第五章　主分层

罗姗姗

北京工商大学 数学与统计学院

因果推断课题组

目录

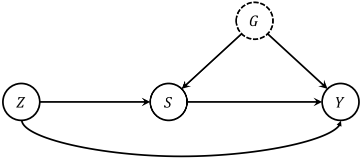
1. 不依从问题
2. 死亡删失
3. 替代指标评估

后处理混杂变量

- 到目前为止，我们讨论的大多数问题都是调整前处理混杂变量，或处理前协变量。
- 在治疗后（但在最终结果之前）发生混杂会对因果推断产生不同的挑战。
- 后处理混杂：一个后处理中间变量 S 位于 Z 到 Y 之间的因果路径上，即 S 发生在 Z 之后，但发生在 Y 之前

$$Z \longrightarrow S \longrightarrow Y$$

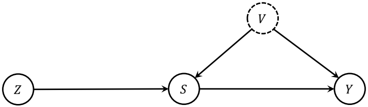
主分层框架



S_1	S_0	G	Description
1	1	ss	Always-taker
1	0	$s\bar{s}$	Complier
0	1	$\bar{s}s$	Defier
0	0	$\bar{s}\bar{s}$	Never-taker

- Z: 二值处理变量,$Z=1$ 表示接受处理, $Z=0$ 表示接受对照
- S: 二值中间变量
- Y: 表示感兴趣的结果变量
- S_z: 表示在接受处理分配 $Z=z$ 后的中间变量的潜在结果
- G: 主分层变量, 定义为 $G=(S_1,S_0)$.

不依从问题



S_1	S_0	G	Description
1	1	ss	Always-taker
1	0	$s\bar{s}$	Complier
0	1	$\bar{s}s$	Defier
0	0	$\bar{s}\bar{s}$	Never-taker

令 $Z = 1$ 表示成长于大学附近, $Z = 0$ 表示没有成长于大学附近; $S = 1$ 表示完成了高中学业, $S = 0$ 表示没有. 令 Y 表示对数收入. Angrist et al. (1996) 讨论了依从组上的因果作用的识别性:

$$\mathbb{E}(Y_{S=1} - Y_{S=0} \mid S_1 = S_0 = 1).$$

关于上述参数的识别和估计参考工具变量在单调性假设下的识别性。

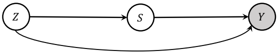
目录

1. 不依从问题

2. 死亡删失

3. 替代指标评估

死亡删失



S_1	S_0	G	Description	Y_1	Y_0
1	1	ss	Always-survivors	✓	✓
1	0	$s\bar{s}$	Protected	✓	×
0	1	$\bar{s}s$	Harmed	×	✓
0	0	$\bar{s}\bar{s}$	Doomed	×	×

处理 $Z = 1$ 表示接受安慰剂, $Z = 0$ 表示接受毒性处理; $S = 1$ 表示存活, $S = 0$ 表示死亡; Y 是感兴趣的结果变量 (e.g., 体重, 注意 $S = 0$ 时所对应的 Y 没有定义).

定义及记号

- Z：表示二值的处理变量:$Z \in \{1, \ldots, m\}$
- X：表示处理前协变量
- S：表示生存状态，其中 $S = 1$ 表示生存，$S = 0$ 表示死亡
- Y：表示感兴趣的结果变量
- S_z：表示在接受处理分配 $Z = z$ 后的生存状况的潜在结果
- Y_z：表示在接受处理分配 $Z = z$ 后的潜在结果
- G：主分层变量，定义为 $G = (S_0\ S_1)$

Assumption 1 (可忽略性)

$(S_0, S_1, Y_0, Y_1) \perp\!\!\!\perp Z \mid X.$

Assumption 2 (单调性)

$S_1 \geq S_0$.

单调性假设下的主分层变量

S_1	S_0	G	Description	Y_1	Y_0
1	1	ss	Always-survivors	✓	✓
1	0	$s\bar{s}$	Protected	✓	×
0	0	$\bar{s}\bar{s}$	Doomed	×	×

我们将感兴趣的参数定义为:

$$\Delta = E(Y_{Z=1} - Y_{Z=0} \mid G = ss).$$

- 在可忽略性假设及单调性假设下: 主分层的权重 $\pi_g(X) = \mathrm{pr}(G = g \mid X)$ 可识别.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{pr}(S=1 \mid Z=1, X) &= \mathrm{pr}(S_{Z=1}=1 \mid X) \\
&= \mathrm{pr}(S_{Z=1}=1, S_{Z=0}=1 \mid X) + \mathrm{pr}(S_{Z=1}=1, S_{Z=0}=0 \mid X) \\
&= \mathrm{pr}(G = ss \mid X) + \mathrm{pr}(G = s\bar{s} \mid X), \\
\mathrm{pr}(S=1 \mid Z=0, X) &= \mathrm{pr}(S_{Z=0}=1 \mid X) \\
&= \mathrm{pr}(S_{Z=0}=1, S_{Z=1}=1 \mid X) + \mathrm{pr}(S_{Z=0}=1, S_{Z=1}=0 \mid X) \\
&= \mathrm{pr}(G = ss \mid X) + 0, \\
\mathrm{pr}(S=0 \mid Z=1, X) &= \mathrm{pr}(S_{Z=1}=0 \mid X) \\
&= \mathrm{pr}(S_{Z=0}=1, S_{Z=1}=0 \mid X) + \mathrm{pr}(S_{Z=0}=0, S_{Z=1}=0 \mid X) \\
&= 0 + \mathrm{pr}(G = \bar{s}\bar{s} \mid X).
\end{aligned}
$$

在 X 的每一层上，等式左边均可观测，等式右边有三个未知数，可识别。

- 在可忽略性假设下:

$$
\begin{aligned}
\mu_z =& E(Y_z \mid G = ss) \\
&= E\{ \underbrace{E(Y_z \mid G = ss, X)}_{\mu_z(X)=E(Y|Z=z,G=ss)} \mid G = ss\} \\
&= E\{\mu_z(X) \mid G = ss\} \\
&= \frac{E\{\mu_z(X)\mathbb{I}(G = ss)\}}{\mathrm{pr}(G = ss)} \\
&= \frac{E[E\{\mu_z(X)\mathbb{I}(G = ss) \mid X\}]}{\mathrm{pr}(G = ss)} \\
&= \frac{E[\mu_z(X)E\{\mathbb{I}(G = ss) \mid X\}]}{\mathrm{pr}(G = ss)} \\
&= \frac{E\{\mu_z(X)\pi_{ss}(X)\}}{E\{\pi_{ss}(X)\}},
\end{aligned}
$$

其中 $\pi_g(X) = \mathrm{pr}(G = g \mid X)$ 是可识别的，我们只需要证明 $\mu_z(X)$ 的可识别性.

我们将感兴趣的参数定义为:

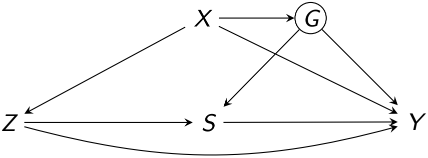
$$\begin{aligned}\Delta &= E(Y_{Z=1} - Y_{Z=0} \mid G = ss) \\ &= \underbrace{E(Y_{Z=1} \mid G = ss)}_{\mu_1} - \underbrace{E(Y_{Z=0} \mid G = ss)}_{\mu_0}.\end{aligned}$$

我们首先说明 μ_0 是可识别的，只需要 $E(Y \mid Z = 0, G = ss, X)$ 的识别性即可

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \frac{E\{\mu_0(X)\pi_{ss}(X)\}}{E\{\pi_{ss}(X)\}} \\ &= \frac{E\{E(Y \mid Z = 0, G = ss, X)\pi_{ss}(X)\}}{E\{\pi_{ss}(X)\}} \\ &= \frac{E\{E(Y \mid Z = 0, S = 1, X)\pi_{ss}(X)\}}{E\{\pi_{ss}(X)\}}\end{aligned}$$

类似的，关于参数 μ_1, 我们也只需要证明 $\mu_1(X) = E(Y \mid Z = 1, G = ss, X)$ 的识别性.

线形模型下的识别性 I



不失一般性，我们考虑以下线性模型:

$$E(Y \mid Z=1, G=g, X=x) = \beta_0 + \beta_{ss}\mathbb{I}(G=ss) + \beta_x X.$$

$$\Rightarrow E(Y \mid Z=1, G=ss, X=x) = \beta_0 + \beta_{ss} + \beta_x X.$$

$$\Rightarrow E(Y \mid Z=1, G=s\bar{s}, X=x) = \beta_0 + \beta_x X.$$

线形模型下的识别性 II

定理 1 (线性识别)

给定可忽略性、单调性及线性模型假设，因果参数 $\mu_1(X) = E(Y \mid Z = 1, G = ss, X)$ 在一些正则条件下是可识别的.

线形模型下的识别性 III

证明

$$
\begin{aligned}
E(Y \mid Z=1, S=1, X) &= E(Y \mid Z=1, S=1, X, G=ss)\mathrm{pr}(G=ss \mid X) \\
&\quad + E(Y \mid Z=1, S=1, X, G=s\bar{s})\mathrm{pr}(G=s\bar{s} \mid X) \\
&= (\beta_0 + \beta_{ss} + \beta_x X)\mathrm{pr}(G=ss \mid X) + (\beta_0 + \beta_x X)\mathrm{pr}(G=s\bar{s} \mid X) \\
&= \beta_0 + \beta_{ss}\mathrm{pr}(G=ss \mid X) + \beta_x X
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(Y \mid Z=1, S=1, X=0) &= \beta_0 + \beta_{ss}\mathrm{pr}(G=ss \mid X=0) + 0\beta_x \\
E(Y \mid Z=1, S=1, X=1) &= \beta_0 + \beta_{ss}\mathrm{pr}(G=ss \mid X=1) + \beta_x, \\
E(Y \mid Z=1, S=1, X=2) &= \beta_0 + \beta_{ss}\mathrm{pr}(G=ss \mid X=2) + 2\beta_x.
\end{aligned}
$$

三个方程，三个未知数，上述参数 $(\beta_0, \beta_{ss}, \beta_x)$ 是可识别的.

目录

1. 不依从问题
2. 死亡删失
3. 替代指标评估

替代指标悖论

- 令 Z 为二值的随机处理，1 表示接受一种新的处理，0 表示接受对照处理。
- S 表示心律失常是否纠正，1 表示纠正了，0 表示未纠正。
- S_z 表示接受处理 $Z=z$ 情形下是否纠正心律失常的潜在结果。
- Y_{sz} 表示在处理 $Z=z$ 且心律失常纠正与否 $S=s$ 情形下的潜在生存时间。
- 假定处理 Z 对生存时间 Y 的作用完全通过中间变量 S 起作用，对任意的 $s\in\{0,1\}$，即

$$Y_{1s}=Y_{0s}=Y_{S=s}.$$

悖论 I

主分层	人数	$S_{Z=0}$	$S_{Z=1}$	$Y_{S=0}$	$Y_{S=1}$	$Y_{Z=0}$	$Y_{Z=1}$
1	20	0	0	3	5	3	3
2	40	0	1	6	7	6	7
3	20	1	0	5	8	8	5
4	20	1	1	9	10	10	10

表: 100 位心律失常患者的总体

悖论 II

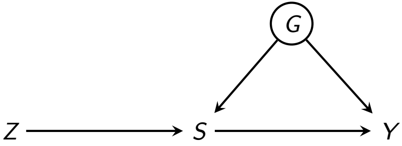


图: 工具变量图释

因此，当处理 Z 对心律 S 没有个体因果作用 $S_{Z=1} = S_{Z=0} = s$ 时，处理 Z 对生存时间 Y 也没有因果作用 $Y_{1s} = Y_{0s}$，此时排除约束假设成立，处理 Z 对 Y 没有直接作用，可以由图1所表示。令 $\text{ACE}_{Z\to S} = \mathbb{E}\left(S_{Z=1} - S_{Z=0}\right)$ 以及 $\text{ACE}_{Z\to Y} = E\left(Y_{Z=1} - Y_{Z=0}\right)$。在随机化假设下，

$$\text{ACE}_{Z\to S} = \text{pr}(G = s\bar{s}) - \text{pr}(G = \bar{s}s) = \frac{40-20}{100} = \frac{1}{5} > 0.$$

悖论 III

我们关于主分层变量 G 进行调整，可以算出 Z 对 Y 的因果作用

$$
\begin{aligned}
\text{ACE}_{Z\to Y} &= \sum_g \mathbb{E}(Y_{Z=1} - Y_{Z=0} \mid G = g)\text{pr}(G = g) \\
&= 0 \cdot \text{pr}(G = \bar{s}\bar{s}) + 1 \cdot \text{pr}(G = s\bar{s}) - 3 \cdot \text{pr}(G = \bar{s}s) + 0 \cdot \text{pr}(G = ss) \\
&= -\frac{1}{5}.
\end{aligned}
$$

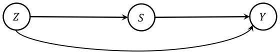
我们关于主分层变量 G 进行调整，可以算出 S 对 Y 的因果作用

$$
\begin{aligned}
\text{ACE}_{S\to Y} &= \sum_g \mathbb{E}(Y_{S=1} - Y_{S=0} \mid G = g)\text{pr}(G = g) \\
&= 2 \cdot \text{pr}(G = \bar{s}\bar{s}) + 1 \cdot \text{pr}(G = s\bar{s}) + 3 \cdot \text{pr}(G = \bar{s}s) + 1 \cdot \text{pr}(G = ss) \\
&= \frac{8}{5}.
\end{aligned}
$$

悖论 IV

- 上面的例子表明了处理 Z 对纠正心律失常 S 有正的因果作用
- 纠正心律失常 S 对寿命 Y 的因果作用也为正
- 但是处理 Z 对寿命 Y 的因果作用却为负。
- 这表明因果作用的统计结论不具有传递性，即变量 Z 能提高变量 S, 变量 S 能提高变量 Y, 但是根据这两个因果结论不能推出变量 Z 能提高变量 Y。

替代指标评估 I



S_1	S_0	G	描述	$E(Y_1 - Y_0 \mid G)$
1	1	ss	causal necessity	0
1	0	$s\bar{s}$	causal sufficiency	$\neq 0$
0	1	$\bar{s}s$	causal sufficiency	$\neq 0$
0	0	$\bar{s}\bar{s}$	causal necessity	0

- 处理 $Z=1$ 表示接受处理, $Z=0$ 表示接受对照; $S=1$ 表示三年内未复发癌症, $S=0$ 表示复发; $Y=1$ 表示存活, $Y=0$ 表示死亡。
- 文献 Frangakis & Rubin (2002) 指出一个好的替代指标应该满足“因果必要性” (causal necessity)
- “因果必要性”是指只要处理变量 Z 对替代指标 S 没有影响，那么 Z 就应该对结果变量 Y 也没有影响，也就是 $\text{ACE}_{ss}=0$ 和 $\text{ACE}_{\bar{s}\bar{s}}=0$，满足因果必要性的替代指标也常被称为主替代指标（principal surrogate）。

替代指标评估 II

- 但尽管如此，在更弱的因果必要性及单调性假设下，我们可以建立类似非依从框架下的识别结果（工具变量识别性），即

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ACE}_{Z\to Y} &= \mathrm{ACE}_{Z\to S} \times \mathbb{E}(Y_{S=1} - Y_{S=0} \mid G = ss) \\
&= \mathrm{ACE}_{Z\to S} \times \mathbb{E}(Y_{Z=1} - Y_{Z=0} \mid G = ss),
\end{aligned}
$$

  其中第二个等式成立是因为在依从组上 Z 和 S 有相同的取值。

- 上式有助于我们利用已有的信息在新数据集下进行替代指标评估。

替代指标评估 III

定理 2

在 $(S_{Z=1}, S_{Z=0}, Y_{Z=0}, Y_{Z=1}) \perp\!\!\!\perp Z$，替代指标 S 满足因果必要性，及 $\mathrm{ACE}_{s\bar{s}} > 0$ 时，我们假设替代指标 S 满足因果必要性，即

(i) 单调性成立时，$\mathrm{ACE}_{Z\to Y} = \mathrm{ACE}_{Z\to S} \times \mathrm{ACE}_{s\bar{s}}$；

(ii) 单调性不成立时，假设 $\mathrm{ACE}_{Z\to S} > 0$，我们可以得到 $\mathrm{ACE}_{Z\to Y}$ 的上下界：如果 $\mathrm{ACE}_{s\bar{s}} + \mathrm{ACE}_{\bar{s}s} \geq 0$，则

$$\mathrm{ACE}_{Z\to S} \times \mathrm{ACE}_{s\bar{s}} \leq \mathrm{ACE}_{Z\to Y} \leq \frac{\mathrm{ACE}_{s\bar{s}} + \mathrm{ACE}_{\bar{s}} + \mathrm{ACE}_{Z\to S} \times (\mathrm{ACE}_{s\bar{s}} - \mathrm{ACE}_{\bar{s}})}{2}.$$

否则

$$\frac{\mathrm{ACE}_{s\bar{s}} + \mathrm{ACE}_{\bar{s}s} + \mathrm{ACE}_{Z\to S} \times (\mathrm{ACE}_{s\bar{s}} - \mathrm{ACE}_{\bar{s}s})}{2} \leq \mathrm{ACE}_{Z\to Y} \leq \mathrm{ACE}_{Z\to S} \times \mathrm{ACE}_{s\bar{s}}.$$

定理2给出了处理对替代指标的作用与处理对结果变量作用之间的关系，从而让我们可以直接用于另一个 Y 未观测时的数据。