අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය - 2016 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)

General Certificate of Education (Adv. Level) Examination – August 2016 (New Syllabus)

සංයුක්ත ගණිතය I / පැය තුනයි

Combined Mathematics I / Three hours

උපදෙස්:

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
- **A කොටස** (ප්‍රශ්න 01 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
- **A කොටස:**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
- **B කොටස:**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය, **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.

A කොටස

01. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} r(r+1) = \frac{n}{3}(n+1)(n+2)$ බව සාධනය කරන්න.

02. එක ම රූප සටහනක $y = |x| + 1$ හා $y = 2|x-1|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න. **ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ,** $|x| + 1 > 2|x-1|$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

03. එක ම ආගන්ඩ් සටහනක

(i) $|z - i| = 1$, (ii) $\mathrm{Arg}\,(z - i) = \dfrac{\pi}{6}$

සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයන්හි පථවල දළ සටහන් ඇඳ, මෙම පථයන්හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් සොයන්න; මෙහි $r > 0$ හා $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ වේ.

04. එක් එක් සංඛ්‍යාංකය එක් වරක් පමණක් භාවිත කරයි නම්, 1, 2, 3, 4 හා 5 යන සංඛ්‍යාංකවලින්, සංඛ්‍යාංක පහකින් යුත් වෙනස් සංඛ්‍යා කීයක් සෑදිය හැකි ද?

මෙම සංඛ්‍යාවලින් (i) කොපමණක් ඉරට්ටේ සංඛ්‍යා වේ ද?

(ii) කොපමණක 3 හා 4 සංඛ්‍යාංක එක ළඟ තිබේ ද?

05. $a > 0$ යැයි ගනිමු. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(\alpha x)}{\sqrt{4 + x^2} - \sqrt{4 - x^2}} = 16$ වන පරිදි වූ α හි අගය සොයන්න.

06. $y = x^2$ හා $y = 2x - x^2$ වක්‍ර මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය වර්ග ඒකක $\dfrac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න.

07. $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ සඳහා $x = 3\sin^2 \dfrac{\theta}{2}$, $y = \sin^3 \theta$ යන පරාමිතික සමීකරණ මගින් C වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ.

$\dfrac{dy}{dx} = \sin 2\theta$ බව පෙන්වන්න.

C මත වූ P ලක්ෂ්‍යයක දී ස්පර්ශකයෙහි අනුක්‍රමණය $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ වේ නම්, P ට අනුරූප θ පරාමිතියෙහි අගය සොයන්න.

08. මූල ලක්ෂ්‍යයත්, $2x + 3y - k = 0$ හා $x - y + 1 = 0$ සරල රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යයත් හරහා යන සරල රේඛාව l යැයි ගනිමු; මෙහි $k\ (\neq 0)$ නියතයකි. l හි සමීකරණය k ඇසුරෙන් සොයන්න.

$(1, 1)$ හා $(3, 4)$ ලක්ෂ්‍ය දෙක l හි එක ම පැත්තේ වන බව දී ඇත. $k < 18$ බව පෙන්වන්න.

09. $A \equiv (1, 2)$, $B \equiv (-5, 4)$ හා S යනු AB විෂ්කම්භයක් ලෙස වූ වෘත්තය යැයි ගනිමු.

(i) S වෘත්තයේ ද

(ii) S වෘත්තය ප්‍රලම්බ ව ඡේදනය කරන, කේන්ද්‍රය (1, 1) ලෙස ඇති වෘත්තයේ ද

සමීකරණ සොයන්න.

10. $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ සඳහා $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$ සමීකරණය විසඳන්න.

*** ***

B කොටස

★ ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) $a \neq 0$ හා $a + b + c \neq 0$ වන පරිදි වූ $a, b, c \in \mathbb{R}$ යැයි ද $f(x) = ax^2 + bx + c$ යැයි ද ගනිමු.

$f(x) = 0$ සමීකරණයෙහි, 1 මූලයක් **නො වන** බව පෙන්වන්න.

$f(x) = 0$ හි මූල α හා β යැයි ගනිමු.

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = \dfrac{1}{a}(a + b + c)$ බව ද $\dfrac{1}{\alpha - 1}$ හා $\dfrac{1}{\beta - 1}$ මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය $g(x) = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව ද පෙන්වන්න; මෙහි $g(x) = (a + b + c)x^2 + (2a + b)x + a$ වේ.

දැන්, $a > 0$ හා $a + b + c > 0$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි අවම අගය වන m_1 යන්න $m_1 = -\dfrac{\Delta}{4a}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $\Delta = b^2 - 4ac$ වේ.

$g(x)$ හි අවම අගය m_2 යැයි ගනිමු. $(a + b + c)\, m_2 = a m_1$ බව අපෝහනය කරන්න.

ඒ නයින්, සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $g(x) \geq 0$ ම නම් පමණක් සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) \geq 0$ බව පෙන්වන්න.

(b) $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ හා $q(x) = x^2 + 3x + 6$ යැයි ගනිමු. ශේෂ ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්, $p(x)$ යන්න $(x - 1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂයත්, $q(x)$ යන්න $(x - 2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂයත් සොයන්න.

$p(x) = (x - 1)\, q(x) + 5$ බව සත්‍යාපනය කර, $p(x)$ යන්න $(x - 1)(x - 2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

12. (a) $n \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $(1 + x)^n$ සඳහා ද්විපද ප්‍රසාරණය ප්‍රකාශ කරන්න.

සුපුරුදු අංකනයෙන්, $r = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$ සඳහා $\dfrac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r} = \dfrac{n - r}{r + 1}$ බව පෙන්වන්න.

$(1 + x)^n$ හි ද්විපාද ප්‍රසාරණයේ x^r, x^{r+1} හා x^{r+2} හි සංගුණක එම පිළිවෙළට ගත් විට $1 : 2 : 3$ අනුපාතවලින් යුතු වේ. මෙම අවස්ථාවේ දී $n = 14$ හා $r = 4$ බව පෙන්වන්න.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{10r + 9}{(2r - 3)(2r - 1)(2r + 1)}$ හා $f(r) = r(Ar + B)$ යැයි ගනිමු; මෙහි A හා B තාත්ත්වික නියත වේ.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{f(r)}{(2r - 3)(2r - 1)} - \dfrac{f(r + 1)}{(2r - 1)(2r + 1)}$ වන පරිදි A හා B නියතවල අගයන් සොයන්න.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum\limits_{r=1}^{n} U_r = -3 - \dfrac{(n + 1)(2n + 3)}{(4n^2 - 1)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum\limits_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව තවදුරටත් පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

13. (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු.

$\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$ හා $\mathbf{AY} = \mu\mathbf{Y}$ වන පරිදි λ හා μ තාත්ත්වික නියත සොයන්න.

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු. $\mathbf{P}^{-1}$ හා $\mathbf{AP}$ සොයා, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ වේ.

(b) ආගන්ඩ් සටහනක, A ලක්ෂ්‍යය $2 + i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරයි. B ලක්ෂ්‍යය, $OB = 2\,(OA)$ හා $A\hat{O}B = \dfrac{\pi}{4}$ වන පරිදි වේ. මෙහි O යනු මූලය ද $A\hat{O}B$ මැන ඇත්තේ OA සිට වාමාවර්තව ද වේ. B ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

$OACB$ සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි වූ C ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ද සොයන්න.

(c) $z \in \mathbb{C}$ යැයි ද $w = \dfrac{2}{1+i} + \dfrac{5z}{2+i}$ යැයි ද ගනිමු. Im $w = -1$ හා $|w - 1 + i| = 5$ බව දී ඇත. $z = \pm(2+i)$ බව පෙන්වන්න.

14. (a) $x \neq \pm 1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x^2-1}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න, $f'(x) = \dfrac{2(x-3)(3x-1)}{(x^2-1)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

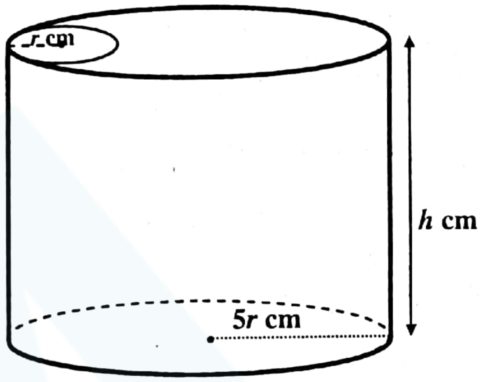
$y = f(x)$ හි ස්පර්ශෝන්මුඛවල සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය, $y = f(x)$ වක්‍රය ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(b) අරය $5r$ cm හා උස h cm වූ ඍජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක හැඩය ඇති තුනී ලෝහ බඳුනකට, අරය r cm වූ වෘත්තාකාර සිදුරක් සහිත අරය $5r$ cm වූ වෘත්තාකාර පියනක් ඇත. (රූපය බලන්න.) බඳුනෙහි පරිමාව $245\pi \text{ cm}^3$ වන බව දී ඇත. සිදුර සහිත පියන සමග බඳුනෙහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $S \text{ cm}^2$ යන්න $r > 0$ සඳහා $S = 49\pi\left(r^2 + \dfrac{2}{r}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

S අවම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න.



15. (a) (i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ සොයන්න.

(ii) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right)$ සොයා, **ඒ නයින්** $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx$ සොයන්න.

ඉහත අනුකල භාවිතයෙන් $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx$ සොයන්න.

(b) $\dfrac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)}$ භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර, **ඒ නයින්** $\displaystyle\int \frac{(2x-1)}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$ සොයන්න.

(c) (i) $n \neq -1$ යැයි ගනිමු. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int x^n (\ln x)\,dx$ සොයන්න.

(ii) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\ln x}{x}\,dx$ අගයන්න.

16. (a) $ABCD$ රොම්බසයක AC විකර්ණයෙහි සමීකරණය $3x - y = 3$ ද $B \equiv (3, 1)$ ද වේ. තව ද CD හි සමීකරණය $x + ky = 4$ වේ; මෙහි k යනු තාත්ත්වික නියතයකි. k හි අගය හා BC හි සමීකරණය සොයන්න.

(b) පිළිවෙළින් $x^2 + y^2 = 4$ හා $(x-1)^2 + y^2 = 1$ යන සමීකරණ මගින් දෙනු ලබන C_1 හා C_2 වෘත්තවල දළ සටහන්, ඒවායේ ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය පැහැදිලිව දක්වමින් අඳින්න.

C_3 වෘත්තයක් C_1 අභ්‍යන්තරව ද C_2 බාහිරව ද ස්පර්ශ කරයි. C_3 හි කේන්ද්‍රය $8x^2 + 9y^2 - 8x - 16 = 0$ වක්‍රය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

17. (*a*) $\tan\alpha$ හා $\tan\beta$ ඇසුරෙන් $\tan(\alpha+\beta)$ සඳහා වූ ත්‍රිකෝණමිතික සර්වසාම්‍යය ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින්, $\tan\theta$ ඇසුරෙන් $\tan 2\theta$ ලබා ගෙන, $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$ බව පෙන්වන්න.

අවසාන සමීකරණයෙහි $\theta = \dfrac{5\pi}{12}$ ආදේශ කිරීමෙන්, $\tan\dfrac{5\pi}{12}$ යන්න $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ හි විසඳුමක් බව සත්‍යාපනය කරන්න.

$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = (x+1)(x^2 - 4x + 1)$ බව තවදුරටත් දී ඇති විට, $\tan\dfrac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(*b*) $0 < A < \pi$ සඳහා $\tan^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1 - \cos A}{1 + \cos A}$ බව පෙන්වන්න.

සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා කෝසයින නීතිය භාවිත කර,
$(a+b+c)(b+c-a)\tan^2\dfrac{A}{2} = (a+b-c)(a+c-b)$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $\sin^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\dfrac{5}{13}\right) = \sin^{-1}\left(\dfrac{56}{65}\right)$ බව පෙන්වන්න.

*** ***

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය - 2016 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)

General Certificate of Education (Adv. Level) Examination – August 2016 (New Syllabus)

සංයුක්ත ගණිතය II / පැය තුනයි

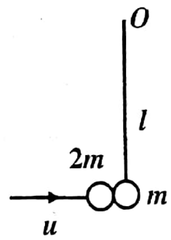
Combined Mathematics II / Three hours

උපදෙස් :

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
  A කොටස (ප්‍රශ්න 01 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
- **A කොටස:**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
- **B කොටස:**
  ප්‍රශ්න **පහකට පමණක්** පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය, **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.
- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **g** මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.

A කොටස

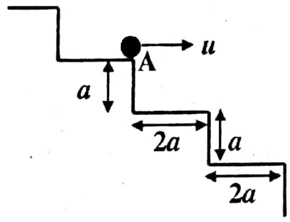
01. එක් කෙළවරක් O අචල ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගසන ලද දිග l වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක අනෙක් කෙළවරෙහි ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් සමතුලිතව එල්ලෙයි. ස්කන්ධය $2m$ වූ තවත් අංශුවක් u ප්‍රවේගයකින් තිරස් ව පළමු අංශුව සමග ගැටී එය සමග හාවේ. සංයුක්ත අංශුව චලිතය අරඹන ප්‍රවේගය සොයන්න.



$u = \sqrt{gl}$ නම්, සංයුක්ත අංශුව එහි ආරම්භක මට්ටමෙන් ඉහළට $\frac{2l}{9}$ උපරිම කරා ළඟා වන බව පෙන්වන්න.

02. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් හා ස්කන්ධය $3m$ වූ Q අංශුවක් සුමට තිරස් මේසයක් මත එක ම සරල රේඛාවක් දිගේ පිළිවෙළින් $5u$ හා u වේගවලින් එකිනෙක දෙසට චලනය වේ. ඒවායේ ගැටුමෙන් පසු ව, P හා Q **එකිනෙකින් ඉවතට** පිළිවෙළින් u හා v වේගවලින් චලනය වේ. u ඇසුරෙන් v සොයා, P හා Q අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න.

03. P අංශුවක්, අචල පඩි පෙළක පඩියක දාරයෙහි වූ A ලක්ෂ්‍යයක සිට එම දාරයට ලම්බව $u = \frac{3}{2}\sqrt{ga}$ මගින් දෙනු ලබන u ප්‍රවේගයකින් තිරස් ව ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබ, ගුරුත්වය යටතේ චලනය වේ. එක් එක් පඩියේ උස a හා දිග $2a$ වේ (රූපය බලන්න). P අංශුව A ට පහළින් පළමු පඩියේ **නොවදින** බවත් Aට පහළින් දෙවන පඩියේ A සිට $3a$ තිරස් දුරකින් වදින බවත් පෙන්වන්න.



04. R N නියත විශාලත්වයකින් යුත් ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහිව ඍජු සමතලා පාරක් දිගේ ස්කන්ධය M kg වූ කාරයක් චලනය වේ. කාරය v m s^{-1} වේගයෙන් චලනය වන මොහොතක දී එහි ත්වරණය a m s^{-2} වේ. මෙම මොහොතේ දී එහි එන්ජිමේ ජවය $(R + Ma)\,v$ W බව පෙන්වන්න.

කාරය ඊළඟට එම R N නියත විශාලත්වයෙන් ම යුත් ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහිව එම ජවයෙන් ම ක්‍රියා කරමින් තිරසට α කෝණයකින් ආනත වූ ඍජු පාරක ඉහළට v_1 m s^{-1} නියත වේගයක් සහිත ව චලනය වේ.

$v_1 = \dfrac{(R + Ma)v}{R + Mg\sin\alpha}$ බව පෙන්වන්න.

05. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ හා $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{i} + (1 - a)\,\mathbf{j}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\alpha \in \mathbb{R}$ වේ.

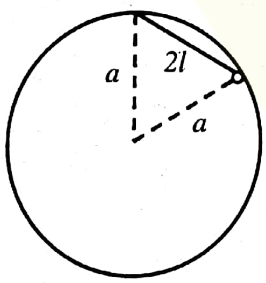
(i) $|\mathbf{a}|$ හා $|\mathbf{b}|$,

(ii) α ඇසුරෙන් $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ හා $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

සොයන්න.

a හා **c** අතර කෝණය **b** හා **c** අතර කෝණයට සමාන නම්, $\alpha = \dfrac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

06. දිග $2l$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක්, සිරස් තලයක සවි කර ඇති අරය a ($> \sqrt{2}\, l$) වූ සිහින්, සුමට දෘඪ වෘත්තාකාර කම්බියක උච්චතම ලක්ෂ්‍යයට ඇඳා ඇත. කම්බිය දිගේ චලනය වීමට නිදහස ඇති බර w වූ කුඩා සුමට පබළුවක් තන්තුවේ අනෙක් කෙළවරට ඇඳා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, තන්තුව තදව, පබළුව සමතුලිතතාවයේ පවතී. පබළුව මත ක්‍රියා කරන බල ලකුණු කර, තන්තුවේ ආතතිය $\dfrac{2\,wl}{a}$ බව පෙන්වන්න.



07. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $P(A) = p$, $P(B) = \frac{p}{2}$ හා $P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{2p}{3}$ වේ; මෙහි $p > 0$ වේ. P ඇසුරෙන් $P(A \cap B)$ සොයන්න.

A හා B ස්වායත්ත සිද්ධි නම්, $p = \frac{5}{6}$ බව අපෝහනය කරන්න.

08. මල්ලක, පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින් ම සමාන වූ, සුදු බෝල 6 ක් හා කළු බෝල n අඩංගු වේ. එකකට පසු ව අනෙක ලෙස ප්‍රතිස්ථාපනයෙන් තොරව බෝල දෙකක් සසම්භාවී ලෙස මල්ලෙන් ඉවතට ගනු ලැබේ. පළමු බෝලය සුදු හා දෙවන බෝලය කළු වීමේ සම්භාවිතාව $\frac{4}{15}$ වේ. n හි අගය සොයන්න.

09. 11 ට අඩු ප්‍රභින්න නිඛිල තුනක මධ්‍යන්‍යය 7 වේ. තවත් නිඛිල දෙකක් ගත් විට නිඛිල පහේම මධ්‍යන්‍යය 5 වේ. තව ද මෙම නිඛිල පහේ එක ම මාතය 3 වේ. නිඛිල පහ සොයන්න.

10. 1, 2, 3, 4 හා 5 ලෙස අංක කළ සමාන කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩ පහකින් සමන්විත, භ්‍රමණය වන වෘත්තාකාර ඉලක්ක පුවරුවක් වෙතට ඊතලයක් විදිනු ලැබේ. එක් එක් ඛණ්ඩයෙහි ඊතලය වදින වාර ගණන පහත දැක්වෙන සංඛ්‍යාත වගුවෙන් දෙනු ලැබේ; මෙහි p හා q නියත වේ.

අංකය	1	2	3	4	5
සංඛ්‍යාතය	1	p	q	5	2

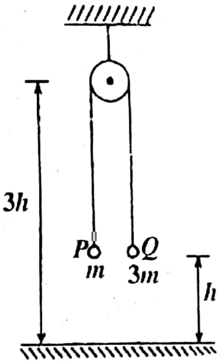
ඉහත දත්තවල මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව පිළිවෙළින් 3 හා $\frac{6}{5}$ බව දී ඇත්නම්, p හා q හි අගයන් සොයන්න.

*** ***

B කොටස

★ ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (*a*) අප්‍රත්‍යාස්ථ තිරස් ගෙබිමකට $3h$ උසක් ඉහළින් සවි කර ඇති කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින්, ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් ස්කන්ධය $3m$ වූ Q අංශුවකට සම්බන්ධ කර ඇත. ආරම්භයේ දී අංශු දෙක ගෙබිමට h උසකින් තන්තුව තදව ඇතිව අල්වා තබා නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. (යාබද රූපය බලන්න.) P හා Q හි චලිතයන්ට වෙන වෙන ම නිව්ටන් දෙවෙනි නියමය යෙදීමෙන්, එක් එක් අංශුවේ ත්වරණයෙහි විශාලත්වය $\frac{9}{2}$ බව පෙන්වන්න.

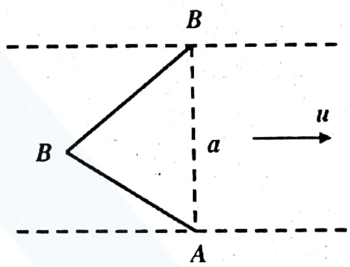


t_0 කාලයකට පසු ව Q අංශුව ගෙබිම සමග ගැටී ක්ෂණිකව නිශ්චලතාවයට පැමිණ, තවත් t_1 කාලයක් නිශ්චලතාවයේ තිබී උඩු අතට චලිතය ආරම්භ කරයි. Q අංශුව උඩු අතට චලිතය ආරම්භ කරන තෙක් P හා Q අංශු දෙකෙහි චලිත සඳහා ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් වෙන වෙන ම අඳින්න.

මෙම ප්‍රස්තාර භාවිතයෙන්, $t_0 = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$ බව පෙන්වා, g හා h ඇසුරෙන් t_1 සොයන්න.

P අංශුව ගෙබිමේ සිට $\frac{5h}{2}$ උපරිම උසකට ළඟා වන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

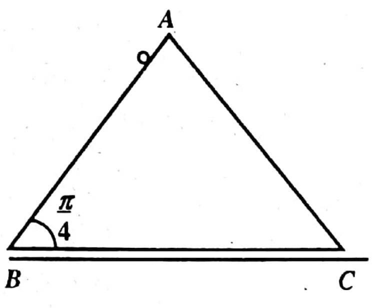
(*b*) පළල a වූ සෘජු ගඟක් ඒකාකාර u වේගයකින් ගලයි. ගඟ ගලන දිශාවට AC රේඛාව ලම්බ වන පරිදි A හා C ලක්ෂ්‍ය ගඟේ ප්‍රතිවිරුද්ධ ඉවුරු දෙකෙහි පිහිටා ඇත. තව ද ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක් වන පරිදි AC ගෙන් උඩු ගං අතට B අචල බෝයාවක් ගඟ මැද සවි කර ඇත. (යාබද රූපය බලන්න.) ජලයට සාපේක්ෂව $v\ (> u)$ වේගයෙන් චලනය වන බෝට්ටුවක් A සිට ආරම්භ කර B වෙත ළඟා වන තෙක් චලනය වේ. ඊළඟට එය B සිට C දක්වා චලනය වේ. A සිට B දක්වාත් B සිට C දක්වාත් බෝට්ටුවේ චලිත සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණවල දළ සටහන් අඳින්න.



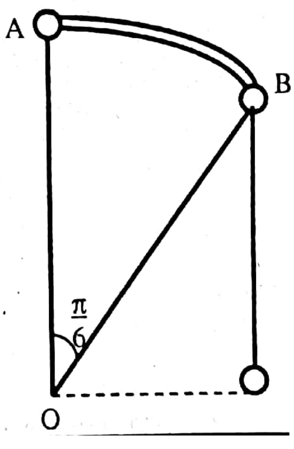
A සිට B දක්වා චලිතයේ දී බෝට්ටුවේ වේගය $\frac{1}{2}(\sqrt{4v^2 - u^2} - \sqrt{3}u)$ බව පෙන්වා, B සිට C දක්වා චලිතයේ දී එහි වේගය සොයන්න.

ඒ නයින්, AB හා BC පෙත් සඳහා බෝට්ටුව ගන්නා මුළු කාලය $\frac{a\sqrt{4v^2 - u^2}}{v^2 - u^2}$ බව පෙන්වන්න.

12. (*a*) රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණය, ස්කන්ධය $2m$ වූ ඒකාකාර කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා වූ සිරස් හරස්කඩකි. AB රේඛාව එය අයත් මුහුණතෙහි උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් වන අතර $A\hat{B}C = \frac{\pi}{4}$ වේ. BC අයත් මුහුණත රළු තිරස් ගෙබිමක් මත ඇතිව කුඤ්ඤය තබා ඇත. AB අයත් මුහුණත සුමට වේ. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි AB මත අල්වා තබා පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. කුඤ්ඤය $\overrightarrow{BC}$ හි දිශාවට චලනය වන බවත් ගෙබිම මගින් කුඤ්ඤය මත ඇති කරන ඝර්ෂණ බලයෙහි විශාලත්වය $\frac{R}{6}$ වන බවත් දී ඇත; මෙහි R යනු ගෙබිම මගින් කුඤ්ඤය මත ඇති කරන අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වයයි. m හා g ඇසුරෙන්, R නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් වන සමීකරණ ලබා ගන්න.



(*b*) රූපයේ දැක්වෙන OAB යනු OA සිරස් ව ඇති, O කේන්ද්‍රයෙහි $\frac{\pi}{6}$ කෝණයක් ආපාතනය කරන අරය a වූ වෘත්ත ඛණ්ඩයකි. එය, ස්වකීය අක්ෂය තිරස් ව සවි කර ඇති සුමට සිලින්ඩරාකාර ඛණ්ඩයක අක්ෂයට ලම්බ හරස්කඩකි. B හි සවි කර ඇති කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් ස්කන්ධය $3m$ වූ P අංශුවකට ඈඳා ඇති අතර එහි අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ Q අංශුවකට ඈඳා ඇත. ආරම්භයේ දී P අංශුව A හි අල්වා ඇති අතර Q අංශුව O හි තිරස් මට්ටමේ නිදහසේ එල්ලෙයි. තන්තුව තදව ඇතිව, මෙම පිහිටීමෙන්, පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ.



OP උඩු අත් සිරස සමඟ $\theta\left(0< \theta < \dfrac{\pi}{6}\right)$ කෝණයක් සාදන විට $2a\dot{\theta}^2 = 3g(1-\cos\theta) + g\theta$ බව හා තන්තුවේ ආතතිය $\dfrac{3}{4}mg(1-\sin\theta)$ බව පෙන්වා, P අංශුව මත අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

13. ස්වාභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $4mg$ වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් අචල O ලක්ෂ්‍යයකට ද අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට ද ගැට ගසා ඇත. P අංශුව, O හි නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. P අංශුව A ලක්ෂ්‍යය පසු කර යන විට එහි ප්‍රවේගය සොයන්න; මෙහි $0A = a$ වේ.

තන්තුවේ දිග $x\ (\geq a)$ යන්න $\ddot{x} + \dfrac{4g}{a}\left(x - \dfrac{5a}{4}\right) = 0$ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න.

$X = x - \dfrac{5a}{4}$ ලෙස ගෙන, ඉහත සමීකරණය $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $\omega\ (>0)$ නිර්ණය කළ යුතු නියතයකි.

$\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$ බව උපකල්පනය කරමින්, මෙම සරල අනුවර්තී චලිතයෙහි විස්තාරය වන C සොයන්න.
P අංශුව ළඟා වන පහළ ම ලක්ෂ්‍යය L යැයි ගනිමු. A සිට L දක්වා චලනය වීමට P මගින් ගනු ලැබූ කාලය $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a}{g}}\left\{\pi - \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)\right\}$ බව පෙන්වන්න.

P අංශුව L හි තිබෙන මොහොතේ දී ස්කන්ධය $\lambda m\ (1 \leq \lambda < 3)$ වූ තවත් අංශුවක් සීරුවෙන් P ට ඈඳනු ලැබේ. ස්කන්ධය $(1+\lambda)m$ වූ සංයුක්ත අංශුවේ චලිත සමීකරණය $\ddot{x} + \dfrac{4g}{(1+\lambda)a}\left\{x - (5+\lambda)\dfrac{a}{4}\right\} = 0$ බව පෙන්වන්න.

සංයුක්ත අංශුව, $(3-\lambda)\dfrac{a}{4}$ විස්තාරය සහිත පූර්ණ සරල අනුවර්තී චලිතයේ යෙදෙන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

14. (*a*) O මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ වේ; මෙහි O, A හා B **ඒක රේඛීය නො වේ.** C යනු $\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ වන පරිදි පිහිටි ලක්ෂ්‍යය ද D යනු $\overrightarrow{OD} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ වන පරිදි පිහිටි ලක්ෂ්‍යය ද යැයි ගනිමු. $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ ඇසුරෙන් $\overrightarrow{AC}$ හා $\overrightarrow{AD}$ ප්‍රකාශ කර, $\overrightarrow{AD} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ බව පෙන්වන්න.

P හා Q යනු පිළිවෙළින්, AB හා OD මත $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$ හා $\overrightarrow{OQ} = (1-\lambda)\overrightarrow{OD}$ වන පරිදි පිහිටි ලක්ෂ්‍ය යැයි ගනිමු; මෙහි $0 < \lambda < 1$ වේ. $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{CQ}$ බව පෙන්වන්න.

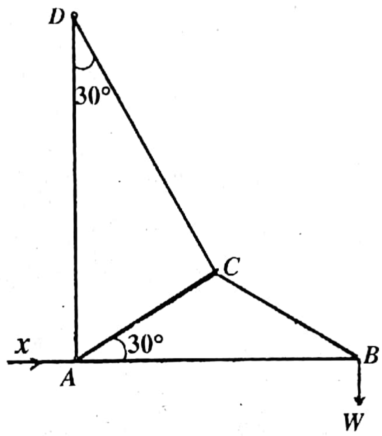
(*b*) $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයක $AB = 2$ m හා $AD = 1$ m යැයි ද $B\hat{A}D = \dfrac{\pi}{3}$ යැයි ද ගනිමු. තව ද CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය E යැයි ගනිමු. විශාලත්ව නිව්ටන 5, 5, 2, 4 හා 3 වූ බල පිළිවෙළින් AB, BC, DC, DA හා BE දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවන්ට ක්‍රියා කරයි. ඒවායේ සම්ප්‍රයුක්ත බලය $\overrightarrow{AE}$ ට සමාන්තර බව පෙන්වා එහි විශාලත්වය සොයන්න.

සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ක්‍රියා රේඛාව B සිට $\dfrac{3}{2}$ m දුරක දී දික්කරන ලද AB ට හමුවන බවත් පෙන්වන්න.

දැන් C හරහා ක්‍රියා කරන අමතර බලයක් ඉහත බල පද්ධතියට එකතු කරනු ලබන්නේ නව පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්ත බලය $\overrightarrow{AE}$ දිගේ වන පරිදි ය. අමතර බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

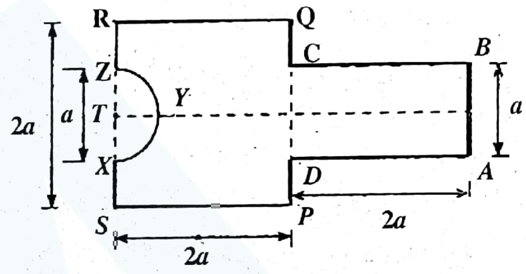
15. (*a*) එක එකක බර w_1 වූ සමාන ඒකාකාර දඬු හතරක්, $ABCD$ රොම්බසයක් සෑදෙන පරිදි, ඒවායේ අන්තවල දී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. $B\hat{A}D = 2\theta$ වන පරිදි BC හා CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය සැහැල්ලු දණ්ඩක් මගින් යා කර ඇත. B හා D එක් එක් සන්ධිය සමාන w_2 භාර දරයි. පද්ධතිය, A සන්ධියෙන් සමමිතික ලෙස එල්ලෙමින්, සැහැල්ලු දණ්ඩ තිරස් ව ඇතිව සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ පවතියි. සැහැල්ලු දණ්ඩෙහි තෙරපුම $2(2w_1 + w_2)\tan\theta$ බව පෙන්වන්න.

(b) යාබද රූපයෙන්, අන්තවල දී සුමට ලෙස සන්ධි කළ AB, BC, CD, AC හා AD සැහැල්ලු දඬු පහකින් සමන්විත රාමු සැකිල්ලක් නිරූපණය වේ. $AC = CB$ හා $B\hat{A}C = 30° = A\hat{D}C$ බව දී ඇත. රාමු සැකිල්ල D හි දී සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. B සන්ධියේ දී W බරක් එල්ලා AB තිරස් ව ද AD සිරස් ව ද ඇතිව රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක සමතුලිතව තබා ඇත්තේ A හි දී ක්‍රියා කරන විශාලත්වය X වූ තිරස් බලයක් මගිනි. බෝ අංකනය භාවිතයෙන් B, C හා A සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහන් එක ම රූපයක අඳින්න. **ඒ නයින්**, X හි අගය හා සියලු දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල, ආතති හා තෙරපුම් වශයෙන් වෙන් කර දක්වමින් සොයන්න.



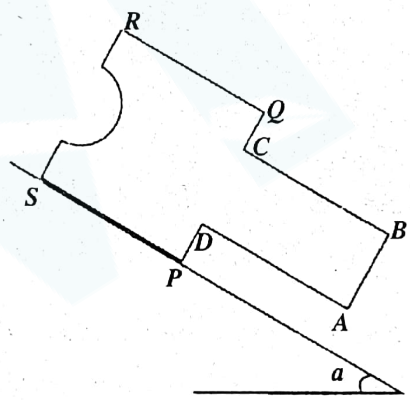
16. අරය r හා O කේන්ද්‍රය වූ ඒකාකාර අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය O සිට $\dfrac{4r}{3\pi}$ දුරකින් ඇති බව පෙන්වන්න.

යාබද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, L ඒකාකාර තල ආස්තරයක් සාදා ඇත්තේ $ABCD$ ඍජුකෝණාස්‍රයක් $PQRS$ සමචතුරස්‍රයකට DC හා PQ ඒවායේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය සම්පාත වෙමින් එක ම රේඛාවේ පිහිටන පරිදි දෘඪ ලෙස සවි කර, RS හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන T හි කේන්ද්‍රය ඇති අරය වන XYZ අර්ධ වෘත්තාකාර පෙදෙසක් ඉවත් කිරීමෙනි. $AB = a$ හා $AD = PQ = 2a$ බව දී ඇත. L ආස්තරයෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සමමිතික අක්ෂය මත, RS සිට ka දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න;



මෙහි $k = \dfrac{238}{3(48 - \pi)}$ වේ.

යාබද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, L ආස්තරය තිරසට α කෝණයකින් ආනත වූ රළු තලයක් මත ස්වකීය තලය සිරස් ව ද P ලක්ෂ්‍යය S ට පහළින් පිහිටන පරිදි PS දාරය උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් මත ද ඇතිව සමතුලිතව පිහිටයි. $\tan\alpha < (2 - k)$ හා $\mu \geq \tan\alpha$ බව පෙන්වන්න; මෙහි μ යනු ආස්තරය හා ආනත තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකයයි.



17. (a) නොනැඹුරු ඝනකාකාර A දාදු කැටයක් එහි වෙන් වෙන් මුහුණත් හය මත 1, 2, 3, 4, 5 පෙන්වයි. A දාදු කැටය දෙවරක් උඩ දමනු ලැබේ. ලැබුණු සංඛ්‍යා දෙකෙහි ඓක්‍යය 6 වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න. මුහුණත් මත වූ සංඛ්‍යා හැරුණු විට, අන් සෑම අයුරකින් ම A ට සර්වසම තවත් B දාදු කැටයක් එහි වෙන් වෙන් මුහුණත් හය මත 2, 2, 3, 4, 4, 5 පෙන්වයි. B දාදු කැටය දෙවරක් උඩ දමනු ලැබේ. ලැබුණු සංඛ්‍යා දෙකෙහි ඓක්‍යය 6 වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

දැන්, A හා B දාදු කැට දෙක පෙට්ටියකට දමනු ලැබේ. එක් දාදු කැටයක් සසම්භාවී ලෙස පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගෙන දෙවරක් උඩ දමනු ලැබේ. ලැබුණු සංඛ්‍යා දෙකෙහි ඓක්‍යය 6 බව දී ඇති විට, පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගත් දාදු කැටය, A දාදු කැටය වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(b) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ යන සංඛ්‍යා n වල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් μ_1 හා σ_1 ද, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ යන සංඛ්‍යා m වල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් μ_2 හා σ_2 ද වේ. මෙම සියලු ම $n + m$ සංඛ්‍යාවල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් μ_1 හා σ_3 යැයි ගනිමු.

$\mu_3 = \dfrac{n\mu_1 + m\mu_2}{n + m}$ බව පෙන්වන්න.

$d_1 = \mu_3 - \mu_1$ ලෙස ගනිමු. $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_3)^2 = n(\sigma_1^2 + d_1^2)$ බව පෙන්වන්න.

$d_2 = \mu_3 - \mu_2$ ලෙස ගැනීමෙන් $\sum_{i=1}^{m} (y_j - \mu_3)^2$ සඳහා එබඳු ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වන්න.

$\sigma_3^2 = \dfrac{\left(n\sigma_1^2 + m\sigma_2^2\right) + \left(nd_1^2 + md_2^2\right)}{n + m}$ බව අපෝහනය කරන්න.

අලුත් පොතක් ප්‍රකාශයට පත් කිරීමෙන් පසු පළමු දින 100 ඇතුළත දිනකට විකිණී තිබුණු පිටපත් සංඛ්‍යාවේ මධ්‍යන්‍යය 2.3 ක් ද විචලතාව 0.8 ක් ද විය. ඊළඟ දින 100 ඇතුළත දිනකට විකිණී තිබුණු පිටපත් සංඛ්‍යාවේ මධ්‍යන්‍යය 1.7 ක් ද විචලතාව 0.5 ක් ද විය. පළමු දින 200 ඇතුළත දිනකට විකිණී තිබුණු පිටපත් සංඛ්‍යාවේ මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව සොයන්න.

*** ***

A - කොටස

01. n = 1 විට ව. පැ. $=\sum_{r=1}^{1} r(r+1) = 1.2 = 2$

ද. පැ. $= \frac{1}{3}(1+1)(1+2) = 2$

එනයින් n = 1 විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.
ඕනෑම n = p සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යයි උපකල්පනය කරමු.

මෙහි $p \in \mathbb{Z}^+$ වේ.

එවිට, $\sum_{r=1}^{p} r(r+1) = \frac{p}{3}(p+1)(p+2)$ වේ.

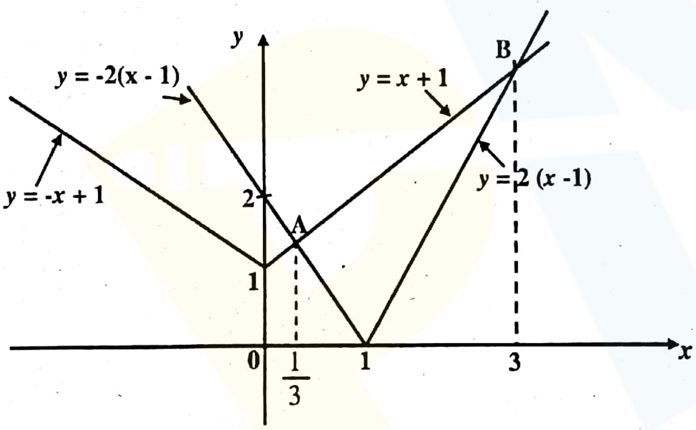
දැන් $\sum_{r=1}^{p+1} r(r+1) = \sum_{r=1}^{p} r(r+1) + (\overline{p+1})(\overline{p+1}+1)$

$= \frac{p}{3}(p+1)(p+2) + (p+1)(p+2)$ (ඉහත උකල්පනය)

$= \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3}$

එනයින් n = p විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම් n = p + 1 විට ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. n = 1ට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බැවින් ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු ම $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

02.



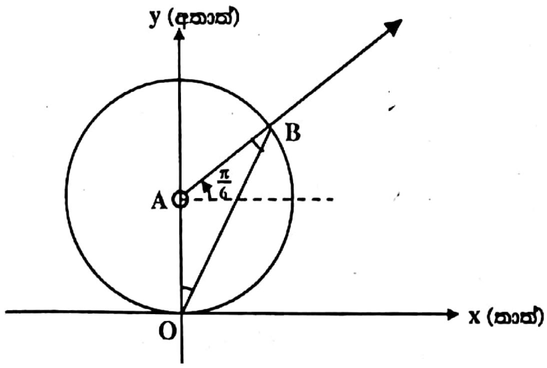
ප්‍රස්තාර දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය A හා B නම්,

A හි දී $x + 1 = -2(x - 1) \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow A\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

B හි දී $x + 1 = 2(x - 1) \Rightarrow x = 3 \Rightarrow B(3, 4)$

රූපය අනුව, $|x| + 1 > 2|x - 1| \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 3$

03.



$O\hat{A}B = \frac{2\pi}{3}$ OA = AB = 1 ඒකක

$A\hat{O}B = A\hat{B}O = \frac{\pi}{6}$

$X\hat{O}B = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$\therefore OB = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

OB තාත්වික අක්ෂයේ ධන දිශාව සමඟ සාදන වාමාවර්ත කෝණය $\frac{\pi}{3}$ බැවින්,

B හි සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore$ අවශ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව

$\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ වේ.

04.

පුනරාවර්තනවලට අවකාශ නොමැති විට

සෑදිය හැකි සංඛ්‍යාංක පහේ සංඛ්‍යා ගණන $= 5! = 120$

(i) ඒවා අතර ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවක් වීමට අවසාන සංඛ්‍යාංකය 2 හෝ 4 විය යුතු ය.

අදාළ ඉරට්ටේ සංඛ්‍යා ගණන $= 4! \times 2! = 48$

(ii) 3 හා 4 එක ළඟ පිහිටන විට ඒවායේ සාපේක්ෂ පිහිටුම වෙනස් විය හැකි ආකාර ගණන 2 !

එලෙස සංඛ්‍යාංක පහ පිහිටිය හැකි

ආකාර ගණන $= 2!\ \ 4! = 48$

එම නිසා අදාළ පිළිතුර = 48

05. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(ax)}{\sqrt{4 + x^2} - \sqrt{4 - x^2}}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(ax)}{1 + \cos(ax)} \frac{(\sqrt{4 + x^2} + \sqrt{4 - x^2})}{(\sqrt{4 + x^2} - \sqrt{4 - x^2})(\sqrt{4 + x^2} + \sqrt{4 - x^2})}$

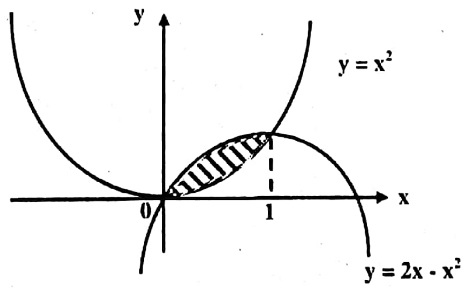
$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(ax)}{2x^2} \cdot \frac{\sqrt{4 + x^2} + \sqrt{4 - x^2}}{1 + \cos(ax)}$

$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(ax)}{ax}\right)^2 \times \frac{a^2}{2} \frac{(\sqrt{4 + x^2} + \sqrt{4 - x^2})}{1 + \cos(ax)}$

$= 1^2 \times \frac{a^2}{2} \times \frac{4}{2} = a^2$

$\therefore a^2 = 16 \Leftrightarrow a = 4 \ (\because a > 0)$

06.



වක්‍ර දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍යවල දී

$x^2 = 2x - x^2 \Leftrightarrow 2x(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ හෝ $x = 1$

අවශ්‍ය වර්ගඵලය $= \int_0^1 \left[(2x - x^2) - x^2\right] dx$

$= 2\int_0^1 (x - x^2)\, dx$

$= 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$

$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0\right)$

$= \frac{1}{3}$ වර්ග ඒකක

07. $\frac{dx}{d\theta} = 6\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \times \frac{1}{2} = 3\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{3}{2}\sin\theta$

$\frac{dy}{d\theta} = 3\sin^2\theta\cos\theta$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3\sin^2\theta\cos\theta}{\frac{3}{2}\sin\theta}$

$= 2\sin\theta\cos\theta$

$= \sin 2\theta$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_p = \frac{\sqrt{3}}{2}$ බැවින්

$\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$2\theta = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 < 2\theta < \frac{\pi}{2})$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

08. $\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා

$\ell : 2x + 3y - k + \lambda(x - y + 1) = 0$ ආකාර වේ.

ℓ, මූලය හරහා යන බැවින්

$-k + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = k$

$\therefore \ell$ හි සමීකරණය $(2 + k)x + (3 - k)y = 0$

(1,1) හා (3, 4) ලක්ෂ්‍ය දෙක ම ℓ හි එක ම පැත්තේ නම්,

$[(2 + k) + (3 - k)]\,[3(2 + k) + 4(3 - k)] > 0$

$\Rightarrow 5(18 - k) > 0$

$\Rightarrow k < 18$

09. AB විෂ්කම්භයක් ලෙස වූ වෘත්තය මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යක්

(i) (x, y) නම්

$\frac{(y-2)(y-4)}{(x-1)(x+5)} = -1, x \neq 1, -5$ සඳහා

එවිට $S : (x - 1)(x + 5) + (y - 2)(y - 4) = 0$

$S : x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$

(ii) අවශ්‍ය වෘත්තය S' යයි සිතමු.

කේන්ද්‍රය (1 , 1) බැවින්

$S' = x^2 + y^2 - 2x - 2y + c' = 0$ ආකාර වේ.

S හා S' ප්‍රලම්භ බැවින්

$2gg' + 2ff' = c + c'$ හි

$g = 2,\ g' = -1,\ f = -3,\ f' = -1,\ c = 3$ යෙදීමෙන්,

$\Rightarrow 2(2)(-1) + 2(-3)(-1) = 3 + c'$

$\Rightarrow c' = -1$

$\therefore$ අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$

10. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$

$\cos x + \cos 3x + \cos 2x = \sin x + \sin 3x + \sin 2x$

$2\cos 2x\cos x + \cos 2x = 2\sin 2x\cos x + \sin 2x$

$\cos 2x(2\cos x + 1) = \sin 2x(2\cos x + 1)$

$(2\cos x + 1)(\cos 2x - \sin 2x) = 0$

$\therefore \cos 2x = \sin 2x \quad (\because 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\cos x + 1 \neq 0)$

$\tan 2x = 1$ ($\because$ එකවිට $\sin 2x = \cos 2x = 0$ විය නොහැක.)

$2x = \frac{\pi}{4} \quad (\because 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ බැවින්)

$x = \frac{\pi}{8}$

*** ***

B - කොටස

11. (a) $f(x) = ax^2 + bx + c\ ,\ a \neq 0$

$f(1) = a + b + c \neq 0$ (බව දී ඇත.)

$\therefore\ 1, f(x) = 0$ හි මූලයක් නොවේ.

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}\ ,\ \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1$$

$$= \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + 1$$

$$= \frac{a + b + c}{a}$$

$\lambda = \dfrac{1}{\alpha - 1}$ හා $\mu = \dfrac{1}{\beta - 1}$ ලෙස ගනිමු.

එවිට λ හා μ මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය

$(x - \lambda)(x - \mu) = 0$ වේ.

එනම්

$$x^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda\mu = 0 \text{ ——— ①}$$

දැන් $\lambda + \mu = \dfrac{1}{(\alpha - 1)} + \dfrac{1}{(\beta - 1)} = \dfrac{\alpha + \beta - 2}{(\alpha - 1)(\beta - 1)}$

$$= \frac{-\frac{b}{a} - 2}{\frac{1}{a}(a + b + c)} = \frac{-(2a + b)}{(a + b + c)}$$

$$\lambda\mu = \frac{1}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} = \frac{a}{a + b + c}$$

① න් අවශ්‍ය සමීකරණය

$$x^2 + \frac{(2a + b)}{(a + b + c)}x + \frac{a}{a + b + c} = 0$$

$\Leftrightarrow\ (a + b + c)x^2 + (2a + b)x + a = 0$

$\Leftrightarrow\ g(x) = 0$

මෙහි $g(x) = (a + b + c)x^2 + (2a + b)x + a$

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a > 0$$

$$= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c$$

$$= a\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$= \underbrace{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq\ 0 \quad (\because a > 0)} - \frac{\Delta}{4a}$$

$x = \dfrac{-b}{2a}$ විට සමානතාවය ඇති වේ.

$\therefore\ f(x) \geq -\dfrac{\Delta}{4a}$ හා $x = -\dfrac{b}{2a}$ විට සමානතාව ඇති වේ.

$\therefore\ f(x)$ හි අවම අගය $= -\dfrac{\Delta}{4a}$

එනම් $m_1 = -\dfrac{\Delta'}{4a}$

$a + b + c > 0$ බැවින් $g(x)$ හි අවම අගය වන

$m_2 = -\dfrac{\Delta}{4(a + b + c)}$ වේ.

මෙහි $\Delta' = (2a + b)^2 - 4(a + b + c)a$

$$= 4a^2 + b^2 + 4ab - 4a^2 - 4ab - 4ac$$

$$= b^2 - 4ac$$

$$= \Delta$$

ඒ නයින් $m_2 = -\dfrac{\Delta}{4(a + b + c)}$

$$= \frac{4am_1}{4(a + b + c)}$$

$\Leftrightarrow (a + b + c)\, m_2 = am_1$

සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $g(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow\quad m_2 \geq 0$

$\Leftrightarrow\quad m_1 \geq 0$ ($\because\ a > 0, a + b + c > 0$ හා

$$m_1 = \frac{(a + b + c)^{m_2}}{a}$$

$\Leftrightarrow$ සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) \geq 0$

(b) $p(x)$ යන්න $(x - 1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $p(1) = 5$ වේ.

$q(x)$ යන්න$(x - 2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $q(2) = 16$ වේ.

$$(x - 1)\,q(x) + 5 = (x - 1)(x^2 + 3x + 6) + 5$$

$$= x^3 + 3x^2 - x^2 - 3x + 6x - 6 + 5$$

$$= x^3 + 2x^2 + 3x - 1$$

$$= p(x)$$

$$q(x) = x^2 + 3x + 6$$

$$= (x - 2)(x + 5) + 16$$

$$p(x) = (x - 1)\,q(x) + 5$$

$$= (x - 1)\{(x - 2)(x + 5) + 16\} + 5$$

$$= (x - 1)(x - 2)(x + 5) + 16x - 11$$

$\therefore\ p(x)\ ,\ (x - 1)(x - 2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය

$16x - 11$ වේ.

12. (a) $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r$; මෙහි ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$r = 0, 1, 2, 3, \ldots n$ සඳහා

$r = 0, 1, 2, \ldots n-1$ සඳහා

$$\frac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r} = \frac{\dfrac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}}{\dfrac{n!}{r!(n-r)!}}$$

$$= \frac{r!(n-r)(n-r-1)!}{(r+1)r!(n-r-1)!}$$

$$= \frac{(n-r)}{(r+1)} \quad \text{——— ①}$$

එලෙස ම $r = 0, 1, 2, \ldots n-2$ සඳහා

$$① \Rightarrow \frac{{}^nC_{r+2}}{{}^nC_{r+1}} = \frac{n-r-1}{r+2}$$

${}^nC_r : {}^nC_{r+1} : {}^nC_{r+2} = 1 : 2 : 3$ බව දී ඇත.

$$\Rightarrow \frac{n-r}{r+1} = 2 \text{ හා } \frac{n-r-1}{r+2} = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow n - r = 2(r+1)$ හා $2(n-r-1) = 3(r+2)$

$\Rightarrow n - 2 = 3r$ ——② හා $2n - 8 = 5r$ ——— ③

② හා ③ $\Rightarrow$ $2(3r+2) - 8 = 5r$

$\underline{\underline{r = 4}}$

② න් $\underline{\underline{n = 14}}$

(b) $U_r = \frac{f(r)}{(2r-3)(2r-1)} - \frac{f(r+1)}{(2r-1)(2r+1)}$

$$\frac{10r+9}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)} = \frac{r(Ar+B)}{(2r-3)(2r-1)} - \frac{(r+1)(Ar+A+B)}{(2r-1)(2r+1)}$$

$\Leftrightarrow 10r + 9 = r(Ar+B)(2r+1)$
$- (r+1)(Ar+A+B)(2r-3)$
$= r[2Ar^2 + (A+2B)r + B]$
$- (r+1)[2Ar^2 + (2B-A)r - 3(A+B)]$
$= 2Ar^3 + (A+2B)r^2 + Br - 2Ar^3$
$- (2B-A)r^2 + 3(A+B)r - 2Ar^2$
$- (2B-A)r + 3(A+B)$, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$= (4A+2B)r + 3(A+B)$

$\Leftrightarrow r^1$ හි සංගුණක සැමයීමෙන් $4A + 2B = 10$
r^0 හි සංගුණක සැමයීමෙන් $3(A+B) = 9$

$\Leftrightarrow A = 2, B = 1$

$U_r = g(r) - g(r+1)$ ලෙස ගනිමු. මෙහි

$$g(r) = \frac{f(r)}{(2r-3)(2r-1)}$$

$f(r) = r(2r+1)$ වේ.

$r = 1$; $U_1 = g(1) - g(2)$
$r = 2$; $U_2 = g(2) - g(3)$
$\vdots$
$r = n-1$; $U_{n-1} = g(n-1) - g(n)$
$r = n$; $U_n = g(n) - g(n+1)$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = g(1) - g(n+1)$$

$$= \frac{1.3}{(-1).1} - \frac{(n+1)(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= -3 - \frac{(n+1)(2n+3)}{(4n^2-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n=\infty} \left\{ -3 - \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\left(4-\frac{1}{n^2}\right)} \right\}$$

$$= -3 - \frac{1}{2} = \frac{-7}{2}$$

එනයින් $\sum_{r=1}^{n} U_r$ අභිසාරී වන අතර,
එහි ඓක්‍යය $= \frac{-7}{2}$ වේ.

13. (a) $AX = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda X = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$

දැන් $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \lambda = 2$

$AY = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\mu Y = \begin{pmatrix} -2\mu \\ \mu \end{pmatrix}$

දැන් $AY = \mu Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mu \\ \mu \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \mu = -1$

$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ලෙස ගනිමු.

එවිට

$-a - 2c = 1$ —— ①
$-b - 2d = 0$ —— ②
$a + c = 0$ —— ③
$b + d = 1$ —— ④

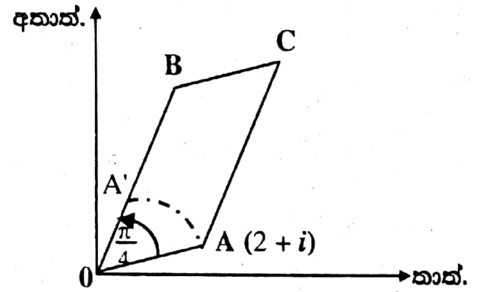
① හා ③ $\Rightarrow c = -1, a = 1$
② හා ④ $\Rightarrow d = -1, b = 2$

$$\therefore \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AP = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D$$

(*b*)



OA රේඛාව, O මූලය වටා වාමාවර්ත ව $\frac{\pi}{4}$ කෝණයකින් භ්‍රමණය කළවිට Aට අනුරූප A' මගින් දැක්වෙන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව z_1 නම්,

$$z_1 = (2+i)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(2+i)(1+i)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+3i)$$

$OB = 2OA$ බව දී ඇත.

$OA = OA' \Rightarrow OB = 2OA'$

B ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව z_2 නම්,

$$z_2 = 2z_1$$
$$= \sqrt{2}(1+3i)$$

C ලක්ෂ්‍යයෙන් නිරූපණය වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව z_3 නම්

$$z_3 = (2+i) + z_2$$
$$= (2+i) + \sqrt{2}(1+3i)$$
$$= (2+\sqrt{2}) + (1+3\sqrt{2})i$$

(*c*) $$w = \frac{2}{1+i} + \frac{5z}{2+i}$$

$$= \frac{2(1-i)}{2} + \frac{5z(2-i)}{5}$$

$$= 1 - i + z(2-i)$$

$\text{Im } w = -1 \Rightarrow -1 = -1 + \text{Im } z(2-i)$

$\Rightarrow \text{Im } z(2-i) = 0$

$\Rightarrow z(2-i) = \overline{z}(2+i)$ ——①

$|w - 1 + i| = 5 \Rightarrow |z(2-i)| = 5$

$\Rightarrow |z||2-i| = 5$

$\Rightarrow |z|\sqrt{5} = 5$

$|z| = \sqrt{5}$ ——②

① $\times$ z $\Rightarrow z^2(2-i) = z\overline{z}(2+i)$

② $\Rightarrow z\overline{z} = 5$

$\therefore z^2(2-i) = 5(2+i)$

$$z^2 = 5.\ \frac{(2+i)}{(2-i)}$$

$$z^2 = 5.\ \frac{(2+i)^2}{5}$$

$$z = \pm(2+i)$$

14. (*a*) $x \neq \pm 1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x^2-1}$

$$f'(x) = \frac{(x^2-1).2(x-3) - (x-3)^2.\,2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2(x-3)(x^2-1-x^2+3x)}{(x^2-1)}$$

$$= \frac{2(x-3)(3x-1)}{(x^2-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)^2}{1-\frac{1}{x^2}}$$

$\therefore$ සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය $x = \pm 1$ වේ.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$ s

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \infty$ හා $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ හා $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \infty$

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය $y = 1$ වේ.

$y = f(x)$ හා $y = 1$ සමගාමී ව විසඳමු.

එනම් $\dfrac{(x-3)^2}{x^2-1} = 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = x^2 - 1$

$\Leftrightarrow 6x = 10$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛයෙන් $y = f(x)$ ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යය $\left(\dfrac{5}{3}, 1\right)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ හෝ $x = \dfrac{1}{3}$

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(+)	(+)	(-)	(-)	(+)

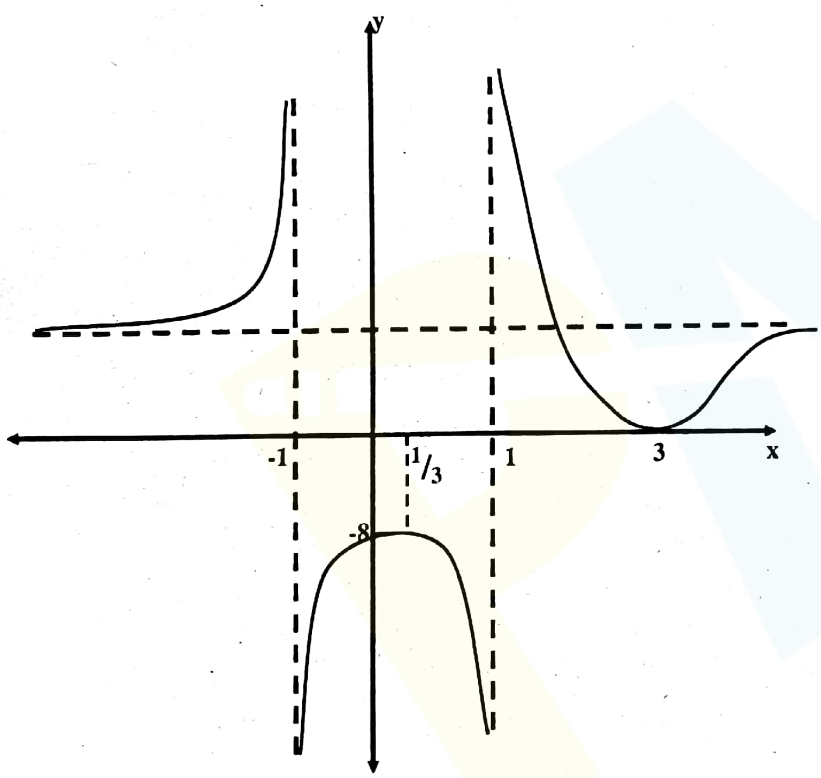
වක්‍රයට හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දෙකක් පවතී.

$x = \frac{1}{3}$ විට $f\left(\frac{1}{3}\right) = \dfrac{\left(\frac{1}{3} - 3\right)^2}{\frac{1}{9} - 3} = \dfrac{\frac{64}{9}}{\frac{8}{9}} = -8$

$\left(\frac{1}{3}, -8\right)$ ස්ථානීය උපරිමයකි.

$x = 3$ විට $f(3) = 0$

$(3, 0)$ ස්ථානීය අවමයකි.



(*b*) $S = 2\pi(5r)h + \pi(5r)^2 2 - \pi r^2$

$= 10\pi rh + 49\pi r^2$ ①

තව ද $245\pi = \pi(5r)^2 h$

$\therefore\ h = \dfrac{245}{25r^2} = \dfrac{49}{5r^2}$ $r > 0$

එවිට ① න් $\Rightarrow S = 10\pi r \times \dfrac{49}{5r^2} + 49\pi r^2$

$= 49\pi\left[r^2 + \dfrac{2}{r}\right].\ r > 0$

$\dfrac{ds}{dr} = 49\pi\left(2r - \dfrac{2}{r^2}\right)$

$\dfrac{ds}{dr} = 0 \Leftrightarrow 2r = \dfrac{2}{r^2} \Leftrightarrow r = 1\ (\because r > 0)$

$0 < r < 1$ සඳහා $\dfrac{ds}{dr} < 0$

$r > 1$ සඳහා $\dfrac{ds}{dr} > 0$

$\therefore$ $r = 1$ විට s අවම වේ.

$\therefore$ s හි අගය අවමවිට $r = 1$ වේ.

15. (*a*) (i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x - 1)^2}}$

$= \sin^{-1}\dfrac{(x - 1)}{2} + C$

මෙහි C අභිමත නියතයකි.

(ii) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{3 + 2x - x^2}\right) = \dfrac{1}{2}(3 + 2x - x^2)^{-\frac{1}{2}} \times (2 - 2x)$

$= \dfrac{1 - x}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$

එනයින් $\displaystyle\int \frac{x + 1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} dx = -\sqrt{3 + 2x - x^2} + C_1$

මෙහි C_1 අභිමත නියතයකි.

$\displaystyle\int \frac{x + 1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} dx = \int \frac{x - 1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} dx$

$\displaystyle + 2\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$

$= -\sqrt{3 + 2x - x^2} + 2\sin^{-1}\dfrac{(x - 1)}{2} + C_2$

මෙහි C_2 අභිමත නියතයකි.

(*b*) $\dfrac{2x - 1}{(x + 1)(x^2 + 1)} = \dfrac{A}{x + 1} + \dfrac{Bx + C}{x^2 + 1}$

$2x - 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x + 1)$

අනුරූප සංගුණක සැමයීමෙන්,

$x^2 ;\ 0 = A + B$ —— ①

$x^1 ;\ 2 = B + C$ —— ②

$x^0 ;\ -1 = A + C$ —— ③

② - ① $2 = C - A$ —— ④

$C = \dfrac{1}{2}$, $A = -\dfrac{3}{2}$ $B = \dfrac{3}{2}$

$\dfrac{2x - 1}{(x + 1)(x^2 + 1)} = \left(\dfrac{-3}{2}\right)\dfrac{1}{x + 1} + \left(\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{3x + 1}{x^2 + 1}$

$$\int \frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)}dx = \frac{-3}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{3x}{x^2+1}dx$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= -\frac{3}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln(x^3+1) + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C'$$

මෙහි C' අභිමත නියතයකි.

(*c*) (i) $n \neq -1$ විට

$$\int x^n(\ln x)\,dx = \int (\ln x)\,\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)(\ln x) - \int\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)(\ln x) - \frac{1}{n+1}\int x^n dx$$

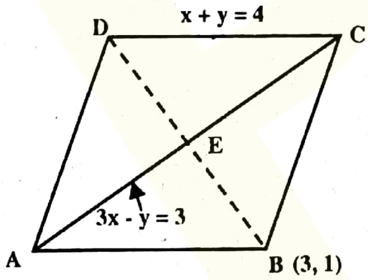
$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)(\ln x) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C$$

මෙහි C අභිමත නියතයකි.

(ii) $$\int_1^3 \frac{(\ln x)}{x}dx = \left.\frac{(\ln x)^2}{2}\right|_1^3$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 3)^2$$

16. (*a*)



BD ⊥ AC බැවින් BD හි සමීකරණය

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x-3) \text{ වේ.}$$

දැන් $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = t$ ලෙස ගනිමු.

∴BD මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක්

$x = 3t + 3$ හා $y = 1 - t$ මගින් දැක්වේ.

D ට අනුරූප t හි අගය t_1 නම්

$D \equiv (3t_1 + 3,\ 1 - t_1)$

BD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $E \equiv \left(\frac{3}{2}t_1 + 3,\ 1 - \frac{t_1}{2}\right)$

E, AC මත බැවින්

$$3\left(\frac{3t_1}{2} + 3\right) - \left(1 - \frac{t_1}{2}\right) = 3$$

$\Rightarrow 8 + 5t_1 = 3 \Rightarrow t_1 = -1$

$\therefore D = (0, 2)$

DC හි සමීකරණය D මගින් තෘප්ත වන බැවින්

$0 + 2k = 4 \Rightarrow k = 2$

$$\left.\begin{aligned} DC;\ x + 2y &= 4 \\ AD;\ 3x - y &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 7x &= 10 \\ 7y &= 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{10}{7} \\ y &= \frac{9}{7} \end{aligned}$$

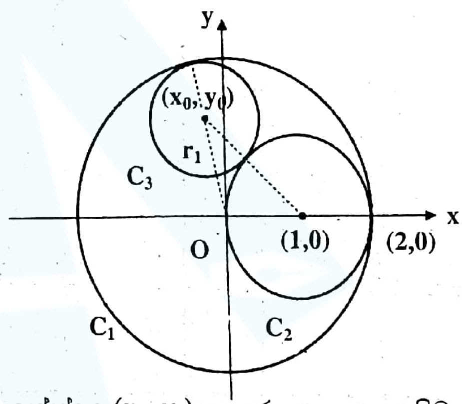
$$C \equiv \left(\frac{10}{7},\ \frac{9}{7}\right)$$

BC හි සමීකරණය $y - 1 = \dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{-11}{7}}(x-3)$

$-11y + 11 = 2x - 6$

$2x + 11y = 17$

(*b*)



C_3 හි කේන්ද්‍රය (x_0, y_0) හා අරය r_1 ලෙස ගනිමු.

C_3 හා C_1 අභ්‍යන්තර ව ස්පර්ශ කරන බැවින්

$$2 - r_1 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

C_3 හා C_2 බාහිර ව ස්පර්ශ කරන බැවින්

$$r_1 + 1 = \sqrt{(x_0-1)^2 + y_0^2}$$

$$\Rightarrow 3 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \sqrt{(x_0-1)^2 + y_0^2}$$

$$3 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0-1)^2 + y_0^2}$$

$$9 - 6\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + x_0^2 + y_0^2 = (x_0-1)^2 + y_0^2$$

$$9 - 6\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = -2x_0 + 1$$

$$8 + 2x_0 = 6\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

$$\Rightarrow 9(x_0^2 + y_0^2) = (4 + x_0)^2$$

$$\Rightarrow 8x_0^2 + 9y_0^2 - 8x_0 - 16 = 0$$

එනයින් C_3 හි කේන්ද්‍රය

$8x^2 + 9y^2 - 8x - 16 = 0$ වක්‍රය මත වේ.

17. (*a*) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$\alpha = \beta = \theta$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $\tan 2\theta = \dfrac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan\theta\tan\theta}$

$= \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

$\alpha = \theta, \beta = 2\theta$ විට

$\tan 3\theta = \tan(\theta + 2\theta)$

$= \dfrac{\tan\theta + \tan 2\theta}{1 - \tan\theta\tan 2\theta}$

$= \dfrac{\tan\theta(1 - \tan^2\theta) + 2\tan\theta}{(1 - \tan^2\theta) - \tan\theta.\,2\tan\theta}$

$= \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$

$\theta = \dfrac{5\pi}{12} \Rightarrow \tan\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = \dfrac{3\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) - \tan^3\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)}{1 - 3\tan^2\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)}$

$\tan\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$ බැවින්

$1 - 3\tan^2\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = 3\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) - \tan^3\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

$\Rightarrow \tan^3\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) - 3\tan^2\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) - 3\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) + 1 = 0$

$\Rightarrow \tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$, $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ හි විසඳුමක් වේ.

$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x^2 - 4x + 1) = 0$

$\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) \neq 1 \Rightarrow \tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$, $x^2 - 4x + 1 = 0$ හි විසඳුමක් වේ.

එනම් $\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$, $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$ මගින් ලැබේ.

නමුත් $\dfrac{5\pi}{12} > \dfrac{\pi}{4}$ බැවින් $\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) > 1$

$2 - \sqrt{3} < 1$ බැවින් $\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}$

(*b*) $0 < A < \pi$;

$\dfrac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \dfrac{2\sin^2\dfrac{A}{2}}{2\cos^2\dfrac{A}{2}}$

$= \tan^2\dfrac{A}{2}$

$\therefore \tan^2\left(\dfrac{A}{2}\right) = \dfrac{1 - \cos A}{1 + \cos A}$

කෝසයින නීතිය

සුපුරුදු අංකනයෙන්, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ වේ.

එනම් $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

දැන් $\tan^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1 - \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{1 + \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$

$= \dfrac{a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)}{(b^2 + c^2 + 2bc) - a^2}$

$= \dfrac{a^2 - (b-c)^2}{(b+c)^2 - a^2}$

$= \dfrac{(a-b+c)(a+b-c)}{(b+c+a)(b+c-a)}$

$\Rightarrow (a+b+c)(b+c-a)\tan^2\dfrac{A}{2} = (a+b-c)(a+c-b)$

(*c*) $\alpha = \sin^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)$ හා $\beta = \sin^{-1}\left(\dfrac{5}{13}\right)$ යයි ගනිමු.

$\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ හා $\sin\beta = \dfrac{5}{13}$

$0 < \alpha, \beta < \dfrac{\pi}{2}$ හා $\cos\alpha > 0$ හා $\cos\beta > 0$ වේ.

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$= \dfrac{3}{5}\cdot\sqrt{1 - \dfrac{25}{169}} + \sqrt{1 - \dfrac{9}{25}}\cdot\dfrac{5}{13}$

$= \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{12}{13} + \dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{5}{13}$

$= \dfrac{36}{65} + \dfrac{20}{65}$

$= \dfrac{56}{65}$

$\dfrac{3}{5} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ බැවින් $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}$

එලෙස ම $\dfrac{5}{13} < \dfrac{1}{2}$ බැවින් $0 < \beta < \dfrac{\pi}{6}$

$\therefore 0 < \alpha + \beta < \dfrac{\pi}{2}$ වේ.

එනයින් $\alpha + \beta = \sin^{-1}\left(\dfrac{56}{65}\right)$ වේ.

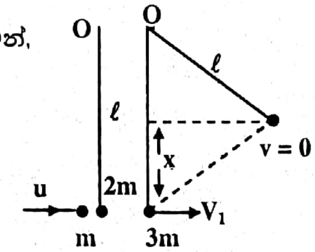
*** ***

A - කොටස

01. ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්,

$\rightarrow \quad mu = 3mv_1$

$V_1 = \frac{u}{3}$



3m අංශුව O හරහා වූ තිරස් මට්ටමේ සිට $(\ell - x)$ ගැඹුරක දී ක්ෂණික නිශ්චලතාවයට පත් වේ. නම්,

$$\frac{1}{2}(3m)v_1^2 - 3mg\ell = -3mg(\ell - x)$$

$$\frac{1}{2}\times 3m \times \frac{4u^2}{9} - 3\cancel{mg\ell} = -3\cancel{mg\ell} + 3mgx$$

$$\frac{3m}{2\times 9}\times 4g\ell = 3mgx$$

$$\frac{2\ell}{9} = x$$

02. $\xrightarrow{5u}$ P (m) Q (3m) $\xleftarrow{u}$ $\qquad$ $\xrightarrow{u}$ P (m) Q (3m) $\rightarrow v$

ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්

$\rightarrow \quad 5mu - 3mu = 3mv - mu$

$3mu = 3mv$

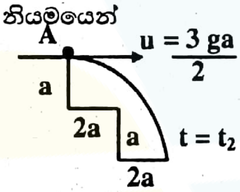
$\underline{\underline{v = u}}$

නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමයෙන්

$e(5u + u) = v + u$

$6eu = u + u$

$\underline{\underline{e = \frac{1}{3}}}$



03. පළමු පඩියෙහි වදියි නම් හා ඒ සඳහා ගතවන කාලය t_1 නම්,

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$a = 0 + \frac{1}{2}gt_1^2 \quad \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2a}{g}}$$

$\rightarrow \quad x = ut_1$ (t_1 කාලයේ දී තිරස් පරාසය)

$$= \frac{3}{2}\sqrt{ga}\times\sqrt{\frac{2a}{g}} = \frac{3\sqrt{2}a}{2} > 2a$$

බැවින් පළමු පඩියෙහි නොවදී. දෙවන පඩියෙහි වදියි නම් හා ඒ සඳහා ගතවන කාලය t_2 නම්

$$\downarrow 2a = 0 + \frac{1}{2}gt_2^2 \quad \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{4a}{g}}$$

$\rightarrow y = ut_2$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{ga}\times 2\sqrt{\frac{a}{g}}$$

$$= 3a < 4a$$

$\therefore$ A සිට තිරස් ව 3a දුරකින් දෙවන පඩියෙහි වදියි.

04. ජවය H W යයි ගනිමු.

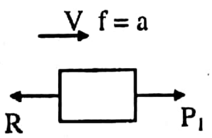
එවිට ප්‍රකර්ෂණ බලය $P_1 = \frac{H}{V}$

$\underline{F} = m\underline{a} \rightarrow$ යෙදීමෙන්,

$P_1 - R = Ma$

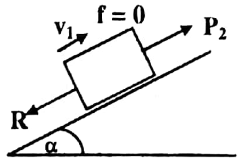
$\frac{H}{V} = R + Ma$

$\underline{\underline{H = V(R + Ma)\ W}}$



$\underline{F} = m\underline{a}$ (α)

ප්‍රකර්ෂණ බලය $P_2 = \frac{H}{V_1}$



$\frac{H}{V_1} - R - Mg\sin\alpha = M \times 0$ (නියත වේගය)

$$\frac{H}{V_1} = R + Ma\sin\alpha$$

$$V_1 = \frac{H}{R + Mg\sin\alpha}$$

$$= \underline{\underline{\frac{V(R + Ma)}{R + Mg\sin\alpha}}}$$

05. $a = 3i + 4j \Rightarrow |\underline{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$b = 4i + 3j \Rightarrow |\underline{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

a හා **c** අතර කෝණය β නම්, අදිශ ගුණිතයේ අර්ථ දැක්වීමට අනුව

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = |\mathbf{a}||\mathbf{c}|\cos\beta$ —— ①

එසේම $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = |\mathbf{b}||\mathbf{c}|\cos\beta$ —— ②

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})\cdot[\alpha\mathbf{i} + (1-\alpha)\mathbf{j}]$

$= 3\alpha + 4(1-\alpha)$ [$\because \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1$ හා $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = 0$ නිසා]

$= \underline{4 - \alpha}$

$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 4\alpha + 3(1-\alpha)$

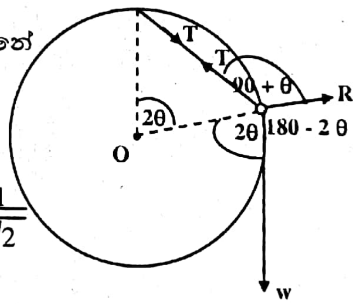
$= \underline{3 + \alpha}$

$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ නිසා ① හා ② න් $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$

$4 - \alpha = 3 + \alpha$

$\underline{\underline{\alpha = \frac{1}{2}}}$

06. තන්තුව O කේන්ද්‍රයේ 2θ කෝණයක් ආපාතනය කරන්නේ යයි සිතන්න.



එවිට $2a\sin\theta = 2\ell$

$\sin\theta = \frac{\ell}{a}$

$a > 2\ell$ නිසා $\sin\theta < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta < \frac{\pi}{4}$ නිසා $2\theta < \frac{\pi}{2}$

පබළුවේ සමතුලිතතාවය සලකා ලාමීගේ ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්,

$$\frac{T}{\sin(180 - 2\theta)} = \frac{w}{\sin(90 + \theta)}$$

$$\frac{T}{2\theta} = \frac{w}{\cos\theta}$$

$$\frac{T}{2\sin\theta\cancel{\cos\theta}} = \frac{w}{\cancel{\cos\theta}} \quad (\therefore \cos\theta \neq 0 \text{ නිසා})$$

$$T = 2w\sin\theta$$

$$\underline{\underline{T = 2w.\frac{\ell}{a}}}$$

07. $P(A) = p \quad P(B) = \frac{p}{2}$

$P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{2p}{3}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$p + \frac{p}{2} - P(A \cap B) - P(A \cap B) = \frac{2p}{3}$

$\frac{3}{2}p - \frac{2}{3}p = 2P(A \cap B)$

$\frac{5}{12}p = P(A \cap B)$

A හා B ස්වායත්ත නම් $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ බැවින්

$\frac{5p}{12} = p \times \frac{p}{2} \Rightarrow 5p = 6p^2$

$p \neq 0$ නිසා $p = \frac{5}{6}$

08. සුදු බෝල 6, කළු බෝල n

ඉවතට ගත් පළමු බෝලය සුදු පාට වීමේ සම්භාවිතාව $= \frac{6}{6+n}$

ප්‍රතිස්ථාපන රහිත ව ගන්නා බැවින්

දෙවැන්න කළු පාට වීමේ සම්භාවිතාව $= \frac{n}{5+n}$

$\therefore \frac{6}{(6+n)} \times \frac{n}{(5+n)} = \frac{4}{15}$ වේ.

$90n = 4(6+n)(5+n)$

$2n^2 - 23n + 60 = 0$

$(2n - 15)(n - 4) = 0$

$n = \frac{15}{2}$ නිඛිලයක් නොවේ.

$\therefore n = 4$

09. මුල් නිඛිල තුන x_1, x_2, x_3 යයි සිතා ඒවායේ මධ්‍යන්‍යය 7 බැවින්,

$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 7 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 21$

අනෙක් සංඛ්‍යා දෙක x_4 හා x_5 නම්, x_1, x_2, x_3 ප්‍රභින්න බැවින් x_4 හා x_5 දෙකෙන් එකක් 3 විය යුතුයි.

එවිට $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = 5$

$21 + 3 + x_5 = 25$

$x_5 = 1$

එක ම මාතය 3 බැවින් x_1, x_2, x_3 න් එකක් ද 3 විය යුතු ය.

$x_1 + x_2 + 3 + 3 + 1 = 25$

$x_1 + x_2 = 18$

$x_1, x_2 < 11$ බැවින් එකක් 10 හා අනෙක 8 විය යුතු ය.

$\therefore$ සංඛ්‍යා පහ වන්නේ 1, 3, 3, 8, 10 වේ.

10. මධ්‍යන්‍යය $\mu = 3$ බැවින්

$\frac{(1 \times 1) + (2 \times p) + (3 \times q) + (4 \times 5) + (5 \times 2)}{1 + p + q + 5 + 2} = 3$

$2p + 3q + 31 = 24 + 3p + 3q$

$p = 7$

විචලතාව $\frac{6}{5}$ බැවින්, හා

විචලතාව $= \frac{1}{n}\Sigma f_i x_i^2 - \mu^2$ නිසා

$\frac{6}{5} = \frac{1}{p+q+8}(1.1^2 + p.2^2 + q.3^2 + 5.4^2 + 2.5^2) - 3^2$

$p = 7$ නිසා $6(q + 15) + 45(7 + q + 8)$

$= [1 + 28 + 9q + 80 + 50]\,5$

$6q + 90 + 675 + \cancel{45q} = 795 + \cancel{45q}$

$6q = 795 - 765$

$6q = 30$

$q = 5$

*** ***

B - කොටස

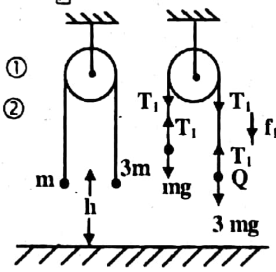
11. (*a*) පද්ධතියේ පොදු ත්වරණය f_1 යයි ගනිමු.

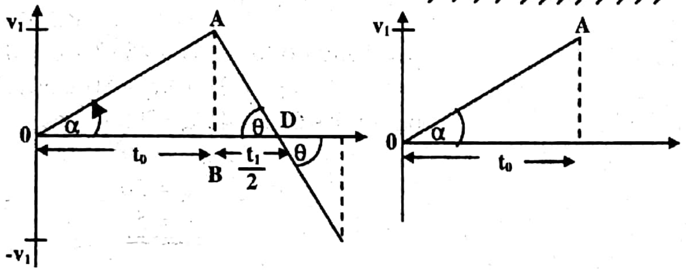
$F = ma$ යෙදීමෙන්,

Q ට $\downarrow$ $\quad 3\,mg - T_1 = 3mf_1 \quad$ — ①

P ට $\uparrow$ $\quad T_1 - mg = mf_1 \quad$ — ②

① + ② න් $\quad f_1 = \dfrac{g}{2}$





(i) ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාරයෙන් (OAB ත්‍රිකෝණයෙන්)

$$\tan\alpha = \frac{v_1}{t_0}$$

$$\frac{g}{2} = \frac{v_1}{t_0} \Rightarrow v_1 = \frac{gt_0}{2}$$

$$\frac{1}{2}\times t_0 \times v_1 = h$$

$$\frac{1}{2}\times t_0 \times \frac{gt_0}{2} = h$$

$$t_0^2 = \frac{4h}{g}$$

$$t_0 = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$$

(ii) ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාරයෙන්,

$\dfrac{g}{2} = \dfrac{v_1}{t_0}$ හා $\quad t_0 = 2\sqrt{\dfrac{h}{g}}$ නිසා

$$v_1 = \frac{gt_0}{2} = \frac{g}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{gh}$$

P අංශුව ගුරුත්වය යටතේ පමණක් සිදු කරන චලිතයට අනුව ABD ත්‍රිකෝණයෙන්

$$\tan\theta = g = \frac{v_1}{\frac{t_1}{2}} = \frac{2v_1}{t_1} \Rightarrow g = \frac{2\sqrt{gh}}{t_1}$$

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$$

ABD Δ යේ වර්ගඵලය ගුරුත්වය යටතේ ඉහළ නැගි උස පෙන්වයි.

$$\text{ABD }\Delta = \frac{1}{2}\times\frac{t_1}{2}\times v_1$$

$$= \frac{1}{2}\times 2\sqrt{\frac{h}{g}}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{gh}$$

$$= \frac{h}{2}$$

∴ P අංශුව ඉහළ ගිය දුර (තිරස් බිමෙහි සිට)

$$= h + h + \frac{h}{2} = \frac{5h}{2}$$

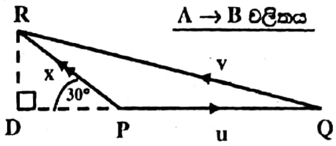
(*b*) (ජ E) $= \rightarrow u$

(බෝ. ජ.) $= v$

(බෝ. E) = (බෝ. ජ.) + (ජ. E)

$= V + \rightarrow u$

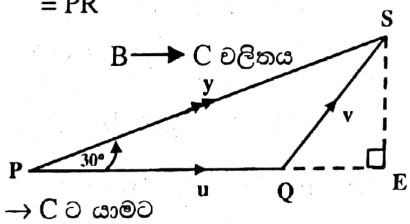
$= \rightarrow u + v$



(i) A → B ට යාමට

$30°$ $= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

$= \overrightarrow{PR}$



(ii) B → C ට යාමට

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS}$

$30°$ $= \overrightarrow{PS}$

PR $= x$ නම්

$DR = x\sin 30° = \dfrac{x}{2}$

$DP = x\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}x}{2}$

QDR Δ න්

$$v^2 = \frac{x^2}{4} + \left(u + \frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2$$

$$v^2 = \frac{x^2}{4} + u^2 + \sqrt{3}\,ux + \frac{3x^2}{4}$$

$$x^2 + \sqrt{3}\,ux + u^2 - v^2 = 0$$

$$x = \frac{-\sqrt{3}\,u \pm \sqrt{4v^2 - u^2}}{2}$$

$x > 0$ නිසා $x = PR = \dfrac{\sqrt{4v^2 - u^2} - \sqrt{3}\,u}{2}$

PS = y නම්

$SE = y\sin 30° = \dfrac{y}{2}$

$PE = y\cos 30° = \dfrac{y\sqrt{3}}{2}$

QSE Δ න්

$$v^2 = \frac{y^2}{4} + \left(y\frac{\sqrt{3}}{2} - u\right)^2$$

$$v^2 = \frac{y^2}{4} + \frac{3y^2}{4} - u\sqrt{3}\,y + u^2$$

$$y^2 - \sqrt{3}\,uy + u^2 - v^2 = 0$$

$$y = \frac{\sqrt{3}\,u \pm \sqrt{3u^2 - 4u^2 + 4v^2}}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}\,u \pm \sqrt{4v^2 - u^2}}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}\,u + \sqrt{4v^2 - u^2}}{2} \qquad (\therefore\ y > u\cos 30)$$

A → B හා B → C ට ගතවන කාලයන් t_1 හා t_2 හා

$$t_1 + t_2 = \frac{a}{x} + \frac{a}{y}$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{4v^2 - u^2} - \sqrt{3}u} + \frac{2a}{\sqrt{4v^2 - u^2} + \sqrt{3}u}$$

$$= \frac{2a\left[\sqrt{4v^2 - u^2} + \cancel{\sqrt{3}u} + \sqrt{4v^2 - u^2} - \cancel{\sqrt{3}u}\right]}{4v^2 - u^2 - 3u^2}$$

$$= \frac{4a\sqrt{4v^2 - u^2}}{4(v^2 - u^2)} = \frac{a\sqrt{4v^2 - u^2}}{4(v^2 - u^2)}$$

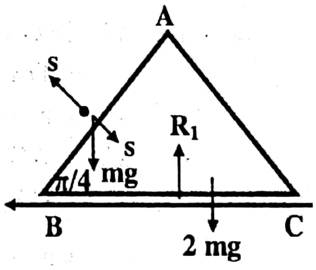
12. (*a*) (කු E) $= \rightarrow a_1$

(m කු) $= a_2 \; \angle \pi/4$

(m E) = (m කු) + (කු E)

$= a_2 \; \angle \; + \rightarrow a_1$

$= a_2 \; \angle \pi/4 \; \rightarrow a_1$ $\quad F = \frac{R}{6}$



$F = ma$

(m) $\swarrow$ $mg \sin\frac{\pi}{4} = m\left(a_2 - a_1 \cos\frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{g}{\sqrt{2}} = a_2 - \frac{a_1}{\sqrt{2}}$ ①

පද්ධතියට $\rightarrow$

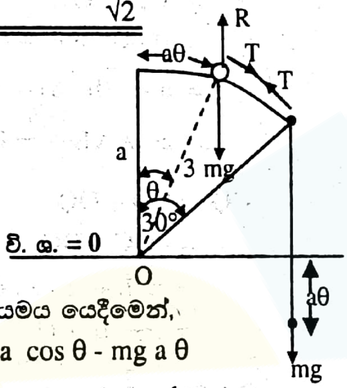
$-\frac{R}{6} = 2ma_1 + m\left(a_1 - a_2 \cos\frac{\pi}{4}\right)$

පද්ධතියට $\uparrow$

$R - 2mg - mg = 2m(0) + m\left(-a_2 \sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\underline{\underline{R - 3mg = -ma_2\frac{1}{\sqrt{2}}}}$

(*b*)



ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්,

$3\,mg\,a = 3mg\,a\cos\theta - mg\,a\theta + \frac{1}{2}.3m(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}.m(a\dot{\theta})^2$

සමීකරණය ma මගින් බෙදීමෙන්,

$3g = 3g\cos\theta - g\theta + 2a\dot{\theta}^2$

$\underline{\underline{2a\dot{\theta}^2 = 3g(1 - \cos\theta) + g\theta}}$

m අංශුවේ ත්වරණය $\downarrow$f නම් 3 m අංශුවේ ත්වරණය ස්පර්ශකයේ දිශාවට f වේ.

(m) $\downarrow$ $mg - T = mf$ —— ①

(3m) ට $\nwarrow$ $T + 3mg\sin\theta = 3m\,f$ —— ② (මෙය ස්පර්ශකයේ දිශාවට ලියා ඇත.)

① × 3 $\quad 3\,mg - 3\,T = 3\,mf$ —— ①'

$\quad T + 3\,mg\sin\theta = 3\,mf$ —— ②

①' - ② $\quad 3\,mg - 3\,mg\sin\theta - 4T = 0$

$4\,T = 3\,mg\,(1 - \sin\theta)$

$\underline{\underline{T = \frac{3\,mg}{4}(1 - \sin\theta)}}$

3 m අංශුවට කේන්ද්‍රය දෙසට F = ma යෙදීමෙන්

$3\,mg\cos\theta - R = 3m\,a\,\dot{\theta}^2$

$R = 3mg\cos\theta - 3m\left[\frac{3\,g}{2}(1 - \cos\theta) + \frac{g\theta}{2}\right]$

$= 3\,mg\cos\theta - \frac{9mg}{2} + \frac{9mg}{2}\cos\theta - \frac{3mg\theta}{2}$

$= \frac{15mg\cos\theta}{2} - \frac{9mg}{2} - \frac{3mg\theta}{2}$

$\underline{\underline{= \frac{3mg}{2}(5\cos\theta - 3 - \theta)}}$

13. $\downarrow$ ගුරුත්වය පමණක් යටතේ සිදුවන චලිතයට

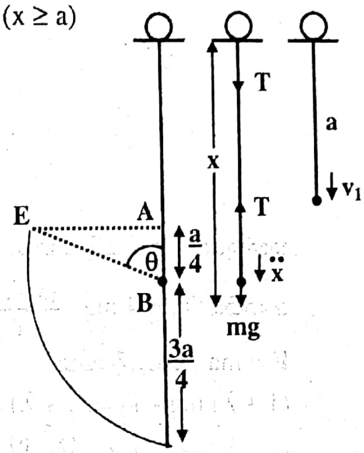
$\downarrow v^2 = u^2 + 2as$

$v_1^2 = 0 + 2ga$

$v_1 = \sqrt{2ga}$

තන්තුවේ විතතිය (x - a) බැවින්

ආතතිය, $T = \frac{4mg\,(x - a)}{a}$ $(x \geq a)$



$\downarrow$ F = ma යෙදීමෙන්

$mg - T = m\ddot{x}$

$mg - \frac{4mg\,(x - a)}{a} = m\ddot{x}$

$x = g - \frac{4gx}{a} + 4g$

$= \frac{-4g}{a}x + 5g$

$= \frac{-4g}{a}\left(x - \frac{5a}{4}\right)$

$\ddot{x} + \frac{4g}{a}\left(x - \frac{5a}{4}\right) = 0$ —— ①

$X = x - \frac{5a}{4}$; දෙවරක් t විෂයේ අවකලනයෙන්

$\ddot{X} = \ddot{x}$

ඉහත ① හි ආදේශයෙන්,

$\ddot{x} + \frac{4g}{a}x = 0$

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ වන්නේ $\omega^2 = \frac{4g}{a}$ විට ය.

එනම් $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{a}} > 0$ වේ.

මෙහි x = a විට $v = v_1 = \sqrt{2ga}$ හා $\omega^2 = \frac{4g}{a}$ නිසා,

$x = \frac{-a}{4}$ වේ.

$\dot{x}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$ හි ආදේශයෙන්

$2\cancel{g}a = \frac{4\cancel{g}}{a}\left(c^2 - \frac{a^2}{16}\right)$

$\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{16} = c^2 \Rightarrow c = \frac{9a^2}{16} \Rightarrow c = \frac{3a}{4}$ ($\because c > 0$ නිසා)

චලිත කේන්ද්‍රය X = 0 වන්නේ $x = \frac{5a}{4}$ විට ය.

අනුරූප වෘත්ත චලිතය සලකමු.

එය කේන්ද්‍රය O සිට $\frac{5a}{4}$ දුරකින් වූ B ලක්ෂ්‍යයයි.

$A\hat{B}E = \theta$ නම්,

$\cos\theta = \frac{AB}{EB} = \frac{\frac{a}{4}}{\frac{3a}{4}} = \frac{1}{3}$ ($\because$EB = විස්තාරය = c)

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

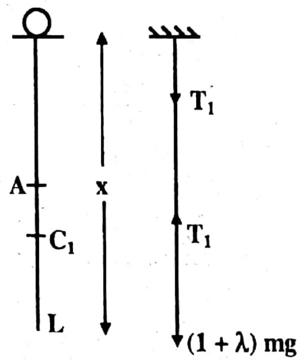
$\therefore E\hat{B}L = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

$\therefore$ A $\rightarrow$ L තෙක් යාමට අංශුව ගත් කාලය t_1 නම්

$t_1 = \frac{\pi - \cos^{-1}(^1/_3)}{\omega}$ මෙහි $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{a}}$ වේ.

$$t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$AL = \frac{a}{4} + \frac{3a}{4} = a$$



තන්තුවේ දිග x යයි ගනිමු.

ආතතිය $T_1 = 4\,mg\,\dfrac{(x-a)}{a}$

$F = ma$ $\downarrow$ යෙදීමෙන්

$$(1+\lambda)\,mg - T_1 = (1+\lambda)\,m\ddot{x}$$

$$(1+\lambda)\,\cancel{m}g - 4\cancel{m}g\,\frac{(x-a)}{a} = (1+\lambda)\,m\ddot{x}$$

$$g\,\frac{[a(1+\lambda) - 4x + 4a]}{a(1+\lambda)} = \ddot{x}$$

$$\frac{-4g}{a(1+\lambda)}\left(x - a - a\frac{(1+\lambda)}{4}\right) = \ddot{x}$$

$$\frac{-4g}{a(1+\lambda)}\left(x - \frac{5a}{4} - \frac{\lambda a}{4}\right) = \ddot{x}$$

$$\frac{-4g}{a(1+\lambda)}\left(x - (5+\lambda)\frac{a}{4}\right) = \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{4g}{a(1+\lambda)}\left(x - (5+\lambda)\frac{a}{4}\right) = 0$$

නව සරල අනුවර්තී චලිතයේ කේන්ද්‍රය C_1, $\ddot{x} = 0$ වන $OC_1 = x = (5+\lambda)\dfrac{a}{4}$ දුරකිනි. මෙම දුර O සිට ය. මුල් අවස්ථාවේ දී තන්තුවේ ඇදි දිග $a + \dfrac{a}{4} + \dfrac{3a}{4} = 2a$ වේ.

$\therefore$ නව විස්තාරය $= 2a - (5+\lambda)\dfrac{a}{4}$

$$= \frac{8a - 5a - \lambda a}{4}$$

$$= \frac{3a - \lambda a}{4}$$

$= \dfrac{a}{4}(3-\lambda) > 0$ වේ. ($\because \lambda < 3$ නිසා)

අංශුව පූර්ණ අනුවර්තී චලිතයේ යෙදීමට නම්,

$AC_1 \geq$ නව විස්තාරය විය යුතු ය.

$$OC_1 - a \geq \frac{a}{4}(3-\lambda)$$

$$(5+\lambda)\frac{a}{4} - a \geq \frac{a}{4}(3-\lambda)$$

$$5a + \lambda a - 4a \geq 3a - \lambda a$$

$$2\lambda a \geq 2a$$

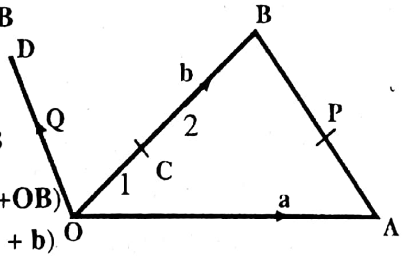
$$\lambda \geq 1$$

$1 \leq \lambda < 3$ බැවින් පූර්ණ අනුවර්තී චලිතයේ යෙදේ.

14. (a) $AC = AO + OC$ (Δ නියමය)

$= -OA + \frac{1}{3}OB$

$= -a + \frac{1}{3}b$



$AD = AO + OD$

$= -OA + \frac{1}{2}AB$

$= a + \frac{1}{2}(AO + OB)$

$= a + \frac{1}{2}(-a + b)$

$= -\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b$

$AD = \frac{3}{2}\left(-a + \frac{1}{3}b\right)$

$\underline{AD = \frac{3}{2}AC}$

$AP = \lambda AB$ හා $OQ = (1-\lambda)OD$

$PC = PO + OC$

$= -OP + OC$

$= -(OA + AP) + OC$

$= a - \lambda(b - a) + \frac{1}{3}b$

$= a - \lambda AB + \frac{1}{3}b$

$CQ = CO + OQ$

$= -OC + OQ$

$= \frac{1}{3}b + (1-\lambda)OD$

$= -\frac{1}{3}b + (1-\lambda)\frac{1}{2}(-a + b)$

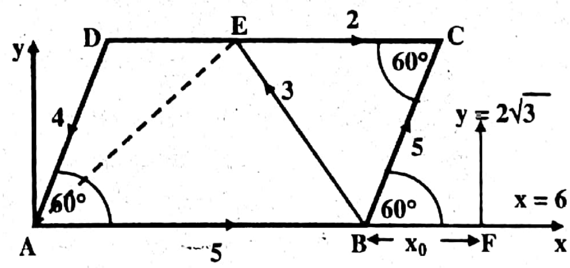
$2CQ = -\frac{2}{3}b + (1-\lambda)(b - a)$

$= -\frac{2}{3}b + b - a - \lambda(b - a)$

$= -a + \frac{1}{3}b - \lambda(b - a)$

$\underline{2CQ = PC}$

(b)



බල විභේදනයෙන්,

$x = 5 + 5\cos 60 - 3\cos 60 - 4\cos 60 + 2$

$= 7 - 2\cos 60$

$= 6$

$\uparrow Y = 5\cos 30 + 3\cos 30 - 4\cos 30$

$= 4\cos 30$

$= 2\sqrt{3}$

සම්ප්‍රයුක්ත බලය x අක්ෂය සමඟ θ කෝණයක් සාදයි නම්,

$$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = 30^\circ$$

$\therefore$ සම්ප්‍රයුක්ත බලය AE ට සමාන්තර වේ.

එහි විශාලත්වය $= \sqrt{X^2 + Y^2}$

$= \sqrt{36 + 12}$

$= \underline{\underline{4\sqrt{3}N}}$

සම්ප්‍රයුක්ත බලය, දික්කළ AB පාදය F හි දී ($BF = x_0$) ඡේදනය කරයි නම්, B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

B $\quad 4 \times 2 \sin 60 - 2 \times 1 \sin 60 \quad = 2\sqrt{3} \times x_0$

$8\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2} - \frac{2\cancel{\sqrt{3}}}{2} \quad = 2\cancel{\sqrt{3}} \times x_0$

$\frac{3}{2}$ m $\quad = x_0$

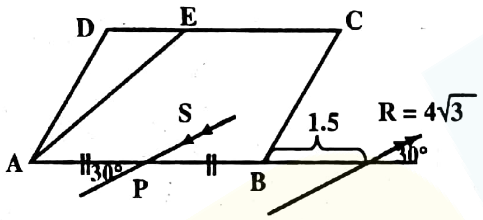
සම්ප්‍රයුක්ත බලය, AE ඔස්සේ ක්‍රියා කිරීමට යෙදිය යුතු අමතර බලය AEට සමාන්තර විය යුතු S බලයක් නම්, S, AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය හරහා යා යුතු ය.

A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

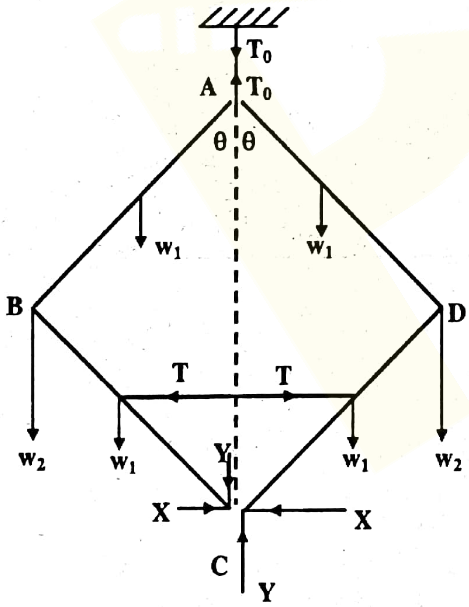
$S \times 1 \sin 30 \quad = 4\sqrt{3}\,(2 + 1.5) \sin 30$

$= 4\sqrt{3} \times \frac{7}{2}$

$= \underline{\underline{14\sqrt{3}\,N}}$



15. (a)



දණ්ඩක දිග 2a යයි ගනිමු.

පද්ධතිය A හරහා ඇති සිරස් රේඛාව වටා සමමිතික වේ.

$\therefore Y = 0$

BC දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සලකා, B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$w_1 \times \cancel{a}\sin\theta + T \times \cos\theta = X \times 2\cancel{a}\cos\theta$ ——①

AB හා BC දඬු දෙකේ සමතුලිතතාවය සලකා A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$w_1 \times \cancel{a}\sin\theta \times 2 + w_2 \times 2\cancel{a}\sin\theta$

$= T \times 3\cancel{a}\cos\theta - X \times 4\cancel{a}\cos\theta$ —— ②

①×2

$2w_1 \sin\theta \;= 4 \times \cos\theta - 2T\cos\theta$ —— ③

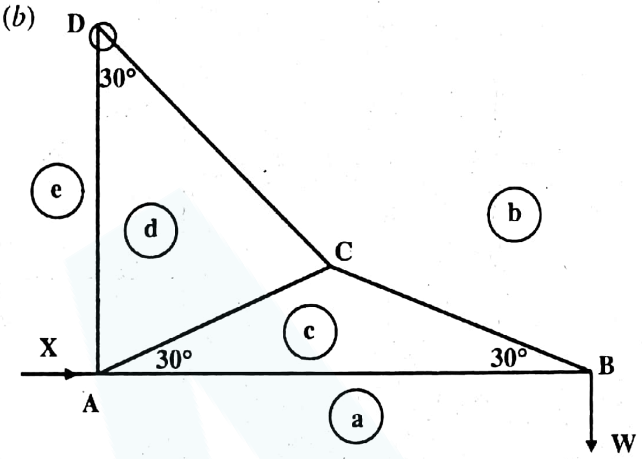
$2w_1 \sin\theta + 2w_2 \sin\theta = 3T\cos\theta - 4 \times \cos\theta$ —— ②

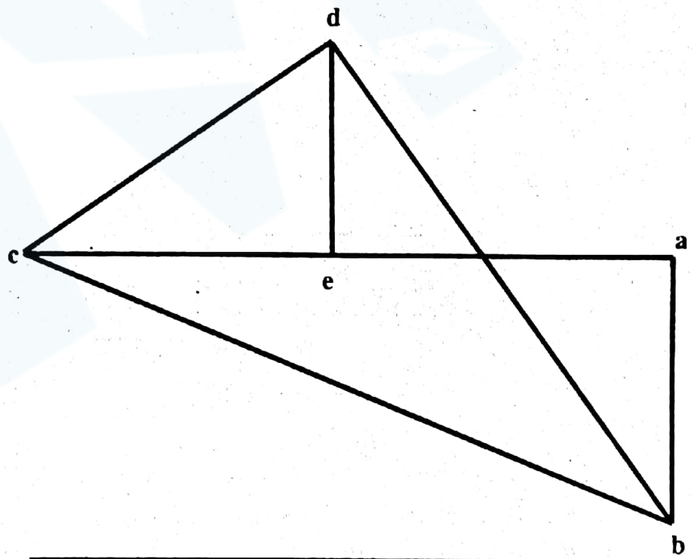
③+② $\quad 4w_1 \sin\theta + 2w_2 \sin\theta \;= T\cos\theta$

$4w_1 \tan\theta + 2w_2 \tan\theta = T$

$\underline{\underline{2(2w_1 + w_2)\tan\theta \;= T}}$

(b)





දණ්ඩ	ප්‍රත්‍යා බලය	විශාලත්වය
BC	ආතතිය	2w
AB	තෙරපුම	$\sqrt{3}$ w
AC	ආතතිය	$\sqrt{3}$ w
CD	ආතතිය	w
AD	තෙරපුම	$\frac{w}{2}$
X	⟶	$w\frac{\sqrt{3}}{2}$

16. සමමිතිකත්වයෙන් ආස්තරයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය x-අක්ෂය මත පිහිටයි. එය G නම් G ≡ ($\bar{x}$, 0) ආකාරය වේ.

$P\hat{O}Q = \delta\theta$ ද $P\hat{O}X = \theta$ ද වන සිහින් $P\hat{O}Q$ කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක් තෝරා ගනිමු.

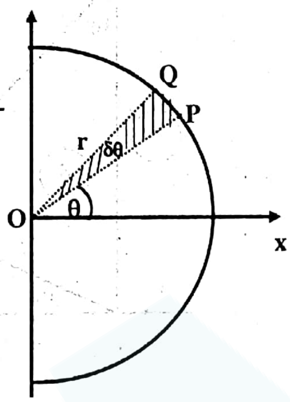
$$POQ\triangle = \frac{1}{2} r^2\delta\theta$$

ඒකක වර්ගඵලයක බර σ නම් PQO හි බර $= \frac{1}{2} r^2\delta\theta\sigma$

එහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට y අක්ෂයේ සිට දුර $\frac{2}{3} r\cos\theta$ වේ.

ගු. කේ. අර්ථ දැක්වීමෙන්,

$$x = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} r^2\sigma.\frac{2}{3} r\cos\theta \; d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} r^2 \sigma d\theta}$$

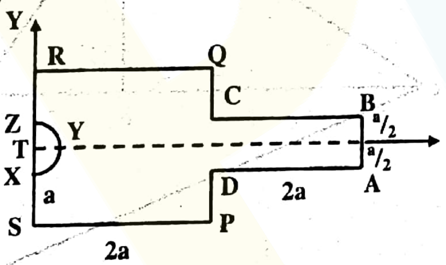


$$= \frac{\frac{1}{3} r^3\sigma\,[\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}}{\frac{1}{2} r^2\sigma[\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}}$$

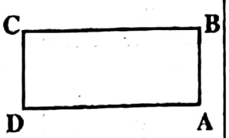
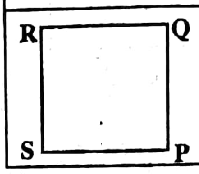
$$= \frac{2r}{3}\,\frac{[1-(-1)]}{[\pi/2 - {}^{-\pi}/2]}$$

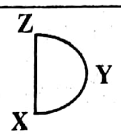
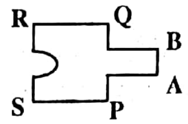
$$= \frac{2r}{3}\times\frac{2}{\pi} \quad = \frac{4r}{3\pi}$$

$\therefore G \equiv \left(\frac{4r}{3\pi}\ , 0\right)$



සමමිතිකත්වයට අනුව තල අස්තරයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය x - අක්ෂය මත පිහිටයි. එය G නම් G ≡ ($\bar{\bar{x}}$, 0) ආකාරය ඒකක වර්ගඵලයක බර σ යයි ගනිමු.

වස්තුව	බර	ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට y - අක්ෂයේ සිට දුර
	$2a^2\sigma$	3a
	$4a^2\sigma$	a

වස්තුව	බර	ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට y - අක්ෂයේ සිට දුර
	$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\sigma$	$\frac{2a}{3\pi}$ (අරය $\frac{a}{2}$ නිසා)
	$6a^2\sigma - \frac{\pi a^2\sigma}{8}$	$\bar{\bar{x}}$

ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ අර්ථ දැක්වීමට අනුව

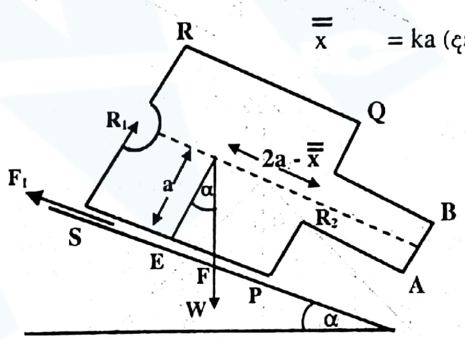
$$2a^2\sigma\times 3a + 4a^2\sigma\times a - \frac{\pi a^2}{8}\sigma\times\frac{2a}{3\pi} = \left(6a^2\sigma - \frac{\pi a^2\sigma}{8}\right)\bar{\bar{x}}$$

$$10a^{\cancel{3}}\cancel{\sigma} - \frac{\cancel{\pi}a^{\cancel{3}}\cancel{\sigma}}{12\cancel{\pi}} = \cancel{a^2}\cancel{\sigma}\left(6-\frac{\pi}{8}\right)\bar{\bar{x}}$$

$$\frac{a(120-1)}{\cancel{12}\ 3} = \frac{(48-\pi)}{\cancel{8}\ 2}\bar{\bar{x}}$$

$$\frac{238\,a}{3(48-x)} = \bar{\bar{x}}$$

$\bar{\bar{x}} = ka$ (දත්තයට අනුව)



ආස්තරය නොපෙරළී පැවතීමට නම්

EF < 2a - $\bar{\bar{x}}$ විය යුතු ය.

EF = a tan α 2a - $\bar{\bar{x}}$ = 2a - ka

= a (2 - k)

a tan α < a (2 - k) විය යුතු ය.

tan α < 2 - k විය යුතු ය.

ආනත තලයට ලම්බ ව විභේදනයෙන්,

$R_1 + R_2 = W\cos\alpha$

ආනත තලයට සමාන්තර ව විභේදනයෙන්

$F_1 = W\sin\alpha$

ආස්තරය හා තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ නම්,

සමතුලිතතාවය සඳහා $\frac{F_1}{R_1 + R_2} \leq \mu$ විය යුතු ය.

$\frac{W\sin\alpha}{W\cos\alpha} \leq \mu$ විය යුතු ය.

tan α ≤ μ විය යුතු ය.

17. (*a*)

අය ගණන	1	2	3	4	5
ලැබීමේ සම්භාවිතාව	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

එකතුව 6 වීමේ සිද්ධිය X නම්, ලැබෙන අය ගණන පළමු ව X_1 හා දෙවනුව X_2 නම් $X_1 + X_2 = 6$ වීමයි.

$X = 1\ \{(X_1 = 1, X_2 = 5), (X_1 = 2, X_2 = 4), (X_1 = 3, X_2 = 3), (X_1 = 4, X_2 = 2), (X_1 = 5, X_2 = 1)\}$

මෙම සිද්ධීන් අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර වේ.

$$\therefore\ P(X) = \left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

අය ගණන	2	3	4	5
ලැබීමේ සම්භාවිතාව	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

එකතුව 6 වීමේ සිද්ධිය Y නම්, ලැබෙන අය ගණන් පළමු ව Y_1 හා දෙවනුව Y_2 වේ නම්,

$Y_1 + Y_2 = 6$ වීමයි.

$Y = \{(Y_1 = 2, Y_2 = 4), (Y_1 = 3, Y_2 = 3), (Y_1 = 4, Y_2 = 2)\}$

ඉහත අවස්ථාවේ මෙන්,

$$P(Y) = \left(\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\right)$$

$$= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

A දාදු කැටය ඉවතට ගැනීම ; $Z_1 \Rightarrow P(Z_1) = \frac{1}{2}$

B දාදු කැටය ඉවතට ගැනීම ; $Z_2 \Rightarrow P(Z_2) = \frac{1}{2}$

ඵෛක්‍යය 6 වීම ; C නම්,

අප සෙවිය යුත්තේ $P(Z_1|C)$ වේ. මෙහි $P(C|Z_1)$

$= \frac{2}{9}$ හා $P(C|Z_2) = \frac{1}{4}$

බේස් ප්‍රමේයයට අනුව,

$$P(Z_1|C) = \frac{P(Z_1)\,P(C|Z_1)}{P(Z_1)\,P(C|Z_1) + P(Z_2)\,P(C|Z_2)}$$

$$P(Z_1|C) = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{9}}{\frac{1}{2}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{9}+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{17}{36}}$$

$$= \frac{2}{9}\times\frac{36}{17}$$

$$= \frac{8}{17}$$

(*b*) $x_1, x_2, \ldots x_n$ දත්තවල මධ්‍යන්‍යය μ_1 නිසා

$$\mu_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ වේ.}$$

එසේම $\mu_2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i$ වේ.

දත්ත m + n හි මධ්‍යන්‍යය μ_3 නම්,

$$\mu_3 = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{m+n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{m} y_i}{m+n}$$

$$\mu_3 = \frac{n\,\mu_1 + m\,\mu_2}{n+m}$$; මුල් ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_3)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1 + \mu_1 - \mu_3)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[x_i - \mu_i - (\mu_3 - \mu_1)]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[x_i - \mu_i - d_1]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[(x_i - \mu_1)^2 - 2d_1(x_i - \mu_1) + d_1^2]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1)^2 - 2d_i\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1) + \sum_{i=1}^{n} d_1^2$$

විචලතාවයේ අර්ථ දැක්වීමට අනුව

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1)^2 = \sigma_1^2 \text{ වේ.}$$

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1)^2 = n\,\sigma_1^2 \text{ හා}$$

මධ්‍යන්‍යය වටා අපගමනවල එකතුව,

එනම්, $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1)$ ශුන්‍ය වේ.

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_3)^2 = n\sigma_1^2 + nd_1^2 \text{ වේ.}$$

මේ ආකාරයට ම $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu_3)^2$ ගැනීමේ දී $d_2 = \mu_3 - \mu_2$ නිසා

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i - \mu_3)^2 = m\sigma_2^2 + md_2^2$$

$$\sigma_3^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_3)^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu_3)^2}{m + n}$$

$$= \frac{n(\sigma_1^2 + d_1^2) + m(\sigma_2^2 + d_2^2)}{m + n}$$

$$\sigma_3^2 = \frac{n\sigma_1^2 + m\sigma_2^2 + nd_1^2 + md_2^2}{m + n}$$ වේ.

දත්තයට අනුව

$n = 100$ $\quad m = 100$

$\mu_1 = 2.3$ $\quad \mu_2 = 1.7$

$\sigma_1^2 = 0.8$ $\quad \sigma_2^2 = 0.5$

පළමු දින 200හි මධ්‍යන්‍යය $= \frac{(100 \times 2.3) + (100 \times 1.7)}{100 + 100}$

$$= \frac{230 + 170}{200} = \frac{400}{200} = \underline{\underline{2}}$$

$d_1 = \mu_3 - \mu_1$ $\quad d_2 = \mu_3 - \mu_2$

$= 2 - 2.3$ $\quad = 2 - 1.7$

$= -0.3$ $\quad = 0.3$

$$\sigma_3^2 = \frac{(100 \times 0.8) + (100 \times 0.5) + 100 \times (-0.3)^2 + 100 \times (0.3)^2}{100 + 100}$$

$$= \frac{80 + 50 + (100 \times 0.09) + (100 \times 0.09)}{200}$$

$$\sigma_3^2 = \frac{130 + 9 + 9}{200} = \frac{148}{200} = \frac{74}{100} = \underline{\underline{0.74}}$$

*** ***