

第二章 潜在结果与随机化试验

罗珊珊

北京工商大学 数学与统计学院
因果推断课题组

目录

① 潜在结果模型

② 随机化试验

③ 作业

因果推断的框架

- 潜在结果模型 (Neyman, 1923; Rubin, 1974.)

潜在结果模型给出了因果作用的数学定义.

在原因变量和结果变量已知的前提下, 该模型可以定量评价原因对结果的因果作用.

- 因果网络模型 (Pearl, 1995.)

因果网络模型是描述数据产生机制和外部干预的形式化语言.

因果网络模型通过有向无环图来刻画多个变量之间的因果关系.

因果网络不仅能定量评价因果作用, 还能定性确定混杂因素, 被用于从数据挖掘因果关系.

- ...

一些需要评估因果作用的场景

- 如果我们关心服用阿司匹林或不服用对缓解头痛的影响，那么干预是服用阿司匹林。
- 如果我们关心参加职业培训计划或不参加对就业和工资的影响，那么干预是参加职业培训计划。
- 如果我们关心在小教室或大教室学习对标准化考试成绩的影响，那么干预是在小教室学习。

潜在结果模型

- A : 处理变量 (treatment), $A = 1$ 代表接受处理, $A = 0$ 代表接受对照.
- Y_a : 潜在结果 (potential outcome), 表示假如接受处理 $A = a$ 后的结果.
- Y : 实际观测的结果, $Y = AY_1 + (1 - A)Y_0$.
(consistency, 一致性假定)
- L : 协变量.

SUTVA (stable unit treatment value assumption): 每个个体的潜在结果不受其他个体的处理的影响, 并且每个个体在任意处理下的潜在结果唯一.

SUTVA 成立: 张三吃药不影响李四的结果; 张三上学不影响李四的收入.

SUTVA 不成立: 张三戴口罩会影响李四得流感.

因果作用 I

- 个体 i 的因果作用 (individual treatment effect, ITE) 被定义为:

$$\tau(i) = Y_1(i) - Y_0(i).$$

因果推断的一个基本问题: 个体 i 无法同时观测到 $Y_1(i)$ 和 $Y_0(i)$.
因此, 个体因果作用通常不能从观测数据推断.

| i | $Y_1(i)$ | $Y_0(i)$ |
|----------|----------|----------|
| 1 | $Y_1(1)$ | $Y_0(1)$ |
| 2 | $Y_1(2)$ | $Y_0(2)$ |
| \vdots | \vdots | \vdots |
| n | $Y_1(n)$ | $Y_0(n)$ |

- 总体的平均因果作用 (average treatment effect, ATE) 被定义:

$$\tau \equiv E(Y_1 - Y_0).$$

因果作用 II

- 处理组的平均因果作用 (Average treatment effect on the treated, ATT) 被定义为:

$$\tau_{\text{ATT}} = E(Y_1 - Y_0 \mid A = 1).$$

例如, 如何评估抽烟的人群上的因果作用.

- 对照组的平均因果作用 (Average treatment effect on the control, ATC) 被定义为:

$$\tau_{\text{ATC}} = E(Y_1 - Y_0 \mid A = 0).$$

- ATE, ATT 和 ATC 三者的关系如下:

$$\tau = \text{pr}(A = 1) \tau_{\text{ATT}} + \text{pr}(A = 0) \tau_{\text{ATC}}$$

完美的大夫 I

例 1

对于个体 i ，一个完美的医生会在知道个体 i 的因果效应非负时，将安排患者吃药，即 $A_i = 1$ 。具体地，我们考虑潜在结果服从以下分布：

$$Y_0(i) \sim N(0, 1), \quad \tau(i) = -0.5 + Y_0(i), \quad Y_1(i) = Y_0(i) + \tau(i).$$

我们假设大夫安排的治疗方案完全由个体因果作用决定，即 $A_i = \mathbb{I}\{\tau(i) \geq 0\}$ ，那么观察到的结果将由潜在结果和是否服药完全决定，即 $Y(i) = A_i Y_1(i) + (1 - A_i) Y_0(i)$ 。我们如何计算均值差？

$$E(Y | A = 1) - E(Y | A = 0).$$

完美的大夫 II

我们以 $E(Y | A = 1)$ 为例。首先知道 $\tau_i \sim N(-0.5, 1)$.

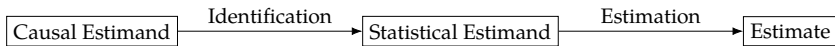
- 其次, 由于

$$\begin{aligned} E(Y | A = 1) &= E(Y_1 | A = 1) = E(Y_0 + \tau | \tau > 0) \\ &= E(\tau + 0.5 + \tau | \tau > 0) \\ &= 0.5 + 2E(\tau | \tau > 0) \\ &= 1.782. \end{aligned}$$

其中

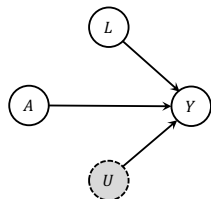
$$E(\tau | \tau > 0) = -0.5 - \frac{\phi(\infty) - \phi(0.5)}{\Phi(\infty) - \Phi(0.5)} = 0.641.$$

识别性



- 平均因果作用 ATE 可识别: 观测变量的分布 $\text{pr}(L, A, Y)$ 可以唯一确定 ATE 的取值.
- 如果 ATE 不可识别, 这意味着至少存在两个不相等的值 $\text{ATE} = \text{ATE}'$ 都满足观测到的数据.

随机化试验



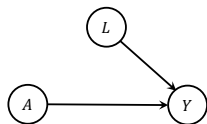
(i) 随机化

- 在随机化试验中, 处理分配机制是已知的.
- 在随机化试验中, 我们会有:
 - $A \perp\!\!\!\perp L$.
 - $A \perp\!\!\!\perp U$.
 - $A \perp\!\!\!\perp (Y_0, Y_1)$.

Fisher (1925, 1935) 通过随机化试验将反事实理论应用于评估因果作用.

- 随机化并不需要引入关于 Y 的任何模型假设.

随机化试验



(i) 随机化

Fisher (1925, 1935) 通过随机化试验将反事实理论应用于评估因果作用。

Assumption 1 (随机化)

$$A \perp\!\!\!\perp (Y_0, Y_1)$$

在随机化分配下, ATE 可以如下识别:

$$\begin{aligned}\tau &= E(Y_1 - Y_0) \\ &= E(Y_1) - E(Y_0) \\ &= E(Y_1 | A = 1) - E(Y_0 | A = 0) \\ &= E(Y | A = 1) - E(Y | A = 0).\end{aligned}$$

在理想的随机化下, 因果可以由相关表示。

随机化试验

Table 2.1

| | A | Y | Y^0 | Y^1 |
|------------|---|---|-------|-------|
| Rheia | 0 | 0 | 0 | ? |
| Kronos | 0 | 1 | 1 | ? |
| Demeter | 0 | 0 | 0 | ? |
| Hades | 0 | 0 | 0 | ? |
| Hestia | 1 | 0 | ? | 0 |
| Poseidon | 1 | 0 | ? | 0 |
| Hera | 1 | 0 | ? | 0 |
| Zeus | 1 | 1 | ? | 1 |
| Artemis | 0 | 1 | 1 | ? |
| Apollo | 0 | 1 | 1 | ? |
| Leto | 0 | 0 | 0 | ? |
| Ares | 1 | 1 | ? | 1 |
| Athena | 1 | 1 | ? | 1 |
| Hephaestus | 1 | 1 | ? | 1 |
| Aphrodite | 1 | 1 | ? | 1 |
| Cyclope | 1 | 1 | ? | 1 |
| Persephone | 1 | 1 | ? | 1 |
| Hermes | 1 | 0 | ? | 0 |
| Hebe | 1 | 0 | ? | 0 |
| Dionysus | 1 | 0 | ? | 0 |

(Hernán & Robins, 2020)

随机化下，ATE 可以如下估计：

$$\hat{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i Y_i}{\sum_{i=1}^n A_i} - \frac{\sum_{i=1}^n (1 - A_i) Y_i}{\sum_{i=1}^n (1 - A_i)}.$$

- A: 二值处理变量, $A = 1$ 代表接受心脏移植, $A = 0$ 代表未接受.
- Y: 二值结果变量, $Y = 1$ 代表死亡, $Y = 0$ 代表存活.
- ATE 可以如下估计:

$$\begin{aligned}\hat{\tau} &= \hat{\text{pr}}(Y = 1 \mid A = 1) - \hat{\text{pr}}(Y = 1 \mid A = 0) \\ &= \frac{7}{13} - \frac{3}{7} > 0.\end{aligned}$$

完美的大夫（续） I

例 2

对于个体 i ，一个完美的医生会在知道个体 i 的因果效应非负时，将安排患者吃药，即 $A_i = 1$ 。具体地，我们考虑潜在结果服从以下分布：

$$Y_0(i) \sim N(0, 1), \quad \tau(i) = -0.5 + Y_0(i), \quad Y_1(i) = Y_0(i) + \tau(i).$$

我们假设大夫安排的治疗方案完全由抛硬币决定，即 $\text{pr}(A_i = 1) = 0.5$ ，那么观察到的结果将由潜在结果和是否服药完全决定，即 $Y(i) = A_i Y_1(i) + (1 - A_i) Y_0(i)$ 。我们如何计算均值差？

$$E(Y | A = 1) - E(Y | A = 0).$$

完美的大夫（续） II

我们仍然以 $E(Y | A = 1)$ 为例。

$$\begin{aligned} E(Y | A = 1) &= E(Y_1 | A = 1) \\ &= E(Y_1) \\ &= E(Y_0 + \tau) \\ &= -0.5 + 2E(Y_0) \\ &= -0.5. \end{aligned}$$

作业

以下作业任选其一提交：

- ① 计算例题 1 与例题 2 设置下的 $E(Y | A = 0)$ ，并用 R 语言实现。
- ② 在随机试验下，证明以下 difference in means 估计量的渐近正态性

$$\hat{\tau} = \hat{\text{pr}}(Y = 1 | A = 1) - \hat{\text{pr}}(Y = 1 | A = 0).$$

- ③ 教材 p22, 2.3。

助教邮箱：smengchen@163.com