අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය - 2012 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)

General Certificate of Education (Adv. Level) Examination – August 2012 (New Syllabus)

සංයුක්ත ගණිතය I / පැ තුනයි

Combined Mathematics I / Three hours

වැදගත් :
- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.
- **A කොටස** (ප්‍රශ්න 01 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17)
- **A කොටස**

  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
- **B කොටස**

  ප්‍රශ්න **පහකට** **පමණක්** පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.

  නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු A කොටස, B කොටසට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.

  ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි B කොටස **පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

A කොටස

01. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය යොදාගෙන, ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ බව සාධනය කරන්න.

02. ADDING යන වචනයේ අකුරු සියල්ල ම යොදාගෙන සෑදිය හැකි පිළියෙල කිරීම් ගණන සොයන්න. මෙම පිළියෙල කිරීම්වලින් කොපමණ ගණනක ප්‍රාණාක්ෂර (Vowels) වෙන් ව පවතී ද'යි සොයන්න.

03. p නිශ්ශූන්‍ය නියතයක් වන $(1 + px)^{12}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x හි සංගුණකය හා x^2 හි සංගුණකය පිළිවෙළින් $-q$ හා $11q$ නම් p හා q හි අගයන් සොයන්න.

04. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{2 \sin^2 3x - x^2 \cos x} = \dfrac{1}{17}$ බව පෙන්වන්න.

05. $2e^x + 3e^{-x} = A(2e^x - e^{-x}) + B(2e^x + e^{-x})$ වන අයුරින් වූ A හා B නියතයන් සොයන්න.

එනයින් $\int \dfrac{2e^x + 3e^{-x}}{2e^x + e^{-x}} \; d_x$ සොයන්න.

06. l යනු (4, 0) හා (0, 2) ලක්ෂ්‍ය ඔස්සේ යන සරල රේඛාවක් ද, m යනු (2, 0) හා (0, 3) ලක්ෂ්‍ය ඔස්සේ යන සරල රේඛාවක් ද යයි ගනිමු. l හා m සරල රේඛාවල සමීකරණ සොයන්න. එනයින් l හා m හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හා මූල ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

07. C නම් වක්‍රයක් $y = 4 - 4x + 3x^2 - x^3$ සමීකරණය මගින් දෙනු ලබයි. C වක්‍රයට (1, 2) ලක්ෂ්‍යයේ දී අඳින ලද ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න. මෙම ස්පර්ශකය (1, 2) ලක්ෂ්‍යයේ දී $y^2 = 4x$ වක්‍රයට අඳින ලද ස්පර්ශකයට ලම්බ බව පෙන්වන්න.

08. (2, 0) හා (0, 2) ලක්ෂ්‍ය ඔස්සේ යන ඕනෑම වෘත්තයක සමීකරණය $x^2 + y^2 - 4 + \lambda(x + y - 2) = 0$ ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි λ යනු පරාමිතියකි. මෙම වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය හා අරය λ ඇසුරින් සොයන්න.

09. AB විෂ්කම්භය සහිත S වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න. මෙහි $A = (1, 3)$ හා $B = (2, 4)$ වේ. තව ද S වෘත්තය ප්‍රලම්බ ලෙස කපන $(-1, 2)$ කේන්ද්‍රය සහිත වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

10. $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ යයි ගනිමින් $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න. $\tan\left(\frac{23\pi}{12}\right)$ හි අගය **අපෝහනය** කරන්න.

*** ***

B කොටස

11. (a) $f(x) \equiv x^2 + 2kx + k + 2$ යැයි ගනිමු ; මෙහි k යනු තාත්ත්වික නියතයකි.

(i) $f(x)$ යන්න $(x - a)^2 + b$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න ; මෙහි a හා b යනු k ඇසුරෙන් නිර්ණය කළ යුතු නියත වෙයි.

කලනය භාවිතයෙන් තොරව, $f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යය සොයා මෙම ලක්ෂ්‍යය අවමයක් බව පෙන්වන්න.

$f(x)$ හි අවම අගය k ඇසුරෙන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $y = f(x)$ වක්‍රය

(α) $-1 < k < 2$ නම්, x - අක්ෂයට ඉහළින් මුළුමනින් ම පිහිටන බව,

(β) $k = -1$ හෝ $k = 2$ හෝ නම්, x - අක්ෂය ස්පර්ශ කරන බව,

(γ) $k < -1$ හෝ $k > 2$ හෝ නම්, x - අක්ෂය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී කපන බව පෙන්වන්න.

(ii) $k < -2$ ම නම් පමණක් m හි සියලු තාත්ත්වික හා පරිමිත අගයන් සඳහා $y = mx$ සරල රේඛාව $y = f(x)$ වක්‍රය තාත්ත්වික හා ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී ඡේදනය කරන බව සාධනය කරන්න.

(b) $g(x) \equiv x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 2$ යැයි ගනිමු.

ශේෂ ප්‍රමේයය නැවත නැවත යොදාගනිමින් $(x+1)^2$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

$g(x)$ යන්න $(x - a)^2 (x^2 + bx + c)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න ; මෙහි a, b හා c යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වෙයි.

x හි සියලු තාත්ත්වික අගයන් සඳහා $g(x) \geq 0$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

12. (a) සියලු $x \in \mathbf{R}$ සඳහා $12x^2 + 1 \equiv A(2x - 1)^3 + B(2x + 1)^3$ වන පරිදි A හා B නියත සොයන්න.

ඒ නයින්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r = f(r) - f(r+1)$, වන පරිදි $f(r)$ නිර්ණය කරන්න ; මෙහි $u_r = \dfrac{12r^2 + 1}{(2r-1)^3(2r+1)^3}$ වෙයි.

$\sum_{r=1}^{n} u_r = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2(2n+1)^3}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා, $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ හි අගය සොයන්න.

(b) එක ම රූපයක, $y = |2x - 1|$ හා $y = |x| + \dfrac{5}{3}$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

ඒ නයින්, $3|x| \geq |6x - 3| - 5$ සඳහා වන x හි අගය කුලකය සොයන්න.

ඕනෑම $k \in \mathbb{R}$ සඳහා $y = |x| - k$ හි ප්‍රස්තාරය **එක ම රූපයේ සලකමින්,** l හි කවර අගයක් සඳහා $3|x| = |6x - 3| + l$ සමීකරණයට තාත්ත්වික විසඳුම් එකක් පමණක් තිබේ ද'යි සොයන්න

13. (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ යනු 2×2 න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු.

$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 2\mathbf{I} = \mathbf{O}$ බව පෙන්වන්න ; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු 2×2 ඒකක න්‍යාසය හා $\mathbf{O}$ යනු 2×2 ශුන්‍ය න්‍යාසය වේ.

ඒ නයින්, $\mathbf{A}^{-1}$ සොයන්න.

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ යනු 2×2 න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු.

$\mathbf{BA} = \mathbf{B}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින්, $\mathbf{BC} = \mathbf{O}$ වන පරිදි $\mathbf{C}$ නම් නිශ්ශුන්‍ය 2×2 න්‍යාසයක් සොයන්න.

(*b*) z යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් යැයි ගනිමු.

$|z|^2 = z\bar{z}$ හා $|z| \geq \text{Re}\, z$ බව සාධනය කරන්න.

ඒ නයින්, ඕනෑම z_1 හා z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් සඳහා $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$ බව පෙන්වන්න.

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ බව අපෝහනය කරන්න.

$|z - i| < \frac{1}{2}$ නම්, $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$|z - i| \leq \frac{1}{2}$ හා $\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{3}$ සඳහා z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ආර්ගන් සටහනෙහි නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය කුලකය අඩංගු R පෙදෙස අඳුරු කරන්න.

14. (*a*) පළමු ව්‍යුත්පන්නය පමණක් සලකමින් $\frac{x^3}{x^4 + 27}$ හි අවම හා උපරිම අගයන් සොයන්න.

$y = \frac{x^3}{x^4 + 27}$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින්, k හි කවර අගයන් සඳහා $kx^4 - x^3 + 27\,k = 0$ සමීකරණයට

(i) තාත්ත්වික සමපාත මූල දෙකක් තිබේ ද'යි,
(ii) තාත්ත්වික සමපාත මූල තුනක් තිබේ ද'යි,
(iii) තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් තිබේ ද'යි,
(iv) තාත්ත්වික මූල නොතිබේ ද'යි

සොයන්න ; මෙහි k තාත්ත්වික වෙයි.

(*b*) $AB = a$ හා $BC = b\ (< a)$ සහිත $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයක් සලකමු. P යනු CD මත විචලනය විය හැකි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු. $AP + PB$ හි දිග $L(x)$ වෙයි ; මෙහි $DP = x$ වෙයි.

$L(x) = \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a - x)^2 + b^2}$ බව පෙන්වන්න.
$L(x)$ හි අවම දිග හා මෙම අවම දිගට අනුරූප P හි පිහිටුම CD මත සොයන්න.
$L(x)$ හි උපරිම දිග ද සොයන්න.

15. (a) $\int_0^{\pi} (\sin^3 x - \cos^3 x)\, dx = \frac{8}{3}$ බව පෙන්වන්න.
(මෙම උත්තරය දෝෂ සහිත ය.)

(b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදාගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $\int x^3 \tan^{-1} x\, dx$ සොයන්න.

(c) භින්න භාග යොදාගනිමින් $\int \frac{2x^2 - 3}{(x - 2)^2 (x^2 + 1)}\, dx$ සොයන්න.

16. (*a*) සමාන්තර නොවන $l_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ හා $l_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ යන සරල රේඛා අතර කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ සොයන්න.
$2x - 11y - 10 = 0$ හා $10x + 5y - 2 = 0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා දෙක අතර සුළු කෝණයේ සමච්ඡේදකය, $4x - 7y - 8 = 0$ හා $8x + y - 4 = 0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා දෙක අතර මහා කෝණයේ සමච්ඡේදකය ම බව පෙන්වන්න.

(*b*) g හා f හි සියලු අගයන් සඳහා $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy - r^2 = 0$ වෘත්තය $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ වෘත්තයේ පරිධිය සමච්ඡේදනය කරන බව පෙන්වන්න.
$y + 5 = 0$ සරල රේඛාව ස්පර්ශ කරමින් හා $x^2 + y^2 - 4 = 0$ වෘත්තයේ පරිධිය සමච්ඡේදනය කරමින් $(1, 1)$ ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ වෘත්ත දෙකක් ඇඳිය හැකි බව පෙන්වන්න.
මෙම වෘත්ත දෙකෙහි සමීකරණ සොයන්න.

17. (a) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$ බව සාධනය කරන්න.

$$a = (b - c)\cos\frac{A}{2}\ \operatorname{cosec}\frac{B - C}{2}$$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(b) θ හි ඕනෑම තාත්ත්වික අගයක් සඳහා $\tan\theta - 2\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ ප්‍රකාශනයට -7 හා 1 අතර කිසිම අගයක් ගත නොහැකි බව පෙන්වන්න.

(c) $5\cos^2\theta + 18\cos\theta\sin\theta + 29\sin^2\theta$ යන්න, $a + b\cos(2\theta + \alpha)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න ; මෙහි a හා b යනු නියත වන අතර α යනු θ වලින් ස්වායත්ත කෝණයක් වෙයි.
ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ,
$8(\cos x + \sin x)^2 + 2(\cos x + 5\sin x)^2 = 19$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

*** ***

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය - 2012 - අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)

General Certificate of Education (Adv. Level) Examination – August 2012 (New Syllabus)

සංයුක්ත ගණිතය II / පැ තුනයි

Combined Mathematics II / Three hours

වැදගත් :
- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.
- **A කොටස** (ප්‍රශ්න 01 - 10 සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17)
- **A කොටස**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
- **B කොටස**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටස, B කොටසට** උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාගශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

A කොටස

01. දකුණු දිශාවට සෘජු මාර්ගයක් දිගේ u km h^{-1} වේගයෙන් දුවන පිරිමි ළමයෙකුට සුළඟක් බටහිර දිශාවට හමා යනු දනේ. උතුරු දිශාවට සෘජු මාර්ගයක් දිගේ එම වේගයෙන් ම ඔහු දුවනවිට ඔහුට සුළඟ නිරිත දිශාවට හමා යනු දනේ. සුළඟේ චලිත සඳහා සාපේක්ෂ ප්‍රවේගවල ත්‍රිකෝණ **එක ම රූප සටහනක** අඳින්න.
ඒ නයින්, සුළඟේ සත්‍ය වේගය හා දිශාව සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

02. වැඩිතම බෑවුම් රේඛාව තිරසට α කෝණයකින් ආනත බෑවුමක් දිගේ එහි මුදුනේ සිට නිශ්චලතාවෙන් ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් මුදා හැරේ. මුදුනේ සිට d දුරක් පහළට චලනය වීම සඳහා අංශුවට තත්පර එකක් ගතවේ නම්, අංශුවේ චලිතයට එරෙහි ප්‍රතිරෝධය වන R නියතයක් යැයි උපකල්පනය කරමින්, $R = m(g \sin \alpha - 2d)$ බව පෙන්වන්න.
මුදුනේ සිට ගමන් කරන ලද දුර d වන විට, අංශුවේ ප්‍රවේගය ද සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

03. සුමට තිරස් තලයක සිට h උසින් පිහිටි, ස්කන්ධය m වූ සුමට අංශුවක් ගුරුත්වය යටතේ නිශ්චලතාවෙන් වැටෙන අතර, තලයේ ගැටී පොලා පනී. ගැටීම නිසා ඇතිවන චාලක ශක්ති හානිය $\frac{mgh}{4}$ වේ නම්, අංශුව හා තලය අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය සොයන්න. අංශුව $\frac{3h}{4}$ උසකට පොලා පනින බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

04. ස්කන්ධය m වූ P නම් අංශුවක් දිග l වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරකට සම්බන්ධකර ඇති අතර, තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර අචල O නම් ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධකර ඇත. සිරස් තලයක අංශුව නිදහස් ලෙස එල්ලෙමින් පවතින විට සිරස් තලයේ OP ට ලම්බ ව $\sqrt{2gl}$ ප්‍රවේගයක් අංශුවට දෙනු ලැබෙයි. ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යොදාගනිමින්, OP යටි අත් සිරස සමඟ $\frac{\pi}{3}$ කෝණයක් සාදන විට P අංශුවේ ප්‍රවේගය සොයන්න. මෙම මොහොතේ දී තන්තුවේ ආතතිය $\frac{3}{2}mg$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

05. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\,\mathbf{j}$ වේ ; මෙහි $\mathbf{i}$ හා $\mathbf{j}$ ට සුපුරුදු අර්ථ ඇත. $\mathbf{b}$ යනු විශාලත්වය $\sqrt{3}$ සහිත දෛශිකයකි. $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ දෛශික අතර කෝණය $\frac{\pi}{3}$ නම්, $\mathbf{b}$ යන්න $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, ආකාරයෙන් සොයන්න ; මෙහි $x(<0)$ හා y යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

06. බර W හා දිග $2a$ වන AB ඒකාකර දණ්ඩක් එහි A කෙළවර රළු තිරස් පොළවක් මත ද, B කෙළවර AB අඩංගු සිරස් තලයට ලම්බ සුමට සිරස් තාප්පයකට එරෙහි ව ද සිටින සේ සමතුලිතතාවේ පවතී. දණ්ඩ සහ පොළොව අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\sqrt{\frac{3}{2}}$ නම්, දණ්ඩ ලිස්සා යෑමට ආසන්න මොහොතේ දී දණ්ඩේ තිරසට ආනතිය සොයන්න.

07. A, B හා C යනු Ω නියැදි අවකාශයෙහි අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර හා නිරවශේෂ සිද්ධි යැයි ගනිමු. $P(A) = 2p$, $P(B) = p^2$ හා $P(C) = 4p - 1$ නම්, P හි අගය සොයන්න.

08. A, B හා C යනු Ω නියැදි අවකාශයෙහි ස්වායත්ත සිද්ධි තුනක් යැයි ගනිමු.
A හා $(B \cup C)$ යනු ස්වායත්ත සිද්ධි බව පෙන්වන්න.

09. නිරීක්ෂණ 100 ක මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් 30 හා 4.1 ලෙස ගණනයකර ඇත. එක් නිරීක්ෂණයක්, නිවැරදි අගය 30 වෙනුවට 40 සාවද්‍ය ලෙස ලේඛනගතකර ඇති බව පසුව සොයාගෙන ඇත. නිරීක්ෂණ 100 හි නිවැරදි මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය ආගණනය කරන්න.

10. ජ්වකීය සිසුන්ට දෙන ලද පරීක්ෂණයක් සඳහා A හා B පාසල්වල මධ්‍යන්‍ය ලකුණු පිළිවෙළින් 31 හා 45 වෙයි. A පාසලෙහි ලකුණුවල ව්‍යාප්තියේ සම්මත අපගමනය 5 වෙයි. ප්‍රතිඵල සැසඳීම සඳහා B පාසලෙහි මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය, A පාසලෙහි ඒවාට සමාන ද, B පාසලෙහි ලකුණු 85 පරිණාමනය යටතේ ලකුණු 63 ද වන පරිදි රේඛීය පරිණාමනයක් මගින් B පාසලෙහි ලකුණු පරිමාණය කෙරේ. රේඛීය පරිණාමනය සොයා, **ඒ නයින්**, B පාසලෙහි ලකුණුවල ව්‍යාප්තියේ මුල් සම්මත අපගමනය සොයන්න.

*** ***

B කොටස

(මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි g මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දක්වෙයි.)

11. (a) P නම් අංශුවක් O ලක්ෂ්‍යයේ දී ගුරුත්වය යටතේ u ප්‍රවේගයෙන් සිරස් ලෙස ඉහළට ප්‍රක්ෂේප කෙරේ. $\frac{u}{2g}$ කාලයකට පසු, Q නම් තවත් අංශුවක් O ලක්ෂ්‍යයේ දී ගුරුත්වය යටතේ $v\ (>u)$ ප්‍රවේගයෙන් සිරස් ලෙස ඉහළට ප්‍රක්ෂේප කෙරේ. A යනු P අංශුව ළඟා වන ඉහළතම ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. P හා Q අංශු A ලක්ෂ්‍යයේ දී හමුවෙයි. P හා Q අංශුවල සම්පූර්ණ චලිත සඳහා ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාර **එක ම රූප සටහනක** අඳින්න.

මෙම ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාර යොදාගෙන,

(i) $OA = \frac{u^2}{2g}$ බව,

(ii) $v = \frac{5u}{4}$ හා A ලක්ෂ්‍යයේ දී Q අංශුවේ ප්‍රවේගය $\frac{3u}{4}$ බව,

(iii) Q අංශුව ඉහළතම ලක්ෂ්‍යයට ළඟාවන විට P අංශුව, O ලක්ෂ්‍යයේ සිට පිහිටන උස $\frac{7u^2}{32g}$ බව පෙන්වන්න.

(b) ස්කන්ධය M kg වන මෝටර් රථයක් සියලු වේග සඳහා නියතයක් වන R ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහිව තැනිතලා මාර්ගයක ගමන් කෙරේ. එන්ජිමෙහි උපරිම බලය H kW හා තැනිතලා මාර්ගයක මෝටර් රථයේ උපරිම වේගය v ms^{-1} නම්, M, H හා v ඇසුරෙන් R ප්‍රතිරෝධය සොයන්න.

තිරසට α කෝණයකින් ආනත සෘජු මාර්ගයක් දිගේ

(i) $\frac{v}{3}$ m s^{-1} වේගයෙන් කෙළින් ම ඉහළට,

(ii) $\frac{v}{2}$ m s^{-1} වේගයෙන් කෙළින් ම පහළට,

චලනය වන විට M, H, v, g හා α ඇසුරෙන් මෝටර් රථයේ ත්වරණය සොයන්න.

(ii) අවස්ථාවේ දී මෝටර් රථයේ ත්වරණය (i) අවස්ථාවේ දී මෝටර් රථයේ ත්වරණය මෙන් දෙගුණයක් නම්, M, H, v හා g ඇසුරෙන් $\sin\alpha$ සොයන්න.

මෙම අවස්ථාවේ දී, මෝටර් රථය මාර්ගයේ කෙළින් ම ඉහළට චලනය වන විට එයට ලබාගත හැකි උපරිම වේගය v ඇසුරෙන් සොයන්න.

12. (a) O ලක්ෂ්‍යයක සිට k උසකින් පිහිටි C නම් ලක්ෂ්‍යයක දී තිරසට θ කෝණයකින් ආනතව u ප්‍රවේගයෙන් අංශුවක් ගුරුත්වය යටතේ සිරස් තලයක ප්‍රක්ෂේප කෙරේ. ප්‍රක්ෂේපණ තලය මත O ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ තිරස් හා සිරස් රේඛා පිළිවෙළින් Ox හා Oy අක්ෂ ලෙස ගනිමින් සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසියානු ඛණ්ඩාංක පද්ධතියක් සලකමු. t කාලයේ දී අංශුව (x,y) ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටයි නම්,

$y = k + x\tan\theta - \frac{gx^2\sec^2\theta}{2u^2}$ බව පෙන්වන්න.

h ධන වන $A(0,h)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී තිරසට α කෝණයකින් ආනතව v ප්‍රවේගයෙන් P නම් අංශුවක් ගුරුත්වය යටතේ සිරස් තලයේ ප්‍රක්ෂේප කෙරේ. එම මොහොතේ දී ම $B\left(0,\frac{h}{2}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී තිරසට $\beta\ (>\alpha)$ කෝණයකින් ආනතව w ප්‍රවේගයෙන් Q නම් තවත් අංශුවක් ගුරුත්වය යටතේ සිරස් තලයේ ප්‍රක්ෂේප කෙරේ. තිරස් දුර d වන ලක්ෂ්‍යයේ දී P හා Q අංශු දෙක හමුවෙයි නම්,

$v\cos\alpha = w\cos\beta$ හා $h = 2d\,(\tan\beta - \tan\alpha)$ බව පෙන්වන්න.

අංශු හමුවීමට ගතවන කාලය $\frac{h}{2(w\sin\beta - v\sin\alpha)}$ බව ද පෙන්වන්න.

(b) තිරස් පොළොවක සිට මීටර 3 ක උසකින් පිහිටි සිවිලිමකට සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක කෙළවරක් සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුව, ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් සවිකර ඇති චලනය විය හැකි සැහැල්ලු සුමට P නම් කප්පියක් යටින් ද, සිවිලිමට සම්බන්ධකර ඇති සැහැල්ලු සුමට කප්පියක් උඩින් ද යවා ඇත. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවරට ස්කන්ධය $M(>m)$ වූ Q නම් අංශුවක් සම්බන්ධකර ඇත. චලනය විය හැකි P කප්පිය හා Q අංශුව පොළවේ සිට පිළිවෙළින් මීටර $\frac{1}{2}$ ක හා මීටර 1 ක උසින් ද, කප්පි සමඟ ස්පර්ශ නොවන තන්තු කොටස් සිරස්ව ද පිහිටන විට පද්ධතිය නිශ්චලතාවෙන් මුදා හැරේ.

Q අංශුවේ ත්වරණය හා තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.

Q අංශුව තත්ත්පර $\sqrt{\dfrac{4M+m}{(2M-m)g}}$ කාලයකට පසුව පොළවට ළඟා වන බව හා P කප්පිය පොළොවේ සිට මීටර $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3M}{4M+m}$ උසකට ඉහළ නගින බව පෙන්වන්න.

13. A හා B යනු සුමට තිරස් මේසයක් මත එකිනෙක අතර දුර $8l$ වන ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. ස්කන්ධය m වූ P නම් සුමට අංශුවක් A හා B අතර, AB මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක තබා ඇත. ස්වාභාවික දිග $3l$ හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය 4λ වන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මගින් A ලක්ෂ්‍යයට ද, ස්වාභාවික දිග $2l$ හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය λ වන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මගින් B ලක්ෂ්‍යයට ද P අංශුව සම්බන්ධ කෙරේ.

P අංශුව C ලක්ෂ්‍යයේ දී සමතුලිතතාවේ පවතී නම්, $AC=\dfrac{42}{11}l$ බව පෙන්වන්න.

P අංශුව AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන M ලක්ෂ්‍යයේ තබා නිශ්චලතාවෙන් මුදා හැරේ. P අංශුව, AB දිගේ A ලක්ෂ්‍යයේ සිට x දුරින් පිහිටන විට තන්තු දෙකෙහි ආතති ලබාගන්න.

$\dfrac{40}{11}l\le x\le 4l$ සඳහා P අංශුවේ චලිත සමීකරණය ලියා දක්වා සුපුරුදු අංකනයෙන්,
$\ddot{x}+\dfrac{11\lambda}{6\,ml}\left(x-\dfrac{42}{11}l\right)=0$ බව පෙන්වන්න.

$y=x-\dfrac{42}{11}l$ යැයි ලිවීමෙන්, $\ddot{y}+\dfrac{11\lambda}{6\,ml}\,y=0$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම $y=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ ආකාරයේ යැයි උපකල්පනය කරමින්, A, B හා ω නියත සොයන්න.

P අංශුව A ලක්ෂ්‍යයේ සිට $\dfrac{41}{11}l$ දුරින් පිහිටන විට එහි ප්‍රවේගය සොයන්න.

14. (a) A හා B යනු O ලක්ෂ්‍යයක් සමඟ ඒකරේඛීය නොවන ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක් යැයි ගනිමු. O ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ යැයි ගනිමු. D යනු $BD=2DA$ වන පරිදි AB මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යය නම්, O ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් D ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය $\dfrac{1}{3}(2\mathbf{a}+\mathbf{b})$ බව පෙන්වන්න.

$\overrightarrow{BC}=k\mathbf{a}$ $(k>1)$ හා O, D හා C ලක්ෂ්‍ය ඒක රේඛීය නම්, k හි අගය හා $OD:DC$ අනුපාතය සොයන්න.

a හා **b** ඇසුරෙන් $\overrightarrow{AC}$ ප්‍රකාශ කරන්න.
තව ද, AC ට සමාන්තරව O ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන රේඛාවට E හි දී AB හමුවේ නම්, $6DE=AB$ බව පෙන්වන්න.

(b) Ox හා Oy සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසියානු අක්ෂ අනුබද්ධයෙන් A, B හා C ලක්ෂ්‍යවල බණ්ඩාංක පිළිවෙළින් $(\sqrt{3},0)$, $(0,-1)$ හා $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},1\right)$ වෙයි. විශාලත්ව නිව්ටන $6P$, $4P$, $2P$ හා $2\sqrt{3}P$ වන බල පිළිවෙළින් OA, BC, CA හා BO පාද දිගේ, අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දක්වෙන දිශාවට ක්‍රියා කරයි. මෙම බලවල සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව y - අක්ෂය කපන ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.

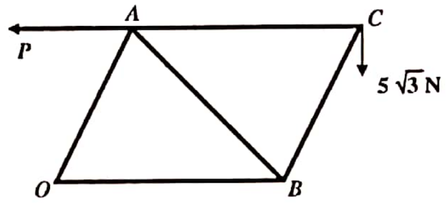
ඒ නයින්, සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

විශාලත්වය නිව්ටන $6\sqrt{3}\,P$ වන වෙනත් බලයක් අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දක්වෙන දිශාවට AB දිගේ, බල පද්ධතියට යොදනු ලැබෙයි. විශාලත්වය නිව්ටන මීටර $10P$ යන යුග්මයකට බල පද්ධතිය ඌනනය වන බව පෙන්වන්න.

15. (a) එක එකක බර W වන AB හා AC ඒකාකාර සමාන දඬු දෙකක්, A හි දී සුමට ලෙස සන්ධිකර ඇති අතර, B හා C කෙළවරවල් සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් සම්බන්ධකර ඇත. එක එකක් තිරසට α කෝණයකින් ආනත සුමට තල දෙකක් මත B හා C කෙළවරවල් පිහිටන සේ දඬු සිරස් තලයක සමතුලිතතාවේ තබා ඇත ; BC තිරස් වන අතර, BC ට ඉහළින් A වෙයි. B හි ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

$\tan\theta>2\tan\alpha$ නම්, තන්තුවේ ආතතිය $\dfrac{1}{2}W(\tan\theta-2\tan\alpha)$ බව පෙන්වන්න ; මෙහි $B\hat{A}C=2\theta$ වේ.
A සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

(b) OA, OB, AC, AB හා BC සැහැල්ලු සමාන දඬු පහක්, රූපයේ දක්වෙන පරිදි රාමුකට්ටුවක් සෑදෙන ආකාරයට, ඒවායේ කෙළවරවල දී සුමට ලෙස සන්ධිකර ඇත.



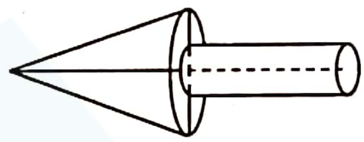
රාමුකට්ටුව O හි දී සුමට ලෙස අසවුකර ඇති අතර, C හි දී නිව්ටන $5\sqrt{3}$ ක බරක් දරයි. OB තිරස් වන පරිදි A හි දී නිව්ටන් P වන තිරස් බලයක් මගින් රාමුකට්ටුව සිරස් තලයක තබා ඇත.

(i) P හි අගය සොයන්න.

(ii) O හි ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

(iii) බෝ අංකනය යෙදීමෙන්, රාමුකට්ටුව සඳහා ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් ඇඳ, ආතති හා තෙරපුම් වෙන්කොට දක්වමින් දඬු සියල්ලෙහි ප්‍රත්‍යාබල සොයන්න.

16. උස h වූ ඒකාකාර ඝන ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, එහි සමමිති අක්ෂය මත, ආධාරකයේ සිට $\frac{1}{4}h$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



රූපයේ දක්වෙන පරිදි එකට සවිකර ඇති ආධාරකයේ අරය $3r$ හා උස h වන ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවකින් හා අරය r හා උස $2h$ වන ඍජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයකින් ඒකාකාර ඝන සංයුක්ත වස්තුවක් සමන්විත වෙයි.

සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, එහි සමමිති අක්ෂය මත, කේතුවේ ශීර්ෂයේ සිට $\frac{5}{4}h$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

එක කෙළවරක් සිවිලිමකට හා අනෙක් කෙළවර කේතුවේ වෘත්තාකාර පතුලේ පරිධියෙහි A නම් ලක්ෂ්‍යයකට සවිකොට ඇති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් සංයුක්ත වස්තුව සිරස් තලයක නිදහසේ එල්ලෙමින් තිබෙයි.

සංයුක්ත වස්තුවේ සමමිති අක්ෂය යටි අත් සිරස සමඟ α කෝණයක් සාදයි නම්, $\tan\alpha = \frac{12r}{h}$ බව පෙන්වන්න.

කේතුවේ ශීර්ෂයේ දී සංයුක්ත වස්තුවේ සමමිති අක්ෂය දිගේ P නම් බලයක් යෙදීමෙන් සංයුක්ත වස්තුවේ සමමිති අක්ෂය තිරස් වන ආකාරයට සංයුක්ත වස්තුව සමතුලිතතාවේ තැබෙයි. P බලය හා තන්තුවේ ආතතිය, W හා α ඇසුරෙන් සොයන්න ; මෙහි W යනු සංයුක්ත වස්තුවේ බර වෙයි.

17. (*a*) මල්ලක සුදු 5 ක්, කළු 3 ක් හා රතු 7 ක් වශයෙන් සර්වසම බෝල අඩංගු වෙයි. ප්‍රතිස්ථාපනය රහිතව බෝල තුනක් සසම්භාවී ලෙස මල්ලෙන් ගනු ලැබේ.

(i) බෝල තුන ම කළු වීමේ,

(ii) බෝල තුනෙන් කිසිම බෝලයක් සුදු නොවීමේ,

(iii) යටත් පිරිසෙයින් එක බෝලයක් සුදු වීමේ,

(iv) බෝල වෙනස් වර්ණවලින් යුක්ත වීමේ,

(v) කළු, රතු, ඊළඟට සුදු යන පටිපාටියට බෝල තුන ගැනීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(*b*) එක්තරා පන්තියක සිසුන්ට සංඛ්‍යානය ප්‍රශ්න පත්‍රයක් දෙනු ලැබේ. මෙම සිසුන් ලබා ගන්නා ලද ලකුණු පහත දක්වෙන සමූහිත සංඛ්‍යාත වගුවෙහි දී ඇත :

ලකුණු පරාසය	සිසුන් ගණන
00 - 20	14
20 - 40	f_1
40 - 60	27
60 - 80	f_2
80 -100	15

20 - 40 හා 60 - 80 ලකුණු පරාසවල සංඛ්‍යාත, වගුවෙහි දක්නට නොමැත. කෙසේ නමුත්, සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ මාතය හා මධ්‍යස්ථය පිළිවෙළින් 48 හා 50 බව දනී. වගුවේ දක්නට නොමැති සංඛ්‍යාත දෙක ගණනය කරන්න.

ඒ නයින්, සංඛ්‍යානය ප්‍රශ්න පත්‍රය සඳහා පෙනී සිටි මුළු සිසුන් ගණන ලබාගන්න.

සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය සොයන්න.

*** ***

A - කොටස

01. $n = 1$ විට L.H.S $= 1 =$ R. H. S
එබැවින් $n = 1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.
$n = p$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍යයයි උපකල්පනය කරමු.

එවිට $1 + 2 + 3 + \ldots + p = \frac{p(p+1)}{2}$ වේ.

දැන් $1 + 2 + 3 + \ldots + p + (p+1) = \frac{p(p+1)}{2} + (p+1)$

$= \frac{(p+1)(\overline{p+1}+1)}{2}$

$n = p$ ට සත්‍ය නම් $n = p + 1$ ට ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

$\therefore$ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව ඕනෑම ධන නිඛිලමය n සඳහා $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ වේ. //

02. එක ම වර්ගයේ අකුරු දෙකක් ඇති බැවින් අකුරු 6 ම යොදාගෙන කළ හැකි

පිළියෙල කිරීම් සංඛ්‍යාව $= \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}}$

$= \underline{\underline{360}}$

ප්‍රාණාක්ෂර දෙක වූ A හා I එක් අකුරක් ලෙස ගත්විට එම අක්ෂර 5 හි කළ හැකි පිළියෙල කිරීම් ගණන $= \frac{5!}{2!}$

$= 5 \times 4 \times 3 = 60$

A හා I අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් මාරු කළ හැකි බැවින් A හා I එකට සිටින සේ කළ හැකි වෙනස්

පිළියෙල කිරීම් සංඛ්‍යාව $= 2 \times 60 = 120$

$\therefore$ ප්‍රාණාක්ෂර වෙන් ව පවතින පිළියෙල

කිරීම් සංඛ්‍යාව $= 360 - 120 = \underline{\underline{240}}$

03. $(1 + px)^{12}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x හා x^2 අඩංගු පද පිළිවෙළින් ${}^{12}C_1\, px$ හා ${}^{12}C_2\, p^2x^2$ වේ.

මෙහි x හි සංගුණකය $-q$ හා x^2 හි සංගුණකය $11q$ බැවින්

${}^{12}C_1\, p = -q \quad \Rightarrow 12p = -q$ —— ①

${}^{12}C_2\, p^2 = 11q \Rightarrow 66p^2 = 11q$

$\Rightarrow 6p^2 = q$ —— ②

① + ② $6p^2 + 12p = 0 \Rightarrow p(p+2) = 0$

$\Rightarrow \quad p = 0$ හෝ -2

නමුත්

$p \neq 0$ බැවින් $p = -2$ //

එවිට ① න් $q = 24$ //

04. $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{2\sin^2 3x - x^2 \cos x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{2\frac{\sin^2 3x}{x^2} - \cos x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{18\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 - \cos x}$

$= \frac{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}}{18\left\{\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x}\right\}^2 - \lim_{x \to 0} \cos x}$

$= \frac{1}{18 - 1} = \frac{1}{17}$ //

05. $2e^x + 3e^{-x} = A(2e^x - e^{-x}) + B(2e^x + e^{-x})$

$\Rightarrow (2A + 2B - 2)e^x + (-A + B - 3)e^{-x} = 0$

$\Rightarrow A + B = 1$ සහ $-A + B = 3$

$\Rightarrow A = -1$ සහ $B = 2$

එවිට $\int \frac{2e^x + 3e^{-x}}{2e^x + e^{-x}} d_x = -\int \frac{2e^x - e^{-x}}{2e^x + e^{-x}} d_x + 2\int d_x$

$= -\ln(2e^x + e^{-x}) + 2x + C$ //

06. ℓ රේඛාවේ සමීකරණය

$\frac{y - 0}{x - 4} = \frac{2 - 0}{0 - 4} \quad \Rightarrow 2x + 4y - 8 = 0$

$\Rightarrow x + 2y - 4 = 0$

m රේඛාවේ සමීකරණය

$\frac{y - 0}{x - 2} = \frac{3 - 0}{0 - 2} \Rightarrow 3x + 2y - 6 = 0$

ℓ සහ m හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන ඕනෑම රේඛාවක සමීකරණය

$x + 2y - 4 + \lambda(3x + 2y - 6) = 0$ ආකාරයට ලිවිය හැක.

මෙහි λ පරාමිතියකි.

අවශ්‍ය රේඛාව මූලය හරහා යන බැවින්

$4 + 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$

$\therefore$ අවශ්‍ය රේඛාවේ සමීකරණය

$-3x + 2y = 0$

එනම් $3x - 2y = 0$ //

07. C වක්‍රයට (1, 2) හි දී ඇඳි ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය

$= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,2)} = (-4 + 6x - 3x^2)_{(1,2)} = -1$

C වක්‍රයට (1, 2) හි දී ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

$\frac{y - 2}{x - 1} = -1 \Rightarrow x + y - 3 = 0$

(1, 2) හි දී $y^2 = 4x$ පරාවලයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ

අනුක්‍රමණය $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,\,2)} = \left(\frac{2}{y}\right)_{(1,\,2)} = 1$

එබැවින් (1, 2) හි දී C වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකය එම ලක්ෂ්‍යයේ දී ම $y^2 = 4x$ පරාවලයට ඇඳි ස්පර්ශකයට අභිලම්බ වේ.

08. (2, 0) හා (0, 2) ලක්ෂ්‍ය හරහා යන ඕනෑම වෘත්තයක්

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ලෙස ගනිමු.

එවිට

$4 + 4g + c = 0$ —— ① හා

$4 + 4f + c = 0$ —— ② ලැබේ.

① හා ② න් $g = f$ සහ $c = -4(g+1)$

එබැවින් ඉහත සමීකරණය

$x^2 + y^2 + 2gx + 2gy - 4(g+1) = 0$ ලෙස ලිවිය හැක.

එය $x^2 + y^2 - 4 + \lambda(x + y - 2) = 0,\ \lambda = 2g$ ආකාර වේ.

එවිට $(X + \lambda/2)^2 + (y + \lambda/2)^2 - 4 - 2\lambda - \frac{\lambda^2}{2} = 0$

$$(x + \lambda/2)^2 + (y + \lambda/2)^2 = \frac{\lambda^2 + 4\lambda + 8}{2}$$

$$= \frac{(\lambda+2)^2 + 4}{2}$$

වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $\equiv (-\lambda/2, -\lambda/2)$ හා

වෘත්තයේ අරය $= \sqrt{\frac{(\lambda+2)^2 + 4}{2}}$ ඒකක //

09. $A \equiv (1, 3)$ හා $B \equiv (2, 4)$ වූ AB රේඛා ඛණ්ඩය විෂ්කම්භයක් වන S වෘත්තයේ පරිධිය මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් (x, y) ලෙස ගනිමු.

අර්ධ වෘත්තයක කෝණය සෘජු කෝණයක් වන බැවින්

එවිට $\left(\frac{y-3}{x-1}\right)\left(\frac{y-4}{x-2}\right) = -1$

එනම් $S \equiv x^2 + y^2 - 3x - 7y + 14 = 0$

කේන්ද්‍රය (-1, 2) වන වෘත්තයක්

$x^2 + y^2 + 2x - 4y + k = 0$ ආකාර වේ.

මෙහි $k \le 5$ වේ.

මෙම වෘත්තය S ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන විට

$2(-3/2)(1) + 2(-7/2)(-2) = k + 14$

$\Rightarrow k = -3$

$\therefore$ අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය

$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ //

10. $\tan(\pi/12) = \tan(\pi/3 - \pi/4)$

$$= \frac{\tan\pi/3 - \tan\pi/4}{1 + \tan\pi/3\,\tan\pi/4}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}\,.\,1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

$\tan\left(\frac{23\pi}{12}\right) = \tan(2\pi - \pi/12) = -\tan\pi/12$

$= -(2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 2$ //

B - කොටස

11. (a) (i) $f(x) = x^2 + 2kx + k + 2$

$= (x + k)^2 + 2 + k - k^2$

$= (x - a)^2 + b$ මෙහි $a = -k$ සහ

$b = 2 + k - k^2$

x හි අගය $-\infty$ සිට $-k$ දක්වා වැඩිවන විට $f(x)$ අගය ∞ සිට $2 + k - k^2$ දක්වා අඩු වේ. තව ද, x හි අගය $-k$ සිට ∞ දක්වා වැඩි වන විට $f(x)$ හි අගය $2 + k - k^2$ සිට ∞ දක්වා වැඩි වේ.

එබැවින් $f(x)$ ට $x = -k$ වනවිට පමණක් අවම අගයන් පවතින අතර, වෙනත් වර්තන ලක්ෂ්‍යයක් නොපවතී.

$f(x)$ හි අවම අගය $2 + k - k^2$ වේ.

$2 + k - k^2 = (2 - k)(1 + k)$ ලෙස ලිවිය හැක.

(α) $-1 < k < 2$ නම් $f(x)$ හි අවම අගය වන ඉහත අගය ධනවන බැවින් $f(x)$ හි වක්‍රය මුළුමනින් ම x අක්ෂයට ඉහළින් පවතී.

(β) $k = -1$ හෝ $k = 2$ නම් $f(x)$ හි අවම අගය ශුන්‍ය වන බැවින් වක්‍රය x - අක්ෂය ස්පර්ශ කරයි.

(γ) $k < -1$ හෝ $k > 2$ නම්

එවිට $f(x)$ හි අවම අගය සෘණ වේ.

එවිට $f(x) = 0$ ට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් පවතී.

එබැවින් වක්‍රය x - අක්ෂය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී කපයි.

(ii) $y = f(x)$ වක්‍රය $y = mx$ සරල රේඛාව මගින් ඡේදනය කරයි නම් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයන් හි x ඛාණ්ඩාංක (පාටික) මගින්

$x^2 + 2kx + k + 2 = mx$ සමීකරණය

එනම් $x^2 + (2k - m)x + k + 2 = 0$

තෘප්ත කළ යුතුය.

එබැවින් $y = f(x)$ වක්‍රය $y = mx$ සරල රේඛාව මගින් තාත්ත්වික ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී ඡේදනය වන්නේ

$x^2 + (2k - m)x + k + 2 = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් පවතී නම් හා නම් ම පමණි.

එනම්,

$(2k - m)^2 - 4(k + 2) > 0$ නම් හා නම් ම පමණි.

m හි සියලු පරිමිත තාත්ත්වික අගය සඳහා $(2k - m)^2 - 4(k + 2) > 0$ වන්නේ $k < -2$ නම් හා නම් ම පමණි.

එබැවින්, $y = f(x)$ වක්‍රය $y = mx$ සරල රේඛාව මගින් තාත්ත්වික ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍යවල දී ඡේදනය වන්නේ m හි සියලු පරිමිත අගය සඳහා $k < -2$ නම් හා නම් ම පමණි.

(b) $g(x) \equiv x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 2$

$g(-1) = (-1)^4 + 4(-1)^3 + 7(-1)^2 + 6(-1) + 2$

$= 0$

$(x + 1)$ න් $g(x)$ බෙදූවිට ලැබෙන ශේෂය 0 වේ.

$\therefore$ $(x + 1)$ $g(x)$ හි සාධකයකි.

$(x + 1)$ න් $g(x)$ බෙදූවිට ලැබෙන ලබ්ධිය $Q(x)$ නම්

$g(x) \equiv (x + 1)\,Q(x)$

$\equiv (x + 1)(x^3 + 3x^2 + 4x + 2)$

$Q(x) \equiv x^3 + 3x^2 + 4x + 2$

$Q(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 4(-1) + 2 = 0$

$\therefore$ $Q(x)$, $(x + 1)$ න් බෙදූවිට ශේෂය 0 බැවින් $(x + 1)$, $Q(x)$ හි සාධකයකි.

එවිට $(x + 1)^2$, $g(x)$ හි සාධකයකි.

දැන් $Q(x)$, $(x + 1)$ න් බෙදූවිට ලබ්ධිය $R(x)$ නම්

$Q(x) = (x + 1)(x^2 + 2x + 2)$

එබැවින් $R(x) = x^2 + 2x + 2$

එවිට $g(x) \equiv (x + 1)^2 (x^2 + 2x + 2)$

එනම් $g(x) \equiv (x - a)^2 (x^2 + bx + C)$ වේ.

මෙහි $a = -1$, $b = 2$, $c = 2$ වේ.

දැන් $g(x) \equiv (x + 1)^2 (x^2 + 2x + 2)$

$\equiv \underbrace{(x + 1)^2}_{\geq 0} \underbrace{\{(x + 1)^2 + 1\}}_{> 0} \geq 0$

$\therefore$ සියලු තාත්ත්වික x සඳහා

$g(x) \geq 0$ වේ. //

12. (a) $12x^2 + 1 \equiv A(2x - 1)^3 + B(2x + 1)^3 \; \forall\, x \in \mathbb{R}$ යයි ගනිමු.

$x = \frac{1}{2}$ විට $4 = 8B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

$x = -\frac{1}{2}$ විට $4 = -8A \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

දැන්

$$U_r = \frac{12r^2 + 1}{(2r - 1)^3 (2r + 1)^3} \equiv \frac{-\frac{1}{2}(2r - 1)^3 + \frac{1}{2}(2r + 1)^3}{(2r - 1)^3 (2r + 1)^3}$$

$$\equiv \frac{1}{2(2r - 1)^3} - \frac{1}{2(2r + 1)^3}$$

$$= f(r) - f(r + 1)$$

මෙහි $f(r) = \dfrac{1}{2(2r - 1)^3}$ වේ.

$U_1 = f(1) - f(2)$

$U_2 = f(2) - f(3)$

$U_{n-1} = f(n - 1) - f(n)$

$U_n = f(n) - f(n + 1)$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) - f(n + 1)$$

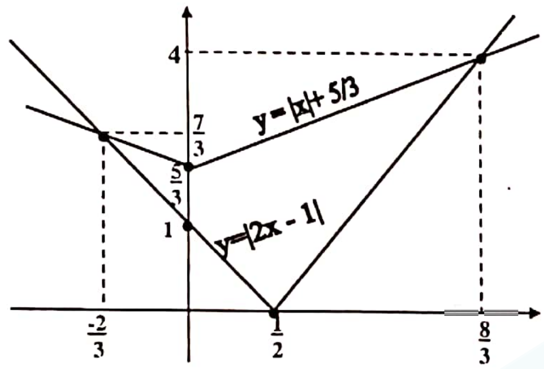
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n + 1)^3}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} U_r = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} U_r$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)^3}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}$$

මෙය පරිමිත බැවින්

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී වේ.

(b)

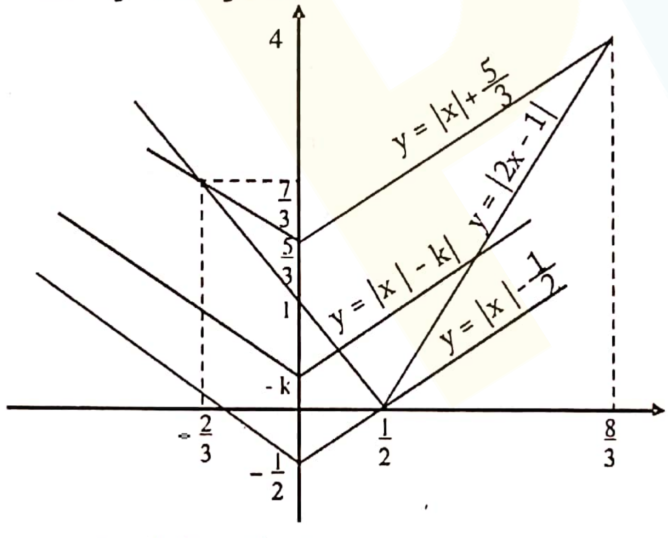


$3|x| \geq |6x - 3| - 5$

$\Rightarrow |x| + \frac{5}{3} \geq |2x - 1|$

ප්‍රස්තාරය අනුව ඉහත දී ඇති අවශ්‍යතාව සපුරාලන x හි අගය තුලනය වන්නේ $-2/3 \leq x \leq 8/3$

එබැවින් $3|x| \geq |6x - 3| - 5$ සපුරාලන x හි අගය කුලකය $\{x : -2/3 \leq x \leq 8/3\}$ වේ.



$3|x| = |6x - 3| + \ell$

$\Rightarrow |x| - \frac{\ell}{3} = |2x - 1|$ සමීකරණයට එක ම එක තාත්ත්වික මූලයක් පවතින්නේ $y = |x| - k$ රේඛාව $(\frac{1}{2}, 0)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන විට ය.

ඒ සඳහා $k = \frac{1}{2}$ විය යුතු ය.

එවිට $|x| = -\ell/3 = |x| - 1/2$

$\Rightarrow \ell = 3/2$ //

13. (a) $\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{O}$

$2I = 3A - A^2$

$2A^{-1} \equiv 3A\,A^{-1} - AAA^{-1}$

$= 3I - A$

$= 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ //

$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = B$

$\therefore BA - B = \mathbf{O}$

$\Rightarrow B(A - I) = \mathbf{O}$

$\Rightarrow BC = \mathbf{O}$ මෙහි $C = A - I$

එනම්

$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $z = x + iy$ යයි ගනිමු.

මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$

$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$

$= \{\sqrt{x^2 + y^2}\}^2 = |z|^2$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} = \sqrt{|x|^2} = |x| \geq x = \mathrm{Re}(z)$

$\therefore |z| \geq \mathrm{Re}(z)$

$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2})$

$= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$

$= z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2$

$= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1)$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, z_1\bar{z}_2$

$\geq |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1\bar{z}_2|$

$\geq |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||\bar{z}_2|$

$\geq |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2|$

$\geq (|z_1| - |z_2|)^2$

$\therefore |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$

$|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2| \geq |z_1 + z_2| - |z_2|$

එනම් $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$|z| - |i| \leq |z - i| < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow |z| - 1 < \frac{1}{2}$

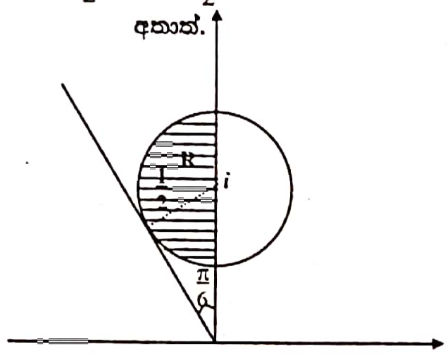
$\Rightarrow |z| < \frac{3}{2}$

$|\, i \,| - |z| \le |i - z\,| = |z - i| < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 1 - |\, z \,| < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow |z\,| > \frac{1}{2}$

එනම් $\frac{1}{2} < |z\,| < \frac{3}{2}$



14. (a) $f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 27}$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $f'(x) = \frac{3x^2 (x^4 + 27) - x^3 (4x^3)}{(x^4 + 27)^2}$

$= \frac{x^2 (81 - x^4)}{(x^4 + 27)^2}$

$x = 0, \pm 3$ විට $f'(x) = 0$

x හි අගය පරාසය	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(-)	(+)	(+)	(-)

එබැවින් $x = -3$ විට $f(x)$ ට අවමයක් ද

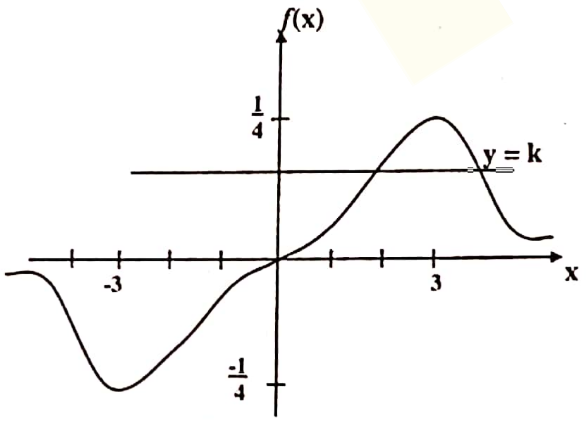
$x = 3$ විට $f(x)$ උපරිමයක් ද පවතී.

$f(-3) = \frac{-27}{81 + 27} = -\frac{1}{4}$, $f(3) = \frac{27}{81 + 27} = \frac{1}{4}$

එබැවින් $f(x)$ හි අවම හා උපරිම අගයන් පිළිවෙළින් $-\frac{1}{4}$ හා $\frac{1}{4}$ වේ.

$x \to -\infty \quad f(x) \to 0^-$

$x \to \infty \quad f(x) \to 0^+$



$y = k$ හා $y = \frac{x^3}{x^4 + 27}$ වක්‍ර සලකමු.

ඒවායේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යවල පාථික (x - කණ්ඩාංක)

$\frac{x^3}{x^4 + 27} = k$ හි විසඳුම් මගින් ලැබේ.

එනම් $kx^4 - x^3 + 27k = 0$ හි විසඳුම් මගින් ලැබේ.

එබැවින්,

(i) $k = -\frac{1}{4}$ හෝ $\frac{1}{4}$ විට $y = k$ මගින්

$y = \frac{x^3}{x^4 + 27}$ වක්‍ර ස්පර්ශ කරයි.

එවිට $kx^4 - x^3 + 27k = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික සම්පාත මූල දෙකක් පවතී.

(ii) $k = 0$ විට $y = k$ රේඛාව $y = \frac{x^3}{x^4 + 27}$ වක්‍රය හරහා යන අතර,

$kx^4 - x^3 + 27k = 0$ සමීකරණය

$x^3 = 0$ බවට ඌනනය වේ.

එවිට සමීකරණයට තාත්ත්වික සම්පාත මූල තුනක් පවතී.

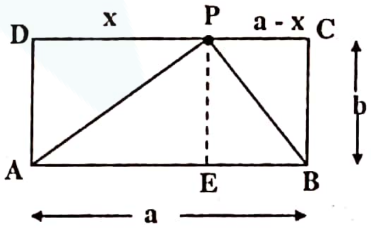
(iii) $-\frac{1}{4} < k < 0$ හෝ $0 < k < \frac{1}{4}$ විට $y = k$ රේඛාව

$y = \frac{x^3}{x^4 + 27}$ වක්‍රය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී ඡේදනය කරයි. එනයින් $kx^4 - x^3 + 27k = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් පවතී.

(iv) $k < -\frac{1}{4}$ හෝ $k > \frac{1}{4}$ විට

$y = k$ සරල රේඛාව $y = \frac{x^3}{x^4 + 27}$ වක්‍රය ඡේදනය නොකරයි. එනයින් $kx^4 - x^3 + 27k = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික මූල නොමැත.

(b)



$L(x) = AP + PB$

$= \sqrt{AE^2 + EP^2} + \sqrt{EB^2 + EP^2}$

$= \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a - x)^2 + b^2}$

$\frac{d\,L(x)}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} - \frac{(a - x)}{\sqrt{(a - x)^2 + b^2}}$

$= \frac{x\sqrt{(a - x)^2 + b^2} - (a - x)\sqrt{x^2 + b^2}}{\sqrt{x^2 + b^2}\ \sqrt{(a - x)^2 + b^2}}$

$\frac{d\,L(x)}{dx} = 0 \Rightarrow x\sqrt{(a - x)^2 + b^2} - (a - x)\sqrt{x^2 + b^2} = 0$

$\Rightarrow x^2 \{(a - x)^2 + b^2\} = (a - x)^2 (x^2 + b^2)$

$\Rightarrow x^2 = (a - x)^2 \Rightarrow x = a/2$

x	$0 \le x < a/2$	$x = a/2$	$a/2 < x < a$
L(x)	(-)	0	(+)

$\therefore x = a/2$ විට $L(x)$ අවම වේ.

$\therefore$ L(x) හි අවම දිග $= \sqrt{(a/2)^2 + b^2} + \sqrt{(a/2)^2 + b^2}$

$= \sqrt{a^2 + 4b^2}$

මෙය සිදුවන්නේ P යනු CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යවිට ය.

P ලක්ෂ්‍යය C හෝ D මත වනවිට L(x) උපරිම වේ.

මෙහි දී L(x) හි උපරිම දිග

$= b + \sqrt{a^2 + b^2}$ වේ.

15. (a) $\int_0^{\pi} (\sin^3 x - \cos^3 x)\, dx$

$= \int_0^{\pi} \{ (1 - \cos^2 x) \sin x - (1 - \sin^2 x) \cos x \}\, dx$

$= \int_0^{\pi} (\sin x - \sin x \cos^2 x - \cos x + \cos x \sin^2 x)\, dx$

$= \left[-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} - \sin x + \frac{\sin^3 x}{3} \right]_0^{\pi}$

$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ //

(b) $\int x^3 \tan^{-1} x\, dx = \int \tan^{-1} x \frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right) dx$

$= \frac{x^4}{4} \tan^{-1} x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{1 + x^2}\, dx$

$= \frac{x^4}{4} \tan^{-1} x - \frac{1}{4} \int \frac{x^4}{1 + x^2}\, dx$

$= \frac{x^4}{4} \tan^{-1} x + \frac{1}{4} \int \frac{(1 + x^2)(1 - x^2)}{1 + x^2} dx$

$- \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1 + x^2}$

$= \frac{x^4}{4} \tan^{-1} x + \frac{1}{4} (x - \frac{x^3}{3}) - \frac{1}{4} \tan^{-1} x + C$

මෙහි C අභිමත නියතයකි. //

(c) $\frac{2x^2 - 3}{(x - 2)^2 (x^2 + 1)} \equiv \frac{A}{(x - 2)} + \frac{B}{(x - 2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$

මෙහි A, B, C හා D නිර්නය කළයුතු නියත වේ.

$2x^2 - 3 \equiv A (x - 2)(x^2 + 1) + B (x^2 + 1) + (Cx + D)(x - 2)^2$

$x = 2$ විට $B = 1$

නියත සැමයීමෙන් $-3 = -2A + B + 4D$ —— ①

x^3 හි සංගුණක සැමයීමෙන්,

$0 = A + C$ —— ②

x හි සංගුණක සැමයීමෙන්,

$0 = A + 4C - 4D$ —— ③

$B = 1$, ① හි ආදේශයෙන් $A - 2D = 2$ —— ④

② හා ③ න් $3C - 4D = 0$ —— ⑤

② හා ④ න් $C + 2D = -2$ —— ⑥

⑤ හා ⑥ $C = -4/5$ එවිට ② න් $A = 4/5$

⑤ න් $D = \frac{3C}{4} \Rightarrow D = \frac{-3}{5}$

එවිට $\frac{2x^2 - 3}{(x - 2)^2 (x^2 + 1)} \equiv \frac{4}{5(x - 2)} + \frac{1}{(x - 2)^2} - \frac{4x + 3}{5(x^2 + 1)}$

$\int \frac{2x^2 - 3}{(x - 2)^2 (x^2 + 1)} dx = \frac{4}{5} \int \frac{dx}{x - 2} + \int \frac{dx}{(x - 2)^2} - \frac{2}{5} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

$- \frac{3}{5} \int \frac{dx}{x^2 + 1}$

$= \frac{4}{5} \ln |x - 2| - \frac{1}{(x-2)} - \frac{2}{5} \ln |x^2 + 1|$

$- \frac{3}{5} \tan^{-1} x + k$

$= \frac{2}{5} \ln \frac{(x - 2)^2}{x^2 + 1} - \frac{1}{x - 2} - \frac{3}{5} \tan^{-1} x + k$

මෙහි k අභිමත නියතයකි. //

16. (a) $P_0 (x_0, y_0)$ යනු $\ell_1 = 0$ හා $\ell_2 = 0$ රේඛාවලට සමදුරින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් ලෙස ගනිමු. එවිට P_0 සිට $\ell_1 = 0$ හා $\ell_2 = 0$ ට ඇති ලම්භ දුර පිළිවෙළින්

$\frac{|a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$ හා $\frac{|a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$ වේ.

P_0 රේඛා දෙකට සමදුරින් පිහිටන බැවින්

$$\frac{|a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

එනම්

$$\frac{a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

එනම් $\ell_1 = 0$ හා $\ell_2 = 0$ සරල රේඛාවලට සමදුරින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයන්

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

සමීකරණ සපුරාලයි.

P(x, y) යනු $\ell_1 = 0$ හා $\ell_2 = 0$ ට සමදුරින් පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් විට P රේඛා දෙක අතර කෝණ සමච්ඡේදකයක් මත පිහිටයි.

$\therefore$ $\ell_1 = 0$ හා $\ell_2 = 0$ අතර කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$ වේ.

$2x - 11y - 10 = 0$ හා $10x + 5y - 2 = 0$ සරල රේඛා දෙක අතර කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණය

$$\frac{2x - 11y - 10}{\sqrt{2^2 + (-11)^2}} = \pm \frac{10x + 5y - 2}{\sqrt{10^2 + 5^2}}$$

එනම් $2x - 11y - 10 = \pm (10x + 5y - 2)$

$\Rightarrow 8x + 16y + 8 = 0$ එනම් $x + 2y + 1 = 0$ හා

$12x - 6y - 12 = 0$ එනම් $2x - y - 2 = 0$ වේ.

θ යනු $2x - 11y - 10 = 0$ හා $x + 2y + 1 = 0$ රේඛා දෙක අතර සුළු කෝණය යයි ගනිමු. එවිට,

$$\tan\theta = \left|\frac{\frac{2}{11} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \left(\frac{2}{11}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}\right| = \frac{\frac{15}{22}}{\frac{20}{22}} = \frac{3}{4} < 1$$

$$\Rightarrow \theta < \frac{\pi}{4}$$

එබැවින් $2x - 11y - 10 = 0$ හා $10x + 5y - 2 = 0$ සරල රේඛා දෙක අතර සුළු කෝණ සමච්ඡේදනය $x + 2y + 1 = 0$ වේ.

$4x - 7y - 8 = 0$ හා $8x + y - 4 = 0$ මගින් දෙන සරල රේඛා දෙක අතර කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණය

$$\frac{4x - 7y - 8}{\sqrt{4^2 + (-7)^2}} = \pm\frac{8x + y - 4}{\sqrt{8^2 + 1^2}}$$

එනම් $4x - 7y - 8 = \pm(8x + y - 4)$

$\Rightarrow x + 2y + 1 = 0$ හෝ $2x - y + 2 = 0$

දැන් $4x - 7y - 8 = 0$ හා $x + 2y + 1 = 0$ සරල රේඛාව අතර සුළු කෝණය ϕ නම්,

$$\tan\phi = \frac{\frac{4}{7} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{15}{14}}{\frac{10}{14}} = \frac{3}{2} > 1$$

එනම් $\phi > \frac{\pi}{4}$

$\therefore x + 2y + 1 = 0$ යනු $4x - 7y - 8 = 0$ හා $8x + y - 4 = 0$ මගින් දක්වෙන සරල රේඛා දෙක අතර මහාකෝණ සමච්ඡේදකය වේ.

එබැවින් $2x - 11y - 10 = 0$ හා $10x + 5y - 2 = 0$ සරල රේඛා දෙක අතර සුළු කෝණ සමච්ඡේදකය $4x - 7y - 8 = 0$ හා $8x + y - 4 = 0$ සරල රේඛා දෙක අතර මහ කෝණ සමච්ඡේදකය ම වේ.

(b) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy - 1 = 0$ හා $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ වෘත්ත දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍යයක් $P_0\ (x_0, y_0)$ යයි සිතමු.

එවිට $x_0^2 + y_0 + 2gx_0 + 2fy_0 - r^2 = 0$ — ① හා

$x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$ — ② අපට ලැබේ.

① - ② න් $2gx_0 + 2fy_0 = 0 \Rightarrow gx_0 + fy_0 = 0$

එබැවින් වෘත්ත දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය $gx + fy = 0$ රේඛාව මත පිහිටයි. මෙම රේඛාව g හා f හි සියලු අගය සඳහා ම මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි.

මූල ලක්ෂ්‍යය $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ හි කේන්ද්‍රය වේ.

එබැවින් g හා f හි සියලු අගය සඳහා $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy - r^2 = 0$ වෘත්තය $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ වෘත්තයෙහි පරිධිය සමච්ඡේදකය කරයි.

අවශ්‍ය වෘත්තයක සමීකරණය $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy - 4 = 0$ යයි ගනිමු. එවිට g හා f හි සියලු අගයන් සඳහා $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy - 4 = 0$ වෘත්තය $x^2 + y^2 - 4 = 0$ වෘත්තයෙහි පරිධිය සමච්ඡේද කරයි.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 4$ හි අරය $= \sqrt{g^2 + f^2 + 4}$ එම වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රයෙහි සිට $y + 5 = 0$ රේඛාවට වන ලම්බ දුර $= |-f + 5| = |f - 5|$

එම වෘත්තය හා සරල රේඛාව ස්පර්ශ වනවිට

$\sqrt{g^2 + f^2 + 4} = |f - 5| \Rightarrow g^2 + f^2 + 4 = f^2 - 10f + 25$

$\Rightarrow g^2 + 10f - 21 = 0$ —— ①

දැන් එම වෘත්තය (1, 1) හරහා යන බැවින්

$1 + 1 + 2g + 2f - 4 = 0 \Rightarrow g + f = 1$ —— ②

① හා ② න් $g^2 + 10(1 - g) - 21 = 0$

$\Rightarrow g^2 - 10g - 11 = 0 \Rightarrow (g - 11)(g + 1) = 0$

$\Rightarrow g = 11$ හෝ $g = -1$

$g = 11$ විට $f = -10$ හා $g = -1$ විට $f = 2$

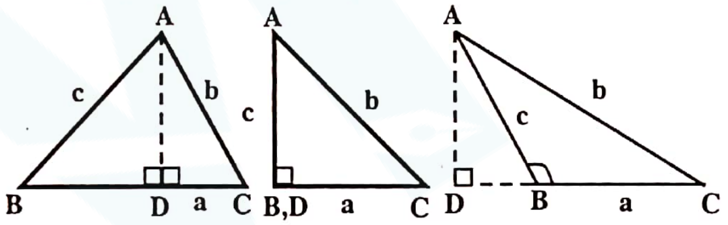
වෘත්තයේ g හා f අගය සඳහා අගය කුලක දෙකක් ලැබෙන බැවින් දී ඇති දත්තයන්ට ගැළපෙන වෘත්ත දෙකක් පවතී.

එබැවින් අවශ්‍ය වෘත්තවල සමීකරණ

$x^2 + y^2 + 22x - 20y - 4 = 0$ හා

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ වේ. //

17. (a) (i) රූපය (ii) රූපය (iii) රූපය



ABC සුළු කෝණී විට (i) රූපය

$AD = AB \sin B = AC \sin C$

$c \sin B = b \sin C$

$$\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

ABC සෘජු කෝණී විට (ii) රූපය

$AD = AB = AC \sin C$

$c = b \sin C$

$c \sin 90° = b \sin C$

$$\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

ABC මහා කෝණී විට (iii) රූපය

$AD = AB \sin(\pi - B)$

$= AC \sin C$

$c \sin B = b \sin C$

$$\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

මෙලෙස ම $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$ බව පෙන්විය හැක.

$\therefore$ ABC ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සම්මත අංකනයෙන්

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b - c}{\sin B - \sin C}$$

$$\frac{a}{2 \sin A/2 \cos A/2} = \frac{b - c}{2 \cos \frac{B + C}{2} \sin \frac{B - C}{2}}$$

$$= \frac{b - c}{2\cos\left(\frac{\pi - A}{2}\right)\sin\frac{B - C}{2}}$$

$$= \frac{b - c}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B - C}{2}}$$

$$\Rightarrow a = (b - c)\cos\frac{A}{2}\ \mathrm{cosec}\,\frac{B - C}{2} \quad //$$

(b) $k = \tan\theta - 2\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $k = \tan\theta - 2\,\dfrac{\tan\theta - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}$

$$= \tan\theta - 2\,\frac{(\tan\theta - 1)}{1 + \tan\theta}$$

$$= \frac{\tan\theta + \tan^2\theta - 2\tan\theta + 2}{1 + \tan\theta}$$

$$= \frac{\tan^2\theta - \tan\theta + 2}{1 + \tan\theta}$$

එනම් $\tan^2\theta - (k + 1)\tan\theta + 2 - k = 0$

මෙම සමීකරණයට තාත්ත්වික විසඳුම් පවතින්නේ,

$(k + 1)^2 - 4(2 - k) \geq 0$ නම් හා නම් ම පමණි.

එනම් $k^2 + 6k - 7 \geq 0$ නම් හා නම් ම පමණි.

එනම් $(k + 7)(k - 1) \geq 0$ නම් හා නම් ම පමණි.

එනම්,

$k \leq -7$ හෝ $k \geq 1$ නම් හා නම් ම පමණි.

එබැවින් θ හි කිසිදු තාත්ත්වික අගයක් සඳහා $\tan\theta - 2\tan(\theta - \pi/4)$ ප්‍රකාශනයට -7 ත් 1 ත් අතර අගයක් ගත නොහැක.

(c) $5\cos^2\theta + 18\cos\theta\sin\theta + 29\sin^2\theta$

$= \frac{5}{2}(\cos 2\theta + 1) + 9\sin 2\theta + \frac{29}{2}(1 - \cos 2\theta)$

$= 9\sin 2\theta - 12\cos 2\theta + 17$

$= 17 - 3[4\cos 2\theta - 3\sin 2\theta]$

$= 17 - 15[{}^4/_5\cos 2\theta - {}^3/_5\sin 2\theta]$

$= 17 - 15[\cos\alpha\cos 2\theta - \sin\alpha\sin 2\theta]$

මෙහි $\cos\alpha = {}^4/_5$ හා $\sin\alpha = {}^3/_5$ වේ.

$= 17 - 15\cos(2\theta + \alpha)$

$= a + b\cos(2\theta + \alpha)$

මෙහි $a = 17, b = -15$ හා α කෙසේ ද යත්

$\cos\alpha = {}^4/_5$ හා $\sin\alpha = {}^3/_5$ වේ.

$8(\cos x + \sin x)^2 + 2(\cos x + 5\sin x)^2 = 19$

$8(\cos^2 x + 2\cos x\sin x + \sin^2 x) +$

$2(\cos^2 x + 10\cos x\sin x + 25\sin^2 x) = 19$

$10\cos^2 x + 36\cos x\sin x + 58\sin^2 x = 19$

$5\cos^2 x + 18\cos x\sin x + 29\sin^2 x = {}^{19}/_2$

$17 - \cos(2x + \alpha) = {}^{19}/_2$

මෙහි α කෙසේ ද යත් $\cos\alpha = {}^4/_5$

$\sin\alpha = {}^3/_5$

$15\cos(2x + \alpha) = 17 - {}^{19}/_2 = \frac{15}{2}$

$\cos(2x + \alpha) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore 2x + \alpha = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ මෙහි $n \in \mathbb{Z}$

$x = n\pi - \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{6}$

මෙහි $n \in \mathbb{Z}$ හා α කෙසේ ද යත් $\cos\alpha = {}^4/_5$

හා $\sin\alpha = {}^3/_5$ වේ. //

*** ***

A - කොටස

01. ළ ; ළමයා, පු ; පුළඟ, E ; පොළව

$(ළ \; E) = \downarrow u$ $\qquad$ $(ළ \; E) = \uparrow u$

$(පු \; ළ) = \leftarrow$ $\qquad$ $(පු \; ළ) = \swarrow 45^\circ$

$(පු \; E) = (පු \; ළ) + (ළ \; E)$

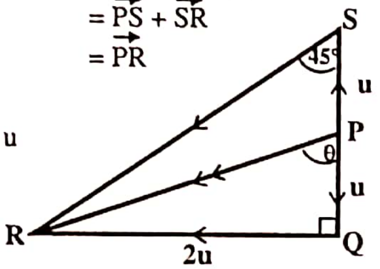
I අවස්ථාව $\qquad$ II අවස්ථාව

$(පු \; E) = \leftarrow + \downarrow u$ $\qquad$ $(පු \; E) = \swarrow 45^\circ + \uparrow u$

$= \uparrow u + \leftarrow$ $\qquad$ $= \uparrow u + \swarrow 45^\circ$

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ $\qquad$ $= \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR}$

$= \overrightarrow{PR}$ $\qquad$ $= \overrightarrow{PR}$



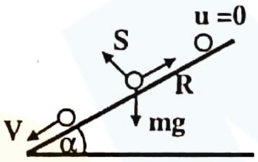
$QS = QR = 2u$

$\therefore PR = \sqrt{(2u)^2 + u^2} = \sqrt{5}\,u$

පුළඟ දකුණු දිගාව සමග θ කෝණයක් සාදයි නම්

$$\tan\theta = \frac{2u}{u} = 2$$

02. $F = ma \swarrow \alpha$ යෙදීමෙන්



$mg\sin\alpha - R = ma_1$

$a_1 = \dfrac{mg\sin\alpha - R}{m}$

$s = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්

$d = 0 \times 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{(mg\sin\alpha - R)}{m} \times 1^2$

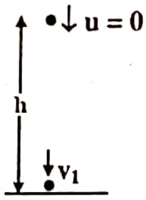
$2md = mg\sin\alpha - R \Rightarrow R = mg\sin\alpha - 2\,md$

$mg\sin\alpha - R = 2\,md$ නිසා $a_1 = \dfrac{2md}{m} = 2d$

$\swarrow$ $v = u + at$ යෙදීමෙන්,

$v = 0 + 2d \times 1 = \underline{\underline{2d}}$

03. $\downarrow v^2 = u^2 + 2as$ අංශුවට යෙදීමෙන්,



$v_1^2 = 0 + 2gh$

ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e නම් අංශුව පොළා පනින වේගය ev_1

බැවින්, $\dfrac{mgh}{4} = \dfrac{1}{2}mv_1^2 - \dfrac{1}{2}m(ev_1)^2$

$\dfrac{mgh}{4} = \dfrac{1}{2}mv_1^2(1 - e^2)$

$\dfrac{\cancel{mgh}}{4} = \dfrac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}.\cancel{2gh}(1 - e^2)$

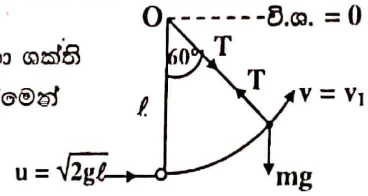
$1 - e^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow e^2 = \dfrac{3}{4} \Rightarrow e = \underline{\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}}$

$\uparrow v^2 = u^2 + 2as$

$0 = e^2v_1^2 - 2gh_2$ (h_2 යනු පොළා පනින උසයි.)

$\dfrac{3}{4}.2gh = 2gh_2 \Rightarrow h_2 = \underline{\underline{\dfrac{3}{4}h}}$

04. අංශුවේ චලිතය සලකා ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්



$\dfrac{1}{2}\cancel{m}u^2 - \cancel{m}g\ell = \dfrac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 - \cancel{m}g\ell\cos 60^\circ$

$\dfrac{1}{2} \times 2g\ell - g\ell = \dfrac{1}{2}v_1^2 - g\ell \times \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{2}g\ell = \dfrac{1}{2}v_1^2$

$v_1 = \sqrt{g\ell}$

$F = ma$ යෙදීමෙන්

$T - mg\cos 60^\circ = \dfrac{mv_1^2}{\ell}$

$T = \dfrac{mg}{2} + \dfrac{m}{\ell} \times g\ell = \dfrac{3mg}{2}$

05. $a = i + \sqrt{3}j$, $b = xi + yj$ යයි ගනිමු.

$|a| = \sqrt{1+3} = 2$ $\;|b| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3}$ වේ.

$a.\,b = |a|\,|b|\cos\pi/3$

$(i + \sqrt{3}j).(xi + yj) = 2\sqrt{3}\,.\,\dfrac{1}{2}$

$x + 3y = \sqrt{3}$ —— ①

$x^2 + y^2 = 3$ —— ②

① න් $x = \sqrt{3} - \sqrt{3}y$

② හි ආදේශයෙන්,

$(\sqrt{3} - \sqrt{3}y)^2 + y^2 = 3$

$3 - 6y + 3y^2 + y^2 = 3$

$4y^2 + 6y = 0$

$2y(2y - 3) = 0$

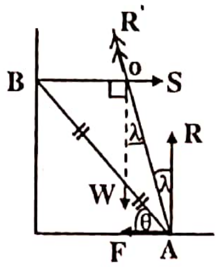
$y = 0$ හෝ $y = \dfrac{3}{2}$, එවිට

$x = \sqrt{3}$ හෝ $x = \sqrt{3} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ වේ.

$x < 0$ විය යුතු බැවින්,

$$b = \frac{-\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2}j$$

06. දණ්ඩ ලිස්සා යාමට ආසන්න මොහොතේ ඇති බැවින් F හා R හි සම්ප්‍රයුක්තය (බිමෙහි මුළු ප්‍රතික්‍රියාව) R' සමග W හා S, O හි දී ඒක ලක්ෂ්‍ය විය යුතු අතර, R' හා R අතර කෝණය λ ඝර්ෂණ කෝණය වේ.



AOB ත්‍රිකෝණයට කොට් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්,

$(1 + 1)\cot(90 - \theta) = 1\cot\lambda - 1\cot 90$

$2\tan\theta = \dfrac{1}{\tan\lambda}$

$2\tan\theta = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{\dfrac{1}{6}}$

$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$

07. A, B හා C නියැදි අවකාශයෙහි අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් **බහිෂ්කාර හා නිරවශේෂ සිද්ධීන් බැවින්,**

$A \cup B \cup C = \Omega \Rightarrow P(A \cup B \cup C) = P(\Omega) = 1$

$\Rightarrow P(A) + P(B) + P(C) = 1$

$2p + p^2 + 4p - 1 = 1$

$p^2 + 6p - 2 = 0 \Rightarrow (p+3)^2 - 9 - 2 = 0$

$\Rightarrow (p+3) = \pm\sqrt{11} \Rightarrow p = -3 \pm\sqrt{11}$

$\Rightarrow$ $p > 0$ නිසා $p = \sqrt{11} - 3$

08. A, B හා C ස්වායත්ත සිද්ධි බැවින්,

$P(A \cap C) = P(A)\,P(C)\,;\; P(A \cap B) = P(A)\,P(B)\;;$
$P(B \cap C) = P(B)\,P(C)$

$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$ වේ.

$P[A \cap (B \cup C)] = P[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$ (මෝගන් නියම)

$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$

$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$

$= P(A).P(B) + P(A)\,P(C) - P(A)\,P(B)\,P(C)$

$= P(A)\,[P(B) + P(C) - P(B)\,P(C)]$

$= P(A)\,[P(B) + P(C) - P(B \cap C)]$

$= P(A)\,P(B \cup C)$

$\therefore$ A හා $(B \cup C)$ ද ස්වායත්ත වේ.

09. $n = 100$ හා $\overline{x} = 30$ විට මුළු එකතුව $= n\overline{x} = 100 \times 30 = 3000$
නමුත් 30 වෙනුවට 40 ගෙන ඇති බැවින්,

නිවැරදි මුළු එකතුව $= 3000 - 40 + 30 = 2990$

$\therefore$ නිවැරදි මධ්‍යන්‍යය $= \dfrac{2990}{100} = 29.9$//

$(\text{සම්. අප})^2 = \dfrac{1}{n}\sum X_i^2 - \left(\dfrac{1}{n}\sum x_i\right)^2$

$(4.1)^2 = \dfrac{1}{100}\sum x_i^2 - 30^2 \Rightarrow 900 + 16.81 = \dfrac{1}{100}\sum x_i^2$

$\Rightarrow \sum x_i^2 = 91681$ $\therefore$ නිවැරදි $\sum x_i^2 = 91681 - 40^2 + 30^2$

$= 90981$

$\therefore$ නිවැරදි සම්මත අපගමනය $= \dfrac{1}{100} \times 90981 - (29.9)^2$

$= 909.81 - 894.01 = 15.8$

$\therefore$ නිවැරදි ස. අ. $= \sqrt{15.8} \simeq 3.975$

10. රේඛීය පරිණාමනය $y = ax + b$ යයි ගනිමු. a හා b නියත වන අතර, x යනු මුල් අගය හා y යනු පසු අගය යයි ගනිමු.

එවිට $\overline{y} = a\overline{x} + b$ ද වේ.

$x = 85$ විට $y = 63$ ද, $\overline{x} = 45$ විට $\overline{y} = 31$ ද වේ.

එවිට $63 = 85a + b$ —— ①

$31 = 45a + b$ —— ②

① හා ② විසඳීමෙන් $a = 0.8$ හා $b = -5$ බව ලැබේ.

$\therefore$ පරිණාමනය $y = 0.8x - 5$

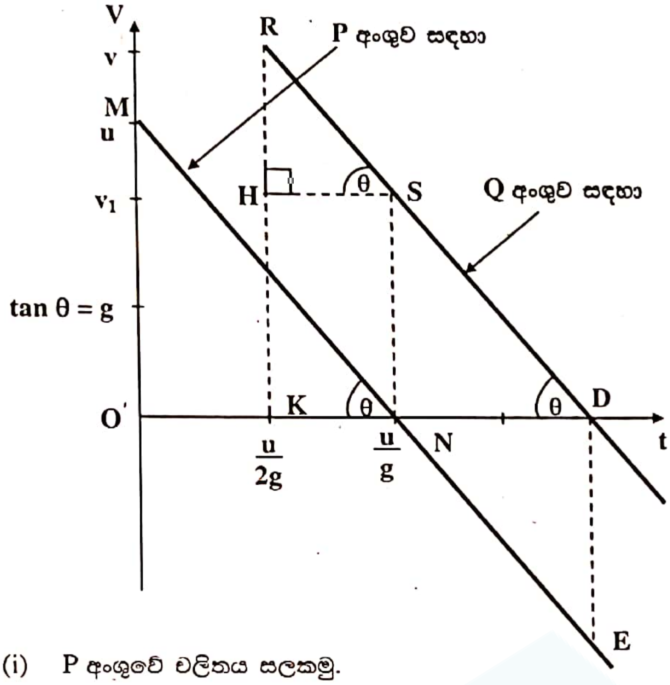
y හි සම්මත අපගමනය $= a \times$ x හි සම්මත අපගමනය
$\Rightarrow S_y = aS_x$ නිසා

$5 = 0.8 \times S_x \Rightarrow S_x = \dfrac{25}{4} = 6.25$

*** ***

B - කොටස

11. (a)



(i) P අංශුවේ චලිතය සලකමු.

O'MN Δ න්

$$\tan\theta = \frac{O'M}{O'N} \Rightarrow g = \frac{u}{O'N} \Rightarrow O'N = \frac{u}{g}$$

$$\therefore O'MN\,\Delta = \frac{1}{2}\times O'N \times O'M = \frac{1}{2}\times\frac{u}{g}\times u = \frac{u^2}{2g} = OA$$

(ii) මෙය (OA) P අංශුව එළඹි වැඩිතම උසයි.

P හා Q අංශු A හි දී හමුවීම සඳහා $t = \frac{u}{g}$ මොහොතේ ඒවායේ විස්ථාපන සමාන විය යුතු ය.

එනම් O'MN Δ = KRSN▭

RHS Δ න්, $\tan\theta = \frac{RH}{HS} \Rightarrow g = \frac{v - v_1}{u/2g} \Rightarrow v_1 = v - \frac{u}{2}$

$$\therefore \frac{u^2}{2g} = \frac{1}{2}\,[v + v_1]\,KN \Rightarrow \frac{u^2}{2g} = \frac{1}{2}\left(v + v - \frac{u}{2}\right)\frac{u}{2g}$$

$\Rightarrow 2u^2 = 2vu - \frac{u^2}{2}$; $u \neq 0$ නිසා $2u + \frac{u}{2} = 2v \Rightarrow v = \frac{5u}{4}$ //

A ලක්ෂ්‍යයෙහි දී Q හි ප්‍රවේගය = ↑ v_1

$$v_1 = v - \frac{u}{2} = \frac{5u}{4} - \frac{2u}{4} \Rightarrow v_1 = \frac{3u}{4}\ //$$

(iii) Q අංශුව ඉහළතම ලක්ෂ්‍යයට ළඟා වීමට ගතවන කාලය = $KD = \frac{v}{g}$ වේ.

$$O'D = O'K + KD = \frac{u}{2g} + \frac{v}{g} = \frac{u}{2g} + \frac{5u}{4g} = \frac{7u}{4g}$$

$$\therefore ND = O'D - O'N = \frac{7u}{4g} - \frac{u}{g} = \frac{3u}{4g}$$

NDE Δ න්,

$\tan\theta = \frac{DE}{ND} \Rightarrow g = \frac{DE}{3u/4g} \Rightarrow DE = \frac{3u}{4}$ මෙහි දිශාව ↓ වේ.

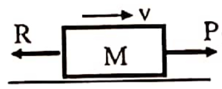
$$\therefore NDE\,\Delta = \frac{1}{2}\times ND \times DE = \frac{1}{2}\times\frac{3u}{4g}\times\frac{3u}{4} = \frac{9u^2}{32g}$$

මෙය P අංශුවේ උපරිම ලක්ෂ්‍යයේ සිට පහළට විස්ථාපනයයි.

∴ P අංශුව O සිට $\frac{u^2}{2g} - \frac{9u^2}{32g} = \frac{7u^2}{32g}$ උසකින් පිහිටයි.

(b) ඒකාකාර (උපරිම) v ms^{-1} වේගය සඳහා ප්‍රකර්ෂණ බලය P_1N හා

$$P_1 = \frac{H\times 1000}{v}\ N$$



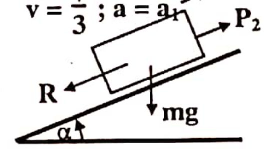
රථයේ චලිතය සලකා $\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

$$P_1 - R = M\times O \Rightarrow \frac{1000\,H}{v} = R$$

$v = \frac{v}{3}$; $a = a_1$

(i) ප්‍රකර්ෂණ බලය P_2 N නම්

$$P_2 = \frac{H\times 1000}{v/3} = \frac{3000\,H}{v}$$



$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්,

$$P_2 - R - Mg\sin\alpha = Ma_1$$

$$\frac{3000\,H}{v} - \frac{1000\,H}{v} - Mg\sin\alpha = Ma_1 \ \text{——}\ ①$$

$$a_1 = \frac{2000\,H - vMg\sin\alpha}{Mv}$$

(ii) පහළට පැමිණීමේ දී ප්‍රකර්ෂණ බලය P_3, $v = \frac{v}{2}$ හා $a = a_2$ නම්,

$$P_3 = \frac{H\times 1000}{v/2} = \frac{2000\,H}{v}$$

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්,

$$P_3 - R + Mg\sin\alpha = Ma_2$$

$$\frac{2000\,H}{v} - \frac{1000\,H}{v} + Mg\sin\alpha = Ma_2$$

$$a_2 = \frac{1000\,H + vMg\sin\alpha}{Mv}$$

$a_2 = 2a_1$ වෙයි නම් (ගැටලුව කියවා බලන්න.)

$$\frac{1000\,H + vMg\sin\alpha}{Mv} = 2\left(\frac{2000\,H - vMg\sin\alpha}{Mv}\right)$$

$$1000\,H + v\,Mg\sin\alpha = 4000\,H - 2v\,Mg\sin\alpha$$

$$3v\,Mg\sin\alpha = 3000\,H$$

$$\sin\alpha = \frac{1000\,H}{v\,Mg}\ //$$

මේ අවස්ථාවේ දී ඉහළට චලිතයේ දී උපරිම වේගය v_1 නම්, ① වන සමීකරණයට අනුව,

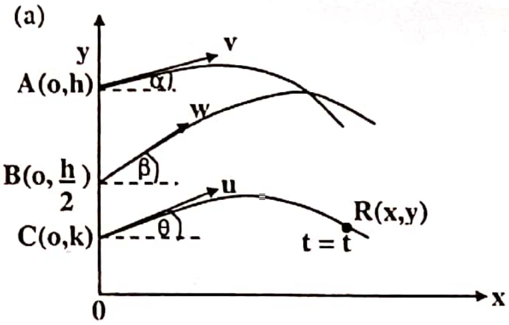
$$\frac{1000\,H}{v_1} - \frac{1000\,H}{v} - Mg\sin\alpha = M\times O$$

$Mg\sin\alpha = \frac{1000\,H}{v}$ බැවින්,

$$\frac{1000\,H}{v_1} = \frac{1000\,H}{v} + \frac{1000\,H}{v}$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v} + \frac{1}{v} \Rightarrow v_1 = \frac{v}{2}\ //$$

12. (a)



O හරහා වූ තිරස් හා සිරස් රේඛා x හා y අක්ෂ ලෙස ගත්විට, t = t හි දී R ≡ (x,y) බැවින්, C → R තෙක් චලිතය සලකා, $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්,

$\rightarrow x = u\cos\theta \times t$ —— ①

$\uparrow y - k = u\sin\theta \times t - \frac{1}{2} \times g \times t^2$ —— ②

$t = \frac{x}{u\cos\theta}$, ② හි ආදේශයෙන්,

$$y - k = u\sin\theta \times \frac{x}{u\cos\theta} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{u^2\cos^2\theta}$$

$$y = k + x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}\sec^2\theta \;//$$

P හි පථය k = h, θ = α හා u = v යෙදීමෙන්,

$y = h + x\tan\alpha - \frac{gx^2\sec^2\alpha}{2v^2}$ —— ① බව අපෝහනය කළ හැක.

ඒ ආකාරයට ම Q හි පථය

$y = \frac{h}{2} + x\tan\beta - \frac{gx^2\sec^2\beta}{2w^2}$ —— ② වේ.

එසේම $x_1 = v\cos\alpha\, t$ හා $x_2 = w\cos\beta\, t$ වේ.

$t = t_1$ විට P හා Q අංශුන් හමුවෙයි නම් $x_1 = x_2$ //

$\Rightarrow v\cos\alpha\, t_1 = w\cos\beta\, t_1 \Rightarrow v\cos\alpha = w\cos\beta$ //

($\because t_1 \neq 0$ නිසා)

එසේම $t = t_1$ විට, x = d බැවින්

① න් P සඳහා $y = h + d\tan\alpha - \frac{gd^2}{2v^2}\sec^2\alpha$ —— ③

② න් Q සඳහා $y = \frac{h}{2} + d\tan\beta - \frac{gd^2}{2w^2}\sec^2\beta$ —— ④

③ හා ④ න්

$$h + d\tan\alpha - \frac{gd^2\sec^2\alpha}{2v^2} = \frac{h}{2} + d\tan\beta - \frac{gd^2\sec^2\beta}{2w^2}$$

$$\frac{h}{2} = -d(\tan\alpha - \tan\beta) + \frac{gd^2}{2}\left(\frac{\sec^2\alpha}{v^2} - \frac{\sec^2\beta}{w^2}\right)$$

$\frac{h}{2} = -d(\tan\alpha - \tan\beta) + \frac{gd^2}{2}\left(\frac{w^2\sec^2\alpha - v^2\sec^2\beta}{v^2w^2}\right)$ —— ⑤

$v\cos\alpha = w\cos\beta \Rightarrow \frac{v}{\sec\alpha} = \frac{w}{\sec\beta} \Rightarrow v\sec\beta = w\sec\alpha$

$\Rightarrow 0 = w^2\sec^2\alpha - v^2\sec^2\beta$ නිසා

⑤ න් $\frac{h}{2} = d(\tan\beta - \tan\alpha)$ //

$d = v\cos\alpha\, t_1$ වේ. —— ⑥

$$\frac{h}{2d} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$\frac{h}{2d} = \frac{\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}$ —— ⑦

$v\cos\alpha = w\cos\beta \Rightarrow \cos\alpha = \frac{w\cos\beta}{v}$ වේ.

⑦ න් $\frac{h\cos\alpha\cos\beta}{2d} = \sin\beta \times \frac{w\cos\beta}{v} - \cos\beta\sin\alpha$

$$= \frac{w\sin\beta\cos\beta - v\cos\beta\sin\alpha}{v}$$

$$\frac{h\cos\alpha\cancel{\cos\beta}}{2d} = \frac{\cancel{\cos\beta}(w\sin\beta - v\sin\alpha)}{v}$$

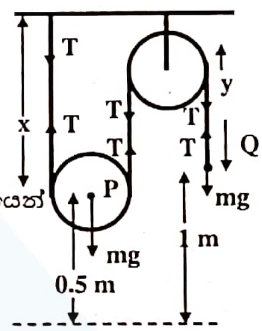
$$\therefore d = \frac{vh\cos\alpha}{2(w\sin\beta - v\sin\alpha)}$$

⑥ හි ආදේශයෙන්

$\frac{vh\cos\alpha}{2(w\sin\beta - v\sin\alpha)} = v\cos\alpha\, t_1$ නිසා

$$t_1 = \frac{h}{2(w\sin\beta - v\sin\alpha)} \;//$$

(b) t = t විට



තන්තුවේ දිග ℓ නම්,

$2x + y + k = \ell$ —— ①

මෙහි k යනු නියත තන්තු කොටස්වල දිගවල් වේ.

දෙවරක් t විෂයයෙන් අවකලනයෙන්

$2\ddot{x} + \ddot{y} = 0$ —— ②

තන්තුවේ ආතතිය T නම්,

F = ma යෙදීමෙන්

$mg - 2T = m\ddot{x}$ —— ③

$Mg - T = M\ddot{y}$ —— ④

②,③ හා ④ න් $\ddot{x}$ හා $\ddot{y}$ උක්ත කිරීමෙන්, හා ආදේශයෙන්

$$\frac{2(mg - 2T)}{m} + \frac{(Mg - T)}{M} = 0$$

$$2g - \frac{4T}{m} + g - \frac{T}{M} = 0$$

$$3g = T\left(\frac{1}{M} + \frac{4}{m}\right)$$

$$3g = T\left(\frac{m + 4M}{Mm}\right)$$

$$T = \frac{3Mmg}{m + 4M} \;//$$

④ න් $\ddot{y} = g - \frac{T}{M}$

$$= g - \frac{3mg}{m + 4M} = \frac{mg + 4Mg - 3mg}{m + 4M}$$

$\ddot{y} = \downarrow 2g\frac{(2M - m)}{m + 4M}$ // සහ $\ddot{x} = \uparrow \frac{g(2M - m)}{4M + m}$

Q $\downarrow s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$$1 = 0 + \frac{1}{2} \cdot \ddot{y}\, t_1^2$$

$$t_1^2 = \frac{2}{\ddot{y}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{4M + m}{g(2M - m)}}$$

P හි චලිතය සලකා ↑ $v = u + at$ යෙදීමෙන්, $v_1 = 0 + \ddot{x}t_1$

t_1 කාලයකට පසු Q අංශුව බිම වදින බැවින් ඉන් පසුව P කප්පිය ගුරුත්වය යටතේ ප්‍රවේගය ශූන්‍ය වනතෙක් ඉහළට යයි. එම දුර h නම්,

$$v^2 = u^2 + 2as$$
$$0 = (\ddot{x}t_1)^2 - 2gh$$
$$h = \frac{\ddot{x}^2 t_1^2}{2g}$$
$$h = \frac{\cancel{g^2}(2M-m)^2}{(4M+m)^{\cancel{2}}} \times \frac{\cancel{(4M+m)}}{\cancel{g(2M-m)}} \times \frac{1}{2\cancel{g}}$$
$$h = \frac{(2M-m)}{2(4M+m)}$$

∴ p අංශුවේ පොළවේ

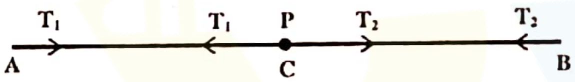
සිට ඉහළ නගින උස $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{(2M-m)}{2(4M+m)}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{(4M+m)}{2(4M+m)} + 2M - m$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{6M}{2(4M+m)}$$

උස $= \frac{1}{2} + \frac{3M}{4M+m}$ //

(සටහන :- t_1 කාලය තුළ Q අංශුව පොළවට ළඟාවන අතර, එම කාලය තුළ P කප්පිය Q ගමන් කළ දුරෙන් හරි අඩක් ($\frac{1}{2}$ m) ඉහළට ගමන් කර ඇත.)

13.

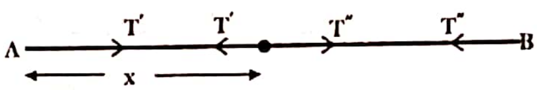


AC = k යයි ගනිමු.

එවිට $T_1 = \frac{4\lambda(k-3\ell)}{3\ell}$ හා $T_2 = \frac{\lambda(8\ell - k - 2\ell)}{2\ell}$

P අංශුව C හි දී සමතුලිතතාවයේ ඇති බැවින්

$$T_1 = T_2 \Rightarrow \frac{4\cancel{\lambda}(k-3\ell)}{3\cancel{\ell}} = \frac{\cancel{\lambda}(6\ell - k)}{2\cancel{\ell}}$$
$$8k - 24\ell = 18\ell - 3k$$
$$11k = 42\ell$$
$$k = \frac{42\ell}{11} = AC$$ //



තන්තු දෙකේම දිගවල් 4ℓට වඩා අඩු බැවින් අංශුව මුදා හරින මොහොතේ ද, ඒවා ඇදී පවතී.

AP = x වන අවස්ථාව සැලසේ.

$$T' = \frac{4\lambda(x-3\ell)}{3\ell} \quad T'' = \frac{\lambda(8\ell - x - 2\ell)}{2\ell}$$

P අංශුවේ චලිතය සලකා F = ma යෙදීමෙන්,

$$T'' - T' = m\ddot{x}$$

$$\frac{\lambda(6\ell - x)}{2\ell} - \frac{4\lambda(x - 3\ell)}{3\ell} = m\ddot{x}$$
$$\frac{\lambda}{6\ell}[18\ell - 3r - 8r + 24\ell] = m\ddot{x}$$
$$\frac{\lambda}{6\ell}(-11x + 42\ell) = m\ddot{x}$$
$$\ddot{x} = \frac{-11\lambda}{6\ell m}\left(x - \frac{42\ell}{11}\right)$$
$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{11\lambda}{6\ell m}\left(x - \frac{42\ell}{11}\right) = 0$$

මෙය ස. අ. චලිතයේ ලාක්ෂණික සමීකරණයයි.

$$y = x - \frac{42\ell}{11}$$

දෙවරක් t විෂයයේ අවකලනයෙන්

$$\ddot{y} = \ddot{x}$$

∴ $\ddot{y} = \frac{-11\lambda}{6\ell m} y$ — ① $\Rightarrow \ddot{y} + \frac{11\lambda}{6\ell m} y = 0$

චලිත කේන්ද්‍රය $\ddot{y} = 0$ වන, එනම් $y = 0$ වන එනම් $x = \frac{42\ell}{11}$ වන C සමතුලිත පිහිටීමයි.

$t = 0$ විට y හි අගය සොයමු.

$$y = 4\ell - \frac{42\ell}{11} = \frac{2\ell}{11}$$

∴ $t = 0$ විට $y = \frac{2\ell}{11}$ හා $\dot{y} = 0$ වේ.

$y = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ —— ②

t විෂයයෙන් දෙවරක් අවකලනයෙන්

$\dot{y} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$ —— ③

$$\ddot{y} = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$$
$$= -\omega^2(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

$\ddot{y} = -\omega^2 y$ —— ④

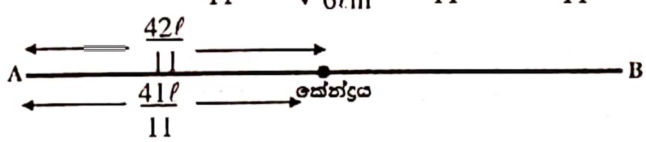
① හා ② න්

$$\omega^2 = \frac{11\lambda}{6\ell m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{11\lambda}{6\ell m}}$$

② න් $\frac{2\ell}{11} = A + B.0 \Rightarrow A = \frac{2\ell}{11}$

③ න් $0 = 0 + B\omega$; $\omega \neq 0$ නිසා $B = 0$

එවිට $y = \frac{2\ell}{11}\cos\sqrt{\frac{11\lambda}{6\ell m}}\,t$; $\frac{-2\ell}{11} \le y \le \frac{2\ell}{11}$ සඳහා



$y = \frac{-\ell}{11}$ විට ප්‍රවේගය සෙවිය යුතුයි.

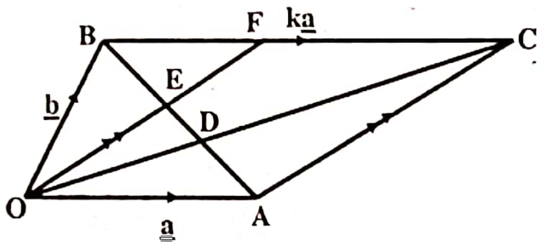
$$V^2 = \omega^2(\text{විස්}^2 - y^2)$$

විස්තාරය $= 4\ell - \frac{42\ell}{11} = \frac{2\ell}{11}$

$$V^2 = \frac{11\lambda}{6\ell m}\left[\frac{4\ell^2}{121} - \frac{\ell^2}{121}\right]$$
$$= \frac{\cancel{11}\lambda}{\cancel{6}_{2}\cancel{\ell}m} \times \frac{\cancel{3}\ell^{\cancel{2}}}{\cancel{121}_{11}} = \frac{\lambda\ell}{22}$$

∴ $V = \sqrt{\frac{\lambda\ell}{22m}}$ //

14. (a)



BD = 2DA,

විශාලත්වය හා දිශාව සැලකීමෙන්,

BD = 2DA

BO + OD = 2(DO + OA) (Δ නියමයට අනුව)

-OB + OD = -2OD + 2OA

3OD = 2OA + OB

$$OD = \frac{2a + b}{3}$$

OBC Δ න් **OC = OB + BC**

OC = b + ka —— ①

O,D,C ඒකරේඛීය බැවින්,

OC = λOD —— ② (λ අදිශයකි.)

① හා ② න් $b + ka = \frac{\lambda}{3}(2a + b)$

3b + 3ka - 2λa - λb = 0

a හා **b** අසමාන්තර දෛශික බැවින්

3k - 2λ = 0 —— ②

3 - λ = 0 —— ③

③ න් λ = 3 ; ② න් 3k = 6 ⇒ k = 2 //

② න් **OC** = 3**OD** ⇒ OC = 3OD නිසා

OD : DC = 1 : 2 //

AC = AO + OC (Δ නියමයෙන්)

= AO + OB + BC

= -a + b + 2a = a + b //

BC පාදය F හි දී හමුවන සේ OE දික් කරන්න.

OE // AC හා OA // BC බැවින් OACF සමාන්තරාස්‍රයක් වේ.

එවිට **FC = a** වන අතර k = 2 බැවින් F යනු BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයයි.

OAFB ද සමාන්තරාස්‍රයක් වේ.

∴ E යනු AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයයි.

DE = AE - AD

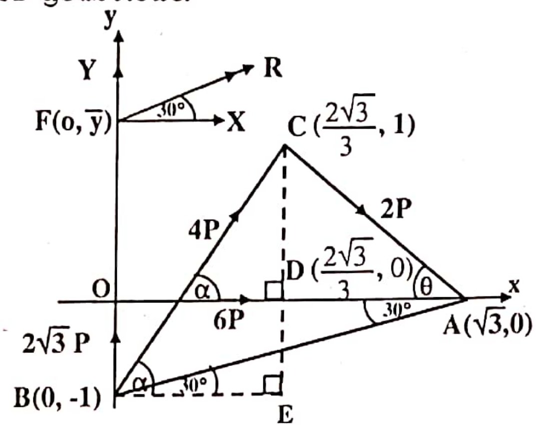
$= \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) - \frac{1}{3}\mathbf{AB}$ (∵ BD = 2DA බැවින්)

$= \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) - \frac{1}{3}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$

$= \frac{1}{6}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{6}\mathbf{AB}$

∴ 6 **DE = AB** ⇒ <u>6 **DE = AB**</u>

(b) ACD ත්‍රිකෝණයෙන්



$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$$

∴ θ = 60°

BCE ත්‍රිකෝණයෙන්

$$\tan\alpha = \frac{1 - (-1)}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$$

α = 60°

විභේදනය කිරීමෙන්

$\overrightarrow{X}$ = 2P cos 60° + 4P cos 60° + 6P

= 9 P

↑Y = 4P sin 60° - 2P sin 60° + $2\sqrt{3}$ P

= $3\sqrt{3}$ P

සම්ප්‍රයුක්ත බලය R නම්, $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$

$= \sqrt{81P^2 + 27P^2}$

$= \sqrt{108P^2}$

$= 6\sqrt{3}$ P //

සම්ප්‍රයුක්ත බලය x - අක්ෂය සමඟ β කෝණයක් සාදයි නම් හා $\tan\beta = \frac{Y}{X}$ බැවින්;

$\tan\beta = \frac{3\sqrt{3}P}{9P} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ ∴ β = 30°

සම්ප්‍රයුක්ත බලය F හි දී y - අක්ෂය කපයි නම් C වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන් ; F ≡ (0, ȳ) ලෙස ගත් විට

$$\circlearrowright\ -6P \times 1 + 2\sqrt{3}P \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}P \times \frac{2\sqrt{3}}{3} + 9P \times (\bar{y} - 1)$$

$-6 + 4 = 6 + 9\bar{y} - 9$

$1 = 9\bar{y}$

$\bar{y} = \frac{1}{9}$

∴ $F \equiv (0, \frac{1}{9})$

සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය

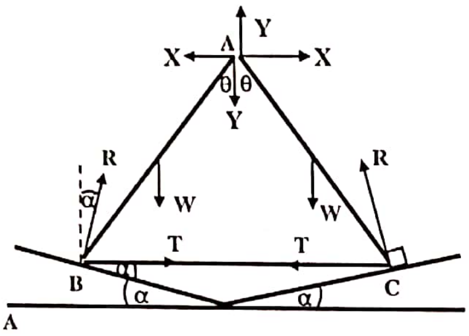
$$y - \frac{1}{9} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 0) \Rightarrow 9y - 1 = 3\sqrt{3}x$$

AB දිශාවට $6\sqrt{3}$ P බලය යෙදූවිට ($O\hat{A}B$ = 30° බැවින්) සම්ප්‍රයුක්තය සමඟ යුග්මයක් සාදයි.

එම යුග්මයේ ඝූර්ණය = $(6\sqrt{3}P) \times (1 + \frac{1}{9}) \sin 60°$

$= 6\sqrt{3}P \times \frac{10}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10P$ //

15. (a)

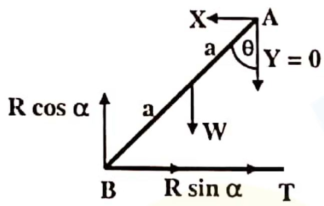


පද්ධතිය A හරහා ඇති සිරස් රේඛාව වටා සමමිතික වේ. ∴ $Y = 0$ වේ.

$$A\hat{B}C = \frac{180 - 2\theta}{2} = 90 - \theta$$

පද්ධතියේ සමතුලිතතාවය සලකා ↑ විභේදනයෙන්

$$2R\cos\alpha = 2W \Rightarrow R = W\sec\alpha$$



AB දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සලකා A වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්,
(දණ්ඩක දිග 2a යයි ගනිමු.)

$$W \times \cancel{a}\sin\theta + (R\sin\alpha + T)\,2\cancel{a}\cos\theta = R\cos\alpha \times 2\cancel{a}\sin\theta$$

$$W\sin\theta + 2R\sin\alpha\cos\theta + 2T\cos\theta = 2R\cos\alpha\sin\theta$$

$$2T\cos\theta = W\sin\theta + 2\frac{W}{\cos\alpha}\cos\alpha\sin\theta - 2\cdot\frac{W}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha\cos\theta$$

$$2T\cos\theta = W\sin\theta + 2W\sin\theta - 2W\tan\alpha\cos\theta$$

$$T = \frac{W}{2}\tan\theta + W\tan\theta - W\tan\alpha$$

$$T = \frac{W}{2}\tan\theta - W\tan\alpha$$

$$T = \frac{1}{2}W(\tan\theta - 2\tan\alpha) > 0 \quad (\because \tan\theta > 2\tan\alpha \text{ බැවින්})$$

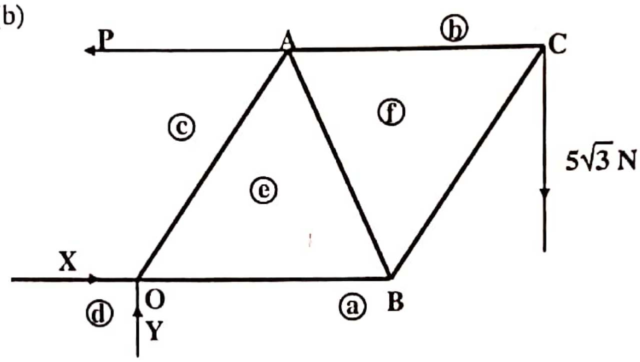
AB දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සලකා තිරස් විභේදනයෙන්

$$X = T + R\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}W\tan\theta - W\tan\alpha + \frac{W}{\cos\alpha}\times\sin\alpha$$

$$X = \frac{1}{2}W\tan\theta \text{ හා } Y = 0$$

(b)



ACBD රොම්බසයක් බැවින් හා දඬු දිගින් සමාන බැවින් $A\hat{O}B = A\hat{B}O = C\hat{A}B = 60^\circ$ වේ.

රාමුකට්ටුවේ සමතුලිතතාවය සලකා O වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්, දණ්ඩක දිග ℓ නම්,

$$P\times\ell\sin 60^\circ = 5\sqrt{3}\times(\ell + \ell\cos 60^\circ)$$
$$P = 15\text{ N}$$

සිරස් විභේදනයෙන් $Y = 5\sqrt{3}$

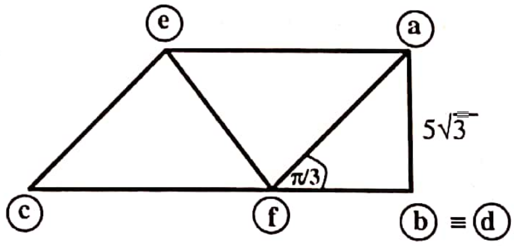
තිරස් විභේදනයෙන් $X = 15$

O හි ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $= \sqrt{75 + 225}$
$= 10\sqrt{3}\text{ N}$

දිශාව OB සමඟ θ කෝණයක් සාදයි නම්,

$$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{5\sqrt{3}}{15} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

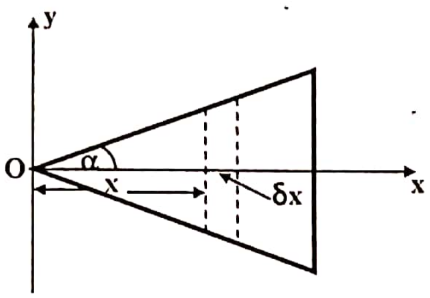
බෝ අංකනය කිරීමෙන් පසු ප්‍රත්‍යාබල සටහන අඳිමු. පළමුව C ද, දෙවනුව B ද, තෙවනුව A ද ලෙස සලකා ඇත.



දණ්ඩ	ප්‍රත්‍යාබලය	විශාලත්වය
BC	තෙරපුම	10 N
AC	ආතතිය	5 N
AB	ආතතිය	10 N
OB	තෙරපුම	10 N
OA	තෙරපුම	10 N

සටහන :- O හි අසවුවේ ප්‍රතික්‍රියාව C හරහා යයි. එනම් ප්‍රත්‍යාබල සටහනේ ⓒ හා ⓓ යා කිරීමෙන් ද ලබාගත හැක.

16.



සමමිතිකත්වයෙන් ඝන කේතුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x - අක්ෂය මත පිහිටයි. එය G නම් $G \equiv (\bar{x}, 0)$ ආකාරය ගනියි.

y - අක්ෂයේ සිට x දුරින් වූ ඝනකම δx වන තුනී තැටියක් සලකමු.

කේතුවේ අඩ සිරස් කෝණය α නම්,

එම තැටියේ අරය $= x \tan \alpha$

එම තැටියේ පරිමාව $= \pi (x \tan \alpha)^2 \delta_x$

ඒකක පරිමාවක ස්කන්ධය ρ නම්,

එම තැටියේ ස්කන්ධය $= \pi x^2 \tan^2 \alpha\, \delta x\, \rho$

එම තැටියේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට

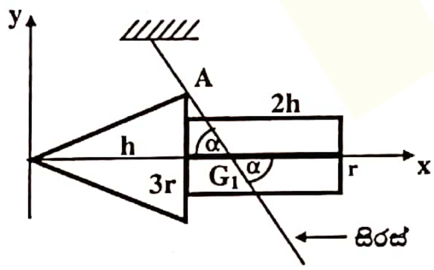
y - අක්ෂයේ සිට දුර $= x$

$\therefore$ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයේ අර්ථ දැක්වීමට අනුව

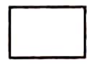
$$\bar{x} = \frac{\int_0^h \pi x^2 \tan^2\alpha\rho \times x\, dx}{\int_0^h \pi x^2 \tan^2\alpha\rho\, dx} = \frac{\pi \tan^2\alpha\rho \int_0^h x^3 dx}{\pi \tan^2\alpha\rho_0 \int^h x^2 dx}$$

$$\bar{x} = \frac{\left(\frac{x^4}{4}\right)_0^h}{\left(\frac{x^3}{4}\right)_0^h} = \frac{3}{4} h$$

$\therefore$ ආධාරකයේ සිට ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $= h - \frac{3h}{4} = \frac{h}{4}$ //



සමමිතිකත්වයෙන් සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x - අක්ෂය මත පිහිටයි. එය G_1 නම් $G_1 \equiv (x_1, 0)$ යයි සිතමු.

වස්තුව	ස්කන්ධය	ස්. කේ. ට y - අක්ෂයේ සිට දුර
	$\frac{1}{3}\pi 9r^2 h\rho$	$\frac{3h}{4}$
	$\pi . r^2 . 2h\rho$	$h + h$
සංයුක්ත වස්තුව	$\pi r^2 h\rho(3+2)$	x_1

ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

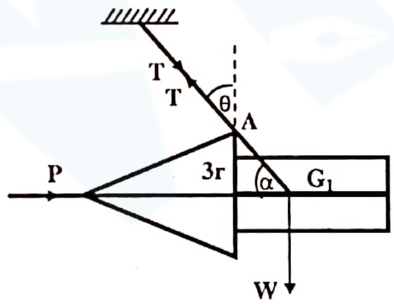
$$\frac{1}{3}\cancel{\pi}.9\cancel{r^2}\cancel{h}\cancel{\rho} \times \frac{3h}{4} + \cancel{\pi}\cancel{r^2}.2\cancel{h}\cancel{\rho} \times 2h = 5\cancel{\pi}\cancel{r^2}\cancel{h}\cancel{\rho}\, x_1$$

$$\frac{9h}{4} + 4h = 5x_1$$

$$x_1 = \frac{25h}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{5h}{4}$$ //

A වලින් එල්ලූ විට (ඉහත රූපය බලන්න.) A හා වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G_1 යා කරන රේඛාව සිරස් වෙයි.

එවිට $\tan \alpha = \frac{3r}{\frac{5h}{4} - h} = \frac{3r}{h/4} = \frac{12r}{h}$ //



සංයුක්ත වස්තුවේ සමතුලිතතාවය සලකා

$\rightarrow$ විභේදනයෙන් $P = T \sin \theta$ ——— ①

$\uparrow$ විභේදනයෙන් $W = T \cos \theta$ ——— ②

A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$P \times 3r = W \times \left(\frac{5h}{4} - h\right) \quad \Rightarrow P \times 3r = \frac{hW}{4}$$

$$P = \frac{hW}{12r}$$

නමුත් $\tan \alpha = \frac{12r}{h}$ නිසා $\frac{h}{12r} = \cot \alpha$ වේ.

$\therefore P = W \cot \alpha$ //

①^2 + ②^2 $\quad P^2 + W^2 = T^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$$W^2 \cot^2 \alpha + W^2 = T^2$$

$$T = W \operatorname{cosec} \alpha$$ //

17. (a) W සුදු බෝල = 5, B කළු බෝල = 3, R රතු බෝල = 7

(i) X_i ; ඉවතට ගත් i (i = 1, 2, 3) වන බෝලය කළු වීම ; ගුණන නීතියට අනුව,

$P(X_1 \cap X_2 \cap X_3) = P(X_1)\,P(X_2|X_1)\,P(X_3|X_1 \cap X_2)$

$P(X_1) = \frac{3}{15}$; $P(X_2|X_1) = \frac{2}{14}$; $P(X_3|X_1 \cap X_2) = \frac{1}{13}$

∴ ඉවතට ගත් බෝල තුන ම කළු වීම.$= \frac{3}{15} \times \frac{2}{14} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{455}$ //

(ii) Y_i : ඉවතට ගත් i (i = 1, 2, 3) වන බෝලය සුදු නොවීම.

$P(Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3) = P(Y_1)\,P(Y_2|Y_1)\,P(Y_3|Y_1 \cap Y_2)$

$P(Y_1) = \frac{7+3}{15} = \frac{10}{15}$; $P(Y_2|Y_1) = \frac{9}{14}$

; $P(Y_3|Y_1 \cap Y_2) = \frac{8}{13}$

$P(Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3) = \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} \times \frac{8}{13} = \frac{24}{91}$ //

(iii) යටත් පිරිසෙයින් එක් බෝලයක්වත් සුදු වීම යනු II සිද්ධියේ අනුපූරකයයි.

∴ පිළිතුර $= 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$ //

(iv) බෝල වෙනස් වර්ණවලින් යුක්ත වීම.

මෙහි දී අනුපිළිවෙළ නොසැලකෙන බැවින් හා ප්‍රතිස්ථාපන රහිත ව බැවින් සැලකිලිමත් විය යුතු අවස්ථා ගණන හයකි.

[ක ර සු, ක සු ර, සු ර ක, සු ක ර, ර සු ක, ර ක සු]

∴ පිළිතුර $= \left(\frac{3}{15} \times \frac{7}{14} \times \frac{5}{13}\right) \times 6$

$= \underline{\underline{\frac{3}{13}}}$

(v) කළු, රතු ඊළඟට සුදු යන පටිපාටියට බෝල තුන ගැනීමේ සම්භාවිතාව $= \frac{3}{15} \times \frac{7}{14} \times \frac{5}{13}$

$= \underline{\underline{\frac{1}{26}}}$

(b)

	ලකුණු පරාසය	සිසුන් ගණන
මාතය = 48	00 - 20	14
මධ්‍යස්ථය = 50	20 - 40	f_1
බව දී ඇත.	40 - 60	27
	60 - 80	f_2
	80 - 100	15

∴ මාතය හා මධ්‍යස්ථය අඩංගු වන පන්ති ප්‍රාන්තරය 40 - 60 වේ.

එබැවින්,

$$48 = 40 + \frac{(27 - f_1)}{(54 - f_1 - f_2)} \times 20$$

$$\frac{2}{5} = \frac{27 - f_1}{54 - f_1 - f_2}$$

$$108 - 2f_1 - 2f_2 = 135 - 5f_1$$

$3f_1 - 2f_2 = 27$ ——— ① හා

$$50 = 40 + \left(\frac{\frac{56 + f_1 + f_2}{2} - (14 + f_1)}{27}\right) 20$$

$$10 \times 27 = \left(\frac{56 + f_1 + f_2 - 28 - 2f_2}{2}\right) \times 20$$

$f_1 - f_2 = 1$ ——— ②

① හා ② විසඳීමෙන්

$f_1 = 25$ හා $f_2 = 24$ ලැබේ.

∴ පන්තියේ මුළු සිසුන් ගණන = 14 + 24 + 27 + 25 + 15

= 105 //

පන්ති ප්‍රාන්තරය	f_i සංඛ්‍යාතය	මධ්‍ය අගය	අපගමනය	u_i	f_iu_i	$f_iu_i^2$
00 -20	14	10	-40	-2	-28	56
20-40	25	30	-20	-1	-25	25
40-60	27	50	0	0	0	0
60-80	24	70	20	1	24	24
80-100	15	90	40	2	30	60
	105				1	165

ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය $= 50 + \frac{1}{105} \times 20$

$= 50 + \frac{4}{21} \simeq 50.19$

ලකුණුවල විචලතාව $= 400 \left(\frac{165}{105} - \left(\frac{1}{105}\right)^2\right)$

විචලතාව $= \frac{400}{105 \times 105}\,[165 \times 105 - 1]$

$= \frac{4 \times 4}{21 \times 21} \times 17324$

∴ සම්මත අපගමනය $= \frac{4}{21}\sqrt{17324}$

$= \underline{\underline{25.07}}$

*** ***