第三章　未观测混杂

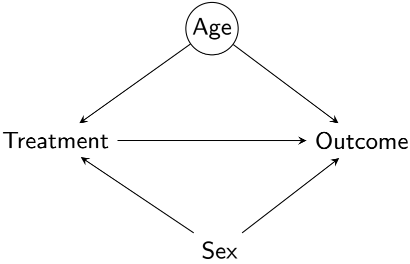
罗姗姗

March, 2023

目录

未观测混杂

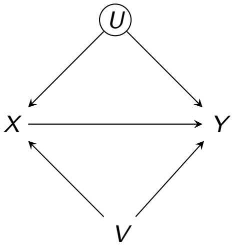
- 匹配、逆概加权、回归和双稳健估计方法的重要前提是可忽略性假定.
- 然而，在实际研究中，如果有重要背景变量未被观测、测量误差或者选择偏差，就有潜在的未观测的混杂因素，可忽略性假定可能不成立，前一节介绍的统计推断方法在出现未观测的混杂因素时就有偏差.



未观测混杂

- 当存在未被观测的混杂因素时，更合理的假定是潜在可忽略性:
  存在未被观测的变量 U 满足 $Y_x \perp\!\!\!\perp X \mid (U, V)$，其中 V 为观测的混杂因素.
- 潜在可忽略性假定: $Y_x \perp\!\!\!\perp X \mid (U, V)$. 在 U 是常数时，此假定退化为可忽略性假定.
  在潜在可忽略性假定下，

$$\mathbb{E}\,(Y_x) = \mathbb{E}\{\mathbb{E}(Y \mid X = x, U)\} \neq \mathbb{E}(Y \mid X = x)$$

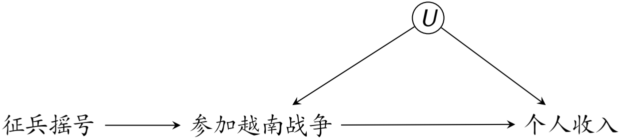


未观测混杂

- 如果 U 没有被观测,
  - 那么 $\mathbb{E}(Y \mid X = x, U)$ 一般不能由观测数据识别, 因此, $\mathbb{E}(Y_x)$ 的识别性不能保证.
  - 如果用 $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$ 来估计 $\mathbb{E}(Y_x)$ 就产生偏差.
- 在潜在可忽略性假定下, 辅助变量经常被用来帮助识别因果作用和消除混杂偏倚. 辅助变量通常只与 (X, Y, U) 三个变量的一个子集相关, 因此引入一些条件独立性帮助识别因果作用.
- 在潜在可忽略性假定下用来消除混杂偏差的两种方法,
  - 一种是常用的工具变量 (instrumental variable) 方法
  - 一种是最近引起人们注意的阴性对照变量 (negative control variable) 方法.

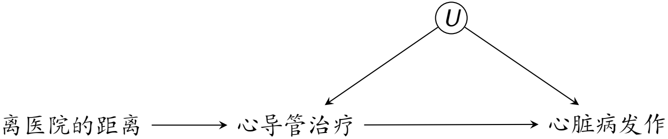
工具变量的例子

- J. Angrist (1990) 研究了参加越南战争对个人收入的影响. Angrist 指出, 越南战争的征兵摇号提供了一个自然试验 (natural experiment), 从而产生了一个工具变量. 年轻人摇号决定了他们是否会被征召去服役于越南战争 (研究生, 自愿参军).



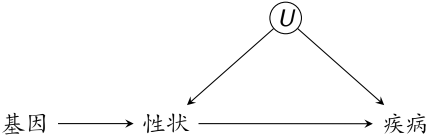
工具变量的例子

- McClellan et al. (1994, JAMA) 研究了心导管治疗对患者心脏病发作的影响.McClellan 指出一个人住的地方离先进医院有多近在很大程度上是随机的 (自然实验), 从而产生一个工具变量为, 指出可以使用两类医院的距离作为工具变量: the differential distance the patient lives from the nearest hospital that performs cardiac catheterization to the nearest hospital that does not perform it.

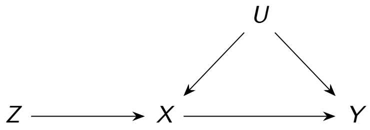


工具变量的例子

- 孟德尔随机化是工具变量分析的一种特殊类型，它与工具变量分析有着相同的基本原理和识别假设. 孟德尔随机化以基因作为工具变量，对感兴趣的性状（原因变量）与疾病（结果变量）进行因果分析，并常使用基因作为工具变量.



工具变量 I



- X : 处理变量 (X 非随机化).
- Y : 感兴趣的结果变量.
- U : 未观测混杂 (协变量).
- Z : 工具变量.

识别假设

三个必要的假设:

- 排除性限制: $Z \perp\!\!\!\perp Y \mid (X, U)$
- 独立性: $Z \perp\!\!\!\perp U$
- 相关性: $Z \not\!\perp\!\!\!\perp X$

除了需要条件 (i)-(iii), 工具变量还需要额外的假定, 有两种常用的假定被用在工具变量的分析中:

- 一种是因果作用的同质性假定 (effect homogeneity),
- 一种是单调性假定 (monotonicity).

Outline

同质性假定-线性模型

$$
\begin{tikzcd}
 & & U \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
Z \arrow[r] & X \arrow[rr] & & Y
\end{tikzcd}
$$

- 同质性假定 (effect homogeneity) 最常用的版本即为在经济学和社会学中广泛应用的结构方程模型 (structural equation model).
- 工具变量被用来估计结构方程中处理或暴露变量的回归系数. 我们首先考虑最简单的情形, 即没有其余的协变量, 此时连续型结果变量的线性模型为

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + U,$$

其中 U 是未观测的混杂因素, β_1 表示在其他因素 (U) 不变的情形下, X 每增加一个单位对 Y 的作用 (ceteris paribus effect).

同质性假定-线性模型

- 这个方程实际上假定 X 对 Y 的作用在所有人当中是一个常数. 这个方程也可以等价地用潜在结果表示为 $Y_x = \beta_0 + \beta_1 x + U$. 此模型隐含了潜在可忽略性假定.
- 在此模型下，排除性限制假定也满足，即 $Z \perp\!\!\!\perp Y \mid (X, U)$.
- 在此模型下, β_1 代表平均因果作用 $\mathbb{E}(Y_1 - Y_0)$. 由于存在未观测的混杂因素, 因此仅从此结构方程不能识别 β_1.
- 例如, 当 $\mathbb{E}(U \mid X) \neq 0$ 时, β_1 的最小二乘估计有偏.

同质性假定-线性模型 I

在线性模型假设下，我们可以识别参数 β_1：

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + U,$$

证明.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Y, Z) =& \mathrm{Cov}(\beta_0 + \beta_1 X + U, Z) \\
=& \beta_0 \mathrm{Cov}(1, Z) + \beta_1 \mathrm{Cov}(X, Z) + \mathrm{Cov}(U, Z) \\
=& \beta_1 \mathrm{Cov}(X, Z). \quad \text{独立性假定} \\
\Rightarrow \beta_1 =& \frac{\mathrm{Cov}(Y, Z)}{\mathrm{Cov}(X, Z)} = \frac{\mathbb{E}(YZ) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)}{\mathbb{E}(XZ) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z)}. \quad \text{相关性假定}
\end{aligned}$$

□

同质性假定-线性模型 II

二值情形.

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{\mathbb{E}(YZ) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)}{\mathbb{E}(XZ) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z)} \\
&= \frac{\mathbb{E}(YZ) - \mathbb{E}\{YZ + Y(1-Z)\}\mathbb{E}(Z)}{\mathbb{E}(XZ) - \mathbb{E}\{XZ + X(1-Z)\}\mathbb{E}(Z)} \\
&= \frac{\mathbb{E}(YZ)\mathbb{E}(1-Z) - \mathbb{E}\{Y(1-Z)\}\mathbb{E}(Z)}{\mathbb{E}(XZ)\mathbb{E}(1-Z) - \mathbb{E}\{X(1-Z)\}\mathbb{E}(Z)} \\
&= \frac{\frac{\mathbb{E}(YZ)}{\mathbb{E}(Z)} - \frac{\mathbb{E}\{Y(1-Z)\}}{\mathbb{E}\{(1-Z)\}}}{\frac{\mathbb{E}(XZ)}{\mathbb{E}(Z)} - \frac{\mathbb{E}\{X(1-Z)\}}{\mathbb{E}\{(1-Z)\}}} \\
&= \frac{\mathbb{E}(Y \mid Z=1) - \mathbb{E}(Y \mid Z=0)}{\mathbb{E}(X \mid Z=1) - \mathbb{E}(X \mid Z=0)}.
\end{aligned}
$$

□

同质性假定-线性模型 III

- 在线性模型假设下，β_1 的 IV 估计量是协方差之比：

$$\hat{\beta}_{1,\mathrm{iv}} = \frac{\widehat{\mathrm{Cov}}\left(Y_i, Z_i\right)}{\widehat{\mathrm{Cov}}\left(X_i, Z_i\right)} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \bar{Y}\right)\left(Z_i - \bar{Z}\right)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Z_i - \bar{Z}\right)}$$

  其中 $\bar{Y}, \bar{X}$ 为样本均值.

- 对于二值工具变量 Z, 这是 Wald 估计量:

$$\hat{\beta}_{1,\mathrm{iv}} = \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0}{\bar{X}_1 - \bar{X}_0},$$

  其中 $\bar{Y}_z, \bar{X}_z$ 是组 $z(=0,1)$ 上的样本均值.

解释 1-两次回归 I

但是利用一个满足假定 (i)-(iii) 的工具变量 Z, 我们可以识别 β_1. 我们考虑如下简约方程:

$$Y_i = \pi_{10} + \pi_{11} Z_i + \varepsilon_{1i},$$

$$X_i = \pi_{20} + \pi_{21} Z_i + \varepsilon_{2i}.$$

间接最小二乘 (ILS) 估计量是 π_{11} 和 π_{21} 的最小二乘估计之比:

$$\hat{\beta}_{1,\mathrm{LS}} = \hat{\pi}_{11}/\hat{\pi}_{21}.$$

在二值的随机试验中,$\hat{\beta}_{1,\mathrm{LS}}$ 是 ITT 估计的比值 (Angrist, Imbens, Rubin, 1996), 又叫 LATE, 局部平均因果作用.

- 给定观测数据, 把样本协方差 $\hat{\pi}_{11}$ 和 $\hat{\pi}_{21}$ 代入, 即得到 β_1 的工具变量估计 (instrumental variable estimator).

解释 1-两次回归 II

- 即使 $\mathbb{E}(U \mid X) \neq 0$, 在假定 (i)-(iii) 和一定的正则条件下, 可以证明 $\hat{\beta}_{1,\mathsf{LS}}$ 的相合性和渐近正态性.
- 工具变量方法有效地缓解了未观测的混杂因素导致的偏差.

解释 2-两阶段最小二乘

第 1 阶段：利用 IV 预测处理值 $\hat{X}_i$：

$$\hat{X}_i = \hat{\pi}_{20} + \hat{\pi}_{21} Z_i$$

第 2 阶段: 在结果模型中使用第 1 阶段的处理变量的预测值:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \hat{X}_i + \eta_i$$

从第 2 阶段通过 OLS 估计 β_1, 得到 β_1 的两阶段最小二乘估计量: $\hat{\beta}_{1,\text{2sls}}$.

- 直觉:

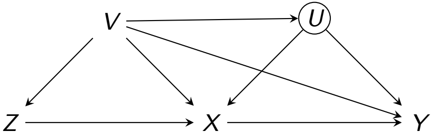
  D 虽然被混杂了, 但我们可以使用 IV 来恢复 D 的“未混淆部分”并插入结果模型.

- 容易验证:

$$\hat{\beta}_{1,\text{ iv}} = \hat{\beta}_{1,\text{ ils}} = \hat{\beta}_{1,2\text{sls}}$$

Outline

同质性假定-toy example I



当存在额外的协变量 V 时，此时三个必要的假设为:

- 排除性限制: $Z \perp\!\!\!\perp Y \mid (X, U, V)$
- 独立性: $Z \perp\!\!\!\perp U \mid V$
- 相关性: $Z \not\perp\!\!\!\perp X \mid V$

同质性假定-toy example II

当存在协变量时，我们考虑以下的线性模型是更为合适的:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 V_i + U_i + \epsilon_{yi}.$$

$$X_i = \alpha_0 + \alpha_1 Z_i + \alpha_2 V_i + U_i + \epsilon_{xi}.$$

其中 $\mathbb{E}(U_i \mid Z_i, V_i) = 0$. 于是，

$$\begin{aligned} Y_i &= \beta_0 + \beta_1(\alpha_0 + \alpha_1 Z_i + \alpha_2 V_i + U_i + \epsilon_x) + \beta_2 V_i + U_i + \epsilon_{yi} \\ &= \beta_0 + \beta_1\alpha_0 + \beta_1\alpha_1 Z_i + (\beta_1\alpha_2 + \beta_2)V_i + (\beta_1 + 1)U_i + \epsilon_{yi} \\ &= \gamma_0 + \gamma_1 Z_i + \gamma_2 V_i + \gamma_3 U_i + \epsilon_{yi}. \\ X_i &= \alpha_0 + \alpha_1 Z_i + \alpha_2 V_i + U_i + \epsilon_x. \end{aligned}$$

同质性假定-toy example III

(熟悉的同学第一段可以省略).

我们首先证明 α_1 可识别，γ_1 类似。由于 U 无法观测，我们只能求解最小二乘：

$$\min_{\alpha_0^*,\alpha_1^*,\alpha_2^*} \left\| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & Z_1 & V_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & Z_n & V_n \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_0^* \\ \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \end{pmatrix}}_{\vec{\alpha}^*} - \underbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}}_{X} \right\|_2 = \min_b \|A\vec{\alpha}^* - X\|_2.$$

求解最小二乘，我们有，

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}^* &= \mathbb{E}\{(A^\mathrm{T}A)\}^{-1}\mathbb{E}(A^\mathrm{T}X) \\ &= \mathbb{E}\{(A^\mathrm{T}A)\}^{-1}\mathbb{E}\{A^\mathrm{T}(A\vec{\alpha} + U + \epsilon_x)\} \\ &= \alpha + \mathbb{E}\{(A^\mathrm{T}A)\}^{-1}\mathbb{E}(A^\mathrm{T}U) + \mathbb{E}\{(A^\mathrm{T}A)\}^{-1}\mathbb{E}(A^\mathrm{T}\epsilon_x) \\ &= \alpha + \mathbb{E}\{(A^\mathrm{T}A)\}^{-1}\mathbb{E}(A^\mathrm{T}U) + \vec{0}, \end{aligned}$$

同质性假定-toy example IV

其中

(熟悉的同学第一段可以省略).

$$\mathbb{E}(A^{\mathrm{T}}U) = \mathbb{E}\{A^{\mathrm{T}}\mathbb{E}(U \mid A)\} = \vec{0},$$

$\square$

同质性假定-线性模型 I

不失一般性，我们中心化所有数据，省略截距项。实际上，我们并不要求 X 与 Z 之间是线性模型，即以下模型并不需要:

$$X = Z\alpha_1 + V + U\alpha_2 + \epsilon_x.$$

我们考虑以下的第二阶段的线性模型即可:

$$Y = X\beta_1 + V\beta_2 + U + \epsilon_y.$$

其中

$$\mathbb{E}(U \mid Z, V) = \mathbb{E}(U \mid V) = 0. \tag{1}$$

同质性假定-线性模型 II

证明.

$$\mathbb{E}(U \mid Z, V) = \mathbb{E}(Y - X\beta_1 - V\beta_2 \mid Z, V) = 0.$$

基于上述矩约束条件（moment restriction），我们可以构建如下等式：

$$\mathbb{E}(YZ - XZ\beta_1 - VZ\beta_2) = 0,$$
$$\mathbb{E}(YV - XV\beta_1 - V^2\beta_2) = 0.$$

令 $A = (Z, V)^{\mathrm{T}}$，上式等价于

$$\mathbb{E}\{A(Y - X\beta_1 - V\beta_2)\} = 0. \tag{2}$$

两个方程，两个未知数 (β_1, β_2)，恰好可识别. □

同质性假定-线性模型 I

- 当工具变量个数比“被混杂”的变量多时（粗糙的说，IV 个数多于处理个数时），此时方程个数将大于未知数个数。
- 利用广义矩估计 (generalized method of moments, GMM) 思想，我们依旧可以证明参数 (β_1, β_2) 可识别。

Two stage least square I

计算 IV 估计值的一种计算方法是两阶段最小二乘 (2SLS 或 TSLS)。

第 1 阶段：利用 IV 预测处理值 $\hat{X}$, ($X = A^{\mathrm{T}}\delta + \epsilon_x$):

$$\hat{\delta} = \left(AA^{\mathrm{T}}\right)^{-1} AX$$

预测值为：

$$\widehat{X} = A^{\mathrm{T}}\hat{\delta} = A^{\mathrm{T}}\left(AA^{\mathrm{T}}\right)^{-1} AX = P_A X,$$

其中 P_A 是投影矩阵 $P_A = A^{\mathrm{T}}\left(AA^{\mathrm{T}}\right)^{-1} A$.

Two stage least square II

第 2 阶段：在结果模型中使用第 1 阶段的处理变量的预测值：

$$Y = \widehat{X}\beta_1 + V\beta_2 + \eta_y.$$

上述回归的有效性是由于

1. $Y = \widehat{X}\beta_1 + V\beta_2 + \underbrace{(X - \widehat{X})\beta_1 + U}_{\epsilon}$,
2. 由回归分析知残差 $X - \widehat{X}$ 与预测值 $\widehat{X}$ 不相关，即 $\mathrm{Cov}(\widehat{X}, X - \widehat{X}) = 0$。
3. 由于 $\widehat{X}$ 是 X 的预测值，是 A（即 Z 和 V）的线性函数，故 $\mathrm{Cov}(\widehat{X}, U) = 0$.
4. 2 与 3 结合可知，1 中 $\mathrm{Cov}(\widehat{X}, \epsilon) = 0$，故 Y 可以直接对于预测值 $\widehat{X}$ 和 V 回归得到相合估计.

Outline

同质性假定- Control function I

- 不失一般性，我们将数据中心化. 假设

$$
\begin{aligned}
X &= Z\alpha + U + \varepsilon_1 && (3)\\
Y &= X\beta + \gamma U + \varepsilon_2, && (4)\\
\Rightarrow \tilde{U} &= X - Z\alpha = U + \varepsilon_1,
\end{aligned}
$$

注意第一阶段的模型(3)此时要求是可加模型.

- 此时会有 $X = \tilde{U} + Z\alpha$ 及 $U = \tilde{U} - \varepsilon_1$，由于 $Z \perp\!\!\!\perp \varepsilon_1$，我们会有 $X \perp\!\!\!\perp U \mid \tilde{U}$. 从而，

$$
\begin{aligned}
Y_x &= x\beta + \gamma U + \varepsilon_2\\
&= x\beta + \gamma(\tilde{U} - \varepsilon_1) + \varepsilon_2\\
&= x\beta + \gamma\tilde{U} - \gamma\varepsilon_1 + \varepsilon_2,
\end{aligned}
$$

同质性假定- Control function II

- 此时虽然 U 无法看见, 但我们构造了另一个可见的混杂 $\tilde{U}$ 充分控制（control）住了 U 的混杂信息.
- 在模型(4)下, 我们有 $Y_x \perp\!\!\!\perp X \mid \tilde{U}$, 且识别性可以如下得到保证,

$$E(Y_x) = E\left\{E\left(Y_x \mid \tilde{U}\right)\right\} = E\{E(Y \mid X = x, \tilde{U})\}.$$

- 我们可以如下通过回归估计参数 β ,

$$Y \sim \hat{\beta}X + \hat{\gamma}\tilde{U}$$

同质性假定-非参数方法 I

- 非参数工具变量回归 (Newey & Powell, 2003)

$$E(Y \mid X, U) = g(X) + U, \quad E(U \mid Z) = 0,$$
$$E(Y \mid Z) = E\{g(X) \mid Z\}.$$

- 非参数工具变量识别 (Wang & Tchetgen, 2018)
  - 关于原因变量的模型里我们要求没有 U 和 Z 的交互项:

$$E(X \mid Z = 1, U) - E(X \mid Z = 0, U) = E(X \mid Z = 1) - E(X \mid Z = 0).$$

  - 关于结果变量的模型里我们要求没有 U 和 X 的交互项:

$$E(Y_1 - Y_0 \mid U) = E(Y_1 - Y_0).$$

Outline

同质性假定，无效 IV 的情形 I

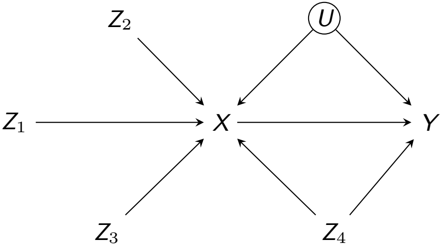


图: Z_1, Z_2, Z_3 为有效工具变量，Z_4 为无效工具变量

- 在实际情况中，工具变量可以进行随机化试验，从而 $(Z_1, \ldots, Z_p) \perp\!\!\!\perp U$，但仍难以避免 Z_j 对 Y 有直接作用。
- 实际中，我们并不知道哪些工具变量为有效工具变量。
- Kang et al. (2016) 提出大多数原则（majority rule）：当有效工具变量超过一半仍可识别因果作用。

同质性假定，无效 IV 的情形 II

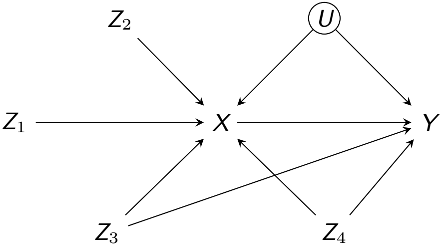
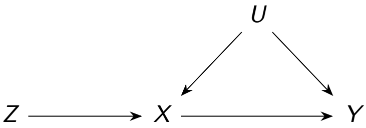


图: Z_1, Z_2 为有效工具变量，Z_3, Z_4 为无效工具变量

- 实际中，我们并不知道哪些工具变量为有效工具变量。
- Guo et al. (2018) 提出众数原则（plurality rule）：当有效工具变量的估计量为众数时，因果作用也是可识别的。

Outline

单调性假设-依从组的平均因果作用 (LATE) I



X_1	X_0	G	Description
1	1	AT	Always-taker
1	0	CO	Complier
0	1	DE	Defier
0	0	NT	Never-taker

- 例子 令 $Z=1$ 表示成长于大学附近, $Z=0$ 表示没有成长于大学附近; $X=1$ 表示完成了高中学业, $S=0$ 表示没有. 令 Y 表示对数收入 (Card, 1993).
- 单调性是指: $X_1 \geq X_0$.
- 以上三个假定 (i)-(iii) 下, 我们得到:

单调性假设-依从组的平均因果作用 (LATE) I

证明.

$$
\begin{aligned}
&E(Y_{X=1}) - E(Y_{X=0}) \\
&\quad = \mathrm{pr}\left(X_{Z=1}=1, X_{Z=0}=0\right) E\left(Y_{Z=1}-Y_{Z=0} \mid X_{Z=1}=1, X_{Z=0}=0\right) \\
&\qquad + \mathrm{pr}\left(X_{Z=1}=0, X_{Z=0}=0\right) E\left(Y_{Z=1}-Y_{Z=0} \mid X_{Z=1}=0, X_{Z=0}=0\right) \\
&\qquad + \mathrm{pr}\left(X_{Z=1}=1, X_{Z=0}=1\right) E\left(Y_{Z=1}-Y_{Z=0} \mid X_{Z=1}=1, X_{Z=0}=1\right) \\
&\quad = \mathrm{pr}\left(X_{Z=1}=1, X_{Z=0}=0\right) E\left(Y_{Z=1}-Y_{Z=0} \mid X_{Z=1}=1, X_{Z=0}=0\right) \\
&\qquad + \mathrm{pr}\left(X_{Z=1}=0, X_{Z=0}=0\right) E\left(Y_{X=0}-Y_{X=0} \mid X_{Z=1}=0, X_{Z=0}=0\right) \\
&\qquad + \mathrm{pr}\left(X_{Z=1}=1, X_{Z=0}=1\right) E\left(Y_{X=1}-Y_{X=1} \mid X_{Z=1}=1, X_{Z=0}=1\right) \\
&\quad = \mathrm{pr}\left(X_{Z=1}=1, X_{Z=0}=0\right) E\left(Y_{Z=1}-Y_{Z=0} \mid X_{Z=1}=1, X_{Z=0}=0\right) \\
&\quad = \mathrm{pr}\left(X_{Z=1}=1, X_{Z=0}=0\right) E\left(Y_{X=1}-Y_{X=0} \mid X_{Z=1}=1, X_{Z=0}=0\right)
\end{aligned}
$$

□

单调性假设-依从组的平均因果作用 (LATE) II

- 单调性假定 (monotonicity) 使得 X 的潜在结果的组合只有三种;
- 排斥限制 (exclusion restriction) 使得上面分解的后两个式子为 0 .
- 接下来考虑 $\text{pr}\,(X_{Z=1}=1, X_{Z=0}=0)$ 的识别性:

X_1	X_0	G	Description
1	1	AT	Always-taker
1	0	CO	Complier
0	1	DE	Defier
0	0	NT	Never-taker

单调性假设-依从组的平均因果作用 (LATE) III

$$
\begin{aligned}
\text{pr}(X = 1 \mid Z = 1) &= \text{pr}(X_{Z=1} = 1) \\
&= \text{pr}(X_{Z=1} = 1, X_{Z=0} = 1) + \text{pr}(X_{Z=1} = 1, X_{Z=0} = 0) \\
&= \text{pr}(G = ss) + \text{pr}(G = s\bar{s}), \\
\text{pr}(X = 1 \mid Z = 0) &= \text{pr}(X_{Z=0} = 1) \\
&= \text{pr}(X_{Z=0} = 1, X_{Z=1} = 1) + \text{pr}(X_{Z=0} = 1, X_{Z=1} = 0) \\
&= \text{pr}(G = ss) + 0, \\
\text{pr}(X = 0 \mid Z = 1) &= \text{pr}(X_{Z=1} = 0) \\
&= \text{pr}(X_{Z=0} = 1, X_{Z=1} = 0) + \text{pr}(X_{Z=0} = 0, X_{Z=1} = 0) \\
&= 0 + \text{pr}(G = \bar{s}\bar{s}).
\end{aligned}
$$

单调性假设-依从组的平均因果作用 (LATE) IV

- $(Z_1 = 1, Z_0 = 0)$ 一类人的比例就是 Z 对 X 平均因果作用:

$$\begin{aligned} \mathrm{ATE}(Z \to X) &= \mathsf{pr}(X_{Z=1} = 1, X_{Z=0} = 0). \\ &= \mathsf{pr}(X = 1 \mid Z = 1) - \mathsf{pr}(X = 1 \mid Z = 0). \end{aligned}$$

- 因此,

$$\begin{aligned} \mathrm{LATE} &= E(Y_{Z=1} - Y_{Z=0} \mid Z_1 = 1, Z_0 = 0) \\ &= E(Y_{X=1} - Y_{X=0} \mid Z_1 = 1, Z_0 = 0) \\ &= \frac{\mathrm{ATE}(Z \to Y)}{\mathrm{ATE}(Z \to X)}. \end{aligned}$$

- 上面的式子被定义为 LATE 是有理由的. 它表示的是子总体 $(Z_1 = 1, Z_0 = 0)$ 中, 随机化对于结果的因果作用; 由于这类人中随机化和接受的处理是相同的, 它也表示处理对结果的因果作用.

单调性假设-依从组的平均因果作用 (LATE) V

- 这类人接受处理与否完全由于是否接受鼓励而定，他们被成为“依从者”(complier)，因为这类人群中的平均因果作用又被成为“依从者平均因果作用”(CACE：complier average causal effect)；计量经济学家称它为“局部处理作用”(LATE: local average treatment effect)．

- 由于 Z 是随机化的，它对于 X 和 Y 的平均因果作用都是显而易见可以得到的．因为 $\widehat{ATE}(Z \to X) = \bar{X}_1 - \bar{X}_0, \widehat{ATE}(Z \to Y) = \bar{Y}_1 - \bar{Y}_0$，CACE 的一个矩估计便是

$$\widehat{\beta}_{IV} = \frac{\widehat{ATE}(Z \to Y)}{\widehat{ATE}(Z \to X)} = \frac{\widehat{\sigma}_{yz}}{\widehat{\sigma}_{xz}}.$$

- 由此可见工具变量估计量的因果含义．上面的讨论既显示了工具变量对于识别因果作用的有效性．

- 局限性：我们只能识别某个子总体的平均因果作用；而通常情况下，我们并不知道某个个体具体属于哪个子总体．

工具变量的缺点

- 工具变量估计对假定 (i)-(iii) 很敏感.
  - 假定 (i) 需要有专业知识保证工具变量对结果变量没有直接作用.
  - 条件 (ii) 难以验证, 因为混杂因素 U 没有观测到.
  - 条件 (iii) 可以用观测数据检验
- 用 plim $\hat{\beta}_1^{\text{iv}}$ 表示当样本量趋于无穷时 $\hat{\beta}_1^{\text{iv}}$ 依概率收敛的极限. 当条件 (ii) 不满足时, 工具变量估计的渐近偏差是

$$\text{plim}\, \hat{\beta}_1^{\text{iv}} - \beta_1 = \frac{\sigma_{uz}}{\sigma_{xz}}.$$

- 由此可见, 当 $\sigma_{uz} \neq 0$ 时, 工具变量估计不相合, 而且偏差会由于 σ_{xz} 过小而被放大很多倍. 使用阴性对照变量 (negative control variable) 方法解决这些问题.

阴性对照 I

- 阴性对照变量是与混杂因素 U 相关, 但与处理 X 或结果变量 Y 无因果关系的辅助变量.
- 阴性对照变量分为两种: 阴性对照暴露和阴性对照结果.
- 前者是一个辅助的暴露变量, 但是对关心的结果没有直接的因果作用;
- 后者是一个辅助的结果变量, 但是不受暴露变量的影响.
- 这些特点可以严格地表述如下.
    - (阴性对照暴露, negative control exposure) 一个暴露变量 Z 称为一个阴性对照暴露, 如果它满足 $Z \perp\!\!\!\perp Y \mid (U, X)$ 和 $Z \perp\!\!\!\perp W \mid (U, X)$.
    - (阴性对照结果, negative control outcome) 一个结果变量 W 称为一个阴性对照结果, 如果它满足 $W \perp\!\!\!\perp X \mid U$ 和 $W \not\!\perp\!\!\!\perp U$.

阴性对照 I

- 阴性对照框架需要研究者将收集到的协变量划分为三类：
  - 可观测混杂：同时影响处理变量和结果变量的协变量 C;
  - 阴性对照处理：仅与处理变量和未观测混杂相关的协变量 Z;
  - 阴性对照结果：仅与结果变量和未观测混杂相关的协变量 W.
- 独立性条件:
  - 阴性对照暴露变量: $Z \perp\!\!\!\perp Y \mid (X, U)$, $Z \perp\!\!\!\perp W \mid (U, X)$
  - 阴性对照结果变量: $W \perp\!\!\!\perp X \mid U$, $W \not\!\perp\!\!\!\perp U$

(NCE)　　　　　　(NCO)

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr] & & U \arrow[ll] \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dr] & & W \arrow[dl] \\
& X \arrow[rr] & & Y &
\end{tikzcd}
$$

阴性对照 I

$$\begin{tikzcd}
(NCE) & & & & (NCO) \\
Z & & U \arrow[ll] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr] & & W \arrow[dl] \\
& X \arrow[ul] \arrow[rr] & & Y &
\end{tikzcd}$$

- 测量误差: Kuroki & Pearl (2014)

$$\begin{tikzcd}
(NCE) & & & & (NCO) \\
Z & & U \arrow[ll] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr] & & W \\
& X \arrow[rr] & & Y &
\end{tikzcd}$$

阴性对照 II

- 除了要求阴性对照变量 Z 和 W 与处理或结果变量无直接的因果关系，上面的定义还要求 Z 与 (W, Y) 之间的混杂因素和 X 与 (W, Y) 之间的混杂因素相同．当存在完全观测的协变量 V 时，上述定义中的条件独立性需要给定 V.
- 阴性对照暴露的定义类似工具变量中的无直接作用条件，但是对 (Z, U) 的相关性不做要求，因此，工具变量可看作阴性对照暴露的特例．

阴性对照识别性 I

证明.

- 在潜在可忽略性假设 (latent ignorability) 下：

$$P(Y_x = y) = \sum_u P(Y = y \mid U = u, x) P(U = u).$$

- 我们首先考虑 V, W 和 Z 都是 k 个水平的离散变量。引入以下记号：

$$P(W \mid u) = \{P(w_1 \mid u), \ldots, P(w_k \mid u)\}^\top$$

$$P(w \mid U) = \{P(w \mid u_1), \ldots, P(w \mid u_k)\}$$

$$P(W \mid U) = \{P(W \mid u_1), \ldots, P(W \mid u_k)\}$$

□

阴性对照识别性 II

证明.

- 类似地，我们定义

$$P(U \mid v, x) = \{P(u_1 \mid v, x), \ldots, P(u_k \mid v, x)\}^\top$$
$$P(U \mid V, x) = \{P(U \mid v_1, x), \ldots, P(U \mid v_k, x)\}$$
$$P(y \mid V, x) = \{P(y \mid v_1, x), \ldots, P(y \mid v_k, x)\}$$

- 由于 $W \perp\!\!\!\perp (V, X) \mid U$ 及 $V \perp\!\!\!\perp Y \mid (U, X)$,

$$P(W \mid V, x) = P(W \mid U) P(U \mid V, x)$$
$$P(y \mid V, x) = P(y \mid U, x) P(U \mid V, x)$$

□

阴性对照识别性 III

证明.

- 当矩阵 $P(W \mid V, x)$ 可逆时，我们有

$$
\begin{aligned}
P(U \mid V, x) &= P(W \mid U)^{-1} P(W \mid V, x), \\
P(y \mid V, x) &= P(y \mid U, x) P(W \mid U)^{-1} P(W \mid V, x) \\
P(y \mid U, x) &= P(y \mid V, x) P(W \mid V, x)^{-1} P(W \mid U)
\end{aligned}
$$

- 最后，

$$
\begin{aligned}
P\left(Y_x = y\right) &= P(y \mid U, x) P(U) \\
&= P(y \mid V, x) P(W \mid V, x)^{-1} P(W \mid U) P(U) \\
&= P(y \mid V, x) P(W \mid V, x)^{-1} P(W) \quad \text{(Identifiable!)}
\end{aligned}
$$

□

双重差分 I

例 1 (Card & Krueger, 1994)

目标：评估新泽西州最低工资变化前后，新泽西州快餐店的平均就业人数。

- 在 1992 年 4 月 1 日，新泽西州将州最低工资从 4. 15 美元每小时提高到 5. 05 美元每小时
- 在同一时期，宾夕法尼亚的最低工资一直维持在 4. 25 美元每小时.
- 在 1992 年 2 月份，宾夕法尼亚州快餐店就业人数高于新泽西州，但是在 11 月份却下降了。

双重差分 II

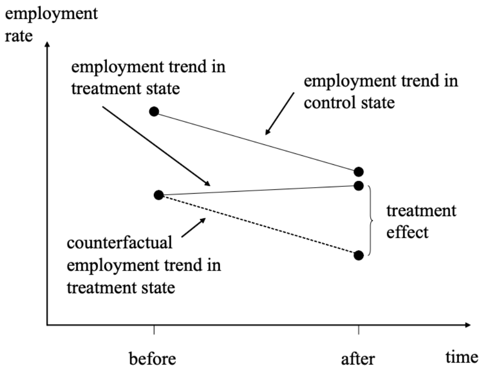


Figure 5.2.1: Causal effects in the differences-in-differences model

提高最低工资使新泽西州的就业趋势偏离了原有的趋势。

双重差分 III

- 双重差分法适用于面板数据或重复观测的横截面数据：两个或更多组别
- 每个组别里的个体有至少有两个观测时间点；在某些组别的某些时间点，个体接受处理
- 我们以两个组别和两个时间点为例介绍双重差分法。
- $G=1$ 表示处理组，$G=0$ 表示对照组
- 协变量 X
- 用 $T=t, T=t+1$ 分别表示两个时刻，我们假设 $T=t+1$ 时刻施加处理
- 定义处理状态 $Z=G*I(T=t+1)$，也即仅在处理组、$t+1$ 时刻，$Z=1$; T 时刻的潜在结果 $Y_T(z)$，其中 $z\in\{0,1\}$
- 两个时刻的结果变量分别记为 Y_t, Y_{t+1};

双重差分 IV

	处理前	处理后
对照组 $G=0$	$Y_t(0)$	$Y_{t+1}(0)$
处理组 $G=1$	$Y_t(0)$	$Y_{t+1}(1)$

- 感兴趣的因果参数: $\tau_{\text{ATT}} = E\{Y_{t+1}(1) - Y_{t+1}(0) \mid G=1\} \triangleq \mu_1 - \mu_0$, 其中
  - $\mu_1 = \mathbb{E}\{Y_{t+1}(1) \mid G=1\} = \mathbb{E}(Y_{t+1} \mid G=1)$.
  - $\mu_0 = \mathbb{E}\{Y_{t+1}(0) \mid G=1\} = \mathbb{E}(Y_{t+1}(0) \mid G=1)$. (待识别)
- 关键识别假定, Parallel trends:

$$
\begin{aligned}
& - E\{Y_{t+1}(0) \mid G=0\} \\
& = E\{Y_t(0) \mid G=1\} - E\{Y_t(1) \mid G=0\}.
\end{aligned}
$$

双重差分 V

- 在并行趋势下，DID 估计是非参数识别的:

$$\tilde{\mu}_{0,\mathrm{DID}} = \mathbb{E}\left(Y_{it} \mid G_i = 1\right) + \mathbb{E}\left(Y_{i,t+1} \mid G_i = 0\right) - \mathbb{E}\left(Y_{it} \mid G_i = 0\right)$$

DID estimator takes the difference between the change in outcomes for treated individuals and the change for control individuals - Equivalently, DID estimator can be written as the difference between the before-after estimators of treatment and of control groups

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_{\mathrm{DID}} &= \left(\bar{Y}_{1,t+1} - \bar{Y}_{1,t}\right) - \left(\bar{Y}_{0,t+1} - \bar{Y}_{0,t}\right) \\ &= \hat{\tau}_1^{BA} - \hat{\tau}_0^{BA}\end{aligned}$$

双重差分 VI

where $\bar{Y}_{g,t}$ are mean outcomes for group g at time t DID works? Assuming SUTVA, we have

$$Y_t = Y_t(0), \quad Y_{t+1} = (1-G)Y_{t+1}(0) + GY_{t+1}(1),$$

Therefore

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\hat{\tau}_0^{BA}\right) &= \mathbb{E}\left(\bar{Y}_{0,t+1} - \bar{Y}_{0,t}\right) \\
&= \mathbb{E}\left[Y_{t+1}(0) - Y_t(0) \mid G=0\right] \quad \text{(SUTVA)} \\
&= \mathbb{E}\left[Y_{t+1}(0) - Y_t(0) \mid G=1\right] \quad \text{(par. trends)} \\
&= \mathbb{E}\left[Y_{t+1}(0) \mid G=1\right] - \mathbb{E}\left[Y_t \mid G=1\right] \; \text{(SUTVA)}
\end{aligned}$$

双重差分 VII

Similarly, we have

$$\mathbb{E}\left(\hat{\tau}_1^{BA}\right) = \mathbb{E}\left[Y_{t+1}(1) \mid G = 1\right] - \mathbb{E}\left[Y_t \mid G = 1\right]$$

Subtracting the two, we have

$$\mathbb{E}\left(\hat{\tau}_{\mathrm{DID}}\right) = \mathbb{E}\left(\hat{\tau}_1^{BA} - \hat{\tau}_0^{BA}\right) = \mathbb{E}\left[Y_{t+1}(1) - Y_{t+1}(0) \mid G = 1\right] = \tau_{\mathrm{ATT}}$$