

主分层

罗珊珊

March, 2023

目录

① 不依从问题

② 死亡删失

辅助变量

线性模型假设

③ 替代指标评估

替代指标悖论

替代指标评估

目录

① 不依从问题

② 死亡删失

辅助变量

线性模型假设

③ 替代指标评估

替代指标悖论

替代指标评估

后处理混杂变量

到目前为止，我们讨论的大多数问题都是调整前处理混杂变量，即协变量。

在治疗后（但在最终结果之前）发生混杂会对因果推断产生不同的挑战。

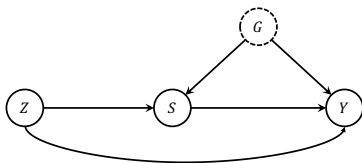
后处理混杂：一个后处理中间变量 S 位于 Z 和 Y 之间的因果路径上：

$$Z \longrightarrow S \longrightarrow Y$$

在经济学中被称为“内生选择问题”。

Rosenbaum (1984) 表明：以与前处理协变量 X 相同的方式调整后处理变量 D 会导致偏倚的因果作用。包括一系列（看似不同的）问题。

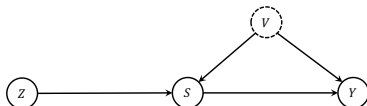
主分层框架



S_1	S_0	G	Description
1	1	ss	Always-taker
1	0	$s\bar{s}$	Complier
0	1	$\bar{s}s$	Defier
0	0	$\bar{s}\bar{s}$	Never-taker

- Z : 二值处理变量, $Z = 1$ 表示接受处理, $Z = 0$ 表示接受对照
- S : 二值中间变量
- Y : 表示感兴趣的结果变量
- S_z : 表示在接受处理分配 $Z = z$ 后的中间变量的潜在结果
- G : 主分层变量, 定义为 $G = (S_1, S_0)$.

不依从问题



S_1	S_0	G	Description
1	1	ss	Always-taker
1	0	$s\bar{s}$	Complier
0	1	$\bar{s}s$	Defier
0	0	$\bar{s}\bar{s}$	Never-taker

令 $Z = 1$ 表示成长于大学附近, $Z = 0$ 表示没有成长于大学附近; $S = 1$ 表示完成了高中学业, $S = 0$ 表示没有. 令 Y 表示对数收入. Angrist et al. (1996) 讨论了依从组上的因果作用的识别性:

$$\mathbb{E}(Y_{S=1} - Y_{S=0} \mid S_1 = S_0 = 1).$$

关于上述参数的识别和估计参考工具变量在单调性假设下的识别性。

目录

① 不依从问题

② 死亡删失

辅助变量

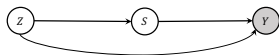
线性模型假设

③ 替代指标评估

替代指标悖论

替代指标评估

死亡删失



S_1	S_0	G	Description	Y_1	Y_0
1	1	ss	Always-survivors	✓	✓
1	0	$s\bar{s}$	Protected	✓	×
0	1	$\bar{s}s$	Harmed	×	✓
0	0	$\bar{s}\bar{s}$	Doomed	×	×

处理 $Z=1$ 表示接受安慰剂, $Z=0$ 表示接受毒性处理; $S=1$ 表示存活, $S=0$ 表示死亡; Y 是感兴趣的结果变量 (e.g., 体重, 注意 $S=0$ 时所对应的 Y 没有定义).

定义及记号

- Z : 表示二值的处理变量: $Z \in \{1, \dots, m\}$
- X : 表示处理前协变量
- S : 表示生存状态, 其中 $S = 1$ 表示生存, $S = 0$ 表示死亡
- Y : 表示感兴趣的结果变量
- S_z : 表示在接受处理分配 $Z = z$ 后的生存状况的潜在结果
- Y_z : 表示在接受处理分配 $Z = z$ 后的潜在结果
- G : 主分层变量, 定义为 $G = (S_0 \ S_1)$

Assumption 1 (可忽略性)

$$(S_0, S_1, Y_0, Y_1) \perp\!\!\!\perp Z \mid X.$$

Assumption 2 (单调性)

$$S_1 \geq S_0 .$$

单调性假设下的主分层变量

S_1	S_0	G	Description	Y_1	Y_0
1	1	ss	Always-survivors	✓	✓
1	0	$s\bar{s}$	Protected	✓	×
0	0	$\bar{s}\bar{s}$	Doomed	×	×

我们将感兴趣的参数定义为:

$$\Delta = E(Y_{Z=1} - Y_{Z=0} \mid G = ss).$$

- 在可忽略性假设及单调性假设下: 主分层的权重 $\pi_g(X) = \text{pr}(G = g \mid X)$ 可识别.

$$\begin{aligned}\text{pr}(S = 1 \mid Z = 1, X) &= \text{pr}(S_{Z=1} = 1 \mid X) \\ &= \text{pr}(S_{Z=1} = 1, S_{Z=0} = 1 \mid X) + \text{pr}(S_{Z=1} = 1, S_{Z=0} = 0 \mid X) \\ &= \text{pr}(G = ss \mid X) + \text{pr}(G = s\bar{s} \mid X),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{pr}(S = 1 \mid Z = 0, X) &= \text{pr}(S_{Z=0} = 1 \mid X) \\ &= \text{pr}(S_{Z=0} = 1, S_{Z=1} = 1 \mid X) + \text{pr}(S_{Z=0} = 1, S_{Z=1} = 0 \mid X) \\ &= \text{pr}(G = ss \mid X) + 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{pr}(S = 0 \mid Z = 1, X) &= \text{pr}(S_{Z=1} = 0 \mid X) \\ &= \text{pr}(S_{Z=0} = 1, S_{Z=1} = 0 \mid X) + \text{pr}(S_{Z=0} = 0, S_{Z=1} = 0 \mid X) \\ &= 0 + \text{pr}(G = \bar{s}s \mid X).\end{aligned}$$

在 X 的每一层上, 等式左边均可观测, 等式右边有三个未知数, 可识别。

- 在可忽略性假设下:

$$\begin{aligned}
 \mu_z &= E(Y_z \mid G = ss) \\
 &= E\{ \underbrace{E(Y_z \mid G = ss, X)}_{\mu_z(X) = E(Y \mid Z=z, G=ss)} \mid G = ss\} \\
 &= E\{\mu_z(X) \mid G = ss\} \\
 &= \frac{E\{\mu_z(X) \mathbb{I}(G = ss)\}}{\text{pr}(G = ss)} \\
 &= \frac{E[E\{\mu_z(X) \mathbb{I}(G = ss) \mid X\}]}{\text{pr}(G = ss)} \\
 &= \frac{E[\mu_z(X) E\{\mathbb{I}(G = ss) \mid X\}]}{\text{pr}(G = ss)} \\
 &= \frac{E\{\mu_z(X) \pi_{ss}(X)\}}{E\{\pi_{ss}(X)\}},
 \end{aligned}$$

其中 $\pi_g(X) = \text{pr}(G = g \mid X)$ 是可识别的, 我们只需要证明 $\mu_z(X)$ 的可识别性.

我们将感兴趣的参数定义为:

$$\begin{aligned}\Delta &= E(Y_{Z=1} - Y_{Z=0} \mid G = ss) \\ &= \underbrace{E(Y_{Z=1} \mid G = ss)}_{\mu_1} - \underbrace{E(Y_{Z=0} \mid G = ss)}_{\mu_0}.\end{aligned}$$

我们首先说明 μ_0 是可识别的, 只需要 $E(Y \mid Z = 0, G = ss, X)$ 的识别性即可

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \frac{E\{\mu_0(X)\pi_{ss}(X)\}}{E\{\pi_{ss}(X)\}} \\ &= \frac{E\{E(Y \mid Z = 0, G = ss, X)\pi_{ss}(X)\}}{E\{\pi_{ss}(X)\}} \\ &= \frac{E\{E(Y \mid Z = 0, S = 1, X)\pi_{ss}(X)\}}{E\{\pi_{ss}(X)\}}\end{aligned}$$

类似的, 关于参数 μ_1 , 我们也只需要证明 $\mu_1(X) = E(Y \mid Z = 1, G = ss, X)$ 的识别性.

Outline

① 不依从问题

② 死亡删失

辅助变量

线性模型假设

③ 替代指标评估

关键识别假设

Assumption 3 (辅助变量)

我们假设辅助变量 X 满足: $Y \perp\!\!\!\perp X \mid (Z, G)$.

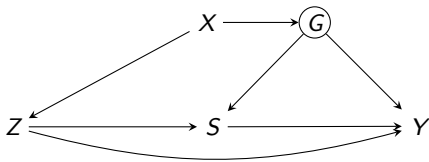


图: 辅助变量

$$E(Y \mid Z = 1, G = ss, X) = E(Y \mid Z = 1, G = ss)$$

识别性 I

定理 1 (非参识别性)

给定可忽略性、单调性及替代变量假设, 因果参数 $\mu_1(X) = E(Y | Z = 1, G = ss, X)$ 在一些正则条件下是可识别的.

证明

$$\begin{aligned} E(Y | Z = 1, S = 1, X) &= E(Y | Z = 1, S = 1, X, G = ss) \text{pr}(G = ss | X) \\ &\quad + E(Y | Z = 1, S = 1, X, G = s\bar{s}) \text{pr}(G = s\bar{s} | X) \\ &= E(Y | Z = 1, G = ss) \text{pr}(G = ss | X) \\ &\quad + E(Y | Z = 1, G = s\bar{s}) \text{pr}(G = s\bar{s} | X) \end{aligned}$$

识别性 II

证明

我们取 $X = 1, 0$,

$$\begin{aligned} E(Y | Z = 1, S = 1, X = 1) &= E(Y | Z = 1, G = ss) \text{pr}(G = ss | X = 1) \\ &\quad + E(Y | Z = 1, G = s\bar{s}) \text{pr}(G = s\bar{s} | X = 1) \\ E(Y | Z = 1, S = 1, X = 0) &= E(Y | Z = 1, G = ss) \text{pr}(G = ss | X = 0) \\ &\quad + E(Y | Z = 1, G = s\bar{s}) \text{pr}(G = s\bar{s} | X = 0) \end{aligned}$$

由于 $\text{pr}(G = s\bar{s} | X)$ 是可识别的, 上述两个方程, 两个未知数, 在正则性条件得到保证的基础上, 参数 $\mu_1(X) = E(Y | Z = 1, G = ss, X) = E(Y | Z = 1, G = ss)$ 和 $E(Y | Z = 1, G = s\bar{s})$ 是可识别的.

非参数估计 I

对于 X 的每个可能取值 x , 简便起见, 我们假设 $x = 0, 1$

① 我们如下估计 $\hat{\text{pr}}(G = ss \mid X = x) = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbb{I}(S_i=1, Z_i=0, X_i=x)}{\sum_{i=1}^N \mathbb{I}(Z_i=0, X_i=x)}.$

② 我们如下估计 $\hat{\text{pr}}(G = \bar{s}s \mid X = x) = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbb{I}(S_i=0, Z_i=1, X_i=x)}{\sum_{i=1}^N \mathbb{I}(Z_i=1, X_i=x)}.$

③ 我们如下估计 $\hat{\text{pr}}(G = \bar{s}\bar{s} \mid X = x) = 1 - \hat{\text{pr}}(G_i = ss \mid X_i = x) - \hat{\text{pr}}(G_i = \bar{s}s \mid X_i = x).$

④ 我们如下估计 $\hat{E}(Y \mid Z = 0, S = 1, X = x) = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbb{I}(S_i=1, Z_i=0, X_i=x, Y_i)}{\sum_{i=1}^N \mathbb{I}(Z_i=0, S_i=1, X_i=x)}.$

⑤ 我们如下估计 $\mu_0 = E(Y_0 \mid G = ss),$

$$\hat{\mu}_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{E}(Y \mid Z = 0, S = 1, X_i) \hat{\text{pr}}(G_i = ss \mid X_i)}{\sum_{i=1}^N \hat{\text{pr}}(G_i = ss \mid X_i)}$$

⑥ 我们如下估计 $\hat{E}(Y \mid Z = 1, S = 1, X = x) = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbb{I}(S_i=1, Z_i=1, X_i=x, Y_i)}{\sum_{i=1}^N \mathbb{I}(Z_i=1, S_i=1, X_i=x)}.$

非参数估计 II

⑦ 我们如下估计 $\hat{E}(Y | Z = 1, G = ss)$:

$$\hat{E}(Y | Z = 1, S = 1, X = 1) = \gamma_{ss}\hat{\text{pr}}(G = ss | X = 1) + \gamma_{s\bar{s}}\hat{\text{pr}}(G = s\bar{s} | X = 1),$$

$$\hat{E}(Y | Z = 1, S = 1, X = 0) = \gamma_{ss}\hat{\text{pr}}(G = ss | X = 0) + \gamma_{s\bar{s}}\hat{\text{pr}}(G = s\bar{s} | X = 0),$$

其中 $\gamma_{ss} = E(Y | Z = 1, G = ss)$, $\gamma_{s\bar{s}} = E(Y | Z = 1, G = s\bar{s})$.

⑧ 我们如下估计 $\mu_1 = E(Y_1 | G = ss)$,

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ss}\hat{\text{pr}}(G_i = ss | X_i)}{\sum_{i=1}^N \hat{\text{pr}}(G_i = ss | X_i)} = \gamma_{ss}.$$

Outline

① 不依从问题

② 死亡删失

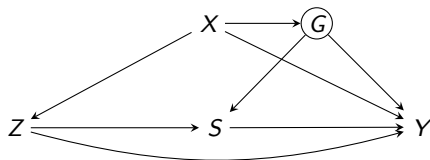
辅助变量

线性模型假设

③ 替代指标评估

识别性 I

在现实中，当难以找到辅助变量满足图 1 时，考虑参数模型是更为合适的。



识别性 II

不失一般性，我们考虑以下线性模型：

$$E(Y | Z = 1, G = g, X = x) = \beta_0 + \beta_{ss}\mathbb{I}(G = ss) + \beta_x X.$$

$$\Rightarrow E(Y | Z = 1, G = ss, X = x) = \beta_0 + \beta_{ss} + \beta_x X.$$

$$\Rightarrow E(Y | Z = 1, G = s\bar{s}, X = x) = \beta_0 + \beta_x X.$$

定理 2 (线性识别)

给定可忽略性、单调性及线性模型假设，因果参数 $\mu_1(X) = E(Y | Z = 1, G = ss, X)$ 在一些正则条件下是可识别的。

识别性 III

证明

$$\begin{aligned} E(Y | Z = 1, S = 1, X) &= E(Y | Z = 1, S = 1, X, G = ss) \text{pr}(G = ss | X) \\ &\quad + E(Y | Z = 1, S = 1, X, G = s\bar{s}) \text{pr}(G = s\bar{s} | X) \\ &= (\beta_0 + \beta_{ss} + \beta_x X) \text{pr}(G = ss | X) + (\beta_0 + \beta_x X) \text{pr}(G = s\bar{s} | X) \\ &= \beta_0 + \beta_{ss} \text{pr}(G = ss | X) + \beta_x X \end{aligned}$$

$$E(Y | Z = 1, S = 1, X = 0) = \beta_0 + \beta_{ss} \text{pr}(G = ss | X = 0) + 0\beta_x$$

$$E(Y | Z = 1, S = 1, X = 1) = \beta_0 + \beta_{ss} \text{pr}(G = ss | X = 1) + \beta_x,$$

$$E(Y | Z = 1, S = 1, X = 2) = \beta_0 + \beta_{ss} \text{pr}(G = ss | X = 2) + 2\beta_x.$$

三个方程，三个未知数，上述参数 $(\beta_0, \beta_{ss}, \beta_x)$ 是可识别的。

非参数估计 I

对于 X 的每个可能取值 x , 简便起见, 我们假设 $x = 0, 1, 2$

① 我们如下估计 $\hat{\text{pr}}(G = ss \mid X = x) = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbb{I}(S_i=1, Z_i=0, X_i=x)}{\sum_{i=1}^N \mathbb{I}(Z_i=0, X_i=x)}.$

② 我们如下估计 $\hat{\text{pr}}(G = \bar{s}s \mid X = x) = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbb{I}(S_i=0, Z_i=1, X_i=x)}{\sum_{i=1}^N \mathbb{I}(Z_i=1, X_i=x)}.$

③ 我们如下估计 $\hat{\text{pr}}(G = \bar{s}\bar{s} \mid X = x) = 1 - \hat{\text{pr}}(G_i = ss \mid X_i = x) - \hat{\text{pr}}(G_i = \bar{s}s \mid X_i = x).$

④ 我们如下估计 $\hat{E}(Y \mid Z = 0, S = 1, X = x) = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbb{I}(S_i=1, Z_i=0, X_i=x, Y_i)}{\sum_{i=1}^N \mathbb{I}(Z_i=0, S_i=1, X_i=x)}.$

⑤ 我们如下估计 $\mu_0 = E(Y_0 \mid G = ss),$

$$\hat{\mu}_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{E}(Y \mid Z = 0, S = 1, X_i) \hat{\text{pr}}(G_i = ss \mid X_i)}{\sum_{i=1}^N \hat{\text{pr}}(G_i = ss \mid X_i)}.$$

⑥ 我们如下估计 $\hat{E}(Y \mid Z = 1, S = 1, X = x) = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbb{I}(S_i=1, Z_i=1, X_i=x, Y_i)}{\sum_{i=1}^N \mathbb{I}(Z_i=1, S_i=1, X_i=x)}.$

非参数估计 II

- ⑦ 我们通过求解下述方程获得参数 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_{ss}, \hat{\beta}_x$:

$$\hat{E}(Y | Z = 1, S = 1, X = 0) = \beta_0 + \beta_{ss}\hat{\text{pr}}(G = ss | X = 0) + 0\beta_x$$

$$\hat{E}(Y | Z = 1, S = 1, X = 1) = \beta_0 + \beta_{ss}\hat{\text{pr}}(G = ss | X = 1) + \beta_x,$$

$$\hat{E}(Y | Z = 1, S = 1, X = 2) = \beta_0 + \beta_{ss}\hat{\text{pr}}(G = ss | X = 2) + 2\beta_x.$$

- ⑧ 我们如下估计 $\hat{\mu}_1(X)$: $\hat{\mu}_1(X) = \beta_0 + \beta_{ss}\mathbb{I}(G = ss) + \beta_x X$.

- ⑨ 我们如下估计 $\mu_1 = E(Y_1 | G = ss)$,

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{\mu}_1(X) \hat{\text{pr}}(G_i = ss | X_i)}{\sum_{i=1}^N \hat{\text{pr}}(G_i = ss | X_i)}.$$

目录

① 不依从问题

② 死亡删失

辅助变量

线性模型假设

③ 替代指标评估

替代指标悖论

替代指标评估

Outline

① 不依从问题

② 死亡删失

③ 替代指标评估

替代指标悖论

替代指标评估

- 令 Z 为二值的随机处理，1 表示接受一种新的处理，0 表示接受对照处理。
- S 表示心律失常是否纠正，1 表示纠正了，0 表示未纠正。
- S_z 表示接受处理 $Z = z$ 情形下是否纠正心律失常的潜在结果。
- Y_{sz} 表示在处理 $Z = z$ 且心律失常纠正与否 $S = s$ 情形下的潜在生存时间。
- 假定处理 Z 对生存时间 Y 的作用完全通过中间变量 S 起作用，对任意的 $s \in \{0, 1\}$ ，即

$$Y_{1s} = Y_{0s} = Y_{S=s}.$$

主分层	人数	$S_{Z=0}$	$S_{Z=1}$	$Y_{S=0}$	$Y_{S=1}$	$Y_{Z=0}$	$Y_{Z=1}$
1	20	0	0	3	5	3	3
2	40	0	1	6	7	6	7
3	20	1	0	5	8	8	5
4	20	1	1	9	10	10	10

表: 100 位心律失常患者的总体

悖论 I

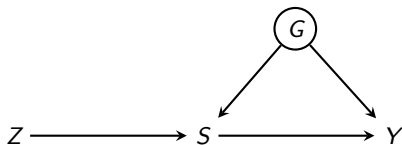


图: 工具变量图释

因此, 当处理 Z 对心律 S 没有个体因果作用 $S_{Z=1} = S_{Z=0} = s$ 时, 处理 Z 对生存时间 Y 也没有因果作用 $Y_{1s} = Y_{0s}$, 此时排除约束假设成立, 处理 Z 对 Y 没有直接作用, 可以由图2所表示。令 $ACE_{Z \rightarrow S} = \mathbb{E}(S_{Z=1} - S_{Z=0})$ 以及 $ACE_{Z \rightarrow Y} = E(Y_{Z=1} - Y_{Z=0})$ 。在随机化假设下,

$$ACE_{Z \rightarrow S} = \text{pr}(G = s\bar{s}) - \text{pr}(G = \bar{s}s) = \frac{40 - 20}{100} = \frac{1}{5} > 0.$$

悖论 II

我们关于主分层变量 G 进行调整, 可以算出 Z 对 Y 的因果作用

$$\begin{aligned}\text{ACE}_{Z \rightarrow Y} &= \sum_g \mathbb{E}(Y_{Z=1} - Y_{Z=0} \mid G = g) \text{pr}(G = g) \\ &= 0 \cdot \text{pr}(G = \bar{s}s) + 1 \cdot \text{pr}(G = s\bar{s}) - 3 \cdot \text{pr}(G = \bar{s}s) + 0 \cdot \text{pr}(G = ss) \\ &= -\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

我们关于主分层变量 G 进行调整, 可以算出 S 对 Y 的因果作用

$$\begin{aligned}\text{ACE}_{S \rightarrow Y} &= \sum_g \mathbb{E}(Y_{S=1} - Y_{S=0} \mid G = g) \text{pr}(G = g) \\ &= 2 \cdot \text{pr}(G = \bar{s}s) + 1 \cdot \text{pr}(G = s\bar{s}) + 3 \cdot \text{pr}(G = \bar{s}s) + 1 \cdot \text{pr}(G = ss) \\ &= \frac{8}{5}.\end{aligned}$$

悖论 III

- 上面的例子表明了处理 Z 对纠正心律失常 S 有正的因果作用
- 纠正心律失常 S 对寿命 Y 的因果作用也为正
- 但是处理 Z 对寿命 Y 的因果作用却为负。
- 这表明因果作用的统计结论不具有传递性，即变量 Z 能提高变量 S ，变量 S 能提高变量 Y ，但是根据这两个因果结论不能推出变量 Z 能提高变量 Y 。

Outline

① 不依从问题

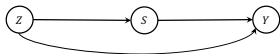
② 死亡删失

③ 替代指标评估

替代指标悖论

替代指标评估

替代指标评估 I



S_1	S_0	G	描述	$E(Y_1 - Y_0 G)$
1	1	ss	causal necessity	0
1	0	$s\bar{s}$	causal sufficiency	$\neq 0$
0	1	$\bar{s}s$	causal sufficiency	$\neq 0$
0	0	$\bar{s}\bar{s}$	causal necessity	0

- 处理 $Z = 1$ 表示接受处理, $Z = 0$ 表示接受对照; $S = 1$ 表示三年内未复发癌症, $S = 0$ 表示复发; $Y = 1$ 表示存活, $Y = 0$ 表示死亡。
- 文献 Frangakis & Rubin (2002) 指出一个好的替代指标应该满足“因果必要性” (causal necessity)
- “因果必要性”是指只要处理变量 Z 对替代指标 S 没有影响, 那么 Z 就应该对结果变量 Y 也没有影响, 也就是 $ACE_{ss} = 0$ 和 $ACE_{\bar{s}\bar{s}} = 0$, 满足因果必要性的替代指标也常被称为主替代指标 (principal surrogate)。

替代指标评估 II

- 但尽管如此，在更弱的因果必要性及单调性假设下，我们可以建立类似非依从框架下的识别结果（工具变量识别性），即

$$\begin{aligned} \text{ACE}_{Z \rightarrow Y} &= \text{ACE}_{Z \rightarrow S} \times \mathbb{E}(Y_{S=1} - Y_{S=0} \mid G = ss) \\ &= \text{ACE}_{Z \rightarrow S} \times \mathbb{E}(Y_{Z=1} - Y_{Z=0} \mid G = ss), \end{aligned}$$

其中第二个等式成立是因为在依从组上 Z 和 S 有相同的取值。

- 上式有助于我们利用已有的信息在新数据集下进行替代指标评估。

替代指标评估 III

定理 1

在 $(S_{Z=1}, S_{Z=0}, Y_{Z=0}, Y_{Z=1}) \perp\!\!\!\perp Z$, 替代指标 S 满足因果必要性, 及 $ACE_{S\bar{S}} > 0$ 时, 我们假设替代指标 S 满足因果必要性, 即

- (i) 单调性成立时, $ACE_{Z \rightarrow Y} = ACE_{Z \rightarrow S} \times ACE_{S\bar{S}}$;
- (ii) 单调性不成立时, 假设 $ACE_{Z \rightarrow S} > 0$, 我们可以得到 $ACE_{Z \rightarrow Y}$ 的上下界: 如果 $ACE_{S\bar{S}} + ACE_{\bar{S}\bar{S}} \geq 0$, 则

$$ACE_{Z \rightarrow S} \times ACE_{S\bar{S}} \leq ACE_{Z \rightarrow Y} \leq \frac{ACE_{S\bar{S}} + ACE_{\bar{S}\bar{S}} + ACE_{Z \rightarrow S} \times (ACE_{S\bar{S}} - ACE_{\bar{S}\bar{S}})}{2}.$$

否则

$$\frac{ACE_{S\bar{S}} + ACE_{\bar{S}\bar{S}} + ACE_{Z \rightarrow S} \times (ACE_{S\bar{S}} - ACE_{\bar{S}\bar{S}})}{2} \leq ACE_{Z \rightarrow Y} \leq ACE_{Z \rightarrow S} \times ACE_{S\bar{S}}.$$

定理1给出了处理对替代指标的作用与处理对结果变量作用之间的关系, 从而让我们可以直接用于另一个 Y 未观测时的数据。

定理 2

在 $(S_{Z=1}, S_{Z=0}, Y_{Z=0}, Y_{Z=1}) \perp\!\!\!\perp Z$, 替代指标 S 满足因果必要性, 及 $ACE_{\bar{s}\bar{s}} > 0$ 时,

- (i) 单调性2成立时, $ACE_{Z \rightarrow S} > 0$ (或者 $= 0$) 蕴含 $ACE_{Z \rightarrow Y} > 0$ (或者 $= 0$);
- (ii) 单调性2不成立时, $ACE_{\bar{s}\bar{s}} + ACE_{\bar{s}s} \geq 0$ 和 $ACE_{Z \rightarrow S} > 0$ 蕴含 $ACE_{Z \rightarrow Y} > 0$.

- 在定理2(i) 中, 单调性成立时, 一个满足因果必要性和充分性的替代指标可以避免替代指标悖论。
- 没有单调性时, 因为对 Y 的作用在 $g = \bar{s}\bar{s}$ 和 $\bar{s}s$ 层可能不一样, 上面的结论 (i) 不再成立。

替代指标评估 V

- 所以, 定理2(ii) 需要 $ACE_{\bar{s}s} + ACE_{ss} \geq 0$, 也就是说, 在 $\bar{s}s$ 层中的正因果作用可以抵消 $\bar{s}s$ 层中负的因果作用。
- 因为不能观测到主分层变量 G , 即使观测到终点指标 Y , 这两个条件也不能用数据进行检验。
- 文献 Jiang et al. (2016) 利用辅助变量假设3建立了主分层因果作用 ACE_g 的非参数识别性结果, 并利用定理2进行替代指标的评估。