第二章　潜在结果与随机化试验

罗姗姗

北京工商大学 数学与统计学院

因果推断课题组

目录

1 潜在结果模型

2 随机化试验

3 作业

因果推断的框架

- 潜在结果模型（Neyman, 1923; Rubin, 1974.）

  潜在结果模型给出了因果作用的数学定义.

  在原因变量和结果变量已知的前提下，该模型可以定量评价原因对结果的因果作用.

- 因果网络模型（Pearl, 1995.）

  因果网络模型是描述数据产生机制和外部干预的形式化语言.

  因果网络模型通过有向无环图来刻画多个变量之间的因果关系.

  因果网络不仅能定量评价因果作用，还能定性确定混杂因素，被用于从数据挖掘因果关系.

- ...

一些需要评估因果作用的场景

- 如果我们关心服用阿司匹林或不服用对缓解头痛的影响，那么干预是服用阿司匹林。
- 如果我们关心参加职业培训计划或不参加对就业和工资的影响，那么干预是参加职业培训计划。
- 如果我们关心在小教室或大教室学习对标准化考试成绩的影响，那么干预是在小教室学习。

潜在结果模型

- A: 处理变量 (treatment), $A = 1$ 代表接受处理, $A = 0$ 代表接受对照.
- Y_a: 潜在结果 (potential outcome), 表示假如接受处理 $A = a$ 后的结果.
- Y: 实际观测的结果, $Y = AY_1 + (1 - A)Y_0$.

  (consistency, 一致性假定)
- L: 协变量.

SUTVA (stable unit treatment value assumption): 每个个体的潜在结果不受其他个体的处理的影响, 并且每个个体在任意处理下的潜在结果唯一.

SUTVA 成立: 张三吃药不影响李四的结果; 张三上学不影响李四的收入.

SUTVA 不成立: 张三戴口罩会影响李四得流感.

因果作用 I

- 个体 i 的因果作用 (individual treatment effect, ITE) 被定义为:

$$\tau(i) = Y_1(i) - Y_0(i).$$

因果推断的一个基本问题: 个体 i 无法同时观测到 $Y_1(i)$ 和 $Y_0(i)$.
因此, 个体因果作用通常不能从观测数据推断.

i	$Y_1(i)$	$Y_0(i)$
1	$Y_1(1)$	$Y_0(1)$
2	$Y_1(2)$	$Y_0(2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$Y_1(n)$	$Y_0(n)$

- 总体的平均因果作用 (average treatment effect, ATE) 被定义:

$$\tau \equiv E(Y_1 - Y_0).$$

因果作用 II

- 处理组的平均因果作用 (Average treatment effect on the treated, ATT) 被定义为:

$$\tau_{\mathrm{ATT}} = E(Y_1 - Y_0 \mid A = 1).$$

  例如，如何评估抽烟的人群上的因果作用.

- 对照组的平均因果作用 (Average treatment effect on the control, ATC) 被定义为:

$$\tau_{\mathrm{ATC}} = E(Y_1 - Y_0 \mid A = 0).$$

- ATE, ATT 和 ATC 三者的关系如下:

$$\tau = \mathrm{pr}\,(A = 1)\,\tau_{\mathrm{ATT}} + \mathrm{pr}\,(A = 0)\,\tau_{\mathrm{ATC}}$$

完美的大夫 I

例 1

对于个体 i，一个完美的医生会在知道个体 i 的因果效应非负时，将安排患者吃药，即 $A_i = 1$。具体地，我们考虑潜在结果服从以下分布：

$$Y_0(i) \sim N(0,1), \quad \tau(i) = -0.5 + Y_0(i), \quad Y_1(i) = Y_0(i) + \tau(i).$$

我们假设大夫安排的治疗方案完全由个体因果作用决定，即 $A_i = \mathbb{I}\{\tau(i) \geq 0\}$，那么观察到的结果将由潜在结果和是否服药完全决定，即 $Y(i) = A_i Y_1(i) + (1 - A_i) Y_0(i)$。我们如何计算均值差？

$$E(Y \mid A = 1) - E(Y \mid A = 0).$$

完美的大夫 II

我们以 $E(Y \mid A=1)$ 为例。首先知道 $\tau_i \sim N(-0.5, 1)$.

- 其次，由于

$$
\begin{aligned}
E(Y \mid A=1) = E\left(Y_1 \mid A=1\right) &= E\left(Y_0+\tau \mid \tau>0\right) \\
&= E(\tau+0.5+\tau \mid \tau>0) \\
&= 0.5+2E(\tau \mid \tau>0) \\
&= 1.782.
\end{aligned}
$$

其中

$$
E(\tau \mid \tau>0) = -0.5 - \frac{\phi(\infty)-\phi(0.5)}{\Phi(\infty)-\Phi(0.5)} = 0.641.
$$

1. 潜在结果模型

2. 随机化试验

3. 作业

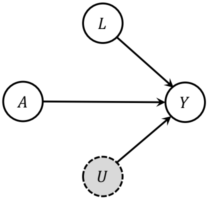
识别性

$$\boxed{\text{Causal Estimand}} \xrightarrow{\text{Identification}} \boxed{\text{Statistical Estimand}} \xrightarrow{\text{Estimation}} \boxed{\text{Estimate}}$$

- 平均因果作用 ATE 可识别：观测变量的分布 $\mathrm{pr}(L, A, Y)$ 可以唯一确定 ATE 的取值.

- 如果 ATE 不可识别，这意味着至少存在两个不相等的值 ATE = ATE' 都满足观测到的数据.

随机化试验

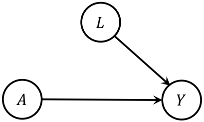


(i) 随机化

Fisher (1925, 1935) 通过随机化试验将反事实理论应用于评估因果作用.

- 在随机化试验中, 处理分配机制是已知的.
- 在随机化试验中, 我们会有:
  - $A \perp\!\!\!\perp L$.
  - $A \perp\!\!\!\perp U$.
  - $A \perp\!\!\!\perp (Y_0, Y_1)$.
- 随机化并不需要引入关于 Y 的任何模型假设.

随机化试验



(i) 随机化

Fisher (1925, 1935) 通过随机化试验将反事实理论应用于评估因果作用.

Assumption 1 (随机化)

$$A \perp\!\!\!\perp (Y_0, Y_1)$$

在随机化分配下，ATE 可以如下识别：

$$\begin{aligned}\tau &= E(Y_1 - Y_0) \\ &= E(Y_1) - E(Y_0) \\ &= E(Y_1 \mid A = 1) - E(Y_0 \mid A = 0) \\ &= E(Y \mid A = 1) - E(Y \mid A = 0)\,.\end{aligned}$$

在理想的随机化下，因果可以由相关表示.

随机化试验

Table 2.1

	A	Y	Y^0	Y^1
Rheia	0	0	0	?
Kronos	0	1	1	?
Demeter	0	0	0	?
Hades	0	0	0	?
Hestia	1	0	?	0
Poseidon	1	0	?	0
Hera	1	0	?	0
Zeus	1	1	?	1
Artemis	0	1	1	?
Apollo	0	1	1	?
Leto	0	0	0	?
Ares	1	1	?	1
Athena	1	1	?	1
Hephaestus	1	1	?	1
Aphrodite	1	1	?	1
Cyclope	1	1	?	1
Persephone	1	1	?	1
Hermes	1	0	?	0
Hebe	1	0	?	0
Dionysus	1	0	?	0

（Hernán & Robins, 2020）

随机化下，ATE 可以如下估计：

$$\widehat{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i Y_i}{\sum_{i=1}^n A_i} - \frac{\sum_{i=1}^n (1-A_i) Y_i}{\sum_{i=1}^n (1-A_i)}.$$

- A: 二值处理变量, $A=1$ 代表接受心脏移植, $A=0$ 代表未接受.
- Y: 二值结果变量, $Y=1$ 代表死亡, $Y=0$ 代表存活.
- ATE 可以如下估计:

$$\widehat{\tau} = \widehat{\text{pr}}\,(Y=1 \mid A=1) - \widehat{\text{pr}}\,(Y=1 \mid A=0)$$
$$= \frac{7}{13} - \frac{3}{7} > 0.$$

完美的大夫（续） I

例 2

对于个体 i，一个完美的医生会在知道个体 i 的因果效应非负时，将安排患者吃药，即 $A_i = 1$。具体地，我们考虑潜在结果服从以下分布：

$$Y_0(i) \sim N(0,1), \quad \tau(i) = -0.5 + Y_0(i), \quad Y_1(i) = Y_0(i) + \tau(i).$$

我们假设大夫安排的治疗方案完全由抛硬币决定，即 $\text{pr}(A_i = 1) = 0.5$，那么观察到的结果将由潜在结果和是否服药完全决定，即 $Y(i) = A_i Y_1(i) + (1 - A_i) Y_0(i)$。我们如何计算均值差？

$$E(Y \mid A = 1) - E(Y \mid A = 0).$$

完美的大夫（续） II

我们仍然以 $E(Y \mid A=1)$ 为例。

$$
\begin{aligned}
E(Y \mid A=1) &= E\left(Y_1 \mid A=1\right) \\
&= E\left(Y_1\right) \\
&= E(Y_0 + \tau) \\
&= -0.5 + 2E(Y_0) \\
&= -0.5.
\end{aligned}
$$

作业

以下作业任选其一提交:

1. 计算例题 1 与例题 2 设置下的 $E(Y \mid A=0)$，并用 R 语言实现。要求提交：作业计算题、Rmd 代码、及 Rmd 输出的 pdf 文件。
2. 在随机试验下，证明以下 difference in means 估计量的渐近正态性

$$\widehat{\tau} = \underbrace{\widehat{\mathrm{pr}}\,(Y=1 \mid A=1)}_{\widehat{\tau}_1} - \underbrace{\widehat{\mathrm{pr}}\,(Y=1 \mid A=0)}_{\widehat{\tau}_0}.$$

(可以首先明 $(\widehat{\tau}_1, \widehat{\tau}_0)$ 的联合渐近正态性，再用 Δ 方法。)

3. 教材 p22，2.3。

助教邮箱：smengchen@163.com