

第一章 相关与辛普森悖论

罗珊珊

北京工商大学 数学与统计学院

因果推断课题组

目录

① 引言

② 因果与相关

经典的相关性度量

Yule-Simpson Paradox

混杂

③ 作业

关于因果的思考

- 古希腊哲学家 Democritus (约公元前 400 年) 认为:

“发现一个因果关系胜过做国王。”

- 贝叶斯网络的创始人、2011 年图灵奖获得者 Judea Pearl 教授:

“传统的机器学习方法难以突破“弱”人工智能的瓶颈，因此我们期待通过因果推理的方法，从因果关系的角度而不仅仅是数据拟合的角度来进行人工智能研究。”

因果推断已成为国际研究热点



中华人民共和国中央人民政府

www.gov.cn



首页 | 繁体 | 英文EN | 登录

首页 > 信息公开 > 国务院文件 > 科技、教育 > 科技

中文 繁体 大 小 | 打印 下载 分享 | 收藏 分享

发文字号: 国发〔2017〕40号

主题分类: 科技、教育/科技

发文机关: 国务院

成文日期: 2017年07月08日

标题: 国务院关于印发新一代人工智能发展规划的通知

发文字号: 国发〔2017〕35号

发布日期: 2017年07月20日

国务院关于印发 新一代人工智能发展规划的通知

国发〔2017〕35号

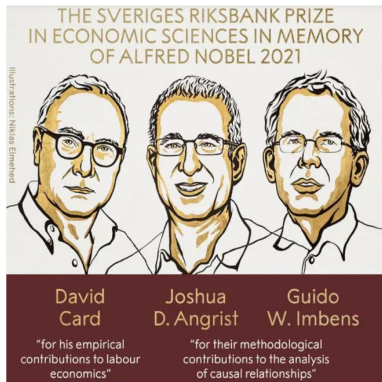
各省、自治区、直辖市人民政府，国务院各部委、各直属机构：

现将《新一代人工智能发展规划》印发给你们，请认真贯彻执行。

国务院

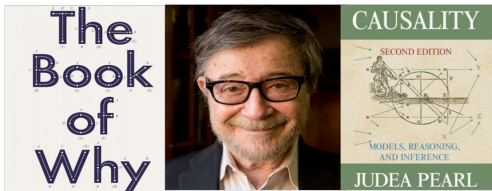
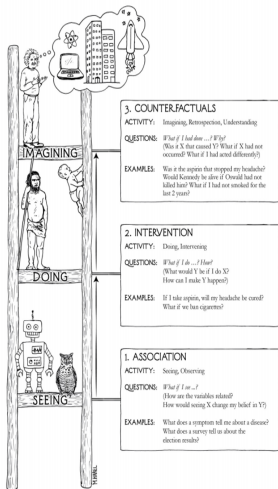
2017年7月8日

(a) 重点突破直觉推理与因果模型等基础理论瓶颈



(b) 现代经济学的因果推断革命 2021 年诺贝尔经济学奖

因果推断的三个层级



- ① 第一层级为：预测；第二层级为：干预；第三层级为：反事实；
- ② 目前绝大部分因果推断研究集中于第二层级，研究因果效应评价的问题；
- ③ 第三层级的因果推断与归因问题有关；

因果问题与工具

► 关于因果关系的相关问题：

- 因果关系的哲学意义？
- 因果作用，原因的发生对结果有何影响？(Effect of Cause).
- 归因，一个结果发生的原因是什么？(Cause of Effect).

对于评价一个原因的因果作用，目前的理论与实践都比较成熟，已有一套行之有效的统计推断方法。在本课程中，我们将重点放在评估因果作用 (Effect of Cause).

► 需要的工具：数理统计基础，编程基础

本课程主要参考教材

- ① Ding, P. (2023). A First Course in Causal Inference. arXiv:2305.18793.
- ② Pearl, J., & Mackenzie, D. (2018). The Book of Why: The New Science of Cause and Effect. Hachette UK.
- ③ Hernan, M.A., & Robins, J.M. (2023). Causal Inference: What If (1st ed.). CRC Press.
- ④ Angrist, J. D., & Pischke, J. S. (2008). Mostly Harmless Econometrics: An Empiricist's Companion. Princeton University Press.

一些应用

Z : 原因变量 (如干预, 处理, 暴露) 为了说明, 我们将主要关注二值原因

Y : 结果变量 (例如疾病状况)

X : 可观测的协变量或可观测的混杂

U : 未观测的协变量或未观测的混杂

在随机化或观察试验中, 我们将有以下应用:

- ① 生物医学领域: 研究暴露 Z 对疾病 Y 的因果影响
- ② 流行病学领域: 评估接种疫苗 Z 对流感 Y 的影响
- ③ 经济学和政策领域: 项目评估和政策影响分析

因果与相关

- 探索因果关系的研究推动着统计科学的发展.
- 统计学家提出了各种相关关系的形式化度量, 并根据这些相关关系进行一些预测分析
- 在大多数情况下, 相关关系并不能表示因果关系 (Yule-Simpson Paradox) .
- 因果分析是更进一步的评价, 它是一个关于反事实结果的预测, 即:
如果同一个体/受试者暴露在不同 (反事实) 条件下会发生什么?
- 因果推断的本质困难:
任何人不可能同时两次踏入相同的河。

Outline

① 引言

② 因果与相关

经典的相关性度量

Yule-Simpson Paradox

混杂

③ 作业

相关性与回归 I

- ▶ 两个随机变量 Z 和 Y 之间的 Pearson 相关系数为：

$$\rho_{ZY} = \frac{\text{cov}(Z, Y)}{\sqrt{\text{var}(Z) \text{var}(Y)}}$$

该系数用于衡量 Z 和 Y 之间的线性依赖关系。

- ▶ 线性回归模型是关于 Y 对 Z 的模型：

$$Y = \alpha + \beta Z + \varepsilon$$

其中 $E(\varepsilon) = 0$ 且 $E(\varepsilon Z) = 0$ 。我们可以证明回归系数 β 等于

$$\beta = \frac{\text{cov}(Z, Y)}{\text{var}(Z)} = \rho_{ZY} \sqrt{\frac{\text{var}(Y)}{\text{var}(Z)}}$$

所以 β 和 ρ_{ZY} 总是具有相同的符号。

相关性与回归 II

- ▶ 我们还可以定义多元回归，例如 Y 对 Z 和 X 的回归模型：

$$Y = \alpha + \beta Z + \gamma X + \varepsilon$$

其中 $E(\varepsilon) = 0$ ， $E(\varepsilon Z) = 0$ 以及 $E(\varepsilon X) = 0$ 。

- ▶ 通常我们将 β 解释为在给定 X 下、在 X 条件下、或在 X 控制下， Z 对 Y 的影响。

列联表与相关性 I

- 我们可以通过一个 2×2 的列联表来表示两个二元随机变量 Z 和 Y 的联合分布。假设 $p_{zy} = \text{pr}(Z = z, Y = y)$, 我们可以总结联合分布如下表所示:

| | $Y = 1$ | $Y = 0$ |
|---------|----------|----------|
| $Z = 1$ | p_{11} | p_{10} |
| $Z = 0$ | p_{01} | p_{00} |

- 将 Z 视为处理或原因变量, Y 视为结果变量, 我们可以定义风险差异 (Risk Difference) 为

$$\begin{aligned} \text{RD} &= \text{pr}(Y = 1 \mid Z = 1) - \text{pr}(Y = 1 \mid Z = 0) \\ &= \frac{p_{11}}{p_{11} + p_{10}} - \frac{p_{01}}{p_{01} + p_{00}} \end{aligned}$$

列联表与相关性 II

- 危险比 (Risk Ratio) 定义为

$$\begin{aligned}\text{RR} &= \frac{\text{pr}(Y = 1 \mid Z = 1)}{\text{pr}(Y = 1 \mid Z = 0)} \\ &= \frac{p_{11}}{p_{11} + p_{10}} / \frac{p_{01}}{p_{01} + p_{00}}\end{aligned}$$

- 优势比 (Odds Ratio) 定义为

$$\begin{aligned}\text{OR} &= \frac{\text{pr}(Y = 1 \mid Z = 1) / \text{pr}(Y = 0 \mid Z = 1)}{\text{pr}(Y = 1 \mid Z = 0) / \text{pr}(Y = 0 \mid Z = 0)} \\ &= \frac{\frac{p_{11}}{p_{11} + p_{10}}}{\frac{p_{01}}{p_{01} + p_{00}}} / \frac{\frac{p_{10}}{p_{11} + p_{10}}}{\frac{p_{00}}{p_{01} + p_{00}}} \\ &= \frac{p_{11} p_{00}}{p_{10} p_{01}}.\end{aligned}$$

列联表与相关性 III

- 风险差异、危险比和优势比这些术语来自流行病学。因为流行病学中的结果通常是疾病，因此将“风险”这个名称用于患病的概率是自然的。
- 关于这些度量的一些简单事实，以下陈述都是等价的：
 - ① $Z \perp\!\!\!\perp Y$, $RD = 0$, $RR = 1$ 和 $OR = 1$ 。
 - ② 如果 p_{zy} 都是正数，那么 $RD > 0$ 等价于 $RR > 1$ ，也等价于 $OR > 1$ 。
 - ③ 如果 $\text{pr}(Y = 1 \mid Z = 1)$ 和 $\text{pr}(Y = 1 \mid Z = 0)$ 都很小，那么 $OR \approx RR$ 。

Outline

① 引言

② 因果与相关

经典的相关性度量

Yule-Simpson Paradox

混杂

③ 作业

Outline

① 引言

② 因果与相关

经典的相关性度量

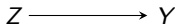
Yule-Simpson Paradox

混杂

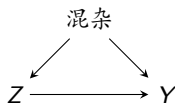
③ 作业

何为混杂？

- 因果关系与相关关系的本质区别：混杂因素
- 与处理和结果变量都相关 (原因和结果共同原因) 的背景变量称为混杂因素 (confounder or confounding factor).
- 观察性研究中不可避免地存在一些混杂变量未被观测，即未观测混杂 (unobserved confounder).
- 观察性研究中可观测的混杂变量.



(a) 因果关系



(b) 存在混杂

经典的肾结石例子 I

- 本示例源自Charig et al. (1986)，其中 Z 是治疗方法，1 表示开放手术，0 表示小刺穿； Y 是结果，1 表示成功，0 表示失败。原因和结果数据可以总结如下 2×2 表格：

| | $Y = 1$ | $Y = 0$ |
|---------|---------|---------|
| $Z = 1$ | 273 | 77 |
| $Z = 0$ | 289 | 61 |

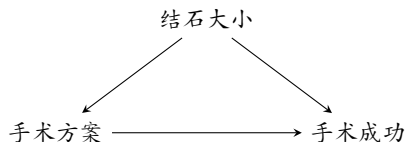
- 估计的风险差异为：

$$\begin{aligned}\widehat{\text{RD}} &= \widehat{\text{pr}}(Y = 1 \mid Z = 1) - \widehat{\text{pr}}(Y = 1 \mid Z = 0) \\ &= \frac{273}{273 + 77} - \frac{289}{289 + 61} = 78\% - 83\% = -5\% < 0.\end{aligned}$$

看起来，手术方法 0 更好，即小刺穿相比于开放手术具有更高的成功率。

经典的肾结石例子 II

- 但是，这些数据并不是来自随机对照试验 (RCT)。
- 接受手术方案 1 的患者可能与接受手术方案 0 的患者非常不同。
- 在这项研究中的一个“隐变量”是病例的严重程度：一些患者的结石较小，而一些患者的结石较大。
- 结石的大小即会影响病人接受不同的手术，也会影响病人的最终结果是否成功，从而是一个混杂因素。



经典的肾结石例子 III

- X 是二值示性变量, $X = 1$ 表示小结石, $X = 0$ 表示大结石。

| | $Y = 1$ | $Y = 0$ |
|---------|---------|---------|
| $Z = 1$ | 81 | 6 |
| $Z = 0$ | 234 | 36 |

(a) 结石较小的患者, $X = 1$

| | $Y = 1$ | $Y = 0$ |
|---------|---------|---------|
| $Z = 1$ | 192 | 71 |
| $Z = 0$ | 55 | 25 |

(b) 结石较大的患者, $X = 0$

| | $Y = 1$ | $Y = 0$ |
|---------|---------|---------|
| $Z = 1$ | 273 | 77 |
| $Z = 0$ | 289 | 61 |

(c) 所有患者

经典的肾结石例子 IV

- 根据小结石患者的表格，估计的风险差异为

$$\begin{aligned}\widehat{\text{RD}}_{\text{smaller}} &= \widehat{\text{pr}}(Y = 1 \mid Z = 1, X = 0) - \widehat{\text{pr}}(Y = 1 \mid Z = 0, X = 0) \\ &= \frac{81}{81 + 6} - \frac{234}{234 + 36} = 93\% - 87\% = 6\% > 0,\end{aligned}$$

表明手术方案 1 更好。

- 对于大结石患者的表格，估计的风险差异为

$$\begin{aligned}\widehat{\text{RD}}_{\text{larger}} &= \widehat{\text{pr}}(Y = 1 \mid Z = 1, X = 1) - \widehat{\text{pr}}(Y = 1 \mid Z = 0, X = 1) \\ &= \frac{192}{192 + 71} - \frac{55}{55 + 25} = 73\% - 69\% = 4\% > 0,\end{aligned}$$

也表明手术方案 1 更好。

- 上述结论表明 $\widehat{\text{RD}} < 0, \widehat{\text{RD}}_{\text{smaller}} > 0, \widehat{\text{RD}}_{\text{larger}} > 0$.

经典的肾结石例子 V

| | Y = 1 | Y = 0 |
|-------|------------|------------|
| Z = 1 | $n_{11 1}$ | $n_{10 1}$ |
| Z = 0 | $n_{01 1}$ | $n_{00 1}$ |

(a) 结石较小的患者, $X = 1$

| | Y = 1 | Y = 0 |
|-------|------------|------------|
| Z = 1 | $n_{11 0}$ | $n_{10 0}$ |
| Z = 0 | $n_{01 0}$ | $n_{00 0}$ |

(b) 结石较大的患者, $X = 0$

| | Y = 1 | Y = 0 |
|-------|----------|----------|
| Z = 1 | n_{11} | n_{10} |
| Z = 0 | n_{01} | n_{00} |

(c) 所有患者

- 纯数学的角度, 上面的悖论可以表示成

$$\frac{n_{11|1}}{n_{11|1} + n_{10|1}} > \frac{n_{01|1}}{n_{01|1} + n_{00|1}}, \quad \frac{n_{11|0}}{n_{11|0} + n_{10|0}} > \frac{n_{01|0}}{n_{01|0} + n_{00|0}}$$

$$\frac{n_{11}}{n_{11} + n_{10}} = \frac{n_{11|1} + n_{11|0}}{n_{11|1} + n_{10|1} + n_{11|0} + n_{10|0}} < \frac{n_{01|1} + n_{01|0}}{n_{01|1} + n_{00|1} + n_{01|0} + n_{00|0}} = \frac{n_{01}}{n_{01} + n_{00}}.$$

- 在统计上, 这具有重要的意义, 即变量之间的相关关系可以完全的被第三个变量“扭曲”, 忽略潜在的“第三个变量”可能改变已有的结论。

经典的肾结石例子 VI

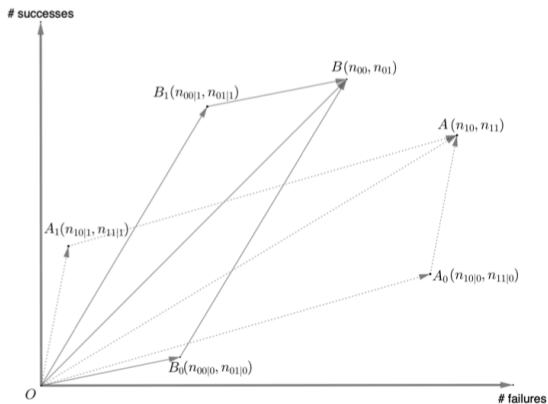


FIGURE 1.2: Geometry of the Yule-Simpson Paradox

References I

Charig, C. R., Webb, D. R., Payne, S. R., and Wickham, J. E. (1986). Comparison of treatment of renal calculi by open surgery, percutaneous nephrolithotomy, and extracorporeal shockwave lithotripsy. *British Medical Journal*, 292:879–882.

作业

- 阅读教材 P3-12。
- 思考生活中存在辛普森悖论的例子。
- 提交上机作业：运行 1.4 节代码。
- 助教邮箱：smengchen@163.com