අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය - 2015 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)

General Certificate of Education (Adv. Level) Examination – August 2015 (New Syllabus)

සංයුක්ත ගණිතය I / පැය තුනයි

Combined Mathematics I / Three hours

උපදෙස් :

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
  A කොටස (ප්‍රශ්න 01 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
- **A කොටස:**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
- **B කොටස:**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි පිළිතුරු පත්‍රය, B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට, උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.

A කොටස

01. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $8^n - 3^n$ යන්න 5 හි පූර්ණ සංඛ්‍යාමය ගුණාකාරයක් බව සාධනය කරන්න.

02. $|x| < 2 - x^2$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

03. ආගන්ඩ් සටහනක් මත $|z - 3 + 4i| = 2$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව මගින් නිරූපණය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යයේ පථය වන C හි දළ සටහනක් අඳින්න. **ඒනයින්,** C මත පිහිටි z සඳහා $|z + 4i|$ හි වැඩිතම හා අඩුතම අගයන් සොයන්න.

04. $n \in \mathbb{Z}^+$ හා $n \geq 5$ යැයි ගනිමු. $\left(3x + \frac{2}{x}\right)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^{n-10} හි සංගුණකය 100 ට වඩා අඩු වේ. n හි අගය සොයන්න.

05. $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\lim\limits_{y \to a} \dfrac{y^n - a^n}{y - a} = na^{n-1}$ ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x + \sqrt{2})^4 - 4}{\sin 4x} = 2\sqrt{2}$ බව පෙන්වන්න.

06. එක ම රූප සටහනක $y = e^x$ හා $y = e^{-x}$ වක්‍ර දෙකෙහි දළ සටහන් අඳින්න. x- අක්ෂයෙන් ද $-1 \leq x \leq 0$ පරාසය තුළ $y = e^x$ වක්‍රයෙන් හා $0 \leq x \leq 1$ පරාසය තුළ $y = e^{-x}$ වක්‍රයෙන් ද ආවෘත වන පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය $2\left[1 - \dfrac{1}{e}\right]$ බව පෙන්වන්න.

07. තාත්ත්වික θ පරාමිතියක් ඇසුරෙන්, xy- තලයේ C වක්‍රයක් $x = 2 + \cos 2\theta$, $y = 4 \sin \theta$ යන සමීකරණ මගින් දෙනු ලැබේ. $\frac{dy}{dx}$ ව්‍යුත්පන්නය θ ඇසුරෙන් සොයා, $\theta = \frac{\pi}{4}$ වන ලක්ෂ්‍යයෙහි දී C වක්‍රයට ඇඳි අභිලම්බයේ සමීකරණය $x - \sqrt{2}y + 2 = 0$ බව පෙන්වන්න.

08. $A\ (10, 0)$ හා $B\ (0, 5)$ ලක්ෂ්‍ය යා කරන සරල රේඛාව $C\ (1, 2)$ හා $D\ (3, 6)$ ලක්ෂ්‍ය යා කරන CD රේඛා ඛණ්ඩයෙහි ලම්බ සමච්ඡේදකය බව පෙන්වන්න.

$ACBD$ චතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය වර්ග ඒකක 25 ක් බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

09. O මූල ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ ද $y = 1$ රේඛාවේත් $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ වෘත්තයේත් ඡේදන ලක්ෂ්‍ය දෙක ඔස්සේ ද යන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය හා අරය සොයන්න.

10. $\sin \alpha + \mathrm{Sin}\, \beta = 1$ හා $\cos \alpha + \cos \beta = \sqrt{3}$ යැයි ගනිමු; මෙහි α හා β සුළු කෝණ වේ. $\alpha + \beta$ හි අගය සොයන්න.

B කොටස

11. (*a*) x හි මාත්‍රය 4 වූ $F(x)$, $G(x)$ හා $H(x)$ යන බහුපද පහත දක්වෙන පරිදි දෙනු ලැබේ.

$F(x) \equiv (x^2 - ax + 1)(x^2 - \beta x + 1)$, මෙහි α හා β තාත්ත්වික නියත වේ;

$G(x) \equiv 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6$

$H(x) \equiv x^4 + x^2 + 1.$

(i) $F(x) = 0$ හා $G(x) = 0$ යන දෙකට ම එක ම මූල තිබේ නම්, α හා β මූල වශයෙන් ඇති වර්ගජ සමීකරණය $6x^2 - 35x + 50 = 0$ බව පෙන්වන්න.

ඒනයින්, $G(x) = 0$ සමීකරණයෙහි සියලු ම මූල සොයන්න.

(ii) $F(x) \equiv H(x)$ වෙයි නම්, α හා βට තිබිය හැකි අගයන් සොයා, $H(x) = 0$ සමීකරණයේ මූල තාත්ත්වික **නො වන** බව පෙන්වන්න.

(*b*) (i) $f(x) \equiv 2x^4 + \gamma x^3 + \delta x + 1$ යැයි ගනිමු; මෙහි γ හා δ තාත්ත්වික නියත වේ. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ හා $f(-2) = 21$බව දී ඇති විට, $f(x)$ හි තාත්ත්වික ඒකජ සාධක දෙක සොයන්න.

(ii) සියලු ම තාත්ත්වික x සඳහා $(x^2 + x + 1)P(x) + (x^2 - 1)Q(x) = 3x$ සමීකරණය සපුරාලන $P(x)$ හා $Q(x)$ ඒකජ ප්‍රකාශන දෙක සොයන්න.

12. (*a*) නිපුණතා සංදර්ශන තරගයක විනිසුරුවන් ලෙස කටයුතු කිරීම සඳහා සාමාජික සාමාජිකාවන් හතර දෙනකුගෙන් සමන්විත විනිසුරු මඩුල්ලක් පිහිටුවා ගත යුතුව ඇත. මෙම විනිසුරු මඩුල්ල තෝරා ගත යුතුව ඇත්තේ ක්‍රීඩිකාවන් තුන් දෙනකු, ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනකු, ගායිකාවන් හය දෙනකු, ගායකයින් පස් දෙනකු, නිළියන් දෙදෙනකු හා නළුවන් හතර දෙනකුගෙන් සමන්විත කණ්ඩායමකිනි. ප්‍රධාන විනිසුරු, ක්‍රීඩකයකු හෝ ක්‍රීඩිකාවක හෝ විය යුතු ය. විනිසුරු මඩුල්ලේ අනෙක් තිදෙනා තෝරා ගත යුතු වන්නේ ක්‍රීඩක ක්‍රීඩිකාවන් හැර කණ්ඩායමේ ඉතිරි අයගෙන් ය. පහත දක්වෙන එක් එක් අවස්ථාවේ දී විනිසුරු මඩුල්ල පිහිටුවා ගත හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(i) අඩු තරමින් එක් ගායිකාවක හා එක් ගායකයකු මඩුල්ලට ඇතුළත් විය යුතු ම නම්,

(ii) ප්‍රධාන විනිසුරු ඇතුළුව පිරිමි දෙදෙනකු හා ගැහැනු දෙදෙනකු මඩුල්ලේ සිටිය යුතු ම නම්,

(iii) ප්‍රධාන විනිසුරු ක්‍රීඩිකාවක විය යුතු ම නම්,

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $A(r+5)^2 - B(r+1)^2 = r + C$ වන පරිදි A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒනයින්, අපරිමිත ශ්‍රේණියක r වන පදය $U_r = \dfrac{8}{(r+1)^2(r+3)(r+5)^2}$ යන්න $f(r) - f(r+2)$ ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $f(r)$ යනු නිර්ණය කළ යුතු ශ්‍රිතයක් වේ.

$\sum_{r=1}^{n} U_r$ ශ්‍රේණියේ ඓක්‍යය සොයා, $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ශ්‍රේණිය, $\dfrac{1}{8^2} + \dfrac{1}{15^2}$ ඓක්‍යයට අභිසාරී වන බව **අපෝහනය** කරන්න.

13. (*a*) **A, B** හා **C** න්‍යාස තුනක්

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ මගින් දෙනු ලැබේ.

(i) $\mathbf{AC} = \mathbf{I_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ බව පෙන්වන්න. **CA** ගුණිතයත් සොයන්න.

(ii) $\mathbf{BC} = \mathbf{I_2}$ වන පරිදි a, b, c හා d හි අගයන් සොයන්න.

(iii) $(\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{I_2}$ වෙයි නම්, λ හා μ සම්බන්ධ කෙරෙන සමීකරණයක් ලබා ගන්න.

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -6 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ න්‍යාසය, **A** හා **B** ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර, **එනයින්**, **DC** ගුණිතය සොයන්න.

(*b*) z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ලෙස දෙනු ලැබේ; මෙහි $\theta(-\pi < \theta \le \pi)$ තාත්ත්වික පරාමිතියකි. ආගන්ඩ් සටහනක් මත z නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයේ C පථය සොයන්න.

$\cos\theta$ හා $\sin\theta$ සඳහා ප්‍රකාශන z හා $\frac{1}{z}$ ඇසුරෙන් ලබා ගන්න.

$w = \frac{2z}{z^2+1}$ හා $t = \frac{z^2-1}{z^2+1}$ යැයි ගනිමු; මෙහි z යන්න $z \ne \pm i$ වන පරිදි C මත පිහිටයි.

(i) $\mathrm{Im}\,(w) = 0$ හා $\mathrm{Re}\,(t) = 0$ බව පෙන්වන්න. **එනයින්,** හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $w^2 + t^2 = 1$ බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(ii) $w = 2$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

(iii) $t = i$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

14. (*a*) $x \ne 0$ සඳහා $y = x\sin\frac{1}{x}$ යැයි ගනිමු.

(i) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - \cos\frac{1}{x}$ හා

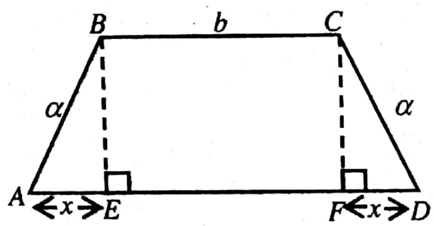
(ii) $x^4\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y = 0$

බව පෙන්වන්න.

(*b*) $x \ne 1$ සඳහා $f(x) = \frac{2x^2+1}{(x-1)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි පළමු ව්‍යුත්පන්නය හා හැරුම් ලක්ෂ්‍යය සොයන්න. හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින්, $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(*c*) දී ඇති රූපයෙහි, $ABCD$ යනු, BC හා AD සමාන්තර පාද සහිත ත්‍රපීසියමකි. සෙන්ටිමීටරවලින් මනිනු ලබන එහි පාදවල දිග $AB = CD = a$, $BC = b$ හා $AD = b + 2x$ මගින් දෙනු ලැබේ; මෙහි $0 < x < \alpha$ වේ. BE හා CF යනු පිළිවෙළින් B හා C ශීර්ෂවල සිට AD පාදය මතට ඇඳි ලම්බ වේ.



$ABCD$ ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය $S(x)$, වර්ග සෙන්ටිමීටරවලින් $S(x) = (b + x)\sqrt{a^2 - x^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

$a = \sqrt{6}$ හා $b = 4$ නම්, x හි එක්තරා අගයකට $S(x)$ උපරිම වන බව තවදුරටත් පෙන්වා, x හි මෙම අගය හා ත්‍රපීසියමේ උපරිම වර්ගඵලය සොයන්න.

15. (a) $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} f(\pi - x)\,dx$ බව පෙන්වන්න.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$ බවත් පෙන්වන්න.

ඒනයින්, $\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx = \frac{\pi^2}{4}$ බව පෙන්වන්න.

(b) සුදුසු ආදේශකයක් හා **කොටස් වශයෙන් අනුකලන** ක්‍රමය භාවිතයෙන්, $\int x^3 e^{x^2}\,dx$ සොයන්න.

(c) $\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$ වන පරිදි A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒනයින්, $\frac{1}{x^3 - 1}$ යන්න x විෂයයෙන් අනුකලනය කරන්න.

(d) $t = \tan\frac{x}{2}$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 4\cos x + 3\sin x} = \frac{1}{6}$ බව පෙන්වන්න.

16. වෘත්ත දෙකක සමීකරණ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ හා $x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ යැයි ගනිමු. මෙම වෘත්ත ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය වේ නම්, $2gg' + 2ff' = c + c'$ බව පෙන්වන්න.

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ සමීකරණය සහිත C වෘත්තය x- අක්ෂය ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න.

O මූලයෙහි පොදු කේන්ද්‍රය පිහිටන, අරය r වූ C_1 වෘත්තයක් හා අරය $R\ (> r)$ වූ C_2 වෘත්තයක් පිළිවෙළින් A හා B ලක්ෂ්‍යවල දී C වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. r හා R හි අගයන් ද A හා B හි ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

S යනු, C හා C_1 යන වෘත්ත දෙක ම ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය කරන හා y- අක්ෂය ස්පර්ශ කරන වෘත්තයක් යැයි ගනිමු. S සඳහා තිබිය හැකි සමීකරණ දෙක සොයන්න.

C හා C_2 යන වෘත්ත දෙකට ම B ලක්ෂ්‍යයෙහි දී අඳින ලද පොදු ස්පර්ශකයට x- අක්ෂය P හි දී ද y- අක්ෂය Q හි දී ද හමු වේ. පොදු ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $4x + 3y = 40$ බවත්, PQ රේඛා ඛණ්ඩය විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තයේ සමීකරණය $3(x^2 + y^2) - 30x - 40y = 0$ බවත් පෙන්වන්න.

17. (a) $\cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos(\alpha + \beta)\cos\alpha\cos\beta = 1$ බව පෙන්වන්න.

(b) $f(x) = \cos 2x + \sin 2x + 2(\cos x + \sin x) + 1$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ යන්න $k(1 + \cos x)\sin(x + \alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි k හා α යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$g(x)$ යන්න $\frac{f(x)}{1 + \cos x} = \sqrt{2}\{g(x) - 1\}$ වන ලෙස ගනිමු; මෙහි $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ වේ.

$y = g(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් ඇඳ **ඒනයින්,** ඉහත දී ඇති පරාසය තුළ $f(x) = 0$ සමීකරණයට එක විසඳුමක් පමණක් ඇති බව පෙන්වන්න.

(c) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්,

$a(b - c)\operatorname{cosec}\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2} = (b + c)^2\tan\left[\frac{B - C}{2}\right]\sec\left[\frac{B - C}{2}\right]$ බව පෙන්වන්න.

*** ***

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය - 2015 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)

General Certificate of Education (Adv. Level) Examination – August 2015 (New Syllabus)

සංයුක්ත ගණිතය II / පැය තුනයි

Combined Mathematics II / Three hours

උපදෙස් :
- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
- **A කොටස** (ප්‍රශ්න 01 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
- **A කොටස:**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
- **B කොටස:**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය, **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාගශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.
- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි g මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.

A කොටස

01. ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m හා $2m$ වූ A හා B අංශු දෙකක්, අචල කුඩා සැහැල්ලු සුමට C කප්පියක් උඩින් යන $2l$ දිගකින් යුතු සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට සම්බන්ධ කර ඇත. එක් එක් අංශුව C ට l ගැඹුරකින් අල්ලා තබා පද්ධතිය මෙම පිහිටීමෙන් නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. **ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්,** එක් එක් අංශුව $x\ (< 1)$ දුරක් චලනය වී ඇති විට එක් එක් අංශුවෙහි v වේගය, $v^2 = \dfrac{2gx}{3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. **එනයින්,** හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, පද්ධතියේ ත්වරණය සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

02. දෙකෙළවර ම විවෘත, දිග l වූ සෘජු සිහින් සුමට OA නලයක්, O ඉහළ කෙළවර තිරස් පොළොවට $h\ (>l)$ උසක් ඉහළින් ඇති ව, යටි අත් සිරස සමග $\dfrac{\pi}{3}$ කෝණයක් සාදන පරිදි සවි කර ඇත. නලය ඇතුළත, O හි සිරුවෙන් තබනු ලැබූ අංශුවක් නලය දිගේ පහළට ලිස්සා යයි. ඉන්පසුව අංශුව A කෙළවරින් නලයෙන් ඉවත්ව ගොස්, O සිට $\sqrt{3}\,l$ තිරස් දුරකින් වූ B ලක්ෂ්‍යයක දී පොළොව සමග ගැටෙයි. (i) A හි දී අංශුවේ වේගය $\sqrt{gl}$ බව ද (ii) $h = \dfrac{3l}{2}$ බව ද පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

03. සුමට තිරස් මේසයක් මත u ප්‍රවේගයෙන් චලනය වෙමින් පවතින ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක්, P හි පෙතෙහි නිසලව තිබෙන m ස්කන්ධය සහිත වෙනත් Q අංශුවක් සමග සරල ලෙස ගැටෙයි. අංශු දෙක අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $e(0 < e < 1)$ නම්, ගැටුමෙන් පසු P හා Q හි ප්‍රවේගවල ඓක්‍යය හා අන්තරය සඳහා ප්‍රකාශන, u හා e ඇසුරෙන් ලබා ගන්න. **ඒනයින්,** හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, ගැටුමට පසු පද්ධතියේ ඉතිරි වන චාලක ශක්තිය, මුල් චාලක ශක්තියට දරන අනුපාතය, $(1 + e^2) : 2$ බව පෙන්වන්න.

04. එන්ජිම H kW ජවයකින් ක්‍රියා කරමින් ස්කන්ධය මෙට්‍රික් ටොන් M වූ ලොරියක්, සෘජු සමතලා පාරක් දිගේ u ms^{-1} නියත ප්‍රවේගයකින් ගමන් කරයි. ඉන් පසුව, එන්ජිම $2H$ kW ජවයකින් ක්‍රියා කරමින්, තිරසට α කෝණයක් ආනත වූ සෘජු පාරක් දිගේ ලොරිය ඉහළට චලනය වන අතර, චලිතයට ප්‍රතිරෝධය තිරස් චලිතයට ඇති ප්‍රතිරෝධකය ම වේ. මෙම අවස්ථාවේ දී ලොරියේ උපරිම වේගය $\dfrac{2Hu}{H + Mgu\sin\alpha}$ ms^{-1} බව පෙන්වන්න.

05. සුපුරුදු අංකනයෙන්, O මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j}$ හා $\mu\mathbf{i} - \lambda\mathbf{j}$ වේ; මෙහි λ හා μ යනු $0 < \lambda < \mu$ වන පරිදි වූ තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. $A\hat{O}B$ සෘජු කෝණයක් බව පෙන්වන්න. AB රේඛා ඛණ්ඩයෙහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය C යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OC}$ දෛශිකයේ විශාලත්වය 2 නම් හා එය $\mathbf{i}$ ඒකක දෛශිකය සමග $\frac{\pi}{6}$ ක කෝණයක් සාදයි නම්, λ හා μ හි අගයන් සොයන්න.

06. ඒකාකාර සිහින් බර දණ්ඩක්, එහි එක කෙළවරක් රළු තිරස් ගෙබිමක් මත හා අනෙක් කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව නිසලව තිබේ. දණ්ඩ බිත්තිය සමග θ සුළු කෝණයක් සාදමින්, බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක පිහිටයි. මෙම පිහිටීමේ දී දණ්ඩ සමතුලිතව තිබීම සඳහා, දණ්ඩ හා ගෙබිම අතර μ ඝර්ෂණ සංගුණකය $\mu \geq \frac{1}{2}\tan\theta$ සපුරාලිය යුතු බව පෙන්වන්න.

07. A, B හා C යනු S නියැදි අවකාශයක ස්වායත්ත සිද්ධි තුනක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $P(A \cup B \cup C)$ සම්භාවිතාව, $P(A)$, $P(B)$ හා $P(C)$ සම්භාවිතා ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

$P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{2}$ හා $P(A \cup B \cup C) = \frac{3}{4}$ බව තවදුරටත් දී ඇති විට, $P(C)$ සම්භාවිතාව සොයන්න.

08. සර්වසම පෙනුමැති විදුලි බල්බ 7 ක් පෙට්ටියක අඩංගු වේ. මෙම බල්බවලින් 2 ක් දෝෂ සහිත බවත්, ඉතිරිය පාවිච්චි කළ හැකි බවත් දැනගෙන ඇත. දෝෂ සහිත බල්බ 2 ම හඳුනා ගන්නා තුරු එකකට පසුව අනෙක වශයෙන් බල්බ පරීක්ෂා කරනු ලැබේ.

(i) බල්බ දෙකක් පමණක්, (ii) බල්බ තුනක් පමණක්

පරීක්ෂා කිරීමෙන් පසු දෝෂ සහිත බල්බ දෙක ම හඳුනා ගැනීමට හැකිවීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

09. පූර්ණ සංඛ්‍යා හතක S කුලකයක සංඛ්‍යා පහත දැක්වෙන අයුරු ආරෝහණ පටිපාටියට සකසා ඇත.

$$S = \{1, 2, 4, x, y, 11, 13\}$$

සංඛ්‍යාවල මධ්‍යන්‍යය y නම්, x හා y හි අගයන් නිර්ණය කරන්න. සංඛ්‍යාවල විචලතාව $\frac{120}{7}$ බව පෙන්වන්න.

10. මුහුණත් 1, 2, 3, 4, 5, 6 ලෙස සලකුණු කරන ලද දාදු කැටයක් 50 වරක් උඩ දැමූ විට දාදු කැටයේ උඩත් මුහුණතේ දක්නට ලැබුණු අංකවල සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය පහත දැක්වේ.

අංකය	1	2	3	4	5	6
සංඛ්‍යාතය	α	9	γ	11	8	7

සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියෙහි මධ්‍යන්‍යය 3.66 බව දී ඇත්නම්, α හා γ හි අගයන් නිර්ණය කර, මාතය හා මධ්‍යස්ථය සොයන්න.

*** ***

B කොටස

11. (*a*) P හා Q අංශු දෙකක් අචල තිරස් ගෙබිමක් මත ලක්ෂ්‍ය දෙකක සිට පිළිවෙළින් u හා $\frac{u}{\sqrt{2}}$ වේගවලින් සිරස් ව ඉහළට, එක විට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. ගෙබිම සිට $\frac{u^2}{4g}$ උසකින් අචල සුමට තිරස් සිවිලිමක් ඇත. සිවිලිමත් එය සමග ගැටෙන P අංශුවත් අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{\sqrt{2}}$ වන අතර, අංශු දෙක ගුරුත්වය යටතේ පමණක් ඉහළට හා පහළට චලනය වේ.

(i) P අංශුව සිවිලිම සමග ගැටීමට මොහොතකට පෙර එහි වේගයත්, ගැටීම සිදු වන මොහොත දක්වා ගත වූ T_1 කාලයත් සොයන්න.

P අංශුව එහි ප්‍රක්ෂේප ලක්ෂ්‍යය කරා $\frac{u\sqrt{3}}{2}$ වේගයෙන් ආපසු පැමිණෙන බව පෙන්වන්න.

(ii) Q අංශුව, සිවිලිමට යන්තමින් ළඟා වන බව පෙන්වා, එම මොහොත දක්වා ගත වූ T_2 කාලය සොයන්න.

(iii) P හා Q අංශු දෙකෙහි ප්‍රක්ෂේප මොහොතේ සිට ආපසු අදාළ ප්‍රක්ෂේප ලක්ෂ්‍ය වෙතට පැමිණීම දක්වා, ඒවායේ චලිත සඳහා ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන්, එක ම රූපයක අඳින්න.

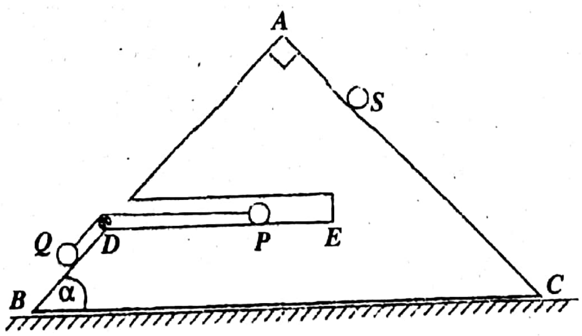
(iv) ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාර භාවිතයෙන්, P අංශුව සිවිලිම සමග ගැටෙන මොහොතේ දී Q අංශුව, සිවිලිමට $\frac{u^2}{2g}(\sqrt{2}-1)^2$ සිරස් දුරක් පහළින් තිබෙන බව පෙන්වන්න.

(*b*) S නැවක්, u ඒකාකාර වේගයෙන් උතුරු දිශාවට යාත්‍රා කරයි. එහි සරල රේඛීය පෙත P වරායක සිට නැගෙනහිර පැත්තට p ලම්බ දුරකින් පිහිටා ඇත. එක්තරා මොහොතක දී, $\overrightarrow{PS}$ හි දිශාව නැගෙනහිරින් දකුණට $45°$ කෝණයක් සාදන විට දී ම, S නැව හමු වීම සඳහා B_1 හා B_2 සැපයුම් බෝට්ටු දෙකක් P වරායේ සිට වෙනස් දිශා දෙකකට $v\left(\frac{u}{\sqrt{2}} < v < u\right)$ ඒකාකාර වේගයෙන් එක විට ගමන් අරඹයි.

මෙම බෝට්ටු පිළිවෙළින් T_1 හා $T_2\ (> T_1)$ කාලවල දී S නැවට ළඟා වේ. $\frac{v}{u} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ බව තවදුරටත් දී ඇත්නම්, S නැවට සාපේක්ෂ ව B_1 හා B_2 බෝට්ටුවල චලිත සඳහා සාපේක්ෂ ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි දළ සටහන් එක ම රූපයක ඇඳ, P වරායේ සිට S නැව වෙත ගමන් කිරීමේ දී B_1 හා B_2 බෝට්ටුවල නියම චලිත දිශා සොයන්න.

තවදුරටත්, $T_2 - T_1 = \frac{2\sqrt{3}p}{u}$ බව පෙන්වන්න.

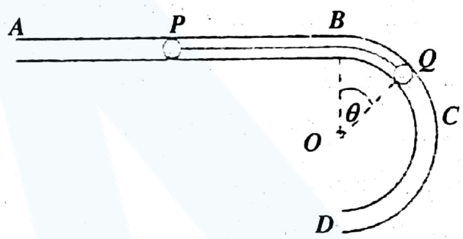
12. (*a*) දී ඇති රූපයේ, ABC ත්‍රිකෝණය, ස්කන්ධය M වූ ඒකාකාර සුමට කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය ඔස්සේ යන සිරස් හරස්කඩක් නිරූපණය කරයි. කුඤ්ඤය තුළ BC ට සමාන්තර වූ DE සිහින් සුමට පීල්ලක් ඇත. AB හා AC රේඛා, අදාළ මුහුණත්වල උපරිම බෑවුම් රේඛා වන අතර $A\hat{B}C = \alpha$ හා $B\hat{A}C = \frac{\pi}{2}$ වේ.



BC අඩංගු මුහුණත අචල සුමට තිරස් මේසයක් මත සිටින පරිදි කුඤ්ඤය තබා ඇත. එක එකක ස්කන්ධය m වූ P හා Q අංශු දෙකක් පිළිවෙළින් DE හා DB මත තබා ඒවා, D ලක්ෂ්‍යයෙහි පිහිටි කුඩා සුමට සැහැල්ලු කප්පියක් උඩින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් ඈඳා ඇත. ස්කන්ධය $\dfrac{m}{2}$ වූ S අංශුවක් AC මත ලක්ෂ්‍යයක තබා P හා Q සම්බන්ධ කෙරෙන තන්තුව ඇදී තිබිය දී, පද්ධතිය මෙම පිහිටීමෙන් නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ.

P අංශුවට ED දිගේ ද Q අංශුවට DB දිගේ ද S අංශුවට AC දිගේ ද චලිත සමීකරණ ලියා දක්වන්න. තවදුරටත්, මුළු පද්ධතියට ම BC දිගේ චලිත සමීකරණය ලියන්න. **ඒනයින්,** කුඤ්ඤයේ ත්වරණය $\overrightarrow{BC}$ හි දිශාවට $\dfrac{mg\sin\alpha}{2M+3m-2m\cos\alpha}$ බව පෙන්වන්න.

(b) $ABCD$ සිහින් සුමට නලයක් පහත රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට නවා ඇත. නලයේ AB කොටස ඍජු වේ. BCD කොටසට අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ අර්ධ වෘත්තාකාර හැඩයක් ඇති අතර BD විෂ්කම්භය AB ට ලම්බ වේ. AB තිරස් ව හා ඉහළින් ම ඇති ව නලය සිරස් තලයක සවිකර ඇත. නලය ඇතුළත, ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් හා ස්කන්ධය $3m$ වූ Q අංශුවක් $l\left(>\dfrac{\pi a}{2}\right)$ දිගැති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කර ඇත. ආරම්භයේ දී, තන්තුව ඇදී AB දිගේ තිබෙන අතර Q අංශුව B ලක්ෂ්‍යයේ තබා ඇත. Q අංශුව මෙම පිහිටීමේ සිට යන්තමින් විස්ථාපනය කරනු ලැබීමෙන් t කාලයක දී OQ අරය θ සුළු කෝණයකින් හැරේ.



ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්, $\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 = \dfrac{3g}{2a}(1-\cos\theta)$ බව පෙන්වන්න.

ඒනයින්, හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, P අංශුවේ ත්වරණය $\dfrac{3g}{4}\sin\theta$ බව පෙන්වන්න.

t කාලයේ දී Q අංශුව මත නලයෙන් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව හා තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.

13. ස්වාභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $2mg$ වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක කෙළවරක් අචල A ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගසා ඇත. A හි මට්ටමට ඉහළින් සවිකරන ලද B කුඩා සුමට නාදැත්තක් උඩින් තන්තුව යන අතර, තන්තුවේ අනෙක් කෙළවරට ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් සම්බන්ධ කර ඇත. AB දුර a වන අතර, BA යටි අත් සිරස සමග සාදන කෝණය $\dfrac{\pi}{3}$ වේ. ආරම්භයේ දී P අංශුව B නාදැත්තට යන්තමින් පහළින් තබා සිරස් ව පහළට $u=\sqrt{\dfrac{5ga}{8}}$ වේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. කාලය t වන විට තන්තුවේ විතතිය x යැයි ගනිමු. P අංශුවෙහි සරල අනුවර්තී චලිතය සඳහා සමීකරණය $\ddot{X}+\omega^2X=0$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $X=x-\dfrac{a}{2}$ හා $\omega^2=\dfrac{2g}{a}$ වේ. මෙම චලිත සමීකරණය සඳහා, $\dot{X}^2=\omega^2(A^2-X^2)$ ආකාරයේ විසඳුමක් උපකල්පනය කරමින්, සරල අනුවර්තී චලිතයේ විස්තාරය $A=\dfrac{3a}{4}$ බව පෙන්වා, අංශුව ළඟා වන පහත් ම වූ පිහිටීම වූ E ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.

සරල අනුවර්තී චලිතයේ C කේන්ද්‍රය පසු කර අංශුව යන විට එහි වේගය $\dfrac{3u}{\sqrt{5}}$ බව පෙන්වන්න.

අනුරූප වෘත්ත චලිතය සැලකීමෙන්, හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, P අංශුව පහළට චලනය වීමේ දී C පසු කර යෑමට ගන්නා කාලය $\sqrt{\dfrac{a}{2g}}\left\{\dfrac{\pi}{2}-\cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)\right\}$ බව පෙන්වන්න.

තවදුරටත්, P අංශුව එහි පහත් ම පිහිටීම වූ E වෙත ළඟා වීමට ගන්නා කාලයත්, නාදැත්ත මත තන්තුවෙන් ඇති කරනු ලබන බලයේ උපරිම විශාලත්වයත් සොයන්න.

14. xy - තලයේ O මූලය අනුබද්ධයෙන් A, B හා C ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික, සුපුරුදු අංකනයෙන්, පිළිවෙළින් $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ හා $4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ වේ. $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ වන පරිදි BC මත පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න. $ABCD$ ත්‍රපීසියමක D ශීර්ෂය ගනු ලබන්නේ BC පාදය AD ට සමාන්තර වන පරිදි ද PD, AC ට ලම්බ වන පරිදි ද වේ. D හි පිහිටුම් දෛශිකය $\frac{11}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j}$ බව පෙන්වන්න.

දුර මීටරවලින් ද බලය නිව්ටනවලින් ද මනින ලද, xy - තලයෙහි බල හතරකින් සමන්විත වන පද්ධතියක් පහත දැක්වෙන පරිදි දී ඇත.

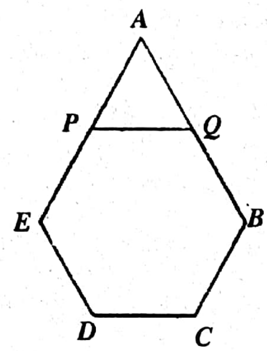
ක්‍රියා ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක	බලයේ Ox, Oy දිශාවලට සංරචක
$B\,(2, 3)$	$\mathbf{F}_1 = (2, 4)$
$C\,(4, 2)$	$\mathbf{F}_2 = (3, 1)$
$L\,(0, 1)$	$\mathbf{F}_3 = (6, 12)$
$M\,(0, 6)$	$\mathbf{F}_4 = (9, 3)$

(i) $\mathbf{F}_1$ හා $\mathbf{F}_2$ බල දෙකෙහි O මූලය හා $A\,(1, 1)$ ලක්ෂ්‍යය වටා ඝූර්ණ ශූන්‍ය වන බව පෙන්වා **ඒනයින්,** $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ හා $\mathbf{F}_4$ බල හතරෙන් සමන්විත පද්ධතියෙහි O මූලය වටා G ඝූර්ණය දක්ෂිණාවර්ත අතට 60 N m විශාලත්වයෙන් යුතු වන බව පෙන්වන්න.

(ii) පද්ධතියෙහි $\mathbf{R}$ සම්ප්‍රයුක්තයේ (X, Y) සංරචක සොයන්න. **ඒනයින්,** $\mathbf{R}$ හි ක්‍රියා රේඛාවට y - අක්ෂය හමු වන ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.

(iii) බල පද්ධතිය $(0, -4)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි ක්‍රියා කරන තනි බලයකින් හා ඝූර්ණය G_1 වූ යුග්මයකින් ප්‍රතිස්ථාපනය කරනු ලැබේ. G_1 හි අගය සොයා, තනි බලයේ ක්‍රියා රේඛාව $D\left(\frac{11}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන බව පෙන්වන්න.

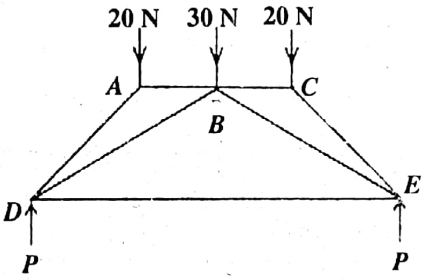
15. (a) AB, BC, CD, DE හා EA ඒකාකාර බර දඬු පහක් ඒවායේ කෙළවරවලින් සුමට ලෙස සන්ධි කර රූපයේ දැක්වෙන පරිදි $ABCDE$ පංචාස්‍රයක හැඩයේ රාමු සැකිල්ලක් සාදා ඇත. BC, CD හා DE දඬු එක එකක දිග l හා බර W වේ. AB හා EA දඬු එක එකක දිග $2l$ හා බර $2W$ වේ. දිග l වූ සැහැල්ලු PQ දණ්ඩක P හා Q දෙකෙළවර පිළිවෙළින් AE හා AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යවලට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. A සන්ධියෙන් නිදහස් ලෙස එල්ලා ඇති රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක සමතුලිතව පිහිටයි.



B සන්ධියෙහි ප්‍රතික්‍රියාවේ තිරස් හා සිරස් සංරචක වන (X, Y) ද PQ සැහැල්ලු දණ්ඩේ තෙරපුම වන T ද නිර්ණය කිරීම සඳහා ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න. **ඒනයින්,** B සන්ධියේ දී AB දණ්ඩ මත ප්‍රතික්‍රියාව සොයා, $T = \frac{7W}{\sqrt{3}}$ බව පෙන්වන්න.

(b) දෘඪ සැහැල්ලු දඬු හතක් ඒවායේ කෙළවරවලින් නිදහස් ලෙස සන්ධි කර සාදා ගත් **සමමිතික** රාමු සැකිල්ලක් රූපයේ දැක්වේ. AB, BC හා DE දඬු තිරස් වේ. $A\hat{D}E = C\hat{E}D = 45°$ සහ $B\hat{D}E = B\hat{E}D = 30°$ වේ. රාමු සැකිල්ලට A, B හා C සන්ධිවල දී රූපයේ දැක්වෙන භාර යොදා ඇති අතර, D හා E සන්ධිවල දී සමාන P සිරස් බලවලින් ආධාර කර ඇත. P හි අගය සොයන්න.

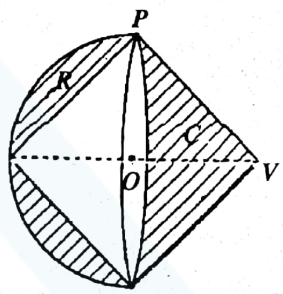
බෝ අංකනය යෙදීමෙන්, A හා D සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහන් එක ම රූපයක අඳින්න. **එනයින්**, AD, AB, DE හා DB දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල සොයා, ඒවා ආතති හෝ තෙරපුම් වශයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.



16. ආධාරකයේ අරය a හා උස h වූ ඒකාකාර ඝන කේතුවක හා අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රවල පිහිටුම්, **අනුකලනය** භාවිතයෙන් සොයන්න.

ස්කන්ධය M, අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයකින්, ආධාරකයේ අරය a හා උස a වූ C නම් ඍජු වෘත්ත කේතුව ඉවත් කිරීමෙන් ලැබෙන ඝන වස්තුව R යැයි ගනිමු. M ඇසුරෙන් R ඝන වස්තුවේ ස්කන්ධය, හා ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න.

ඊළඟට රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට S සංයුක්ත වස්තුවක් සෑදෙන පරිදි C ඝන කේතුව R ඝන වස්තුවට සම්බන්ධ කරනු ලැබේ. මෙහි දී C හි ආධාරකයේ වෘත්තාකාර දාරය R හි ගැටියට දෘඪ ලෙස සම්බන්ධ කරනු ලබන්නේ ගැටියේ O කේන්ද්‍රය C හි ආධාරකයේ කේන්ද්‍රය සමග සමපාත වන පරිදි ය.



S සංයුක්ත වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G, එහි සමමිතික අක්ෂය මත, ආධාරකවල පොදු කේන්ද්‍රය වන O සිට $\frac{a}{8}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

(a) S සංයුක්ත වස්තුව, දාරයේ P ලක්ෂ්‍යයකින් නිදහස් ලෙස එල්ලනු ලැබේ.

(i) සමමිතික අක්ෂය වන OV හි තිරසට ආනතිය සොයන්න; මෙහි V යනු C හි ශීර්ෂයයි.

(ii) සමමිතික අක්ෂය තිරස් ලෙස තබා ගැනීම සඳහා V ශීර්ෂයට ඇඳිය යුතු අංශුවේ m ස්කන්ධය, M ඇසුරෙන් සොයන්න.

(b) V හි දී සම්බන්ධ කරන ලද m ස්කන්ධය ද සහිත S සංයුක්ත වස්තුව, එල්ලන ලද ලක්ෂ්‍යයෙන් ඉවත් කර, එහි අර්ධගෝලීය පෘෂ්ඨය අවල සුමට තිරස් තලයක ඇතිව සමතුලිතව තබනු ලැබේ. OV අක්ෂය හා උඩු අත් සිරස අතර කෝණයේ අගය පරාසය සොයන්න.

17. (a) මිනිසෙක්, යතුරු පැදිය, පා පැදිය හෝ පයින් යන ගමන් ක්‍රම තුනෙන් එකක් පමණක් යොදා ගනිමින්, නිශ්චිත මාර්ගයක් දිගේ අනතුරු සහිත ගමනක් යයි.

මිනිසා මෙම ගමනාගමන ක්‍රම යොදා ගැනීමේ සම්භාවිතා පිළිවෙළින් p, $2p$ හා $3p$ වේ නම්, p හි අගය සොයන්න.

ඔහු මෙම ගමනාගමන ක්‍රම යොදා ගැනීමේ දී අනතුරක් සිදු වීමේ සම්භාවිතා පිළිවෙළින් $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ සහ $\frac{1}{20}$ වේ නම්, තනි ගමනක දී අනතුරක් සිදු වීමේ සම්භාවිතාව ගණනය කරන්න.

ගමන අතරතුරේ දී මිනිසාට අනතුරක් සිදු වී ඇති බව දන්නේ නම්, මිනිසා ගමන් කරමින් සිටියේ,

(i) යතුරු පැදියෙන් (ii) පා පැදියෙන්, (iii) පයින්

වීමේ සම්භාවිතාව ගණනය කරන්න.

වඩාත් ආරක්ෂිත වූයේ කුමන ගමනාගමන ක්‍රමය ද? ඔබගේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(*b*) කාර්මික විද්‍යාල සිසුන් 100 ක කණ්ඩායමක් මහා මාර්ගයක එක්තරා කොටසක් මනින ලද අතර, ඔවුන්ගේ මිනුම් පහත සඳහන් සංඛ්‍යාත වගුවේ දක්වා ඇත.

දිග (මීටර) x	99.8	99.9	100.0	100.1	100.2	100.3	100.4
සංඛ්‍යාතය f	5	7	12	33	25	15	3

උපකල්පිත මධ්‍යන්‍යය $x_a = 100.1$ හා $d = 0.1$ සඳහා, $y = \dfrac{x - \overline{x}_a}{d}$ පරිණාමනය භාවිතයෙන්, අනුරූප y හා y^2 අගයන් ඇතුළත් කෙරෙන පරිදි ඉහත වගුව විස්තීරණය කරන්න. y හි මධ්‍යන්‍යය සොයා, **ඒනයින්** x හි මධ්‍යන්‍යය 100.123 බව පෙන්වන්න. $\sqrt{1.917} \approx 1.385$ බව ගනිමින්, සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ සම්මත අපගමනය, ආසන්න වශයෙන් දශමස්ථාන තුනකට නිවැරදි ව, ගණනය කරන්න.

*** ***

A - කොටස

01. $f(n) = 8^n - 3^n, n \in \mathbb{Z}^+$ ලෙස ගනිමු.

$n = 1$ විට $f(1) = 8 - 3 = 5$

$n = 1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

$n = p$ වන විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යයි උපකල්පනය කරමු.

එවිට, $f(p) = 8^P - 3^P = 5m$ වන $m \in \mathbb{Z}^+$ පවතී.

දැන්
$$\begin{aligned} f(p+1) &= 8^{P+1} - 3^{P+1} \\ &= 8^P(5+3) - 3^{P+1} \\ &= 5.8^P + 3(8^P - 3^P) \\ &= 5.8^P + 3.5m \\ &= 5(8^P + 3m) \end{aligned}$$

$8^P + 3m \in \mathbb{Z}^+$ බැවින්

$n = p$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම් $n = p + 1$ විට ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

එබැවින් ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු ම $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

02. $|x| < 2 - x^2$

<u>$x \geq 0$ සඳහා</u>

$x < 2 - x^2$

$\therefore\ x^2 + x - 2 < 0$

$(x+2)(x-1) < 0$

$-2 < x < 1$

$\Rightarrow\ 0 \leq x < 1$

<u>$x < 0$ සඳහා</u>

$-x < 2 - x^2$

$x^2 - x - 2 < 0$

$(x-2)(x+1) < 0$

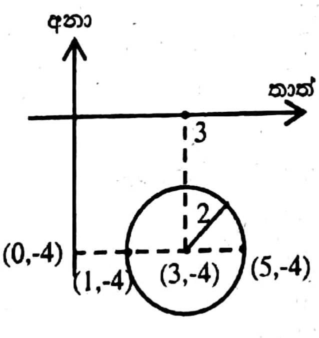
$-1 < x < 2$

$\Rightarrow\ -1 < x < 0$

$\therefore$ අදාළ විසඳුම; $\{x / -1 < x < 1\}$

03. $|z - 3 + 4i| = 2 \Rightarrow |z - (3 - 4i)| = 2$

C යනු ආගන්ඩ් සටහනේ කේන්ද්‍රය (3, -4) වූ ද අරය ඒකක 2 ක් වූ ද වෘත්තයකි.



$|z + 4i| = |z - (-4i)|$

C මත පිහිටි z සඳහා

$|z + 4i|$ හි වැඩිතම අගය 5 යි.

$|z + 4i|$ හි අඩුතම අගය 1 යි.

04. $(3x + \frac{2}{x}) = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r (3x)^{n-r} (\frac{2}{x})^r$

$= \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\, 3^{n-r} . 2^r\, x^{n-2r}$

$n - 10 = n - 2r \Rightarrow 2r = 10 \Rightarrow r = 5$

$\therefore\ x^{n-10}$ හි සංගුණකය $= {}^nC_5 . 3^{n-5} . 2^5$

$= {}^nC_5 . 32 . 3^{n-5}$

දැන් ${}^nC_5 . 32 . 3^{n-5} < 100$ වේ.

$\Rightarrow 3^{n-5} < \frac{100}{32} \quad \because {}^nC_5 \geq 1$

$n \geq 5$ බව දී ඇත. එබැවින් $n = 5$ හෝ $n = 6$ විය යුතු ය.

$n = 5$ විට $1.3^0 < \frac{100}{32}$ වේ.

$n = 6$ විට $6.3^1 \not< \frac{100}{32}$ වේ.

$\therefore\ n = 5$

05. $\lim_{x \to 0} \frac{(x+\sqrt{2})^4 - 4}{\sin 4x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{(x+\sqrt{2})^4 - (\sqrt{2})^4}{(x+\sqrt{2} - \sqrt{2})} \bullet \frac{1}{\frac{4 \sin 4x}{4x}} \right)$

$= \frac{1}{4} \lim_{x \to 0} \frac{(x+\sqrt{2})^4 - (\sqrt{2})^4}{(x+\sqrt{2} - \sqrt{2})} \bullet \frac{1}{\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x}}$

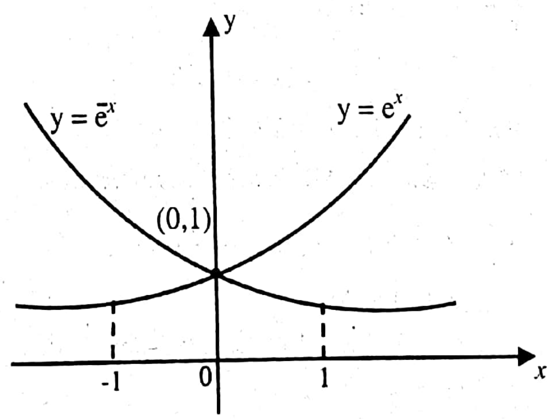
$= \frac{1}{4} \times 4(\sqrt{2})^3 \bullet \frac{1}{1}$

($\because$ දෙන ලද ප්‍රතිඵලය හා $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ භාවිතයෙන්)

$= (\sqrt{2})^3$

$= 2\sqrt{2}$

06.



අදාළ වර්ගඵලය A නම්

$A = \int_{-1}^{0} e^x dx + \int_{0}^{1} e^{-x} dx$

$= [e^x]_{-1}^{0} + [-e^{-x}]_{0}^{1}$

$= 1 - e^{-1} - e^{-1} + 1$

$= 2 - 2e^{-1}$

$= 2(1 - \frac{1}{e})$

07. C වක්‍රයෙහි පරාමිතික සමීකරණය

$x = 2 + \cos 2\theta,\ y = 4 \sin \theta$

$\frac{dx}{d\theta} = -2 \sin 2\theta,\ \frac{dy}{d\theta} = 4 \cos \theta$

$\frac{dy}{dx} = \frac{4 \cos \theta}{-2 \sin 2\theta} = \frac{-4 \cos \theta}{4 \sin \theta \cos \theta}$

$= -\frac{1}{\sin \theta}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ විට, $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{2}$

අභිලම්බයේ අනුක්‍රමණය $= \frac{1}{\sqrt{2}}$

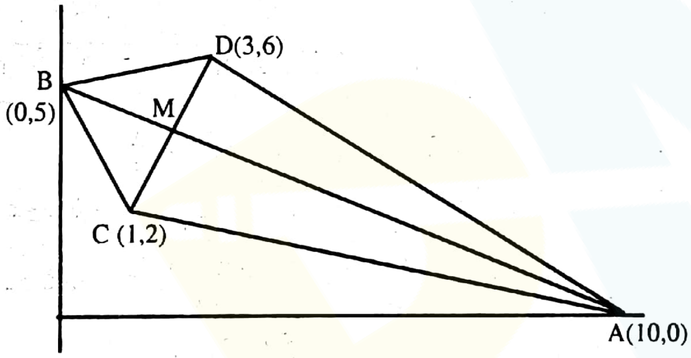
$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{4}$ වන $(2, 2\sqrt{2})$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අභිලම්බයේ සමීකරණය

$y - 2\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 2)$

$\sqrt{2}y - 4 = x - 2$

$\underline{\underline{\Rightarrow x - \sqrt{2}y + 2 = 0}}$

08.



CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය, $M \equiv (2,4)$

AB රේඛාවේ සමීකරණය

$\frac{y - 5}{x - 0} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2y - 10 = -x$

$\Rightarrow x + 2y - 10 = 0$

දැන් $2 + 2 \times 4 - 10 = 0$ බැවින්

M හි ඛණ්ඩාංක AB හි සමීකරණය සපුරාලයි.

තව ද CD හි අනුක්‍රමණය $= \frac{6-2}{3-1} = 2$

$\therefore CD \perp AB$

$\therefore$ AB රේඛා ඛණ්ඩය CD රේඛා ඛණ්ඩයෙහි ලම්බ සමච්ඡේදනය වේ.

ACBD හි වර්ගඵලය $= \frac{1}{2}\ AB\,(CM + DM)$

$= \frac{1}{2}\ AB.CD$

$= \frac{1}{2}\ \sqrt{100 + 25}\ .\ \sqrt{4 + 16}$

$= \frac{1}{2}\ .5\sqrt{5}\,.\,2\sqrt{5}$

$= 25$ වර්ග ඒකක

09. අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 + \lambda(y - 1) = 0$

ආකාර වේ.

එය O මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බැවින්

$1 - \lambda = 0 \ \Rightarrow \lambda = 1$

අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය

$x^2 + y^2 - 2x - y = 0$

$(x - 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 1 + \frac{1}{4}$

$(x - 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \left[\frac{\sqrt{5}}{2}\right]^2$

අවශ්‍ය වෘත්තයෙහි

කේන්ද්‍රය $= (1, \frac{1}{2})$

අරය $= \frac{\sqrt{5}}{2}$ ඒකක

10. $\sin\propto + \sin\beta = 1 \Rightarrow 2 \sin \frac{\propto + \beta}{2} \cos \frac{\propto - \beta}{2} = 1$ —— ①

$\cos\propto + \cos\beta = \sqrt{3} \Rightarrow 2 \cos \frac{\propto + \beta}{2} \cos \frac{\propto - \beta}{2} = \sqrt{3}$ —— ②

$\frac{①}{②}$ න් $\tan \frac{\propto + \beta}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\propto$ හා β දෙක ම සුළු කෝණ බැවින්

$0 < \propto, \beta < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 0 < \frac{\propto + \beta}{2} < \frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \frac{\propto + \beta}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \propto + \beta = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}$

B - කොටස

11. (a) $F(x) = (x^2 - \propto x + 1)(x^2 - \beta x + 1)$

$= x^4 - (\propto + \beta)x^3 + (2 + a\beta)x^2 - (\propto + \beta)x + 1$

(i) $F(x) = 0$ හා $G(x) = 0$ එක ම මූල සහිත නම්

එවිට $G(x) = 6\,F(x)$

$\Rightarrow 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 =$

$6[x^4 - (\propto + \beta)x^3 + (2 + \propto\beta)x^2 - (\propto + \beta)x + 1]$

අදාළ සංගුණක සැමයීමෙන්,

$\propto + \beta = \frac{35}{6}\ ,\ 2 + \propto\beta = \frac{62}{6}$

$\Rightarrow \propto + \beta = \frac{35}{6}\ ,\ \propto\beta = \frac{50}{6}$

$\propto, \beta$ මූල වශයෙන් ඇති සමීකරණය

$x^2 - (\propto + \beta)x + \propto\beta = 0$

$\Rightarrow x^2 - \frac{35}{6}x + \frac{50}{6} = 0$

$\underline{\underline{\Rightarrow 6x^2 - 35x + 50 = 0}}$

$\Rightarrow (3x - 10)(2x - 5) = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{10}{3}$ හෝ $x = \dfrac{5}{2}$

$\alpha = \dfrac{10}{3}$ හා $\beta = \dfrac{5}{2}$ ලෙස ගනිමු.

$G(x) = 0$ හි මූල $F(x) = 0$ හි මූල ම වේ.

$\Leftrightarrow (x^2 - \frac{10}{3}x + 1)(x^2 - \frac{5}{2}x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (3x^2 - 10x + 3)(2x^2 - 5x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(3x - 1)(x - 2)(2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$ හෝ $x = \dfrac{1}{3}$ හෝ $x = 2$ හෝ $x = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow G(x) = 0$ හි සියලු මූල

$x = 3$ හෝ $\dfrac{1}{3}$ හෝ 2 හෝ $\dfrac{1}{2}$ හෝ වේ.

(ii) $H(x) = F(x)$ නම්

$x^4 + x^2 + 1 = x^4 - (\alpha + \beta)x^3 + (2 + \alpha\beta)x^2 - (\alpha + \beta)x + 1$

$\Leftrightarrow \alpha + \beta = 0,\ 2 + \alpha\beta = 1$ —— ⊛

⊛ $\Rightarrow \alpha = -\beta$ හා $\alpha\beta = -1$

$\Rightarrow \alpha^2 = 1$

$\Rightarrow \alpha = \pm 1$ එවිට $\beta = \mp 1$

$\alpha = 1$ හා $\beta = -1$ ලෙස ගත් විට

$H(x) = F(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$

$H(x) = 0$

$\Leftrightarrow F(x) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$ හෝ $x^2 + x + 1 = 0$

ඉහත වර්ගජ සමීකරණවල විවේචක පිළිවෙළින්

Δ_1 හා Δ_2 නම්

$\Delta_1 = (-1)^2 - 4.1.1 < 0$

$\Delta_2 = 1^2 - 4.1.1 < 0$

එනයින් ඉහත සමීකරණවලට තාත්ත්වික මූල නැත.

$\therefore H(x) = 0$ ට තාත්ත්වික මූල නැත.

(b) (i) $f(x) = 2x^4 + \gamma x^3 + \delta x + 1$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ බැවින්,

$2\left(\frac{1}{16}\right) + \gamma\left(-\frac{1}{8}\right) + \delta\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$

$\Rightarrow 1 - \gamma - 4\delta + 8 = 0$

$\Rightarrow \gamma + 4\delta = 9$ —— ①

$f(-2) = 21$ බැවින්,

$2(16) + \gamma(-8) + \gamma(-2) + 1 = 21$

$\Rightarrow 8\gamma + 2\delta = 12$

$\Rightarrow 4\gamma + \delta = 6$ —— ②

① හා ② න් $\gamma = 1$ හා $\delta = 2$

එම නිසා $f(x) = 2x^4 + x^3 + 2x + 1$

$= (2x + 1)(x^3 + 1) \because f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

$= (2x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$

$\therefore f(x)$ හි තාත්ත්වික ඒකජ සාධක දෙක

$(2x + 1)$ හා $(x + 1)$ වේ.

(ii) $(x^2 + x + 1)P(x) + (x^2 - 1)Q(x) = 3x$

$P(x) = ax + b$ හා $Q(x) = cx + d$ යයි ගනිමු.

එවිට,

$(x^2 + x + 1)(ax + b) + (x^2 - 1)(cx + d) = 3x$

අනුරූප සංගුණක සැමයීමෙන්

$a + c = 0$ —— ①

$a + b + d = 0$ —— ②

$a + b - c = 3$ —— ③

$b - d = 0$ —— ④

① + ③ $\Rightarrow 2a + b = 3$ —— ⑤

② + ④ $\Rightarrow 2b + a = 0$ —— ⑥

⑤ හා ⑥ න් $a = 2, b = -1$

① න්, $c = -2$

තව ද ④ න් $d = -1$

$\therefore P(x) = (2x - 1)$ හා $Q(x) = -2x - 1$

12. (a)

	ක්‍රීඩක	ක්‍රීඩිකා	ගායක	ගායිකා	නළු	නිළි
	2	3	5	6	4	2
විනිසුරු මඩුල්ල	ප්‍රධානි		අනෙක් තිදෙනා			

(i) අදාළ තේරීම කළ හැකි විවිධ ආකාර

(ප්‍රධානි + ගායක 1 + ගායිකා 1 + වෙනත් 1)

හෝ (ප්‍රධානි + ගායක 2 + ගායිකා 1)

හෝ (ප්‍රධානි + ගායක 1 + ගායිකා 2) හෝ වේ.

ඉහත ආකාරවලට තේරීම කළ හැකි විවිධතා

$= {}^5C_1 \times {}^5C_1 \times {}^6C_1 \times {}^6C_1 + {}^5C_1 \times {}^5C_2 \times {}^6C_1 + {}^5C_1 \times {}^5C_1 \times {}^6C_2$

$= 5 \times 5 \times 6 \times 6 + 5 \times 10 \times 6 + 5 \times 5 \times 15$

$= 900 + 300 + 375 = \underline{\underline{1575}}$

(ii) අදාළ තේරීම කළ හැකි ආකාර

(ප්‍රධානී ගැහැනු + ගැහැනු 1 + පිරිමි 2) හෝ

(ප්‍රධානි පිරිමි + ගැහැනු 2 + පිරිමි 1) හෝ වේ.

ඉහත ආකාරවලට තේරීම කළ හැකි විධිගණන

$= {}^{3}C_1 \times {}^{8}C_1 \times {}^{9}C_2 + {}^{2}C_1 + {}^{8}C_2 \times {}^{9}C_1$

$= 3 \times 8 \times 36 + 2 \times 28 \times 9$

$= 864 + 504 = \underline{\underline{1368}}$

(iii) ප්‍රධාන විනිසුරු ක්‍රීඩිකාවක් ම වනසේ කළ හැකි තේරීම් ගණන $= {}^{3}C_1 \times {}^{17}C_3$

$= 3 \times \dfrac{17 \times 16 \times 15}{3 \times 2 \times 1}$

$= \underline{\underline{2040}}$

(*b*) $A(r+5)^2 - B(r+1)^2 \equiv r + C$

$A(r^2 + 10r + 25) - B(r^2 + 2r + 1) \equiv r + C$

අදාළ සංගුණක සැමයිමෙන්

$r^2: \quad A - B = 0 \longrightarrow ①$

$r: \quad 10A - 2B = 1 \longrightarrow ②$

$r^0: \quad 25A - B = C \longrightarrow ③$

① හා ② න් $A = B = \dfrac{1}{8}$

③ න් $C = 3$

එවිට

$(r+5)^2 - (r+1)^2 \equiv 8(r+3)$

දෙන ලද Ur සලකමු.

$$Ur = \frac{8}{(r+1)^2(r+3)(r+5)^2}$$

$$= \frac{8(r+3)}{(r+1)^2(r+3)^2(r+5)^2}$$

$$= \frac{(r+5)^2 - (r+1)^2}{(r+1)^2(r+3)^2(r+5)^2}$$

$$= \frac{1}{(r+1)^2(r+3)^2} - \frac{1}{(r+3)^2(r+5)^2}$$

$$= f(r) - f(r+2)$$

මෙහි $f(r) = \dfrac{1}{(r+1)^2(r+3)^2}$ වේ.

$Ur = f(r) - f(r+2)$

$r = 1$ විට $U_1 = f(1) - f(3)$

$r = 2$ විට $U_2 = f(2) - f(4)$

$r = 3$ විට $U_3 = f(3) - f(5)$

$\vdots \qquad \vdots$

$r = n-2$ විට $U_{n-2} = f(n-2) - f(n)$

$r = n-1$ විට $U_{n-1} = f(n-1) - f(n+1)$

$r = n$ විට $U_n = f(n) - f(n+2)$

$$\sum_{r=1}^{n} Ur = f(1) + f(2) - f(n+1) - f(n+2)$$

$$= \frac{1}{2^2.4^2} + \frac{1}{3^2.5^2} - \frac{1}{(n+2)^2(n+4)^2} - \frac{1}{(n+3)^2(n+5)^2}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} U_r = \frac{1}{8^2} + \frac{1}{15^2} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+2)^2(n+4)^2} \searrow 0$$

$$- \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+3)^2(n+5)^2} \searrow 0$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{8^2} + \frac{1}{15^2}}}$$

13. (*a*) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a & b & o \\ c & d & o \end{pmatrix}$

හා $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(i) $AC = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 - 3 & 6 - 6 \\ -2 + 2 & -3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{T_2}$

$CA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $BC = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3a + 2b & 4a + 3b \\ 3c + 2d & 4c + 3d \end{pmatrix}$

$BC = I_2$ විට

$\begin{pmatrix} 3a + 2b & 4a + 3b \\ 3c + 2d & 4c + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1 පේළිය $\left.\begin{array}{l} 3a + 2b = 1 \\ 4a + 3b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a + 2\left(-\dfrac{4a}{3}\right) = 1$

$\Rightarrow a = 3, b = -4$

2 පේළිය $\left.\begin{array}{l} 3c + 2d = 0 \\ 4c + 3d = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow 4c + 3\left(\dfrac{-3c}{2}\right) = 1 \\ \Rightarrow c = -2, d = 3 \end{array}$

$a = 3, b = -4, c = -2, d = 3$

$BC = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(iii) $(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC$
$= \lambda I_2 + \mu I_2 = (\lambda + \mu) I_2$

$(\lambda A + \mu B)C = I_2$ වන විට

$(\lambda + \mu) I_2 = I_2 \Rightarrow (\lambda + \mu - 1) I_2 = 0$

$\underline{\underline{\Rightarrow \lambda + \mu = 1}}$

$D = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -6 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \alpha A + \beta B$ ආකාරයට වේ. යයි සිතමු.

එවිට $\begin{pmatrix} -3 & 8 & -6 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

3 තීරුවෙන් $\alpha = 2$ 1 තීරුවෙන් $\beta = -1$

තව ද, α හා β හි මෙම අගයන් 2 තීරුව සපුරාලයි.

$D = 2A - B$ නිසා

$DC = (2A - B)C$
$= 2AC - BC$
$= 2I_2 - I_2$
$= \underline{\underline{I_2}}$

(b) $z = \cos\theta + i\sin\theta$, $(-\pi < \theta \leq \pi)$

$|z| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$

ආගන්ඩ් සටහනේ Z නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය කේන්ද්‍රය O මූලය වූ ද අරය ඒකක 1 ක් වූ ද C වෘත්තය මත පිහිටයි.

$\bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta = \dfrac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos\theta + i\sin\theta} = \dfrac{1}{z}$

$z + \bar{z} = 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$

$z - \bar{z} = 2i\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$

(i) $w = \dfrac{2z}{z^2+1} = \dfrac{2}{z + \frac{1}{z}} = \dfrac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$;

$\therefore \operatorname{Im}(w) = 0$

$t = \dfrac{z^2 - 1}{z^2 + 1} = \dfrac{z - \frac{1}{z}}{z + \frac{1}{z}} = \dfrac{i\sin\theta}{\cos\theta} = i\tan\theta$;

$\therefore \operatorname{Re}(t) = 0$

$w^2 + t^2 = \sec^2\theta + i^2\tan^2\theta = \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

(ii) $w = 2 \Rightarrow \sec\theta = 2 \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{2}$

දෙන ලද පරාසය තුළ $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow Z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $Z = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(iii) $t = i \Rightarrow i\tan\theta = i \Rightarrow \tan\theta = 1$

දෙන ලද පරාසය තුළ $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ හෝ $\theta = \dfrac{-3\pi}{4}$

$\Rightarrow Z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}$, $\underline{\underline{Z = -\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)}}$

14. (a) $y = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$

(i) $\dfrac{dy}{dx} = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

x වලින් ගුණ කිරීමෙන්

$x\dfrac{dy}{dx} = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow x\dfrac{dy}{dx} = y - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(ii) නැවත x විෂයයෙහි අවකලනයෙන්

$x\dfrac{d^2y}{dx^2} + \cancel{\dfrac{dy}{dx}} = \cancel{\dfrac{dy}{dx}} - \left(\dfrac{-1}{x^2}\right)\left(-\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

x^3 න් ගුණ කිරීමෙන්

$x^4\dfrac{d^2y}{dx^2} = -x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
$= -y$

$x^4\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$

$f'(x) = \dfrac{(x-1)^2 . 4x - (2x^2+1) . 2(x-1)}{(x-1)^4}$

$= \dfrac{(x-1) . 4x - 2(2x^2+1)}{(x-1)^3}$

$= \dfrac{-2(2x+1)}{(x-1)^3}$; $x \neq 1$

$x = -\dfrac{1}{2}$ වන විට $f'(x) = 0$ වේ.

$x = 1$ වන විට $f'(x)$ නොපවතී.

$\Rightarrow x = 1$ හි දී සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛයක් පවතී.

	$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	$1 < x$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(-)	(+)	—
	↘	↗	↘

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1}{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

$\therefore f(x)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්ථානීය අවමයක් ගනී.

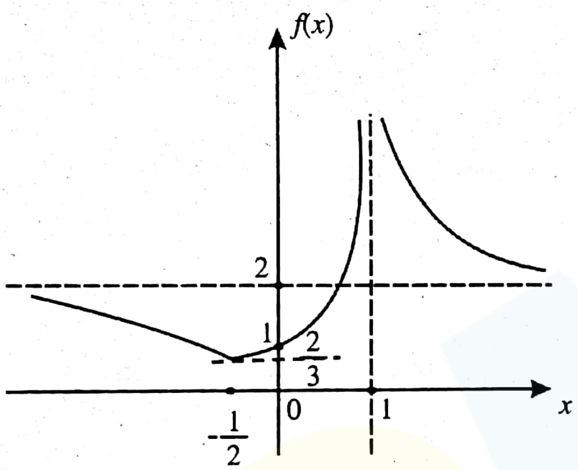
$x \to 1^-$ විට $f(x) \to \infty$

$x \to 1^+$ විට $f(x) \to \infty$

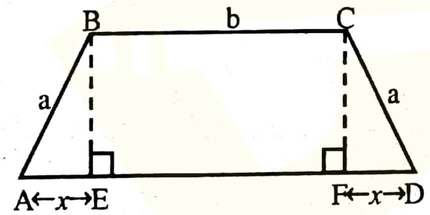
$x \to -\infty$ විට $f(x) \to 2$

$x \to \infty$ විට $f(x) \to 2$

$x = 0$ විට $f(x) = 1$



(c)



ABCD ත්‍රපීසියමේ වර්ගඵලය $S(x)$

$$S(x) = b\sqrt{a^2 - x^2} + 2 \times \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$= (b + x)\sqrt{a^2 - x^2}$$

$a = \sqrt{6}$ හා $b = 4$ විට

$$S(x) = (4 + x)\sqrt{6 - x^2}$$

$$\frac{d\,S_{(x)}}{dx} = (4 + x)\frac{1}{2\sqrt{6 - x^2}} \times (-2x) + \sqrt{6 - x^2}$$

$$= \frac{-x(4 + x) + 6 - x^2}{\sqrt{6 - x^2}}$$

$$= \frac{-2x^2 - 4x + 6}{\sqrt{6 - x^2}}$$

$$= \frac{-2(x^2 + 2x - 3)}{\sqrt{6 - x^2}}$$

$\frac{d}{dx}S_{(x)} = 0$ විට $x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow (x + 3)(x - 1) = 0$

x ධන වන බැවින් $x = 1$ විය යුතු ය.

$x = 1$ විට $S(x)$ ට වර්තන අගයක් පවතී.

	$0 < x < 1$	$1 < x$
$S'(x)$ හි ලකුණ	(+)	(-)

$\therefore x = 1$ හි දී $S(x)$ ට උපරිමයක් පවතී.

$S(x)$ හි උපරිම අගය $S(1) = (4 + 1)\sqrt{6 - 1}$

$= \underline{\underline{5\sqrt{5}\text{ වර්ග ඒකක}}}$

15. (a) $y = \pi - x$ ලෙස ගනිමු.

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_{\pi}^{0} f(\pi - y)(-dy)$$

$$= \int_0^{\pi} f(\pi - y)dy$$

$$= \int_0^{\pi} f(\pi - x)dx$$ $\because$ නිශ්චිත අනුකල විචල්‍යයෙන් ස්වායත්ත බැවින්

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}[x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] - 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

පළමු ප්‍රතිඵලය යෙදීමෙන්,

$$\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi} (\pi - x)\sin^2(\pi - x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - x)\sin^2 x\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx - \int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx$$

$$2\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx = \pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x\,dx\right)$$

$$\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{4} + J\right]$$

මෙහි $J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x\,dx$

$\pi - x = y$ ආදේශයෙන්

$$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2(\pi - y)\,(-dy) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 y\, dy = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \int_0^{\pi} x \sin^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right] = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{4}}}$$

(*b*) $t = x^2$ ලෙස ගනිමු $\Rightarrow dt = 2x\, dx$

$$\therefore \int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int te^t\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int t \frac{d}{dt}(e^t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[te^t - \int e^t\, dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[te^t - e^t\right] + C$$

නැවත ආදේශයෙන්

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\left[x^2 e^{x^2} - e^{x^2}\right] + C$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2}\left[x^2 - 1\right] + C$$

C අභිමත නියතයකි.

(*c*) $\dfrac{1}{x^3 - 1} \equiv \dfrac{A}{x - 1} + \dfrac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$

$1 \equiv A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)$

අදාළ සංගුණක සැසඳීමෙන්

x^2 : $0 = A + B$ ——— ①

x^1 : $0 = A - B + C$ ——— ②

x^0 : $1 = A - C$ ——— ③

② + ③ $2A - B = 1$ ——— ④

① හා ④ න් $A = \dfrac{1}{3}$

$B = -\dfrac{1}{3}$

$C = -\dfrac{2}{3}$

$$\int \frac{dx}{x^3 - 1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{3}\int \frac{(x + 2)}{x^2 + x + 1} dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\int \frac{(2x + 1) + 3}{x^2 + x + 1} dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{6}\int \frac{(2x + 1)dx}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x - 1| - \frac{1}{6}\ln|x^2 + x + 1| - \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

මෙහි C අභිමත නියතයකි.

(d) $t = \tan \dfrac{x}{2} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2}\sec^2 \dfrac{x}{2} dx$

$\Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1 + t^2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 4\cos x + 3\sin x} = \int_0^1 \frac{\frac{2\,dt}{1 + t^2}}{5 + 4\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) + \frac{3.2t}{1 + t^2}}$$

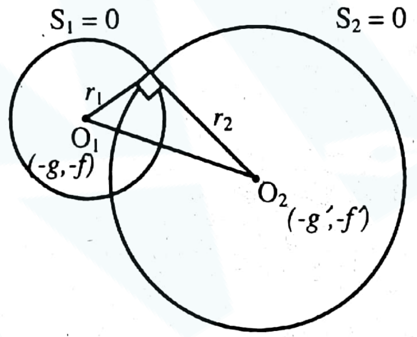
$$= \int_0^1 \frac{2dt}{5(1 + t^2) + 4(1 - t^2) + 6t}$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{t^2 + 6t + 9}$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{(t + 3)^2} = 2\left(-\frac{1}{(t + 3)}\right)_0^1$$

$$= 2\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

16.



$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ හා $x^2\ y^2 + 2g^1x + 2f^1y + c^1 = 0$ වෘත්ත දෙක පිළිවෙළින් $S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ ලෙස ද ඒවායේ කේන්ද්‍ර O_1 හා O_2 ලෙස ද අරයන් r_1 හා r_2 ලෙස ද ගනිමු. ඒවා එකිනෙක ප්‍රලම්භව ඡේදනය වේ නම්

$O_1O_2^2 = r_1^2 + r_2^2$ වේ.

$\Rightarrow (g - g^1)^2 + (f - f^1)^2 = (g^2 + f^2 - c) + (g^{1^2} + f^{1^2} - c^1)$

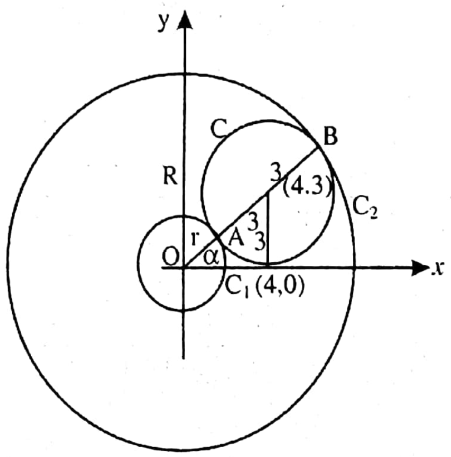
$\Rightarrow -2gg^1 - 2ff^1 = -c - c^1$

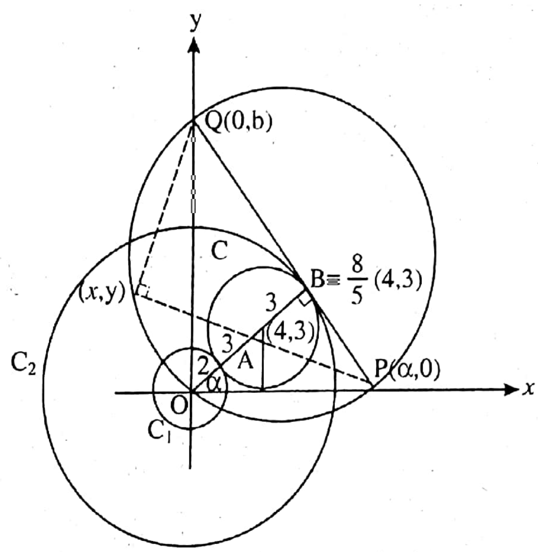
$\Rightarrow 2gg^1 + 2ff^1 = c + c^1$

C වෘත්තය $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$

$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$

C වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය (4, 3), අරය ඒකක 3 කේන්ද්‍රයේ y ඛණ්ඩාංකය =3 කේන්ද්‍රයේ සිට අක්ෂයට ඇති දුර වෘත්තයේ අරයට සමාන වන බැවින් එම වෘත්තය x අක්ෂය ස්පර්ශ කරයි. ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය (4, 0) වේ.





පොදු කේන්ද්‍රය O මූලය වූ අරයන් පිළිවෙළින් r හා R වූ C_1 හා C_2 වෘත්ත දෙක C වෘත්තය පිළිවෙළින් A හා B හි දී ස්පර්ශ කරන බැවින් ද $r < R$ බැවින් C_1 න් C, A හි දී බාහිර ව ස්පර්ශ කරන අතර

C_1 වෘත්තය : $x^2 + y^2 = r^2$ හා $A \equiv (r\cos\propto, r\sin\propto)$ වේ.

එවිට, $\cos\propto = \frac{4}{5}$, $\sin\propto = \frac{3}{5}$ හා

$$r + 3 = 5 \Rightarrow r = 2$$

$$\therefore A \equiv \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

C_2 වෘත්තය : $x^2 + y^2 = R^2$ වෘත්තය C වෘත්තය B හි දී අභ්‍යන්තර ව ස්පර්ශ කරයි.

$$R = 5 + 3 = 8$$

$$B \equiv (8\cos\propto, 8\sin\propto)$$

$$\equiv \left(\frac{32}{5}, \frac{24}{5}\right)$$

C සහ C_1 ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය කරන හා y- අක්ෂය ස්පර්ශ කරන වෘත්තය $S : x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ලෙස ගනිමු.

එහි කේන්ද්‍රය $\equiv (-g, -f)$ හා අරය $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ වේ.

S, y අක්ෂය ස්පර්ශ කරන බැවින් එහි අරය $= |g|$ වේ.

$$\therefore g^2 + f^2 - c = g^2 \Rightarrow f = \pm\sqrt{c}$$

S හා C_1 ප්‍රලම්බව ඡේදනය වන බැවින්

$$0 + 0 = c - 2^2 \Rightarrow c = 4$$

$$\therefore f = \pm 2$$

S හා C වෘත්ත ප්‍රලම්බව ඡේදනය වන බැවින්

$$2g(-4) + 2f(-3) = 4 + 16 = 20$$

$$\Rightarrow 4g + 3f + 10 = 0$$

$$f = 2 \Rightarrow 4g = -16 \Rightarrow g = -4$$

$$f = -2 \Rightarrow 4g = -4 \Rightarrow g = -1$$

S ට තිබිය හැකි සමීකරණ වන්නේ

$x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$ සහ

$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$

C හා C_2 වෘත්තවල පොදු ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $(x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16) - (x^2 + y^2 - 64) = 0$ මගින් දැක්වේ.

$$\Rightarrow 8x + 6y - 80 = 0 \Rightarrow 4x + 3y = 40$$

$$\therefore P \equiv (10,0) \quad Q \equiv \left(0, \frac{40}{3}\right)$$

PQ රේඛා ඛණ්ඩය විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තය මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් (x, y) නම්

$$\left(\frac{y - 0}{x - 10}\right)\left(\frac{y - \frac{40}{3}}{x - 0}\right) = -1$$

$$y^2 - \frac{40}{3}y = -(x^2 - 10x)$$

$$x^2 + y^2 - 10x - \frac{40}{3}y = 0$$

PQ රේඛා ඛණ්ඩය විෂ්කම්භයක් වූ වෘත්තයේ සමීකරණය

$$\underline{\underline{3(x^2 + y^2) - 30x - 40y = 0}}$$

17. (a) $\cos^2(\propto + \beta) + \cos^2\propto + \cos^2\beta - 2\cos(\propto + \beta)\cos\propto\cos\beta = 1$

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S.} &= \cos^2(\propto + \beta) + \cos^2\propto + \cos^2\beta - 2\cos(\propto + \beta)\cos\propto\cos\beta \\
&= \cos(\propto + \beta)\,[\cos(\propto + \beta) - 2\cos\propto\cos\beta] + \cos^2\propto + \cos^2\beta \\
&= (\cos\propto\cos\beta - \sin\propto\sin\beta)(\cos\propto\cos\beta - \sin\propto\sin\beta - 2\cos\propto\cos\beta) + \cos^2\propto + \cos^2\beta \\
&= -(\cos\propto\cos\beta - \sin\propto\sin\beta)(\cos\propto\cos\beta + \sin\propto\sin\beta) + \cos^2\propto + \cos^2\beta \\
&= -(\cos^2\propto\cos^2\beta - \sin^2\propto\sin^2\beta) + \cos^2\propto + \cos^2\beta \\
&= -[(\cos^2\propto\cos^2\beta - (1 - \cos^2\propto)(1 - \cos^2\beta))] + \cos^2\propto + \cos^2\beta \\
&= -(\cos^2\propto\cos^2\beta - 1 + \cos^2\propto + \cos^2\beta - \cos^2\propto\cos^2\beta) + \cos^2\propto + \cos^2\beta \\
&= 1 \\
&= \underline{\text{R.H.S}}
\end{aligned}$$

(b) $f(x) = \cos 2x + \sin 2x + 2(\cos x + \sin x) + 1$

$= 2\cos^2 x - 1 + 2\sin x\cos x + 2\cos x + 2\sin x + 1$

$= 2\cos x(\cos x + 1) + 2\sin x(\cos x + 1)$

$= 2(\cos x + 1)(\cos x + \sin x)$

$= 2\sqrt{2}(\cos x + 1)\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$k = 2\sqrt{2}$ හා $\propto = \frac{\pi}{4}$ වේ.

$\frac{f(x)}{1+\cos x} = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,[g(x) - 1]$ ලෙස ගනිමු.

මෙහි $g(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ හා $\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$y = g(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1,\ \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$x = 0$ විට $y = \sqrt{2} + 1$

$y = 0$ විට $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{5\pi}{12}$

y උපරිම $= 3$ එවිට $x = \frac{\pi}{4}$

y අවම $= -1$ එවිට $x = -\frac{3\pi}{4}$ අදාළ පරාසය තුළ නොවේ.

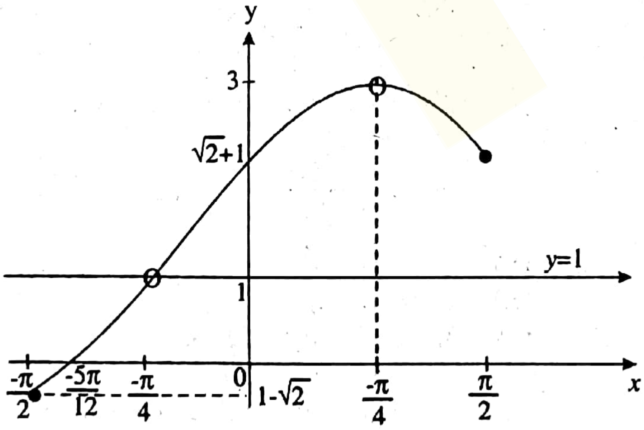
$\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$ උපරිම ලක්ෂ්‍යයකි.

$x = \frac{\pi}{2}$ $\quad y = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 1$

$= \sqrt{2} + 1$

$x = \frac{-\pi}{2}$ $\quad y = 2\sin\left(\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = -2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 1$

$= 1 - \sqrt{2}$



$f(x) = 0$ විට $g(x) = 1$ ප්‍රස්තාරය අනුව අදාළ පරාසය තුළ $x = \frac{-\pi}{4}$ විට පමණක් $g(x) = 1$ වේ.

$\therefore$ අදාළ පරාසය තුළ $f(x) = 0$ ට එක විසඳුමක් පමණක් වේ.

(C) සයින් නීතිය

$A + B + C = \pi$ වන විට

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ (= k යයි ගනිමු.)

$$\frac{a(b-c)}{(b+c)^2} = \frac{k\sin A(k\sin B - k\sin C)}{(k\sin B + k\sin C)^2}$$

$$= \frac{\sin A(\sin B - \sin C)}{(\sin B + \sin C)^2}$$

$$= \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\left(2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{\pi-A}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\left(\sin^2\frac{\pi+A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)}$$

$(\because A + B + C = \pi)$

$$= \frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\left(\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B-C}{2}\right)}$$

$$= \tan\frac{A}{2}\,.\,\sin\frac{A}{2}\tan\frac{B-C}{2}\sec\frac{B-C}{2}$$

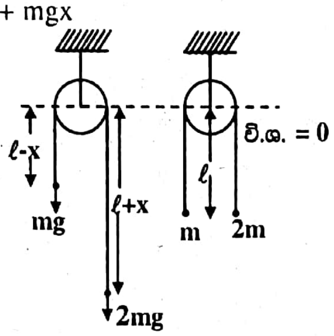
$$\therefore a(b-c)\operatorname{coses}\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2} = (b+c)^2\tan\frac{B-C}{2}\sec\frac{B-C}{2}$$

*** ***

A - කොටස

01. ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්.

$$0 + 0 - 2mg\ell - mg\ell = \frac{1}{2}2mv^2 + \frac{1}{2}mv^2$$
$$-2mg(\ell + x) - mg(\ell - x)$$
$$-\cancel{3mg\ell} = \frac{3}{2}mv^2 - \cancel{3mg\ell} - 2mgx + mgx$$



$$\frac{3}{2}\cancel{m}v^2 = \cancel{m}gx \Rightarrow v^2 = \frac{2g}{3}x$$

x විෂයයෙන් අවකලනයෙන්

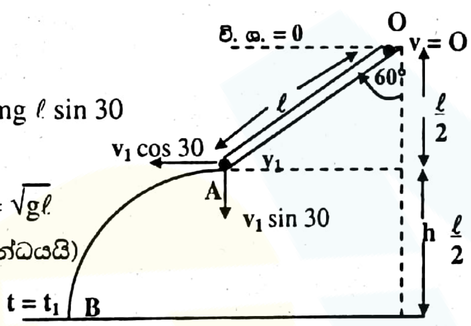
$$2v\frac{dv}{dx} = \frac{2g}{3}$$

ත්වරණය $v\frac{dv}{dx} = \frac{g}{3}$

(අවශ්‍ය නම් t විෂයයෙන් අවකලනය කිරීමෙන් ද ප්‍රතිඵල ලබාගත හැක.)

02. ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්

$$O + O = \frac{1}{2}mv_1^2 - mg\,\ell \sin 30$$



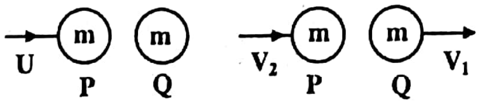
$$v_1^2 = g\ell \Rightarrow v_1 = \sqrt{g\ell}$$

(m යනු අංශුවේ ස්කන්ධයයි)

A → B චලිතය සලකමු.

$$\leftarrow\ s = ut + \frac{1}{2}at^2$$
$$\sqrt{3}\,\ell - \ell\frac{\sqrt{3}}{2} = v_1 \cos 30\ t_1$$
$$\frac{\sqrt{3}\ell}{2} = v_1\frac{\sqrt{3}}{2}t_1$$
$$t_1 = \frac{\ell}{v_1}$$
$$\downarrow\ h - \frac{\ell}{2} = v_1 \cos 60\ t_1 + \frac{1}{2}gt_1^2$$
$$h - \frac{\ell}{2} = \frac{v_1}{2} \times \frac{\ell}{v_1} + \frac{1}{2}g\frac{\ell^2}{v_1^2}$$
$$h - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}\frac{\cancel{g}\ell^{\cancel{2}}}{\cancel{g\ell}}$$
$$h = \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2} = \frac{3\ell}{2}$$

03.



ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමයෙන්,

$$\rightarrow mu = mv_1 + mv_2 \Rightarrow u = v_1 + v_2 \text{ —— ①}$$

නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමයෙන්

$$eu = v_1 - v_2 \text{ —— ②}$$

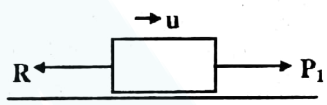
ගැටුමෙන් පසු පද්ධතියේ චාලක ශක්තිය

$$= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

මුල් චාලක ශක්තිය $= \frac{1}{2}mu^2$

∴ අනුපාතය
$$= \frac{\frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2)}{\frac{1}{2}mu^2} = \frac{v_1^2 + v_2^2}{u^2}$$
$$= \frac{(v_1 + v_2)^2 + (v_1 - v_2)^2}{2} + \frac{1}{u_2}$$
$$= \frac{u^2 + e^2u^2}{2u^2} = \frac{1 + e^2}{2}$$
$$= (1 + e^2) : 2$$

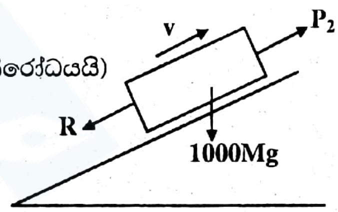
04.



ප්‍රකර්ෂණ බලය $P_1 = \frac{H \times 1000}{u}$ N

$\rightarrow \underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

$P_1 - R = M \times O$ (R යනු ප්‍රතිරෝධයයි)



$$R = \frac{H \times 1000}{u}\ \text{N}$$

$P_2 = \frac{2H \times 1000}{v}$ N (v උපරිම වේගයයි.)

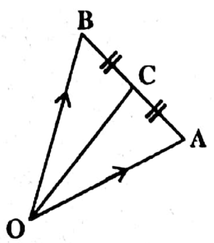
$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

$$P_2 - R - mg \sin \alpha = m \times o$$
$$\frac{2H \times 1000}{v} - \frac{H \times 1000}{u} - M \times 1000\, g \times \sin \alpha = M \times 0$$
$$\frac{2H}{v} = \frac{H}{u} + Mg \sin \alpha$$
$$\frac{2H}{v} = \frac{H + Mgu \sin \alpha}{u}$$
$$v = \frac{2Hu}{H + Mg\,u \sin \alpha}\ \text{ms}^{-1}$$

05. **OA** $= \lambda \boldsymbol{i} + \mu \mathbf{j}$

OB $= \mu \boldsymbol{i} - \lambda \mathbf{j}$

OA . OB $= (\lambda \boldsymbol{i} + \mu \mathbf{j}) \cdot (\mu \boldsymbol{i} - \lambda \mathbf{j})$
$= \lambda\mu\, \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} - \mu\lambda\, \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}$
$= \lambda\mu - \lambda\mu$ ($\because \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ හා $\boldsymbol{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \boldsymbol{i} = 0$)
$= 0$



$$\therefore OA \perp OB \Rightarrow A\hat{O}B = \frac{\pi}{2}$$

OC = OA + AC

$= \mathbf{OA} + \frac{1}{2}\mathbf{AB}$

AB $= \mu \boldsymbol{i} - \lambda \mathbf{j} - (\lambda \boldsymbol{i} + \mu \mathbf{j})$
$= (\mu - \lambda)\boldsymbol{i} - (\lambda + \mu)\mathbf{j}$

$\therefore \mathbf{OC} = \lambda \underline{i} + \mu \underline{j} + \frac{1}{2}\ [(\mu - \lambda)\underline{i} - (\lambda + \mu)\underline{j}]$

$= \frac{1}{2}(\lambda + \mu)\underline{i} + \frac{1}{2}(\mu - \lambda)\underline{j}$

$|\mathbf{OC}| = 2$ බව ද, **OC** හා $\underline{i}$ අතර කෝණය $\frac{\pi}{6}$ බව ද දී ඇත.

එවිට **OC** හා $\underline{j}$ අතර කෝණය $\frac{\pi}{3}$ වේ.

$\mathbf{OC}.\underline{i} = |\mathbf{OC}|\,|\underline{i}| \cos \frac{\pi}{6}$

$[\frac{1}{2}(\lambda + \mu)\underline{i} + \frac{1}{2}(\mu - \lambda)\,j]\,.\underline{i} = 2.\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \lambda + \mu = 2\sqrt{3}$

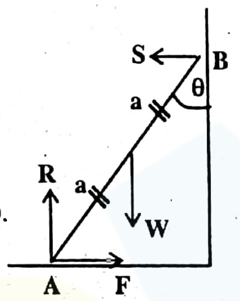
$\mathbf{OC}.\mathbf{j} = |\mathbf{OC}|\,|\underline{j}| \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} \Rightarrow \mu - \lambda = 2$

විසඳීමෙන් $\mu = \sqrt{3} + 1$ හා $\lambda = \sqrt{3} - 1$ ලැබේ.

06. දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සලකා,

$\rightarrow \quad F = S$

$\uparrow \quad R = W$



$A \circlearrowright \quad W.\,a \sin\theta = S \times 2a\cos\theta$

$S = \frac{1}{2} W \tan\theta = F$ වේ.

A ලක්ෂ්‍යය සැලකූ විට

$\frac{F}{R} \le \mu \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} W \tan\theta}{W} \le \mu$

$\mu \ge \frac{1}{2}\tan\theta$

07. $P(A) = \frac{1}{4}$; $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(A \cup B \cup C) = \frac{3}{4}$

A, B හා C ස්වායත්ත බැවින්

$P(A \cap B) = P(A).\,P(B)$; $P(B \cap C) = P(B).\,P(C)$;

$P(C \cap A) = P(C).\,P(A)$

හා $P(A \cap B \cap C) = P(A).\,P(B).\,P(C)$

එවිට $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A).\,P(B) - P(B)P(C) - P(C)P(A) + P(A)\,P(B)\,P(C)$

$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + P(C) - \frac{1}{4}.\frac{1}{2} - \frac{1}{2}P(C) - \frac{1}{4}P(C) + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times P(C)$

$\frac{1}{8} = P(C)\,[\,1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\,]$

$\frac{1}{8} = P(C) \times \frac{3}{8} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{3}$

08. සසම්භාවී ව තෝරා ගන්නා ලද පළමු බල්බය දෝෂ සහගතවීමේ සම්භාවිතාව $= \frac{2}{7}$

දෙවනුව තෝරා ගන්නා ලද බල්බය දෝෂ සහගතවීමේ සම්භාවිතාව $= \frac{1}{6}$

$\therefore$ පරීක්ෂා කිරීම් දෙකක දී දෝෂ සහගත බල්බ දෙක හඳුනාගැනීමේ සම්භාවිතාව $= \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{21}}}$

පරීක්ෂා කිරීම් තුනක් අවසානයේ දෝෂ සහගත බල්බ දෙක හඳුනාගැනීමේ සිද්ධිය ;
පළමු පරීක්ෂණයේ දී දෝෂ රහිත, දෙවන හා තුන්වන පරීක්ෂණවල දී දෝෂ සහිත හෝ
පළමු පරීක්ෂණයේ දී දෝෂ සහිත, දෙවන පරීක්ෂණයේ දී දෝෂ රහිත හා තෙවන පරීක්ෂණයේ දී දෝෂ සහිත ;
ආකාරවලින් පමණක් සිදුවේ.

මුල් අවස්ථාවේ සම්භාවිතාව $= \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{21}$

දෙවන අවස්ථාවේ සම්භාවිතාව $= \frac{2}{7} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{21}$

පරීක්ෂා කිරීම් තුනක දී දෝෂ සහගත බල්බ දෙක හඳුනා ගැනීමේ මුළු සම්භාවිතාව $= \frac{1}{21} \times \frac{1}{21} = \underline{\underline{\frac{2}{21}}}$

09. $S = \{1, 2, 4, x, y, 11, 13\}$

සංඛ්‍යා වල මධ්‍යන්‍යය y බැවින්,

$\frac{1 + 2 + 4 + x + y + 11 + 13}{7} = y$

$31 + x + y = 7y$

$31 = 6y - x$

x, y නිඛිල විය යුතු අතර, ආරෝහණ පටිපාටියට සකස් කර ඇති බැවින්, $4 \le x, y \le 11$ විය යුතු ය.

$x = 4$ විට y නිඛිලයක් නොවේ.

$x = 5$ විට $y = 6$ නිඛිලයකි.

$x = 6, 7, 8, 9, 10$ විට y නිඛිලයක් නොවේ.

$x = 11$ විට $y = 7$ නමුත් $x < y$ විශාල විය යුතු බැවින් පිළිගත නොහැක. $\therefore$ $x = 5$ හා $y = 6$ පමණක් පිළිගත හැක.

විචලතාව $= \frac{1}{7}\ [(1-6)^2 + (2-6)^2 + (4-6)^2 + (5-6)^2 + (6-6)^2 + (11-6)^2 - (13-6)^2]$

$= \frac{1}{7}\ (25 + 16 + 4 + 1 + 25 + 49) = \frac{120}{7}$

10.

අංකය x_i	1	2	3	4	5	6
සංඛ්‍යාතය f_i	α	9	γ	11	8	7
$f_i x_i$	α	18	3γ	44	40	42

$3.66 = \frac{\alpha + 18 + 3\gamma + 44 + 40 + 42}{50}$

$183 = \alpha + 3\gamma + 144 \Rightarrow \alpha + 3\gamma = 39$ —①

$\sum_{i=1}^{6} f_i = \alpha + 9 + \gamma + 11 + 8 + 7 = 50 \Rightarrow \alpha + \gamma = 15$ —②

විසඳීමෙන් $\alpha = 3$; $\gamma = 12$

මාතය ; $\gamma = 12$ බැවින් වැඩි ම සංඛ්‍යාතය එය වේ.

$\therefore$ මාතය 3 වේ.

සංඛ්‍යාත වල එකතුව 50 බැවින් මධ්‍යස්ථය වන්නේ 4 වේ.

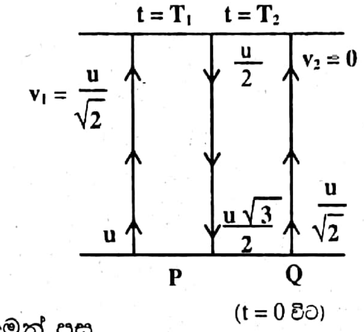
B - කොටස

11. (*a*) (i) P අංශුවේ චලිතය සලකා $v^2 = u^2 + 2as$ (සිවිලිම තෙක්) යෙදීමෙන්,

$$v_1^2 = u^2 - 2g \times \frac{u^2}{4g}$$

$$v_1^2 = \frac{u^2}{2}$$

$$v_1 = \frac{u}{\sqrt{2}}$$



P, සීලිම සමග ගැටුමෙන් පසු ලබාගන්නා වේගය ↓ $ev = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{u}{2}$

ගැටීම සඳහා ගත වූ කාලය T_1 නම්,

$v = u + at$ ↑ යෙදීමෙන්

$$\frac{u}{\sqrt{2}} = u - gT_1 \Rightarrow gT_1 = u - \frac{u}{\sqrt{2}} \Rightarrow T_1 = \frac{u}{g}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(ii) P අංශුව ආපසු ගෙබිම දක්වා ළඟාවන ප්‍රවේගය v_1 නම්,

↓ $v^2 = u^2 + 2as$

$$v_1^2 = \left(\frac{u}{2}\right)^2 + 2g \cdot \frac{u^2}{4g} = \frac{u^2}{4} + \frac{u^2}{2} = \frac{3u^2}{4}$$

$$\therefore v_1 = \frac{u\sqrt{3}}{2}$$

Q අංශුව සිවිලිම වෙත ළඟා වීම ;

$v^2 = u^2 + 2as$ ↓ යෙදීමෙන්

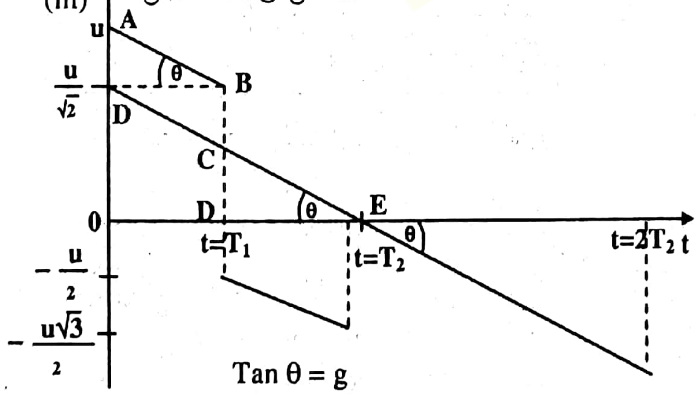
$$v_2^2 = \frac{u^2}{2} - 2g\frac{u^2}{4g} = \frac{u^2}{2} - \frac{u^2}{2} = 0,$$ යන්තමින් ළඟා වේ.

ගතවන කාලය, T_2

↑ $v = u + at$ යෙදීමෙන්

$$0 = \frac{u}{\sqrt{2}} - gT_2 \Rightarrow T_2 = \frac{u}{g\sqrt{2}}$$

(iii) ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාරය



(iv) ඉහත ප්‍රස්තාරයට අනුව P හා Q අංශු අතර දුර ABCD ත්‍රපීසියම හෝ CDE ත්‍රිකෝණය යන දෙකින් එකක වර්ගඵලයයි.

$$ABCD = \left(u - \frac{u}{\sqrt{2}}\right)T_1$$

$$= \left(u - \frac{u}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{u}{g}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

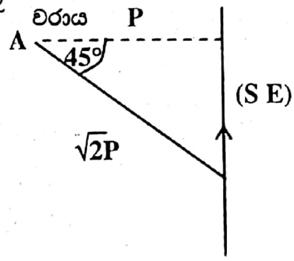
$$= u\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{u}{g}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{u^2}{g}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{u^2}{2g}(\sqrt{2}-1)^2$$

(*b*) $(S\,E) = \uparrow u$; වරාය A ලෙස ගෙන ඇත.

$(B_i\,E) = v \ \left(\frac{u}{\sqrt{2}} < v < u\right) \ i = 1, 2$



$(B_i\,S) = (B_i\,E) + (E\,S) \quad i = 1, 2$

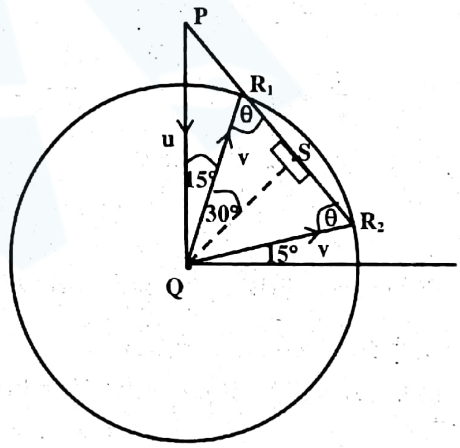
$= v + \uparrow u$

$= \uparrow u + \overrightarrow{v}$

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_i}$

$= \overrightarrow{PR_i} \qquad i = 1, 2$

PQ = u වන පරිදි ද, Q කේන්ද්‍රය වූ ද අරය v (< u) වූ ද වෘත්තය අඳින්න. එහි පරිධිය මත R_1 හා R_2 ලක්ෂ්‍යයන් පිහිටන්නේ PQ සමග PR_1R_2 රේඛාව 45° ක කෝණයක් සාදමිනි.



$QS = u \sin 45° = v \sin\theta$

$$\frac{u}{\sqrt{2}} = v\sin\theta \Rightarrow \frac{u}{v} = \sqrt{2}\sin\theta$$

$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ බව දී ඇත.

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

එවිට $P\hat{Q}R_1 = 60° - 45° = 15°$

එනම් එක් බෝට්ටුවක් උතුරෙන් 15° නැගෙනහිර දිශාවට වේ.

අනෙක් බෝට්ටුව නැගෙනහිරින් 15° උතුරු දිශාවට වේ.

$$T_1 = \frac{\sqrt{2}\,p}{PR_2} \qquad T_2 = \frac{\sqrt{2}\,p}{PR_1}$$

$$T_2 - T_1 = \frac{\sqrt{2}\,p}{PR_1} - \frac{\sqrt{2}\,p}{PR_2}$$

$$= \sqrt{2}\,p\left(\frac{1}{PR_1} - \frac{1}{PR_2}\right)$$

$$= \sqrt{2}\, p \left(\frac{PR_2 - PR_1}{PR_1 \,.\, PR_2}\right)$$

$$= \sqrt{2}\, p \frac{[(PS + SR_2) - (PS - SR_1)]}{(PS + SR_2)(PS - SR_1)}$$

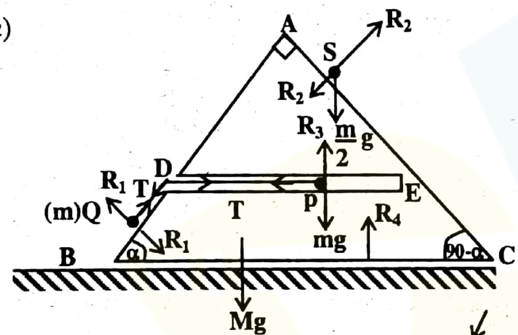
$$= \sqrt{2}\, p \left(\frac{\cancel{PS} + SR_2 - \cancel{PS} + SR_2}{PS^2 - SR^2}\right) \quad (\because SR_1 = SR_2 \text{ නිසා})$$

$$= \frac{2\sqrt{2}p \;\; SR_2}{PS^2 - SR_1^2} = \frac{2\sqrt{2}p \,.\, \frac{v}{2}}{\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{v}{2}\right)^2} \quad (\because SR_1 = v \cos 60^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{2}\, p\, v}{\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}\, p \,.\, \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{u^2}{2} - \frac{\cancel{2}u^2}{3} \times \frac{1}{\cancel{4}_2}} = \frac{\frac{2pu}{\sqrt{3}}}{u^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)}$$

$$= \frac{2p\cancel{u}}{\sqrt{3}\, u^{\cancel{2}}} \times \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{2p}{\sqrt{3}\, u} \times 3 = 2\sqrt{3}\, pu$$

12. (a)



(කු, E) $= \rightarrow a_1$ ද, (p කු) $= \overset{a_2}{\leftarrow}$ ද, (Q, කු) $= \overset{\alpha}{\searrow} a_2$ ද

(S කු) $= \overset{90-\alpha}{\searrow} a_3$ ද යැයි ගනිමු.

(P E) = (P කු) + (කු E) (Q E) $= \overset{\alpha}{\searrow} a_2 \; a_1$

$= \leftarrow a_2 + \rightarrow a_1$

$= \leftarrow (a_2 - a_1)$ (S E) $= \overset{90-\alpha}{\searrow} a_3 \; a_1$

තන්තුවේ ආතතිය T නම්, $\underline{F} = m\underline{a}$ යොදමු.

P $\leftarrow$ $T = m(a_2 - a_1)$ —— ①

Q $\overset{\alpha}{\searrow}$ $mg \sin\alpha - T = m(a_2 - a_1 \cos\alpha)$ —— ②

S $\overset{90-\alpha}{\searrow}$ $\frac{m}{2} g \cos\alpha = \frac{m}{2}(a_3 + a_1 \sin\alpha)$ —— ③

පද්ධතියට $\rightarrow$ $0 = Ma_1 + m(a_1 - a_2) + m(a_1 - a_2\cos\alpha) + \frac{m}{2}(a_1 + a_3 \sin\alpha)$ —— ④

① + ② $\cancel{m}g \sin\alpha = 2\cancel{m}a_2 - \cancel{m}(1 + \cos\alpha)\, a_1$

$a_2 = \frac{1}{2}[g \sin\alpha + a_1(1 + \cos\alpha)]$ —— ⑤

③ න් $a_3 = g\cos\alpha - a_1 \sin\alpha$ —— ⑥

④ න් $o = (M + 2m + \frac{m}{2})\, a_1 - m(1 + \cos\alpha)\, a_2 + \frac{m}{2} a_3 \sin\alpha$ —— ⑦

⑤ න් හා ⑥ න් ⑦ හි ආදේශයෙන්

$o = (M + 2m + \frac{m}{2})a_1 - m(1 + \cos\alpha)\frac{1}{2}[g \sin\alpha + a_1(1 + \cos\alpha)] + \frac{m}{2}(g\cos\alpha - a_1 \sin\alpha)\sin\alpha$

$o = (2M + 4m + m)\, a_1 - m(1+\cos\alpha)[g \sin\alpha + a_1(1+\cos\alpha)] + m(g\cos\alpha - a_1\sin\alpha)\sin\alpha$

$m(1 + \cos\alpha)\sin\alpha\, g - mg\cos\alpha\sin\alpha = a_1[2M + 4m + m - m(1 + \cos\alpha)^2 - m\sin^2\alpha]$

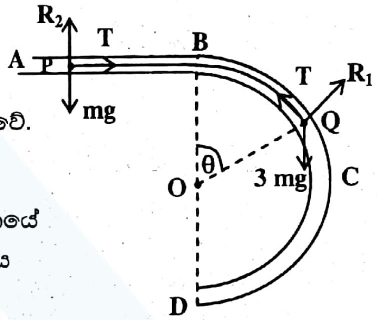
$mg[\sin\alpha + \cancel{\sin\alpha\cos\alpha} - \cancel{\cos\alpha\sin\alpha}] = a_1[2M + 5m - m - 2m\cos\alpha - m\cos^2\alpha - m\sin^2\alpha]$

$= a_1[2M+4m - 2m\cos\alpha - m(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)]$

$mg\sin\alpha = a_1[2M + 3m - 2m\cos\alpha]$

$$a_1 = \frac{mg\sin\alpha}{2M + 3m - 2m\cos\alpha}$$

(b) $\theta < \frac{\pi}{2}$ වේ.



$B\hat{O}Q = \theta$ බැවින්

Q හි කෝණික වේගය $\dot{\theta}$ වේ.

මෙහි $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

∴ Q හි ප්‍රවේගය ස්පර්ශකයේ දිශාවට $a\dot{\theta}$ ද, P හි ප්‍රවේගය AB දිශාවට $a\dot{\theta}$ ද වේ.

ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන් (P හා Q ට)

$0 + 0 + \cancel{m}ga + 3\cancel{m}ga = \frac{1}{2}\cancel{m}(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}3\cancel{m}(a\dot{\theta})^2 + \cancel{m}ga + 3\cancel{m}ga\cos\theta$

$0 + 4ga = 2a^2\dot{\theta}^2 + ga + 3ga\cos\theta$

$3g\cancel{a} - 3g\cancel{a}\cos\theta = 2a\,\dot{\theta}^2$

$\frac{3g}{2a}(1 - \cos\theta) = \dot{\theta}^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

t විෂයයෙන් අවකලනයෙන්,

$\frac{3g}{2a}\sin\theta \,.\, \cancel{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{2\cancel{d\theta}}{\cancel{dt}} \,.\, \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (= 2\dot{\theta}\ddot{\theta})$

$a\ddot{\theta} = a\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{3g}{4}\sin\theta$

P ට $\underline{F} = m\underline{a} \rightarrow$ යෙදීමෙන්

$T = m.\, a\ddot{\theta}$

$= m.\, \frac{3g}{4}\sin\theta$

Q ට $\underline{F} = m\underline{a}$ $\overset{\theta}{\swarrow}$ යෙදීමෙන්

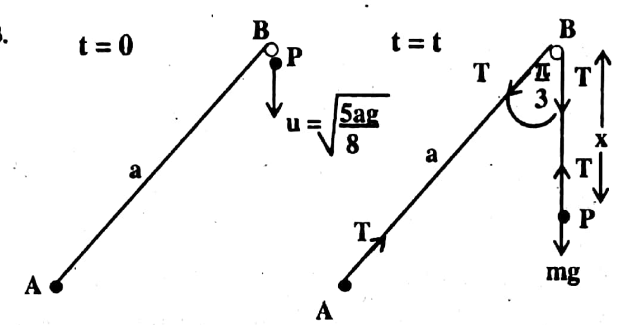
$3mg\cos\theta - R = 3m.\, a\dot{\theta}^2$

$R = 3mg\cos\theta - 3m\cancel{a}.\frac{3g}{2\cancel{a}}(1 - \cos\theta)$

$= \frac{3mg}{2}(2\cos\theta - 3 + 3\cos\theta)$

$R = \frac{3mg}{2}(5\cos\theta - 3)$

13.



$T = \frac{2mg \times x}{a}$

$\underline{F} = m\underline{a}$; P ට ↓ යෙදීමෙන්

$mg - T = m\ddot{x}$

$mg - \frac{2mg}{a}x = m\ddot{x} \Rightarrow \frac{-2g}{a}\left(x - \frac{a}{2}\right) = \ddot{x}$

මෙය $\ddot{X} + \frac{2g}{a}(x - a) = 0$ ලෙස ද ලිවිය හැක.

$X = x - \frac{a}{2}$ බැවින්, දෙවරක් t විෂයයෙන්

අවකලනයෙන් $\ddot{X} = \ddot{x}$

$\therefore \ddot{X} + \omega^2 X = 0$ වේ. $\omega^2 = \frac{2g}{a}$

සරල අනුවර්තීය චලිතයේ C කේන්ද්‍රය

$\ddot{X} = 0$ වන, එනම් $X = 0$ වන එනම් $x\ \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$ වේ.

$\dot{x}^2 = \omega^2 (A^2 - X^2)$— ① විසඳුමක් බව උපකල්පනය කළ යුතු ය.

$t = 0$ විට $x = 0$ බැවින් $X = \frac{-a}{2}$ වේ.

$\dot{x} = \dot{X} = u = \sqrt{\frac{5ga}{8}}$ බැවින් ඉහත සමීකරණයේ

① න් ; $\frac{5ga}{8} = \frac{2g}{a}\left[A^2 - \left(\frac{-a}{2}\right)^2\right]$; A යනු විස්තාරයයි.

$$\frac{5a^2}{16} = A^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow A^2 = \frac{5a^2}{16} + \frac{a^2}{4} = \frac{9a^2}{16} \Rightarrow A = \frac{3a}{4}$$

E සෙවීම

E යනු උපරිම විතතිය ඇතිවිට P ළඟාවන ලක්ෂ්‍යයයි.

එවිට $X = 0$ වන අතර ① න් $X = A = \frac{3a}{4}$ වේ.

B සිට ඇති මුළු දුර = BC + විස්තාරය

$$= \frac{a}{2} + \frac{3a}{4} = \underline{\underline{\frac{5a}{4}}}$$

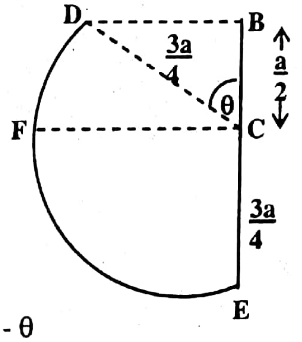
C කේන්ද්‍රය පසුකරන විට වේගය v_1 නම්,

① න් $v_1^2 = \frac{2g}{a}\left[\left(\frac{3a}{4}\right)^2 - 0\right] = \frac{2g}{a} \times \frac{9a^2}{16} = \frac{9ga}{8}$

නමුත් $u^2 = \frac{5ga}{8}$ (දත්තය) නිසා $\frac{9a}{8} = \frac{u^2}{5}$

$\therefore v_1^2 = \frac{9u^2}{5} \Rightarrow v_1 = \frac{3u}{\sqrt{5}}$ වේ.

B සිට C දක්වා යාමට අංශුව ගන්නා t කාලය සෙවීම.



$D\hat{C}F = \frac{\pi}{2} - \theta$

$\cos\theta = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{3a}{4}} = \frac{2}{3}$

$D\hat{C}F = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

$\therefore$ කාලය $t_1 = \frac{1}{\omega}\left\{\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$

$= \sqrt{\frac{a}{2g}}\left\{\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$ ($\because \omega^2 = \frac{2g}{a}$ නිසා)

B සිට E දක්වා යාමට අංශුව ගන්නා කාලය සෙවීම.

$D\hat{C}E = \pi - \theta$ බැවින්

කාලය $t_2 = \sqrt{\frac{a}{2g}}\left\{\pi - \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$ බව පහසුවෙන් ලැබේ.

තන්තුවේ උපරිම විතතිය = BE = BC + CE

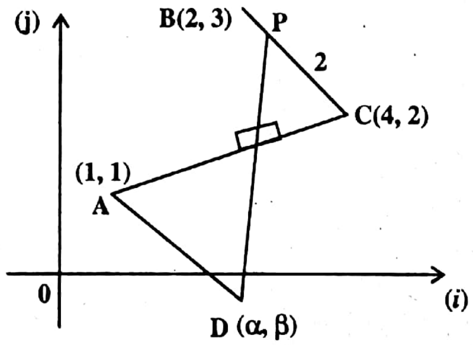
$= \frac{a}{2} + \frac{3a}{4} = \frac{5a}{4}$ බව ඉහත ලබා ගතිමු.

$\therefore$ තන්තුවේ උපරිම ආතතිය $= 2\ mg \times \frac{5a}{4} \times \frac{1}{a} = \frac{5mg}{2}$

නාදැත්ත මත තන්තුවෙන් ඇතිවන උපරිම බලය යනු එකිනෙකට $\frac{\pi}{3}$ ආනතියෙන් යුත් උපරිම T බල දෙකක සම්ප්‍රයුක්තය වේ.

උපරිම බලය $= \left(T\cos\frac{\pi}{6}\right) 2 = \cancel{2} \times \frac{5mg}{\cancel{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}mg}{2}$

14.



$\overrightarrow{OA} = i + \underline{j}$
$\overrightarrow{OB} = 2i + 3\underline{j}$
$\overrightarrow{OC} = 4\underline{i} + 2\underline{j}$
$\overrightarrow{BC} = BO + OC$
$= -2i - 3\underline{j} + 4\underline{i} + 2\underline{j}$
$= 2\underline{i} - \underline{j}$
$BP = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ බැවින්
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$
$= 2\underline{i} + 3\underline{j} + \frac{1}{3}(2i - j)$
$= \frac{8}{3}(i + \underline{j}) = \frac{8}{3}\overrightarrow{OA}$ බැවින් O,A, P ඒක රේඛීය වේ.

ABCD සමාන්තරාස්‍රයක් බැවින් AB හා BC සමාන්තර වේ.

$\frac{3-2}{2-4} = \frac{1-\beta}{1-\alpha}$ (අනුක්‍රමන) $\Rightarrow \alpha + 2\beta = 3$ —— ①

PD හා AC ලම්බ බැවින් $\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ වේ.

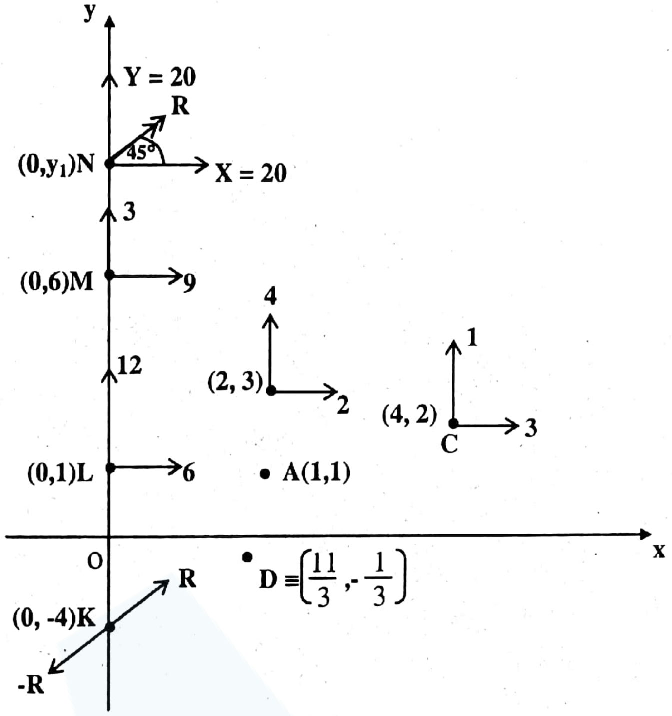
$\overrightarrow{PD} = \alpha i + \beta j - \left(\frac{8}{3}\underline{i} + \frac{8}{3}\underline{j}\right)$
$= (\alpha - \frac{8}{3})\underline{i} + (\beta - \frac{8}{3})\underline{j}$

$\overrightarrow{AC} = 4\underline{i} + 2\underline{j} - \underline{i} - \underline{j}$
$= 3\underline{i} + \underline{j}$

$[(\alpha - \frac{8}{3})\underline{i} + (\beta - \frac{8}{3})\underline{j}] \cdot [3\underline{i} + \underline{j}] = 0$
$3(\alpha - \frac{8}{3}) + 1(\beta - \frac{8}{3}) = 0$
$3\alpha - 8 + \beta - \frac{8}{3} = 0$
$9\alpha + 3\beta = 32$ —— ②

① න් $\alpha = 3 - 2\beta$
$27 - 18\beta + 3\beta = 32$
$\beta = -\frac{1}{3} \qquad \alpha = \frac{11}{3}$

$\therefore \overrightarrow{OD} = \frac{11}{3}\underline{i} - \frac{1}{3}\underline{j}$



0 වටා F_1 හා F_2 බල දෙකෙහි ඝූර්ණය G_1 නම්
$G_1 = (4 \times 2) - (2 \times 3) + (1 \times 4) - (3 \times 2)$
$= 0$
A වටා F_1 හා F_2 බල දෙකෙහි ඝූර්ණය G_2 නම්,
$G_2 = (4 \times 1) - (2 \times 2) + (1 \times 3) - (3 \times 1)$
$= 0$

I 0 වටාබල හතරෙහි ඝූර්ණය = 0 වටා F_3 හා F_4 හි ඝූර්ණය
$G = 0 + (6 \times 1) + (9 \times 6) = 60$ Nm

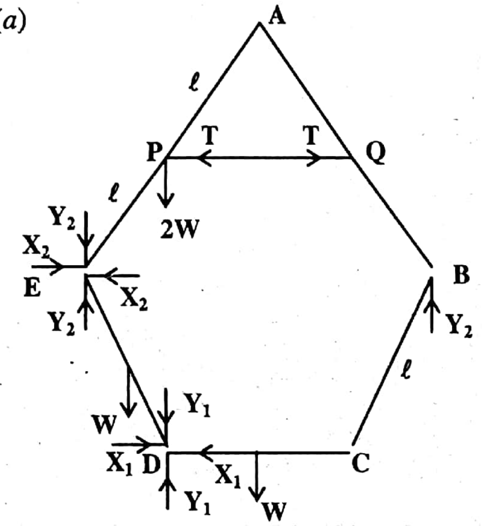
II බල විභේදනයෙන්,
$\rightarrow X = 2 + 3 + 6 + 9 = 20$
$\uparrow Y = 4 + 1 + 12 + 3 = 20$
සම්ප්‍රයුක්ත බලය y - අක්ෂය $N \equiv (0, y_1)$ හි දී ඡේදනය කරයි නම් 0 වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,
$0 \quad 60 = y_1 \times 20 \Rightarrow y_1 = 3 \Rightarrow N \equiv (0, 3)$
(0, -4) ලක්ෂ්‍යය K නම්,
K හි දී R හා -R බල දෙකක් යොදමු.

එවිට N හි වූ R බලය ($20\sqrt{2}$, x - අක්ෂය සමඟ 45° සාදන) හා K හි වූ -R බලය දක්ෂිණාවර්ත ඝූර්ණය $20\sqrt{2} \times 7 \sin 45° = 140$ Nm වන යුග්මයකට හා K හි වූ R බලයකට ඌනනය වේ.
තනි බලයේ ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය
$y - (-4) = 1(x - 0) \Rightarrow y - x + 4 = 0$ වේ.

මෙම රේඛාව $\left(\frac{11}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ ලක්ෂ්‍යය තෘප්ත කරයි.

එනම් මුල් සටහනට අනුව D ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි.

15. (*a*)



පද්ධතිය A හරහා ඇති සිරස් රේඛාව වටා සමමිතික වේ.

∴ BCDE කොටසේ සමතුලිතතාව

සලකා ↑ විභේදනයෙන්

$$2Y_2 - 3W = 0 \Rightarrow Y_2 = \frac{3W}{2}$$

DE දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සලකා D වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$\curvearrowleft W \times \frac{\ell}{2}\cos 60^\circ + X_2 \times \ell \sin 60^\circ = Y_2 \times \ell \cos 60^\circ$$

$$W \times \frac{\ell}{4} + X_2 \times \ell \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3W}{2} \times \frac{\ell}{2}$$

$$X_2 = \frac{W}{\sqrt{3}}$$

AE දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සලකා A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$\curvearrowleft 2W \times \ell \cos 60^\circ + \frac{3W}{2} \times 2\ell \cos 60^\circ + \frac{W}{\sqrt{3}} \times 2\ell \sin 60^\circ = T \times \ell \sin 60^\circ$$

$$2W\cancel{\ell} \times \frac{1}{2} + \frac{3W}{2} \times 2\cancel{\ell} \times \frac{1}{2} + \frac{W}{\sqrt{3}} \times 2\cancel{\ell} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = T \times \cancel{\ell}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$W + \frac{3W}{2} + W = \frac{T\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{7W}{2} = \frac{T\sqrt{3}}{2} \Rightarrow T = \frac{7W}{\sqrt{3}}$$

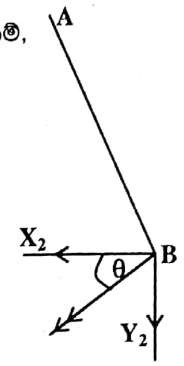
AB මත B හි දී ප්‍රතික්‍රියාව $= \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}$

$$= \sqrt{\frac{W^2}{3} + \frac{9W^2}{4}}$$

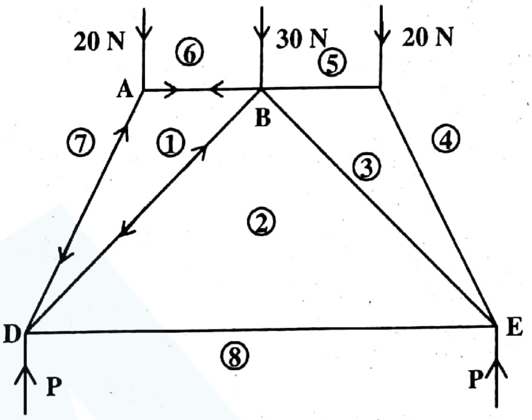
$$= W\sqrt{\frac{31}{12}} = \frac{w}{2}\sqrt{\frac{31}{3}}$$

එය තිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදයි නම්,

$$\tan\theta = \frac{Y_2}{X_2} = \frac{\frac{3W}{2}}{\frac{W}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$



(*b*)

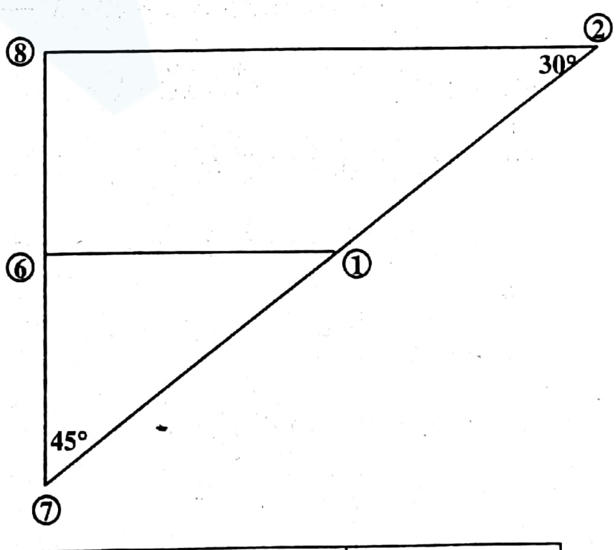


රාමු සැකිල්ලේ සමතුලිතතාවය සලකා ↑ විභේදනයෙන්

$P + P = 70$

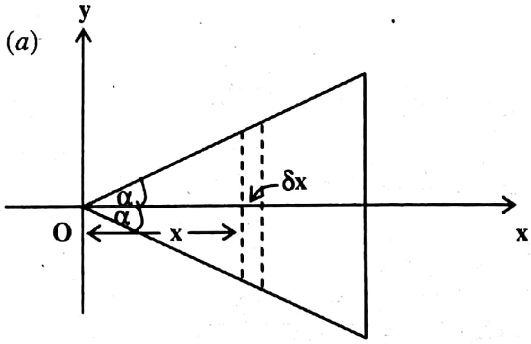
$P = 35$ N

පළමු ව A සන්ධියටත් දෙවනුව D සන්ධියටත් ප්‍රත්‍යාබල සටහන් පහත ඇඳ ඇත.



දණ්ඩ	ප්‍රත්‍යාබලය	විශාලත්වය
AB	තෙරපුම	20 N
AD	තෙරපුම	$20\sqrt{2}$ N
DB	තෙරපුම	30 N
DE	ආතතිය	$20 + 15\sqrt{3}$ N

16. (*a*)



සමමිතිකත්වයෙන් කේතුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටයි. එය G_1 නම් $G_1 \equiv (\bar{x}_1, 0)$ ආකාරය වේ.
y - අක්ෂයේ සිට x දුරින් වූ ඝනකම δx වූ තුනී තැටියක් සලකමු.
කේතුවේ අඩ සිරස් කෝණය α නම්, (මෙහි $\tan\alpha = \frac{a}{h}$)
තැටියේ අරය $= x\tan\alpha$
තැටියේ පරිමාව $= \pi(x\tan\alpha)^2\,\delta x$
ඒකක පරිමාවක ස්කන්ධය ρ නම්,
තැටියේ ස්කන්ධය $= \pi x^2\tan^2\alpha.\delta x\rho$
තැටියේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට y - අක්ෂයේ සිට ඇති දුර = x
ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ අර්ථ දැක්වීමට අනුව,

$$\bar{x}_1 = \left[\int_0^h \pi x^2\tan^2\alpha\rho\, dxg\, x\right] \Big/ \left[\int_0^h \pi x^2\tan^2\alpha\, \rho g dx\right]$$

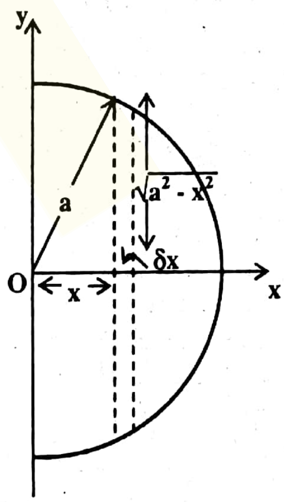
$$= \pi\rho\tan^2\alpha\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^h \Big/ \pi\rho\tan^2\alpha\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$$

$$= \frac{h^4}{4}\Big/\frac{h^3}{3}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{3}{4}h$$

$$\therefore G_1 \equiv \left(\frac{3}{4}h, 0\right)$$

සමමිතිකත්වයෙන්, ඝන අර්ධ ගෝලයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටයි.
එය $G_2 \equiv (\bar{x}_2, 0)$ ආකාරය වේ.
මුල් කොටසට අනුව,
තුනී තැටියක් සලකමු.

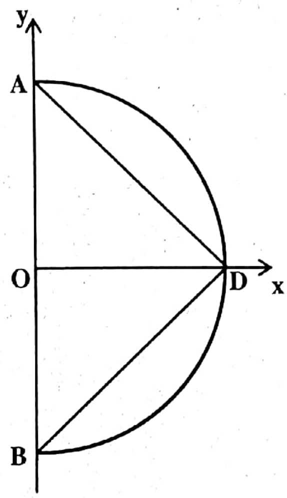


$$\bar{x} \equiv \frac{\int_0^a \pi(a^2 - x^2)\, dx\, \rho.x}{\int_0^a \pi(a^2 - x^2)\, dx\, \rho}$$

$$= \frac{\pi\rho\left[a^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a - \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a\right]}{\pi\rho\left[a^2\left(x\right)_0^a - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a\right]}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}a^4}{\frac{2}{3}a^3} = \frac{3}{8}a$$

$$G_2 \equiv \left(\frac{3}{8}a, 0\right)$$



අර්ධ ගෝලය සෑදී ද්‍රව්‍යයේ ඒකක පරිමාවක ස්කන්ධය ρ

නම් $\frac{2}{3}\pi a^2\rho = M$

ඉවත් කරන AOBD කේතුවේ

ස්කන්ධය $= \frac{1}{3}\pi a^3\rho = \frac{M}{2}$ වේ.

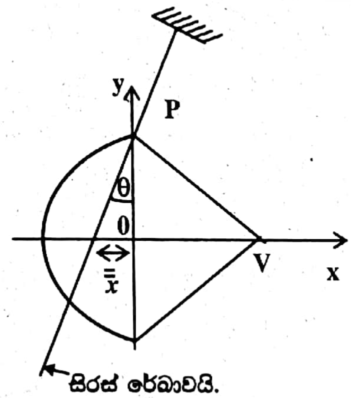
$\therefore$ R ඝන වස්තුවේ ස්කන්ධය $= \frac{M}{2}$ වේ.

සූර්ණ ගැනීමෙන්

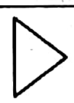
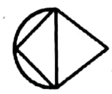
$$Mg \times \frac{3a}{8} - \frac{Mg}{2} \times \frac{a}{4} = \frac{Mg}{2} \times \bar{x}$$

$\bar{x} = \frac{a}{2}$ බව ලැබේ.

වස්තුව	බර	ගු.කේ. ට y අක්ෂයේ සිට දුර
	Mg	$\frac{3}{8}a$
	$\frac{Mg}{2}$	$\frac{a}{4}$
	$\frac{Mg}{2}.$	$\bar{x}$



සිරස් රේඛාවයි.

වස්තුව	බර	ගු.කේ. ට y අක්ෂයේ සිට දුර
	$\frac{Mg}{2}$	$-\frac{a}{2}$
	$\frac{Mg}{2}$	$\frac{a}{4}$
	Mg	$\bar{\bar{x}}$

සූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$Mg\bar{\bar{x}} = \frac{Mg}{2}\left(-\frac{a}{2}\right) + \frac{Mg}{2}\left(\frac{a}{4}\right)$$

$\bar{\bar{x}} = \frac{-a}{8}$; OD දෙසට වේ.

P ගෙන් එල්ලූ විට OV රේඛාව තිරස සමඟ සාදන කෝණය θ වේ. එවිට $\tan\theta = \frac{\bar{\bar{x}}}{OP} = \frac{a/8}{a} = \frac{1}{8}$

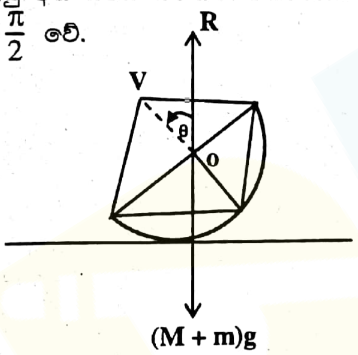
OV රේඛාව තිරස් වීම සඳහා V හි ඇඳිය යුතු අංශුවේ ස්කන්ධය m නම්, y - අක්ෂය වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$M \times \frac{a}{8} = m \times (OV)$$
$$= m \times a \Rightarrow m = \frac{M}{8} \text{ වේ.}$$

එනම් V ශීර්ෂයෙන් $\frac{M}{8}$ ස්කන්ධය ඇති අංශුවක් ඇඳූ විට සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O වේ.

∴ පහත රූප සටහනට අනුව අර්ධ ගෝලාකාර කොටසේ වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් තිරස් තළය ස්පර්ශ කරමින් සමතුලිතතාවයේ පිහිටයි.

∴ OV රේඛාව උඩු අත් සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදයි නම් $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ වේ.



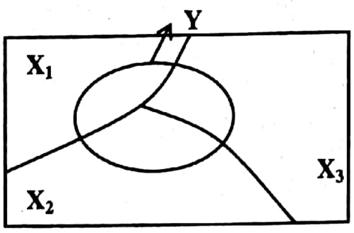
17. (a) X_1 ; ගමන සඳහා යතුරු පැදිය යොදා ගැනීම.
X_2 ; ගමන සඳහා පාපැදිය යොදා ගැනීම.
X_3 ; ගමන පයින් යෑම.
Y ; ගමනේ දී අනතුරක් සිදු වීම.

$P(X_1) = p$, $P(X_2) = 2p$, $P(X_3) = 3p$

X_1, X_2 හා X_3 අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර හා නිරවශේෂ සිද්ධීන් බැවින්

$$P(X_1) + P(X_2) + P(X_3) = p + 2p + 3p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{6}$$

$P(Y|X_1) = \frac{1}{5}$, $P(Y|X_2) = \frac{1}{10}$ හා $P(Y|X_3) = \frac{1}{20}$ බව දී ඇත.



මුළු සම්භාවිතාව පිළිබඳ ප්‍රමේයයට අනුව

$$P(Y) = P(Y|X_1)\,P(X_1) + P(Y|X_2)\,P(X_2) + P(Y|X_3)\,P(X_3)$$

$$= \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{10} \times \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{1}{20} \times \frac{3}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{40} = \frac{11}{120}$$

(i) අනතුරක් සිදුව ඇතැ'යි දී ඇතිවිට ඔහු යතුරු පැදියෙන් ගමන් කරමින් තිබීමේ සම්භාවිතාව $= P(X_1|Y)$

බේස් ප්‍රමේයට අනුව,

$$P(X_1|Y) = \frac{P(Y|X_1)\,P(X_1)}{P(Y)}$$

$$= \frac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{6}}{\frac{11}{120}} = \frac{1}{30} \times \frac{120}{11} = \frac{4}{11}$$

(ii) $$P(X_2|Y) = \frac{P(Y|X_2)\,P(X_2)}{P(Y)}$$

$$= \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{6}}{\frac{11}{120}} = \frac{1}{30} \times \frac{120}{11} = \frac{4}{11}$$

(iii) එවිට $P(X_3|Y) = 1 - \left(\frac{4}{11} + \frac{4}{11}\right) = \frac{3}{11}$

අඩු ම අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව ඇත්තේ මිනිසා පයින් යන විට දී ය.

$(\therefore \frac{3}{11} < \frac{4}{11}$ නිසා)

∴ ආරක්ෂිතම ක්‍රමය වන්නේ පයින් ගමනේ යෙදීමයි.

(b)

දිග (m)x	99.8	99.9	100.0	100.1	100.2	100.3	100.4
සංඛ්‍යාතය f	5	7	12	33	25	15	3

පරිණාමනය $y = \frac{x - \bar{x}}{d}$ බව දී ඇත. මෙහි $\bar{x}_a = 100.1$ හා $d = 0.1$ වේ.

ඒ අනුව විස්තෘත වගුව පහත දැක්වෙන පරිදි සකස් කර ගන්න

$$x = 99.8 \text{ විට } y = \frac{99.8 - 100.1}{0.1} = \frac{-0.3}{0.1} = -3$$

$$x = 99.9 \text{ විට } y = \frac{99.8 - 100.1}{0.1} = \frac{-0.2}{0.1} = -2$$

f	5	7	12	33	25	15	3
y	-3	-2	-1	0	1	2	3
y^2	9	4	1	0	1	4	9

$$\bar{y} = \frac{\Sigma fy}{\Sigma fi}$$

$$= \frac{(5 \times -3) + (7 \times -2) + (12 \times -1) + 0 + (25 \times 1) + (15 \times 2) + (3 \times 3)}{100}$$

$$= \frac{-15 - 14 - 12 + 25 + 30 + 9}{100} = \frac{23}{100} = 0.23$$

ඉහත පරිණාමනයට අනුව $dy_i = x_i - \bar{x}_a$

$$\frac{\Sigma dy_i}{\Sigma f_i} = \frac{\Sigma x_i}{\Sigma f_i} - \frac{\Sigma \bar{x}_a}{\Sigma f_i}$$

$$d\bar{y} = \bar{x} - \bar{x}_a$$

$$\bar{x} = d\bar{y} + \bar{x}_a$$

$$= 0.1 \times 0.23 + 100.1$$

$$= 0.023 + 100.1$$

$$\bar{x} = \underline{\underline{100.123}}$$

y හි විචලතාව

$S_y^2 = \frac{1}{\Sigma f_i} \Sigma fy^2 - \bar{y}^2$ වේ.

$$\Sigma fy^2 = (5 \times 9) + (7 \times 4) + (12 \times 1) + (33 \times 0) + (25 \times 1) + (15 \times 4) + (3 \times 9)$$

$$= 197$$

$$\frac{1}{\Sigma f_i} \Sigma fy^2 = \frac{1}{100} \times 197 = 1.97$$

$\bar{y} = 0.23$ නිසා $\bar{y}^2 = 0.0529$

$$\therefore S_y^2 = 1.97 - 0.0529$$

$$= 1.9171$$

ඒකජ පරිණාමනය $x = dy + \bar{x}_a$

$Var(x) = d^2 \, var(Y)$, මෙහි $d = 0.1$ වේ.

එනම් $S_y^2 = d^2 S_y^2$

$$= (0.1)^2 \times 1.9171$$

$\therefore$ x හි සම්මත අපගමනය $\sqrt{S_x^2}$ බැවින්

$$S_x = \sqrt{(0.1)^2 \times 1.9171}$$

$$= 0.1 \times 1.385$$

$$= 0.1385$$

$$\therefore \underline{\underline{S_x = 0.139 \text{ m}}}$$

*** ***