# 第三章 观察性研究

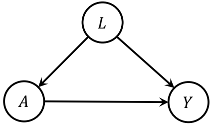
罗姗姗

北京工商大学 数学与统计学院

因果推断课题组

# 目录

# 观察性研究




(ii) 观察性研究

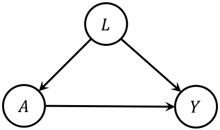
实际研究中的数据经常并不是随机化的.

- 在观察性研究中, 处理分配机制是未知的.
- 在观察性研究中, $A$ 不再随机化时, 可能会:
  - $A \not\perp\!\!\!\perp L$.

    这意味着处理组和对照组的协变量分布不再均匀.
  - $A \not\perp\!\!\!\perp (Y_0, Y_1)$.

    一些不可检验的假设将被引入用于 ATE 的识别.
- 在观察性研究中, 相关一般不能表示因果.

# Yule-Simpson 悖论




(ii) 观察性研究

| | All | | Men | | Women | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Applicants | Admitted | Applicants | Admitted | Applicants | Admitted |
| **Total** | 12,763 | 41% | 8,442 | 44% | 4,321 | 35% |

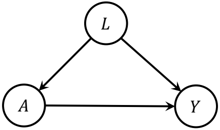
实际研究中的数据经常并不是随机化的.

- $A$: 二值处理变量, $A=1$ 代表男性, $A=0$ 代表女性.
- $Y$: 二值结果变量, $Y=1$ 代表录取, $Y=0$ 代表未录取.
- $L$: 协变量, 表示专业.

ATE 可以如下估计吗？

$$\widehat{\tau}=\widehat{E}(Y \mid A=1)-\widehat{E}(Y \mid A=0)=\widehat{\mathrm{pr}}\,(Y=1 \mid A=1)-\widehat{\mathrm{pr}}\,(Y=1 \mid A=0)$$
$$=9\%.$$

# Yule-Simpson 悖论




(ii) 观察性研究

实际研究中的数据经常并不是随机化的.

| Department | All | | Men | | Women | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Applicants | Admitted | Applicants | Admitted | Applicants | Admitted |
| A | 933 | 64% | **825** | 62% | 108 | 82% |
| B | 585 | 63% | **560** | 63% | 25 | 68% |
| C | 918 | 35% | 325 | 37% | **593** | 34% |
| D | 792 | 34% | 417 | 33% | 375 | 35% |
| E | 584 | 25% | 191 | 28% | **393** | 24% |
| F | 714 | 6% | 373 | 6% | 341 | 7% |
| **Total** | **4526** | **39%** | **2691** | **45%** | **1835** | **30%** |

Legend:

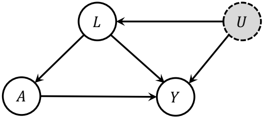
greater percentage of successful applicants than the other gender

greater number of applicants than the other gender

**bold** – the two 'most applied for' departments for each gender

(部分专业, 图源来自 Wikipedia)

# 观察性研究




(ii) 观察性研究

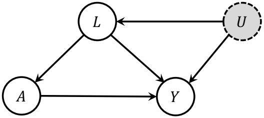
Rosenbaum & Rubin (1983) 提出的可忽略性假定是在观察性研究里评估因果作用最重要的假定.

**Assumption 1 (可忽略性, ignorability)**

$$A \perp\!\!\!\perp (Y_0, Y_1) \mid L.$$

- $\mathrm{pr}(A \mid L, Y_0, Y_1) = \mathrm{pr}(A \mid L)$.
- 在协变量的每个分层下，处理分配机制可以被视为随机化.
- 随机化试验也满足可忽略性假设.
- 可忽略性又被称作无混杂 (unconfoundedness) 假设，所有未观测的混杂不同时指向处理变量和结果变量.
- 该假设无法直接检验.

# 观察性研究




(ii) 观察性研究

Rosenbaum & Rubin (1983) 提出的可忽略性假定是在观察性研究里评估因果作用最重要的假定.

**Assumption 2 (positivity, or overlap)**

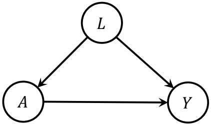
$$0 < \mathrm{pr}(A = 1 \mid L) < 1.$$

- 上述概率 $e(l) = \mathrm{pr}(A = 1 \mid L = l)$ 常被称作倾向得分 (propensitity score).
- 在协变量 $L$ 的每一层里，该假设都要求存在接受处理或接受对照的个体.
- 该假设可以直接检验.

# 可忽略性假设

**Assumption 3 (强可忽略性, strong ignorability)**

(i) $A \perp\!\!\!\perp (Y_0, Y_1) \mid L$; (ii) $0 < \mathrm{pr}(A = 1 \mid L) < 1$.




(ii) 观察性研究

Rosenbaum & Rubin (1983) 提出的可忽略性假定是在观察性研究里评估因果作用最重要的假定.

在强可忽略性假定下, ATE 可以如下识别:

$$
\begin{aligned}
\tau &= E(Y_1 - Y_0) \\
&= E\{E(Y_1 - Y_0 \mid L)\} \\
&= E\{E(Y_1 \mid L)\} - E\{E(Y_0 \mid L)\} \\
&= E\{E(Y_1 \mid A = 1, L)\} - E\{E(Y_0 \mid A = 0, L)\} \\
&= E\{E(Y \mid A = 1, L)\} - E\{E(Y \mid A = 0, L)\}.
\end{aligned}
$$

如果不对混杂因素 $L$ 进行调整, 将会导致有偏估计.

# 观察性研究

当 $L$ 是离散取值时, 假设取值范围为 $L = 1, \ldots, K$.

$$
\begin{aligned}
\tau &= E(Y_1 - Y_0) \\
&= E\{E(Y \mid A = 1, L)\} - E\{E(Y \mid A = 0, L)\} \\
&= \sum_{k=1}^{K} \underbrace{E(Y \mid A = 1, L = k)}_{\mu(1,k)} \mathrm{pr}(L = k) - \sum_{k=1}^{K} \underbrace{E(Y \mid A = 0, L = k)}_{\mu(0,k)} \mathrm{pr}(L = k).
\end{aligned}
$$

- 首先, $\mu(a, k)$ 可以如下估计: $\widehat{\mu}(a, k) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Y_i \delta(A_i = a, L_i = k)}{\sum_{i=1}^{n} \delta(A_i = a, L_i = k)}$, 其中 $\delta(\cdot)$ 表示示性函数.
- 其次, $\mathrm{pr}(L = k)$ 可以如下估计: $\widehat{\mathrm{pr}}(L = k) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \delta(L_i = k)}{n}$.
- 最后, 我们估计 ATE 如下,

$$
\widehat{\tau} = \sum_{k=1}^{K} \widehat{\mu}(1, k) \widehat{\mathrm{pr}}(L = k) - \sum_{k=1}^{K} \widehat{\mu}(0, k) \widehat{\mathrm{pr}}(L = k).
$$

当 $L$ 是维度很高或者连续时, 我们可以建立参数模型来估计因果作用.

# Yule-Simpson 悖论

| Department | All | | Men | | Women | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Applicants | Admitted | Applicants | Admitted | Applicants | Admitted |
| A | 933 | 64% | **825** | 62% | 108 | 82% |
| B | 585 | 63% | **560** | 63% | 25 | 68% |
| C | 918 | 35% | 325 | 37% | **593** | 34% |
| D | 792 | 34% | 417 | 33% | 375 | 35% |
| E | 584 | 25% | 191 | 28% | **393** | 24% |
| F | 714 | 6% | 373 | 6% | 341 | 7% |
| **Total** | **4526** | **39%** | **2691** | **45%** | **1835** | **30%** |

$$\widehat{E}(Y_1) = \underbrace{0.62}_{\widehat{\mu}(1,1)} \times \underbrace{\frac{933}{4526}}_{\widehat{\text{pr}}(L=1)} + \underbrace{0.63}_{\widehat{\mu}(1,2)} \times \underbrace{\frac{585}{4526}}_{\widehat{\text{pr}}(L=2)} + \dots + \underbrace{0.06}_{\widehat{\mu}(1,6)} \times \underbrace{\frac{714}{4526}}_{\widehat{\text{pr}}(L=6)} = 0.39.$$

Association Does Not Imply Causation!

$$\widehat{E}(Y_0) = \underbrace{0.82}_{\widehat{\mu}(0,1)} \times \underbrace{\frac{933}{4526}}_{\widehat{\text{pr}}(L=1)} + \underbrace{0.68}_{\widehat{\mu}(0,2)} \times \underbrace{\frac{585}{4526}}_{\widehat{\text{pr}}(L=2)} + \dots + \underbrace{0.07}_{\widehat{\mu}(0,6)} \times \underbrace{\frac{714}{4526}}_{\widehat{\text{pr}}(L=6)} = 0.43.$$

$$\widehat{\tau} = \widehat{E}(Y_1) - \widehat{E}(Y_0) = -0.04$$

# 回归估计 (Outcome regression model)

- 在给定可忽略性假定下, ATE 可以如下识别:

$$\begin{aligned}\tau &= E(Y_1 - Y_0) \\ &= E\{\underbrace{E(Y \mid A=1, L)}_{\mu(1,L)}\} - E\{\underbrace{E(Y \mid A=0, L)}_{\mu(0,L)}\}.\end{aligned}$$

- 上述识别表达式启发我们可以如下估计 ATE:

$$\widehat{\tau}_{\text{reg}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{\widehat{\mu}(1, L_i) - \widehat{\mu}(0, L_i)\},$$

上式常被称为回归估计量, 其中 $\widehat{\mu}(A, L)$ 是结果变量模型 $\mu(A, L) = E(Y \mid A, L)$ 的估计. 我们可以对 $\mu(A, L)$ 建立回归模型 $\mu(A, L; \alpha)$, 并通过如下矩约束条件求解参数 $\widehat{\alpha}$,

$$E\{Y - \mu(A, L; \widehat{\alpha}) \mid A, L\} = 0.$$

值得注意的是, 当 $\mu(A, L; \alpha)$ 被错误指定时, $\widehat{\tau}_{\text{reg}}$ 并不能相合估计 $\tau$.

# 逆概加权估计 (Inverse probability weighted, IPW)

- 在给定可忽略性假定下, ATE 也可以如下识别:

$$
\begin{aligned}
\tau &= E(Y_1 - Y_0) \\
&= E\{E(Y \mid A=1, L)\} - E\{E(Y \mid A=0, L)\} \\
&= E\left\{\frac{AY}{e(L)}\right\} - E\left\{\frac{(1-A)Y}{1-e(L)}\right\},
\end{aligned}
$$

其中 $e(L) = \mathrm{pr}(A = 1 \mid L)$ 是倾向得分 (propensity score).

- 我们可以如下估计 ATE:

$$
\widehat{\tau}_{\mathrm{ipw}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{A_i Y_i}{\widehat{e}(L_i)} - \frac{(1-A_i)Y_i}{1-\widehat{e}(L_i)}\right\},
$$

上式被称为逆概加权估计量, 其中 $\widehat{e}(L_i)$ 是倾向得分 $e(L_i) = \mathrm{pr}(A_i = 1 \mid L_i)$ 的估计.

# 逆概加权估计 (Inverse probability weighted, IPW)

IPW 估计相当于对样本做了权重调整,

$$\widehat{\tau}_{\text{ipw}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{A_i Y_i}{\widehat{e}(L_i)} - \frac{(1-A_i)Y_i}{1-\widehat{e}(L_i)}\right\},$$

对于处理组的个体 $i$, 我们采用权重 $\widehat{e}(L_i)^{-1}$ 进行调整.

对于对照组的个体 $i$, 我们采用权重 $\{1-\widehat{e}(L_i)\}^{-1}$ 进行调整.

- 当 $L$ 是离散或维数较低时, 我们可以采用非参数估计等方法估计 $\widehat{e}(L)$.
- 当 $L$ 维数较高时, 我们可以采用对 $e(L) = \text{pr}(A = 1 \mid L)$ 建立参数模型 $e(L;\beta)$, 并通过极大似然估计或矩估计等方法求解参数 $\widehat{\beta}$.

  值得注意的是, 当 $e(L;\beta)$ 被错误指定时, $\widehat{\tau}_{\text{ipw}}$ 并不能相合估计 $\tau$.
- Hirano et al. (2003) 指出在 IPW 估计时, 采用非参数估计的倾向得分 $\widehat{e}(L)$ 将比使用正确的倾向得分的 $e(L)$ 具有更小的渐进方差.

# 逆概加权估计 (Inverse probability weighted, IPW)

- 倾向评分一个众所周知的结果：使用估计的倾向评分通常比真实的倾向评分有更好的 ATE 的估计 (Rosenbaum, 1987).
- Rosenbaum (1987, pp 391) 给出了一些直观的解释:

  > " the same reason that covariate adjustment in RCT outperforms the unadjusted difference-in-means estimator –estimated PS corrects for chance imbalance in the sample, but true PS does not. "

- Hirano et al. (2003) 指出在 IPW 估计时，采用非参数估计的倾向得分 $\widehat{e}(L)$ 将比使用正确的倾向得分的 $e(L)$ 具有更小的渐进方差.

# 双稳健估计 (Doubly robust estimation)

- 当所需要的回归模型不正确时, $\widehat{\tau}_{\mathrm{reg}}$ 将产生较大的偏差.
- 当所需要的倾向得分模型不正确时, $\widehat{\tau}_{\mathrm{ipw}}$ 将产生较大的偏差.
- 双稳健估计结合了回归估计与逆概加权估计的优点, 能有效缓解任一模型误设导致的偏差.

$$
\begin{aligned}
\widehat{\tau}_{\mathrm{dr}} =& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{A_i\{Y_i-\mu(1,L_i;\widehat{\alpha})\}}{e(L_i;\widehat{\beta})}+\mu(1,L_i;\widehat{\alpha})\right] \\
&-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(1-A_i)\{Y_i-\mu(0,L_i;\widehat{\alpha})\}}{1-e(L_i;\widehat{\beta})}+\mu(0,L_i;\widehat{\alpha})\right].
\end{aligned}
$$

上述 $\widehat{\tau}_{\mathrm{dr}}$ 估计量有两个等价的数学表示, 进而揭示了 $\widehat{\tau}_{\mathrm{dr}}$ 的双稳健性质.

# 双稳健估计 (Doubly robust estimation)

当回归模型 $\mu(A_i, L_i; \alpha)$ 被正确指定时, 我们可以得到 $\alpha$ 的相合估计量 $\widehat{\alpha}$.

$$
\begin{aligned}
\widehat{\tau}_{\mathrm{dr}} = & \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu(1, L_i; \widehat{\alpha}) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu(0, L_i; \widehat{\alpha})}_{\widehat{\tau}_{\text{reg}} \xrightarrow{p} \tau} \\
& + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{e(L_i; \widehat{\beta})}\{\mu(1, L_i; \widehat{\alpha}) - Y_i\}}_{\xrightarrow{p} E\left[\frac{A_i}{e(L_i;\beta^*)}\{\mu(1,L_i;\alpha^*)-Y_i\}\right]=0} - \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1 - A_i}{1 - e(L_i; \widehat{\beta})}\{\mu(0, L_i; \widehat{\alpha}) - Y_i\}}_{\xrightarrow{p} E\left[\left\{\frac{1-A_i}{1-e(L_i;\beta^*)}\right\}\{\mu(0,L_i;\alpha^*)-Y_i\}\right]=0},
\end{aligned}
$$

其中 $\alpha^*$ 和 $\beta^*$ 分别表示当样本量趋于无穷时 $\widehat{\alpha}$ 和 $\widehat{\beta}$ 依概率收敛的极限值. 注意到，当回归模型 $\mu(A_i, L_i; \alpha)$ 被正确指定时，无论倾向得分模型 $e(L_i; \beta)$ 正确指定与否，我们都有

$$
E\left[\frac{A_i}{e(L_i; \beta^*)}\{\mu(1, L_i; \alpha^*) - Y_i\}\right] = E\left[\underbrace{E\left\{\mu(1, L_i; \alpha^*) - Y_i \mid A_i = 1, L_i\right\}}_{=0}\frac{A_i}{e(L_i; \beta^*)}\right] = 0.
$$

# 双稳健估计 (Doubly robust estimation)

当倾向得分模型 $e(L_i;\beta)$ 被正确指定时，我们可以得到 $\beta$ 的相合估计量 $\widehat{\beta}$.

$$\widehat{\tau}_{\mathrm{dr}} = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{e(L_i;\widehat{\beta})}Y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1-A_i}{1-e(L_i;\widehat{\beta})}Y_i}_{\widehat{\tau}_{\text{ipw}}\xrightarrow{p}\tau}$$

$$+\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{1-\frac{A_i}{e(L_i;\widehat{\beta})}\right\}\mu(1,L_i;\widehat{\alpha})}_{\xrightarrow{p}E\left[\left\{1-\frac{A_i}{e(L_i;\beta^*)}\right\}\mu(1,L_i;\alpha^*)\right]=0} - \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{1-\frac{1-A_i}{1-e(L_i;\widehat{\beta})}\right\}\mu(0,L_i;\widehat{\alpha})}_{\xrightarrow{p}E\left[\left\{1-\frac{1-A_i}{1-e(L_i;\beta^*)}\right\}\mu(0,L_i;\alpha^*)\right]=0}.$$

其中 $\alpha^*$ 和 $\beta^*$ 分别表示当样本量趋于无穷时 $\widehat{\alpha}$ 和 $\widehat{\beta}$ 依概率收敛的极限值. 注意到，当倾向得分模型 $e(L_i;\beta)$ 被正确指定时，回归模型 $\mu(A_i,L_i;\alpha)$ 无论正确指定与否，我们都有

$$E\left[\left\{1-\frac{A_i}{e(L_i;\beta^*)}\right\}\mu(1,L_i;\alpha^*)\right] = E\left[\underbrace{E\left\{\frac{e(L_i;\beta^*)-A_i}{e(L_i;\beta^*)}\,\middle|\,L_i\right\}}_{=0}\mu(1,L_i;\alpha^*)\right] = 0.$$

# 双稳健估计

- 当任一模型正确指定时，双稳健估计仍具有相合估计.
- 当两个模型都不正确时，双稳健估计可能会带来比回归和逆概加权估计更大的偏差 (Kang & Schafer, 2007).
- 双稳健估计量在近些年得到了广泛的应用.

# 稳健估计

- 在可忽略性假定不满足的时候，许多文献也建立 ATE 的识别性，并在不同的识别假设下考虑了 ATE 的稳健估计.
- 值得注意的是，许多稳健估计量需要的模型通常难以正确指定.
- 除了参数模型之外，许多非参数的方法也被用于稳健估计.

# 机器学习的一些方法

- 机器学习模型经常用于预测，并不能直接用于预测反事实结果 (这是因果推断关心的).
- 机器学习的一些重要思想：
  - Sample splitting, 以便构建模型和估计因果作用.
  - Double learning, 分别学习倾向得分和结果变量模型，并结合两个模型的优势用于因果推断.
  - Cross-fitting, 数据交叉验证来控制偏差和方差.
- 一些有代表性的工作：
  - 因果树和因果森林 (Causal trees and forest, Wager & Athey, 2018).
  - 双重机器学习 (Double/debiased machine learning, Chenozhukov et al., 2018).
  - BART (Bayesian additive regression trees, Chipman et al., 2010).
- 机器学习的方法仍不能解决因果推断的一些基本问题，例如可忽略性假定.

# 数值模拟

我们评估 $\widehat{\tau}_{\text{reg}}$, $\widehat{\tau}_{\text{ipw}}$ 以及 $\widehat{\tau}_{\text{dr}}$ 的有限样本表现.

- $L \sim N(0,1)$
- $\text{pr}(A=1 \mid L) = \text{expit}(0.5L - 0.2L^2) \quad \Rightarrow \quad e(L) = \text{expit}(\beta_0 + \beta_l L + \beta_2 L^2)$
- $Y = 1.5A + 2L + L^2 + \varepsilon,\ \varepsilon \sim N(0,1) \quad \Rightarrow \quad \mu(A,L) = \alpha_0 + \alpha_1 A + \alpha_2 L + \alpha_3 L^2$

Case 1: 所有模型都被正确指定, 即

$$e(L;\beta) = e(L); \quad \mu(A,L;\alpha) = \mu(A,L).$$

Case 2: 回归模型被正确指定, 倾向得分被错误指定, 即

$$e(L;\beta) = \text{expit}(\beta_0 + \beta_1 L); \quad \mu(A,L;\alpha) = \mu(A,L).$$

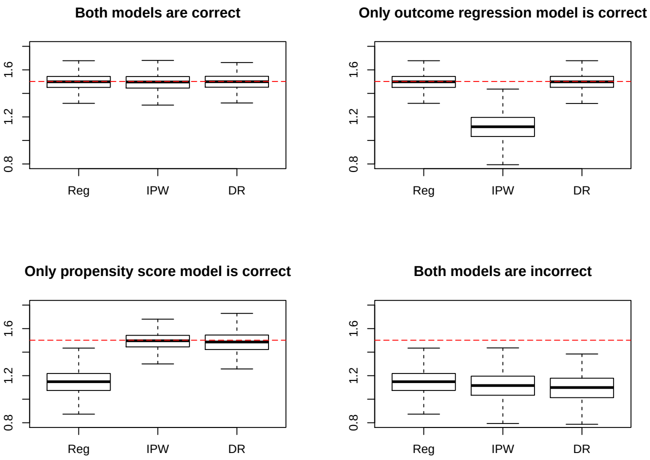
Case 3: 倾向得分模型被正确指定, 回归模型被错误指定, 即

$$e(L;\beta) = \text{expit}(L); \quad \mu(A,L;\alpha) = \alpha_0 + \alpha_1 A + \alpha_2 L.$$

Case 4: 所有模型都被错误指定, 即

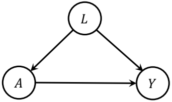
$$e(L;\beta) = \text{expit}(\beta_0 + \beta_1 L);\ \mu(A,L;\alpha) = \alpha_0 + \alpha_1 A + \alpha_2 L.$$

# 稳健估计

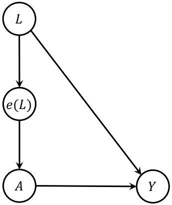


Both models are correct
Only outcome regression model is correct
Only propensity score model is correct
Both models are incorrect
0.8
1.2
1.6
Reg
IPW
DR

# 倾向得分重要的性质



(i)



(ii)

**定理 1 (倾向得分定理, Rosenbaum & Rubin (1983))**

在可忽略性假设下，即

$$\text{(i) } A \perp\!\!\!\perp (Y_0, Y_1) \mid L; \quad 0 < \mathrm{pr}(A = 1 \mid L) < 1,$$

$$\Longrightarrow \text{(ii) } A \perp\!\!\!\perp (Y_0, Y_1) \mid e(L); \quad 0 < \mathrm{pr}\{A = 1 \mid e(L)\} < 1.$$

平衡得分 (balancing score), 降维 (dimension reduction), 分层 (stratification), 匹配 (matching)...

# 倾向得分重要的性质

**证明.**

我们只要证明

$$\mathrm{pr}(A = 1 \mid Y_1, e(L)) = \mathrm{pr}(A = 1 \mid e(L))$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}\left(A = 1 \mid Y_1, e(L)\right) &= \mathbb{E}\left\{A \mid Y_1, e(L)\right\} \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left\{A \mid Y_1, e(L), L\right\} \mid Y_1, e(L)\right] \\
&= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}(A \mid Y_1, L) \mid Y_1, e(L)\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}(A \mid L) \mid Y_1, e(L)\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{e(L) \mid Y_1, e(L)\right\} \\
&= e(L) \\
&= \mathrm{pr}(A = 1 \mid e(L))
\end{aligned}$$

其中最后一个等式是由于 □

# 倾向得分重要的性质

**证明.**

我们有 $\text{pr}\{A=1 \mid L, e(L)\} = \text{pr}(A=1 \mid L) = e(L)$, 及

$$\text{pr}\{A=1 \mid e(L)\} = E[\text{pr}\{A=1 \mid L, e(L)\} \mid e(L)] = E\{e(L) \mid e(L)\} = e(L)$$

因此, $\text{pr}\{A=1 \mid L, e(L)\} = \text{pr}\{A=1 \mid e(L)\}$, 即 $L \perp\!\!\!\perp A \mid e(L)$. $\square$

# 匹配 (Matching)

- 通过回归估计模型,

  对于处理组的个体 $i$, 我们使用 $\widehat{\mu}(0, L_i)$ “填补” 个体 $i$ 在接受对照时的潜在结果 $Y_i(0)$.

  对于对照组的个体 $i$, 我们使用 $\widehat{\mu}(1, L_i)$ “填补” 个体 $i$ 在接受治疗时的潜在结果 $Y_i(1)$.

- 我们考虑匹配估计,

  对于处理组的个体 $i$, 我们可以在对照组里找与 $L_i$ 最接近的个体的结果用于 “填补” 个体 $i$ 在接受对照时的潜在结果 $Y_i(0)$.

  对于对照组的个体 $i$, 我们可以在处理组里找与 $L_i$ 最接近的个体的结果用于 “填补” 个体 $i$ 在接受治疗时的潜在结果 $Y_i(0)$.

- 匹配的目的在于平衡处理组和对照组协变量的分布.

- 匹配的思想也可用于估计 ATT 和 ATC.

# 最近邻匹配

个体 $i$ 根据 $L_2$ 范数匹配的集合定义为:

$$J_M(i) = \left\{ j = 1, \ldots, n : A_j = 1 - A_i \text{ and } \sum_{k: A_k = 1 - A_i} \delta\left( \|L_i - L_k\| \leqslant \|L_i - L_j\| \right) \leqslant M \right\},$$

- 其中 $M$ 为整数, 代表每一个个体的匹配数据的个数.
- $J_M(i)$ 的定义允许在构造匹配集合过程中放回已被使用的个体，不同的个体可以选择相同的协变量进行匹配.

我们可以如下估计 ATE:

$$\widehat{\tau}_{\text{mat}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\widehat{Y}_i(1)}{n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\widehat{Y}_i(0)}{n},$$

上述估计量被称为匹配估计量，其中

$$\widehat{Y}_i(0) = \begin{cases} \frac{1}{M} \sum_{j \in J_M(i)} Y_j, & A_i = 1, \\ Y_i, & A_i = 0. \end{cases} \quad \widehat{Y}_i(1) = \begin{cases} Y_i, & A_i = 1, \\ \frac{1}{M} \sum_{j \in J_M(i)} Y_j, & A_i = 0. \end{cases}$$

# 再谈匹配

- 当 $L$ 维度比较高的时候，使用高维协变量进行匹配会比较困难. 根据倾向得分定理，我们可以使用倾向得分进行匹配,

$$J_M(i) = \left\{ j = 1, \ldots, n : A_j = 1 - A_i \text{ and } \sum_{k: A_k = 1 - A_i} \delta\left( |e(L_i) - e(L_k)| \leqslant |e(L_i) - e(L_j)| \right) \leqslant M \right\}.$$

- 我们可以如下估计 ATE: $$\widehat{\tau}_{\mathrm{mat}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\widehat{Y}_i(1)}{n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\widehat{Y}_i(0)}{n},$$

其中
$$\widehat{Y}_i(0) = \begin{cases} \frac{1}{M} \sum_{j \in J_M(i)} Y_j, & A_i = 1, \\ Y_i, & A_i = 0. \end{cases} \quad \widehat{Y}_i(1) = \begin{cases} Y_i, & A_i = 1, \\ \frac{1}{M} \sum_{j \in J_M(i)} Y_j, & A_i = 0. \end{cases}$$

- Abadie & Imbens (2006, 2016) 讨论了上述估计量的渐进性质.

# 再谈处理组的因果效应

- 由定义，ATE, ATT 和 ATC 三者的关系如下:

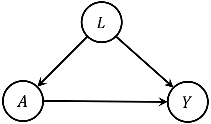
$$\tau = \mathsf{pr}\,(A=1)\,\tau_{\mathrm{ATT}} + \mathsf{pr}\,(A=0)\,\tau_{\mathrm{ATC}}$$

- 在随机化下，我们有 ATE = ATT = ATC, 因为

$$\underbrace{E(Y_1 - Y_0)}_{\tau} = \underbrace{E(Y_1 - Y_0 \mid A=1)}_{\tau_{\mathrm{ATT}}} = \underbrace{E(Y_1 - Y_0 \mid A=0)}_{\tau_{\mathrm{ATC}}}$$

- 在观察性研究中，ATE 一般和 ATT 与 ATC 是不同的.
- 我们接下来讨论 ATT 的识别条件，ATC 类似.

# 处理组的因果效应



(ii) 观察性研究

当我们在讨论 ATT 的识别性时，可忽略性和 positivity 假设都可以被放松.

**Assumption 4 (可忽略性, ignorability)**

(i) $A \perp\!\!\!\perp Y_0 \mid L$; (ii) $\mathrm{pr}(A = 1 \mid L) < 1$.

在上述可忽略性假定下, ATT 可以如下识别：

$$
\begin{aligned}
\tau_{\mathrm{ATT}} &= E(Y_1 - Y_0 \mid A = 1) \\
&= E(Y_1 \mid A = 1) - E\{E(Y_0 \mid A = 1, L) \mid A = 1\} \\
&= E(Y \mid A = 1) - E\{E(Y_0 \mid A = 1, L) \mid A = 1\} \\
&= E(Y \mid A = 1) - E\{E(Y_0 \mid A = 0, L) \mid A = 1\} \\
&= E(Y \mid A = 1) - E\{E(Y \mid A = 0, L) \mid A = 1\}.
\end{aligned}
$$

# 本周作业

1. 证明逆概加权识别表达式
2. 上机作业：计算所给数据的回归估计量，逆概加权估计量，双稳健估计量
3. 附加题：验证双稳健估计量的双稳健性质，可参考文献：

   Tsiatis, A. A. (2006). Semiparametric theory and missing data. Springer. P147-150.
4. 上机作业要求用 Rmarkdown 输出 pdf，注意注释及格式
5. 作业扫描成 pdf 发邮箱:smengchen@163.com