

অনুশীলনী- 9.4

1. (i) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\sin^{-1} ax$

সমাধান: ধরি, $y = \sin^{-1} ax$

উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরন করে পাই,

$$\frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(\sin^{-1} ax)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (ax)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(ax)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sin^{-1} ax) = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2 x^2}}$$

(ii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan^{-1} \frac{x}{a}$

$$\text{সমাধান: } \frac{d}{dx} \left(\tan^{-1} \frac{x}{a} \right) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{a} \right)$$

$$= \frac{1}{\frac{a^2 + x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{d}{dx}(x)$$

$$= \frac{a^2}{a^2 + x^2} \times \frac{1}{a} \cdot 1 = \frac{a}{a^2 + x^2}$$

(iii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan^{-1}(e^x)$

[ঢা. বো. ০৮; ব. বো. ০৭; কু. বো. ০৮; য. বো. ০৮]

সমাধান: $\frac{d}{dx} \tan^{-1}(e^x) = \frac{1}{1+(e^x)^2} \frac{d}{dx} (e^x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$

(iv) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan x \sin^{-1} x$

[ঢা. বো. ০৫]

সমাধান: $\frac{d}{dx} (\tan x \sin^{-1} x)$

$= \tan x \frac{d}{dx} (\sin^{-1} x) + \sin^{-1} x \frac{d}{dx} (\tan x)$

$= \frac{\tan x}{\sqrt{1-x^2}} + \sin^{-1} x \sec^2 x$

(v) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $(x^2 + 1) \tan^{-1} x - x$

[কু. বো. ১২; য. বো. ১১; দি. বো. ১০; মা. বো. ০৬]

সমাধান: $\frac{d}{dx} [(x^2 + 1) \tan^{-1} x - x]$

$= \frac{d}{dx} \{(x^2 + 1) \tan^{-1} x\} - \frac{d}{dx} (x)$

$= (x^2 + 1) \frac{d}{dx} (\tan^{-1} x) + \tan^{-1} x \frac{d}{dx} (x^2 + 1) - 1$

$= (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{1+x^2} + 2x \tan^{-1} x - 1$

$= 1 + 2x \tan^{-1} x - 1 = 2x \tan^{-1} x$

(vi) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $x^2 \sin^{-1}(1-x)$

[ঢা. বো. ১৪; দি. বো. ১২; ব. বো. ০৮; রা. বো. ০৬]

সমাধান: $\frac{d}{dx} [x^2 \sin^{-1}(1-x)]$

$= x^2 \frac{d}{dx} [\sin^{-1}(1-x)] + \sin^{-1}(1-x) \frac{d}{dx} (x^2)$

$= x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} \frac{d}{dx} (1-x) + \sin^{-1}(1-x) \cdot 2x$

$= \frac{x^2}{\sqrt{1-1+2x-x^2}} (-1) + 2x \sin^{-1}(1-x)$

$= -\frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}} + 2x \sin^{-1}(1-x)$

(vii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $10^{\ln(\sec^{-1} x)}$

সমাধান: ধরি, $y = 10^{\ln(\sec^{-1} x)}$

উভয়পক্ষে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{d}{dx} (y) = \frac{d}{dx} \{10^{\ln(\sec^{-1} x)}\}$

$= 10^{\ln(\sec^{-1} x)} \cdot \ln 10 \cdot \frac{d}{dx} (\sec^{-1} x)$

$\frac{d}{dx} [10^{\ln(\sec^{-1} x)}] = 10^{\ln(\sec^{-1} x)} \cdot \ln 10 \cdot \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$

(viii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan(\sin^{-1} x)$

[ঢা. বো. ১২, ১০; ব. বো. ১২, ০৮; কু. বো. ১১, ০৮;

য. বো. ১০; সি. বো. ১০; চ. বো. ০৯, ০২;

রা. বো. ০৮; মা. বো. ০৭]

সমাধান: $\frac{d}{dx} [\tan(\sin^{-1} x)]$

$= \sec^2(\sin^{-1} x) \frac{d}{dx} (\sin^{-1} x)$

$= \sec^2 \left(\sec^{-1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \left\{ \sec \left(\sec^{-1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \right\}^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

$= (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

(ix) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\sec(\tan^{-1} x)$

সমাধান: ধরি, $y = \sec(\tan^{-1} x)$

$y = \sec(\sec^{-1} \sqrt{1+x^2})$

$y = \sqrt{1+x^2}$

$\frac{d}{dx} (y) = \frac{d}{dx} (\sqrt{1+x^2})$

$= \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{d}{dx} (1+x^2)$

$= \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x$

$\frac{d}{dx} [\sec(\tan^{-1} x)] = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(x) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\sin^{-1} \sqrt{xe^x}$

[ব. বো. ১০]

সমাধান: $\frac{d}{dx} (\sin^{-1} \sqrt{xe^x})$

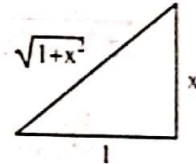
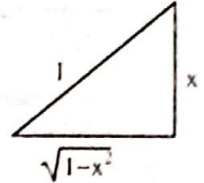
$= \frac{1}{\sqrt{1-xe^x}} \frac{d}{dx} (\sqrt{xe^x})$

$= \frac{1}{\sqrt{1-xe^x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{xe^x}} \frac{d}{dx} (xe^x)$

$= \frac{1}{\sqrt{1-xe^x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{xe^x}} \left[e^x \frac{d}{dx} (x) + x \frac{d}{dx} (e^x) \right]$

$= \frac{1}{\sqrt{1-xe^x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{xe^x}} (e^x + xe^x)$

$= \frac{e^x (1+x)}{2\sqrt{xe^x} (1-xe^x)}$



(xi) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\sqrt{\sin^{-1} x^5}$

[ঢা. বো. ১৫]

$$\begin{aligned}\text{সমাধান: } \frac{d}{dx} (\sqrt{\sin^{-1} x^5}) &= \frac{1}{2\sqrt{\sin^{-1} x^5}} \frac{d}{dx} (\sin^{-1} x^5) \\&= \frac{1}{2\sqrt{\sin^{-1} x^5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^{10}}} \frac{d}{dx} (x^5) \\&= \frac{5x^4}{2\sqrt{\sin^{-1} x^5} (1-x^{10})}\end{aligned}$$

(xii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $a \sin^{-1} x$

$$\begin{aligned}\text{সমাধান: } \frac{d}{dx} (a \sin^{-1} x) &= a \frac{d}{dx} (\sin^{-1} x) \\&= a \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

(xiii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan^{-1}\left(\frac{b}{a} \tan x\right)$

$$\begin{aligned}\text{সমাধান: } \frac{d}{dx} \left[\tan^{-1}\left(\frac{b}{a} \tan x\right) \right] &= \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2} \tan^2 x} \frac{d}{dx} \left(\frac{b}{a} \tan x \right) \\&= \frac{1}{\frac{a^2 + b^2 \tan^2 x}{a^2}} \cdot \frac{b}{a} \frac{d}{dx} (\tan x) \\&= \frac{a^2}{a^2 + b^2 \tan^2 x} \cdot \frac{b}{a} \sec^2 x = \frac{ab \sec^2 x}{a^2 + b^2 \tan^2 x}\end{aligned}$$

(xiv) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan^{-1}(\sin^x)$

[য. বো. ০৯; চ. বো. ০৫, ০৩; ব. বো. ০৫]

$$\begin{aligned}\text{সমাধান: } \frac{d}{dx} [\tan^{-1}(\sin^x)] &= \frac{1}{1 + (\sin^x)^2} \frac{d}{dx} (\sin^x) \\&= \frac{\cos^x}{1 + \sin^2 e^x} \frac{d}{dx} (e^x) \\&= \frac{e^x \cos^x}{1 + \sin^2 e^x}\end{aligned}$$

2. (i) $y = \tan(m \tan^{-1} x)$ হলে দেখাও যে,

$$(1+x^2)y_1 = m(1+y^2) \quad [\text{কু. বো. ০৪}]$$

সমাধান: $y = \tan(m \tan^{-1} x)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} (y) = \frac{d}{dx} \{ \tan(m \tan^{-1} x) \}$$

$$\Rightarrow y_1 = \sec^2(m \tan^{-1} x) \frac{d}{dx} (m \tan^{-1} x)$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{m \sec^2(m \tan^{-1} x)}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow y_1(1+x^2) = m[1 + \tan^2(m \tan^{-1} x)]$$

$$\therefore (1+x^2)y_1 = m(1+y^2)$$

(ii) $y = \cos\{2\sin^{-1}(\cos x)\}$ হলে দেখাও যে, $y_1 = 2\sin 2x$

সমাধান: $y = \cos\{2\sin^{-1}(\cos x)\}$

$$= \cos\left\{2\sin^{-1} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\}$$

$$= \cos(\pi - 2x) = -\cos 2x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} (y) = \frac{d}{dx} (-\cos 2x) \therefore y_1 = 2\sin 2x$$

3. (i) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$

[মা. বো. ০৫, DU. ১৯]

সমাধান: ধরি, $y = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$

$$\Rightarrow y = 2\tan^{-1} x \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

(ii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$

সমাধান: ধরি, $y = \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$

$$\Rightarrow y = 2\tan^{-1} x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

(iii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}$

সমাধান: ধরি, $y = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$$\Rightarrow y = 2\tan^{-1} x \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

(iv) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\sec^{-1} \frac{1+x^2}{1-x^2}$

[দি. বো. ১৩; সি. বো. ১০; কু. বো.]

চ. বো. ০৭; য. বো. ০৬; ব. বো.]

সমাধান: ধরি, $y = \sec^{-1} \frac{1+x^2}{1-x^2}$

$$\Rightarrow y = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2} \Rightarrow y = 2\tan^{-1} x \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

(v) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan^{-1} \frac{2\sqrt{x}}{1-x}$

[ঢা. বো. ১৫, ০৭; কু. বো. ১২; চ. বো. ১১;]

সি. বো. ১১; য. বো.]

সমাধান: ধরি, $y = \tan^{-1} \frac{2\sqrt{x}}{1-x}$

$$\Rightarrow y = \tan^{-1} \frac{2\sqrt{x}}{1-(\sqrt{x})^2}$$

$$= 2\tan^{-1} \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{d}{dx} (\sqrt{x})$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$$

(vi) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan^{-1} \frac{4x}{1-4x^2}$

[ব. বো. ০৪]

সমাধান: ধরি, $y = \tan^{-1} \frac{4x}{1-4x^2} = \tan^{-1} \frac{2 \cdot 2x}{1-(2x)^2}$

$$\Rightarrow y = 2 \tan^{-1}(2x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot \frac{d}{dx}(2x)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{1+4x^2} \cdot 2 = \frac{4}{1+4x^2}$$

(vii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan^{-1} \frac{4\sqrt{x}}{1-4x}$

[কু. বো. ১৪; ব. বো. ১৪, ১১; চ. বো. ০৯, ০৫;

সি. বো. ০৯; রা. বো. ০৬, ০৪]

সমাধান: ধরি, $y = \tan^{-1} \frac{4\sqrt{x}}{1-4x}$

$$\Rightarrow y = \tan^{-1} \frac{2 \cdot 2\sqrt{x}}{1-(2\sqrt{x})^2}$$

$$\Rightarrow y = 2 \tan^{-1}(2\sqrt{x})$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{1+(2\sqrt{x})^2} \cdot \frac{d}{dx}(2\sqrt{x})$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{1+4x} \cdot \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}(1+4x)}$$

(viii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan^{-1} \frac{3x-x^3}{1-3x^2}$

সমাধান: ধরি, $y = \tan^{-1} \frac{3x-x^3}{1-3x^2}$

$$\Rightarrow y = 3 \tan^{-1} x \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{1+x^2}$$

(i) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan^{-1} \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

[কু. বো. ০০]

সমাধান: ধরি, $y = \tan^{-1} \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow y = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}(\sqrt{x})$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4} \right) - \frac{d}{dx} (\tan^{-1} \sqrt{x})$$

$$= 0 - \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= -\frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

(ii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\cot^{-1} \frac{1+x}{1-x}$

[ঢা. বো. ০৮, ০৪; সি. বো. ০৮, ০৪; রা. বো. ১৪, ০৭;

য. বো. ০৭; মা. বো. ১১, ০৮; কু. বো. ০৩]

সমাধান: ধরি, $y = \cot^{-1} \frac{1+x}{1-x} = \tan^{-1} \frac{1-x}{1+x}$

$$\Rightarrow y = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 - \frac{d}{dx} (\tan^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

(iii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan^{-1} \frac{a+bx}{a-bx}$

[কু. বো. ১৩; ঢা. বো. ১১, ০৯; রা. বো. ১২;

চ. বো. ১২; য. বো. ১১, ০২; ব. বো. ০৯]

সমাধান: ধরি, $y = \tan^{-1} \frac{a+bx}{a-bx} = \tan^{-1} \left(\frac{1 + \frac{bx}{a}}{1 - \frac{bx}{a}} \right)$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \theta}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \theta} \right); \left[\frac{bx}{a} = \tan \theta \text{ ধরে} \right]$$

$$\Rightarrow y = \tan^{-1} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) = \frac{\pi}{4} + \theta$$

$$= \frac{\pi}{4} + \tan^{-1} \left(\frac{bx}{a} \right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 + \frac{1}{1 + \left(\frac{bx}{a} \right)^2} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{bx}{a} \right)$$

$$= \frac{1}{\frac{a^2 + b^2 x^2}{a^2}} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{dx}(x)$$

$$= \frac{a^2}{a^2 + b^2 x^2} \cdot \frac{b}{a} \cdot 1$$

$$= \frac{ab}{a^2 + b^2 x^2}$$

(iv) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan^{-1} \frac{a+bx}{b-ax}$

[ব. বো. ১৩, ০১, BUET. 09-10]

সমাধান: ধরি, $y = \tan^{-1} \left(\frac{a+bx}{b-ax} \right)$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{\frac{a}{b} + x}{1 - \frac{a}{b} x} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) + \tan^{-1} x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

5. (i) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$
[BUET. 12-13]

সমাধান: ধরি, $y = \tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = \frac{\pi}{4} - x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{d}{dx}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1.$$

- (ii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan^{-1}(\sec x + \tan x)$
[চ. বো. ১৩; য. বো. ০৭; সি. বো. ১৪, ০৩]

সমাধান: ধরি, $y = \tan^{-1}(\sec x + \tan x)$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1 + \sin 2 \cdot \frac{x}{2}}{\cos 2 \cdot \frac{x}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2})^2}{(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2})(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2})}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{x}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right] \Rightarrow y = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- (iii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)$
[চ. বো. ১৩, ২৪]

সমাধান: ধরি, $y = \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\cos 2 \cdot \frac{x}{2}}{1 + \sin 2 \cdot \frac{x}{2}}\right)$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2})(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2})}{(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2})^2}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1 - \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{x}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{x}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

- (iv) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\cot^{-1}(\operatorname{cosec} x + \cot x)$

সমাধান: মনে করি, $y = \cot^{-1}(\operatorname{cosec} x + \cot x)$

বা, $y = \cot^{-1}\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$$= \cot^{-1}\left(\frac{1 + \cos x}{\sin x}\right) = \cot^{-1}\left(\frac{1 + \cos 2 \cdot \frac{x}{2}}{\sin 2 \cdot \frac{x}{2}}\right)$$

$$= \cot^{-1}\left(\frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}\right)$$

বা, $y = \cot^{-1}\left(\cot \frac{x}{2}\right)$

বা, $y = \frac{x}{2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

(v) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan^{-1} \left(\frac{a \cos x - b \sin x}{b \cos x + a \sin x} \right)$

সমাধান: ধরি, $y = \tan^{-1} \left(\frac{a \cos x - b \sin x}{b \cos x + a \sin x} \right)$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{\frac{a}{b} - \tan x}{1 + \frac{a}{b} \tan x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) - \tan^{-1}(\tan x)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) - x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\tan^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) \right] - \frac{d}{dx}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1$$

(ii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\sin^{-1} \{2x\sqrt{1-x^2}\}$

[চ. বো. ১৪; কু. বো. ০৬; ঢা. বো. ০৪]

সমাধান: ধরি, $y = \sin^{-1} \{2x\sqrt{1-x^2}\}$;

[$x = \sin \theta$ হলে, $\theta = \sin^{-1} x$]

$$\therefore y = \sin^{-1} \{2 \sin \theta \sqrt{1 - \sin^2 \theta}\}$$

$$= \sin^{-1} (2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$= \sin^{-1} (\sin 2\theta) = 2\theta = 2 \sin^{-1} x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

(iii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\sin^{-1} (3x - 4x^3)$

সমাধান: ধরি, $y = \sin^{-1} (3x - 4x^3)$

[$x = \sin \theta$ হলে, $\theta = \sin^{-1} x$]

$$\Rightarrow y = \sin^{-1} (3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta)$$

$$= \sin^{-1} (\sin 3\theta) = 3\theta = 3 \sin^{-1} x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

(iii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর:

$$\sin^{-1} \{2ax\sqrt{1-a^2x^2}\} \quad [\text{সি. বো. ১৩; কু. বো. ০৮}]$$

সমাধান: ধরি, $y = \sin^{-1} \{2ax\sqrt{1-a^2x^2}\}$

[$ax = \sin \theta$ হলে, $\theta = \sin^{-1} ax$]

$$\therefore y = \sin^{-1} \{2 \sin \theta \sqrt{1 - \sin^2 \theta}\}$$

$$= \sin^{-1} (2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$= \sin^{-1} (\sin 2\theta) = 2\theta = 2 \sin^{-1} ax$$

$$\Rightarrow y = 2 \sin^{-1} ax$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2x^2}} \cdot \frac{d}{dx}(ax)$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$$

(iv) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\cos^{-1} \{2x\sqrt{1-x^2}\}$

[ঢা. বো. ১০; কু. বো. ১০; য. বো. ১০]

সমাধান: ধরি, $y = \cos^{-1} \{2x\sqrt{1-x^2}\}$

[$x = \cos \theta$ হলে, $\theta = \cos^{-1} x$]

$$\Rightarrow y = \cos^{-1} \{2 \cos \theta \sqrt{1 - \cos^2 \theta}\}$$

$$= \cos^{-1} (2 \cos \theta \sin \theta)$$

$$= \cos^{-1} (\sin 2\theta) = \cos^{-1} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right) \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\theta = \frac{\pi}{2} - 2 \cos^{-1} x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

(v) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

সমাধান: ধরি, $y = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

[$x = \tan \theta$ হলে, $\theta = \tan^{-1} x$]

$$\Rightarrow y = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+\tan^2 \theta} - 1}{\tan \theta} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\sec \theta - 1}{\tan \theta} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{\frac{1}{\cos \theta} - 1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \right) = \tan^{-1} \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \tan^{-1} x$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \tan^{-1} x \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

(vi) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\cos^{-1} \left(\frac{1+x}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$

[চ. বো. ০৯]

সমাধান: ধরি, $y = \cos^{-1} \left(\frac{1+x}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$; $x = \cos \theta$ হলে, $\theta = \cos^{-1} x$

$$\Rightarrow y = \cos^{-1} \left(\frac{1+\cos \theta}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \cos^{-1} \left(\frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = \cos^{-1} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \cos^{-1} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

(vii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

সমাধান: ধরি, $y = \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $x = \sin \theta$ হলে, $\theta = \sin^{-1} x$

$$\Rightarrow y = \tan^{-1} \left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)$$

$$= \tan^{-1}(\tan \theta) = \theta = \sin^{-1} x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(viii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
[রা. বো. ০৩]

সমাধান: ধরি, $y = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

$$x = \operatorname{cosec} \theta \text{ হলে, } \theta = \operatorname{cosec}^{-1} x$$

$$\Rightarrow y = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \theta - 1}} = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\cot \theta} \right)$$

$$= \tan^{-1}(\tan \theta) = \theta = \operatorname{cosec}^{-1} x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

(ix) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$

সমাধান: ধরি, $y = 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{1 + \frac{x-a}{b-x}} \cdot \frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \right)$$

$$= \frac{2}{b-x+x-a} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{b-x}} \right)$$

$$= \frac{2(b-x)}{b-a} \cdot \frac{(\sqrt{b-x}) \frac{d}{dx}(\sqrt{x-a}) - (\sqrt{x-a}) \frac{d}{dx}(\sqrt{b-x})}{(b-x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

(x) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

সমাধান: ধরি, $y = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

$$\therefore \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx} \left(\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right)$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} \right)^2} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} \right)$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{1-x}} \cdot \frac{d}{dx} \left\{ (1-x)^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

$$= \frac{1-x}{1-x+1} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) (1-x)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (-1)$$

$$= \frac{1-x}{(2-x)} \cdot \left(\frac{1}{2} \right) (1-x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{2(2-x)} = \frac{1}{2(2-x)(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

(xi) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\cot^{-1}(\sqrt{1+x^2}-x)$

সমাধান: ধরি, $y = \cot^{-1}(\sqrt{1+x^2}-x)$ | ধরি, $x = \tan \theta$

$$\text{বা, } y = \cot^{-1}(\sqrt{1+\tan^2 \theta} - \tan \theta) \therefore \theta = \tan^{-1} x$$

$$\text{বা, } y = \cot^{-1}(\sec \theta - \tan \theta)$$

$$\text{বা, } y = \cot^{-1} \left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)$$

$$\text{বা, } y = \cot^{-1} \left(\frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \right)$$

$$y = \tan^{-1} \left(\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \right)$$

$$y = \tan^{-1} \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} - 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}$$

$$y = \tan^{-1} \frac{\left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right)}{\left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right)^2}$$

$$\text{বা, } y = \tan^{-1} \left(\frac{\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}} \right)$$

$$\text{বা, } y = \tan^{-1} \left(\frac{1 + \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan \frac{\theta}{2}} \right)$$

$$\text{বা, } y = \tan^{-1} 1 + \tan^{-1} \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$$

$$\text{বা, } y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx} (\tan^{-1} x)$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2(1+x^2)}$$

(xii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$
[য. বো. ১৪]

সমাধান: ধরি, $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

$$\Rightarrow y = \sin^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right); [x = \tan\theta \text{ ধরে}]$$

$$\Rightarrow y = \sin^{-1}(\cos 2\theta) = \sin^{-1}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)\right]$$

$$\Rightarrow y = \frac{\pi}{2} - 2\theta \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} - 2 \tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{d}{dx}(2 \tan^{-1}x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 - \frac{d}{dx}(2 \tan^{-1}x) = -\frac{2}{1+x^2}$$

7. (i) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর:

$$\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{e^x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$$

সমাধান: ধরি, $y = \tan^{-1}\left(\frac{x^2}{e^x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{x^2}{e^x}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{x^2}{e^x}\right) \quad [\text{সূত্র: } \tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}]$$

$$= \frac{\pi}{2}; \therefore \frac{dy}{dx} = 0$$

(ii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর:

$$\sin^{-1}x + \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$$

সমাধান: মনে করি, $y = \sin^{-1}x + \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

$$\text{বা, } y = \sin^{-1}x + \cos^{-1}x \quad \text{বা, } y = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{এখন, } \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

8. (i) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর:

$$\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad [\text{য. বো. ১২; কু. বো. ১১, ০৫; রা. বো. ১০, ০৫; মা. বো. ০৭; য. বো. ০৩}]$$

$$\text{সমাধান: } y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$$= \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos 2\frac{x}{2}}{1+\cos 2\frac{x}{2}}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$$

(ii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

[মা. বো. ১২; সি. বো. ০৭, ০৫]

সমাধান: ধরি, $y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$$[x = \cos\theta \text{ হলে } \theta = \cos^{-1}x]$$

$$\therefore y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$= \tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}} = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\cos^{-1}x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

(iii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর:

$$\sin\left\{2 \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}$$

সমাধান: ধরি, $y = \sin\left\{2 \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}$;

$$x = \cos\theta \text{ হলে, } \theta = \cos^{-1}x$$

$$\Rightarrow y = \sin\left\{2 \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right\}$$

$$= \sin\left\{2 \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos 2\frac{\theta}{2}}{1+\cos 2\frac{\theta}{2}}}\right\}$$

$$= \sin\left\{2 \tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}}\right\}$$

$$= \sin\left\{2 \tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2}\right\} = \sin\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \sin\theta = \sin(\cos^{-1}x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(\cos^{-1}x) \frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)$$

$$= x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

9. $y = \sin^4 \left(\cot^{-1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত?

সমাধান: দেয়া আছে, $y = \sin^4 \left(\cot^{-1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$
ধরি, $x = \cos \theta$

বা, $y = \sin^4 \left(\cot^{-1} \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta}} \right)$

বা, $y = \sin^4 \left(\cot^{-1} \sqrt{\frac{2\cos^2 \frac{\theta}{2}}{2\sin^2 \frac{\theta}{2}}} \right)$

বা, $y = \sin^4 \left(\cot^{-1} \cot \frac{\theta}{2} \right)$

বা, $y = \sin^4 \frac{\theta}{2}$

বা, $y = \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^4$

বা, $y = \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^2$

বা, $y = \frac{1}{4} \left(2\sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^2$

বা, $y = \frac{1}{4} (1 - \cos \theta)^2$

বা, $y = \frac{1}{4} (1 - x)^2$

এখন, $\frac{d}{dx}(y) = \frac{1}{4} \frac{d}{dx} \{(1-x)^2\}$

$= \frac{1}{4} \cdot 2(1-x)^{2-1} \cdot \frac{d}{dx}(1-x)$

$= -\frac{1}{2}(1-x)$

10. (i) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর:

$\tan^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right\}$

সমাধান: ধরি, $y = \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right)$

এখন, $\frac{d}{dx}(y) = \frac{1}{1 + \frac{a-b}{a+b} \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)} \cdot \frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right)$

$= \frac{1}{1 + \frac{(a-b) \sin^2 \frac{x}{2}}{(a+b) \cos^2 \frac{x}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{(a+b) \cos^2 \frac{x}{2}}{(a+b) \cos^2 \frac{x}{2} + (a+b) \sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} \cos^2 \frac{x}{2}}$

$= \frac{\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{a-b}}{2 \left\{ a \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) + b \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) \right\}}$

$= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2(a+b \cos x)}$

(ii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর:

$\tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}$

সমাধান: ধরি, $y = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}$

বা, $y = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}$

বা, $y = \tan^{-1} \frac{(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2})^2}{(\sqrt{1+x^2})^2 - (\sqrt{1-x^2})^2}$

বা, $y = \tan^{-1} \frac{1+x^2 - 2\sqrt{1-x^4} + 1-x^2}{1+x^2 - 1+x^2}$

বা, $y = \tan^{-1} \frac{2(1-\sqrt{1-x^4})}{2x^2}$

বা, $y = \tan^{-1} \frac{1-\sqrt{1-\sin^2 \theta}}{\sin \theta}$

ধরি, $x^2 = \sin \theta$

বা, $y = \tan^{-1} \left(\frac{1-\cos \theta}{\sin \theta} \right)$

বা, $\theta = \sin^{-1} x^2$

বা, $y = \tan^{-1} \left(\frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \right)$

বা, $y = \tan^{-1} \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)$

বা, $y = \frac{\theta}{2}$

বা, $y = \frac{1}{2} \sin^{-1}(x^2)$

এখন $\frac{d}{dx}(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx} \{ \sin^{-1}(x^2) \}$

বা, $\frac{d}{dx}(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2)$

$= \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

11. (i) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\sin^{-1} \frac{a + b \cos x}{b + a \cos x}$

সমাধান: ধরি, $y = \sin^{-1} \frac{a + b \cos x}{b + a \cos x}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a + b \cos x}{b + a \cos x}\right)^2}} \times \\ &= \frac{(b + a \cos x)(-b \sin x) - (a + b \cos x)(-a \sin x)}{(b + a \cos x)^2} \\ &= \frac{-b^2 \sin x - ab \sin x \cos x + a^2 \sin x + ab \sin x \cos x}{\sqrt{\{(b + a \cos x)^2 - (a + b \cos x)^2\} (b + a \cos x)}} \\ &= \frac{\sin x (a^2 - b^2)}{(b + a \cos x) \sqrt{(b^2 + a^2 \cos^2 x + 2ab \cos x) - (a^2 + b^2 \cos^2 x + 2ab \cos x)}} \\ &= \frac{-\sin x (b^2 - a^2)}{(b + a \cos x) \sqrt{b^2 (1 - \cos^2 x) - a^2 (1 - \cos^2 x)}} \\ &= \frac{-\sin x (b^2 - a^2)}{(b + a \cos x) \sqrt{(b^2 \sin^2 x - a^2 \sin^2 x)}} \\ &= \frac{-\sqrt{b^2 - a^2}}{(b + a \cos x)} \end{aligned}$$

(ii) x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর: $\cos^{-1} \frac{3 + 5 \cos x}{5 + 3 \cos x}$

সমাধান: ধরি, $y = \cos^{-1} \left(\frac{3 + 5 \cos x}{5 + 3 \cos x} \right)$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{3 + 5 \cos x}{5 + 3 \cos x}\right)^2}} \times \\ &= \frac{(5 + 3 \cos x)(-5 \sin x) - (3 + 5 \cos x)(-3 \sin x)}{(5 + 3 \cos x)^2} \\ &= \frac{-25 \sin x - 15 \sin x \cos x + 9 \sin x + 15 \sin x \cos x}{\sqrt{\{(5 + 3 \cos x)^2 - (3 + 5 \cos x)^2\} (5 + 3 \cos x)}} \\ &= \frac{16 \sin x}{(5 + 3 \cos x) \sqrt{(16 - 16 \cos^2 x)}} = \frac{4}{5 + 3 \cos x} \end{aligned}$$