПФ по алгоритму БПФ	`scipy.fft.ifft(x)` `np.fft.ifft(x)`	`ifft(x)`
Сдвиг коэффициентов ДПФ на половину периода	`scipy.fft.fftshift(X)` `np.fft.fftshift(X)`	`fftshift(X)`

Дискретное во времени преобразование Фурье

Эффективный способ вычисления ДВПФ на равномерной сетке в диапазоне частот основан на вычислении БПФ и использовании связи $X(\nu)\big|_{\nu=n/N} = X[n]$. Приведем пример вычисления с построением графика модуля ДВПФ.

```
M=2^12; %число точек сетки частот

nu=(0:(M-1))/M-0.5;

Wn=fftshift(fft(w, M)) % вычисление ДВПФ в M точках на [-0.5; 0.5)

plot(nu,  abs(Yn));

ylabel("|Y(\nu)|");

xlabel("\nu");
```

В приведенном примере `M` — число точек в диапазоне частот $\nu \in [-0,5; 0,5]$, в которых вычисляется ДВПФ. Функция `fftshift` позволяет перейти от диапазона $\nu \in [0; 1]$ к $\nu \in [-0,5; 0,5]$ (выполняет соответствующий циклический сдвиг массива). `nu` – точки, в которых мы вычисляет ДВПФ.