අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය - 2008 අගෝස්තු

General Certificate of Education (Adv. Level) Examination – August 2008

සංයුක්ත ගණිතය I / පැ තුනයි

Combined Mathematics I / Three hours

ප්‍රශ්න **හයකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

01. (a) α හා β යනු $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල වේ ; මෙහි $c \neq 0$ වේ. α^4 හා β^4 මූල වන වර්ගජ සමීකරණය, b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{\alpha^4}{\beta^4} + 1$ හා $\dfrac{\beta^4}{\alpha^4} + 1$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය, b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න.

(b) $f(x)$ බහුපදය $(x - \alpha)$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $f(\alpha)$ බව පෙන්වන්න.

$f(x)$ බහුපදය $(x - \alpha)(x - \beta)$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $Ax + B$ ආකාරය ගනියි ; මෙහි $\alpha \neq \beta$ වේ.

$\alpha, \beta, f(\alpha)$ සහ $f(\beta)$ ඇසුරෙන් A සහ B නියත ප්‍රකාශ කරන්න.

ඒ නයින්, $x^3 + kx^2 + k$ යන්න $(x - 1)(x + 2)$ න් බෙදූවිට ශේෂයේ නියත පදය අඩංගු **නොවන** ලෙස k නියතයේ අගය සොයන්න.

02. (a) ගැහැනු ළමයින් 7 දෙනකු සහ පිරිමි ළමයින් 8 දෙනකු අතුරෙන් විවාද කණ්ඩායමක් සැකසීම සඳහා සිසුන් 5 දෙනකු තෝරා ගැනීමට අවශ්‍යව ඇත.

(i) කණ්ඩායම ගැහැනු ළමයින් දෙදෙනකුගෙන් සහ පිරිම ළමයින් තිදෙනකුගෙන් සමන්විත විය යුතු නම්,

(ii) කණ්ඩායම වැඩි තරමින් පිරිමි ළමයින් තිදෙනකුගෙන් සමන්විත විය යුතු නම්,

(iii) එක්තරා පිරිමි ළමයකු සහ එක්තරා ගැහැනු ළමයකු එකම කණ්ඩායමට තෝරා ගත නොහැකි නම්, තෝරා ගත හැකි කණ්ඩායම් සංඛ්‍යාව සොයන්න.

(b) $(1 + x)^n$ හි ප්‍රසාරණයෙහි අනුගාමී සංගුණක තුනක් 45, 120 සහ 210 වේ ; මෙහි n යනු ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි. n හි අගය සොයන්න.

(c) $(1 + x)^n$ හි ප්‍රසාරණයෙහි අනුගාමී සංගුණක තුනක් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පිහිටිය හැකි ද? මෙහි n යනු ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි. ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

03. (a) ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය උපයෝගි කර ගනිමින්, ධන නිඛිලමය n සඳහා $5^{n+1} - 2^{n+1} - 3^{n+1}$ යන්න 6 න් බෙදිය හැකි බව සාධනය කරන්න.

(b) (i) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} {}^nC_r$ සොයා, ධන නිඛිලමය n සඳහා $\dfrac{2^n}{n} > \dfrac{(n-1)}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(ii) අපරිමිත ශ්‍රේණියක r වැනි පදය Ur යන්න $\dfrac{2^{r-1}r}{(r+1)(r+2)}$ මගින් දෙනු ලැබේ.

$U_r = f(r) - f(r-1)$ වන පරිදි $f(r)$ සොයන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = S_n$ සොයන්න.

IR තුළ $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ පවතී ද? ඔබේ පිළිතුරු සනාථ කරන්න.

04. $z^3 - 1$ සාධකවලට බිඳීමෙන් $z^3 - 1 = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

ඉහත සමීකරණයෙහි එක් සංකීර්ණ මූලයක් ω නම්, අනෙක ω^2 බව පෙන්වන්න.

$r = 1, 2, 3$ සඳහා $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1+\omega^r}\right) = \dfrac{1}{2}$ බව පෙන්වා, ප්‍රතිඵලය ජ්‍යාමිතිකව විවරණය කරන්න.

z_1, z_2 සහ z_3 යනු $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_2z_3 - z_3z_1 = 0$ සම්බන්ධය තෘප්ත කරන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා තුනකි.

z_1 යන්න $z_1 = -\omega z_2 - \omega^2 z_3$ හෝ $z_1 = -\omega^2 z_2 - \omega z_3$ ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න.

z_1, z_2 සහ z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා තුන සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ නිරූපණය කරන බව අපෝහනය කරන්න.

05. (a) ප්‍රමූලධර්ම භාවිතයෙන් $f(x) = \tan x$ ශ්‍රිතයෙහි x විෂයයෙන් ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.

$0 < x < 1$ විට $\tan(\sin^{-1} x)$, x විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

(b) y යනු u හි අවකල්‍ය ශ්‍රිතයක් සහ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ විට $u = \ln(\cos x)$ නම්,

$\sin^3 x \dfrac{d^2y}{du^2} = \sin x \cos^2 x \dfrac{d^2y}{dx^2} - \cos x \dfrac{dy}{dx}$ බව පෙන්වන්න.

(c) C යනු $x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ සහ $y = a\left(t - \frac{1}{t}\right)$ මගින් පරාමිතිව දෙනු ලබන වක්‍රය යැයි ගනිමු ; මෙහි a යනු නිශ්ශූන්‍ය නියතයක් ද, t යනු නිශ්ශූන්‍ය පරාමිතියක් ද වේ. C වක්‍රයට t_0 පරාමිතික අගය ඇති ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ අභිලම්බයෙහි සමීකරණය සොයන්න.
(-13 a, 0) ලක්ෂ්‍යයේ සිට C වක්‍රයට අභිලම්බ හතරක් ඇඳිය හැකි බව පෙන්වා, අභිලම්බ හතරෙහි අඩිවල පරාමිතික අගයන් සොයන්න.

06. (a) භින්න භාග උපයෝගී කර ගනිමින්, $\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^2}$ සොයන්න ; මෙහි $a \neq 0$ වේ.

(b) (i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right) = 2^x$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\int 2^x \, dx$ සොයන්න.

(iii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int_{-1}^{1} 2^{\sqrt{x+1}} \, dx$ අගයන්න.

07. (a) $y = m_1 x + c_1$ හා $y = m_2 x + c_2$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා අතර කෝණ සමච්ඡේදක වන l_1 හි හා l_2 හි සමීකරණ ලබාගන්න ; මෙහි $m_1 \neq m_2$ වේ.
ඒ නයින්, l_1 හා l_2 ලම්බ බව සත්‍යාපනය කරන්න.

(b) ABC යනු x - අක්ෂයේ ධන දිශාව ඔස්සේ BC ආධාරකය චලනය වන පරිදි ද, AB = AC ද, A ශීර්ෂය x - අක්ෂයට ඉහළින් ද වූ ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගනිමු. ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය වර්ග ඒකක 9 ක් ද, BC පාදයේ දිග ඒකක 6 ක් ද වේ.
$B \equiv (b, 0)$ යැයි ද ගනිමු.

(i) AB සහ AC පාදවල සමීකරණ සොයන්න.
(ii) ඉහත (a) හි ලබාගත් කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ භාවිතයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයේ B සහ C කෝණවල අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදකවල සමීකරණ සොයන්න.

ඒ නයින්, $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ හි අගය සොයන්න.

(iii) ABC ත්‍රිකෝණයේ කෝණවල අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදක තුන එක් ලක්ෂ්‍යයක දී හමුවන බව සත්‍යාපනය කර, එම ලක්ෂ්‍යයේ පථය නිර්ණය කරන්න.

08. (a) $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ සහ $S' \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ යැයි ගනිමු.
$S = 0$ යනු අචල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන විචල්‍ය වෘත්තයක් ද, $S' = 0$ යනු අචල වෘත්තයක් ද වේ.
$S = 0$ වෘත්තය, $S' = 0$ වෘත්තය විෂ්කම්භය ප්‍රතිවිරුද්ධ අන්තවලදී කපයි. $S = 0$ හි කේන්ද්‍රය අචල සරල රේඛාවක් මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

(b) A සහ B යනු පිළිවෙළින් (x_1, y_1) සහ (x_2, y_2) යන ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙක වේ. AB විෂ්කම්භයක් ලෙස ඇති වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

CD යනු AB ට ලම්බ විෂ්කමභය වේ. C සහ D හි ඛණ්ඩාංක $\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \lambda, \frac{1}{2}(y_1 + y_2) + \mu\right)$ සහ $\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \lambda, \frac{1}{2}(y_1 + y_2) - \mu\right)$ ආකාරය ගන්නා බව පෙන්වන්න ; මෙහි λ සහ μ නිර්ණය කළ යුතු වේ.

09. (a) **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කර, සාධනය කරන්න.

P යනු $P\hat{A}B = P\hat{B}C = P\hat{C}A = \phi$ වන අයුරින් ABC ත්‍රිකෝණය ඇතුළත වූ ලක්ෂ්‍යයකි. සුපුරුදු අංකනයෙන්

$\frac{bc}{a}(\cot\phi - \cot A) = \frac{ac}{b}(\cot\phi - \cot B) = \frac{ab}{c}(\cot\phi - \cot C)$ බව සාධනය කරන්න.

(b) x, y හා z යනු $x + y + z = \pi$, $\cos x + \cos y = 1$ සහ $t = \sin x + \sin y$ වන පරිදි වූ සෘණ නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා තුනක් යැයි ගනිමු.

(i) $\tan^{-1}(t) = \frac{x + y}{2}$

(ii) $0 \le t \le \sqrt{3}$

බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින්, t එහි උපරිම අගය ගන්නා විට x, y හා z හි අගයන් සොයන්න.

*** ***

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය - 2008 අගෝස්තු

General Certificate of Education (Adv. Level) Examination – August 2008

සංයුක්ත ගණිතය II / පැ තුනයි

Combined Mathematics II / Three hours

ප්‍රශ්න **හයකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

(මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි g මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.)

01. (a) දුම්රියක් සෘජු මාර්ගයක, ඒකාකාර $V \text{ km h}^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් සාමාන්‍යයෙන් ගමන් කරයි. මාර්ගයෙහි ඉදිරි අලුත්වැඩියාවක් නිසා දුම්රිය d km දුරක් ඒකාකාර මන්දනයකින් ගොස් $U \text{ km h}^{-1}$ දක්වා ප්‍රවේගය අඩු කර ගනියි. ඊළඟට දුම්රිය ඒකාකාර U ප්‍රවේගයෙන්, මාර්ගයේ අලුත්වැඩියා කෙරෙන 2d km දුර චලනය වෙයි. අනතුරුව, 3d km දුරක් ඒකාකාර ත්වරණයෙන් චලනය වී, එය V ප්‍රවේගය නැවත ලබා ගනියි. දුම්රියේ චලිතය සඳහා ප්‍රවේග කාල - ප්‍රස්තාරය අඳින්න.
මාර්ගය අලුත්වැඩියා නිසා අපතේ යන කාලය, දුම්රියේ සාමාන්‍ය චලිතය සමග සැසඳීමේ දී

පැය $\dfrac{2d\,(V - U)\,(V + 3U)}{UV\,(U + V)}$ බව පෙන්වන්න.

(b) සුළඟට සාපේක්ෂව වේගය $v \text{ km h}^{-1}$ වන හෙලිකොප්ටරයක්, පාදයක දිග a km වූ ABCD සමචතුරස්‍ර ගුවන් පෙතක අකුරු පිළිවෙළ මගින් දැක්වෙන අතට පියාසර කරයි. AB පාදය සමග θ සුළු කෝණයක් සාදන දිශාවකට ඒකාකාර $w\ (<v) \text{ km h}^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් සුළඟක් හමයි. පෙතෙහි ශීර්ෂ වටා හැරීමේ දී කාලය අපතේ නොයන බව උපකල්පනය කර, ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ ඇඳ, A සිට B දක්වා ගතවන කාලයේත් C සිට D දක්වා ගතවන කාලයේත්

ඓක්‍යය පැය $\dfrac{2a\sqrt{v^2 - w^2\sin^2\theta}}{(v^2 - w^2)}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, පූර්ණ පෙත සඳහා ගන්නා මුළු කාලය T සොයා, T උපරිමයක් වන θ හි අගය සොයන්න.

02. (a) ස්කන්ධය M වූ සුමට කුඤ්ඤයක් සුමට තිරස් මේසයක් මත නිසලව ඇත. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් කුඤ්ඤයෙහි තිරසට α ආනතියක් සහිත මුහුණතක් මත තබා, මුහුණතෙහි වැඩිතම බෑවුම් රේඛාවක් දිගේ ඉහළට V ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. කුඤ්ඤයේ ත්වරණයෙහි විශාලත්වය සහ කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව අංශුවේ ත්වරණයෙහි විශාලත්වය නියත අනුපාතයකින් යුක්ත වන බව පෙන්වන්න.

අංශුව, $\dfrac{2V\,(M + m\sin^2\alpha)}{(M + m)\,g\sin\alpha}$ කාලයකට පසුව, කුඤ්ඤය මත අංශුවේ ආරම්භක ලක්ෂ්‍යය වෙත, ආපසු පැමිණෙන බව

තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(b) සමාන අරයන් සහිත, **ස්කන්ධ** පිළිවෙළින් a, b, c වූ A, B, C කුඩා සුමට ගෝල තුනක්, එම පිළිවෙළට සුමට තිරස් මේසයක් මත වෙන් වෙන්ව තබා ඇත්තේ, ඒවායේ කේන්ද්‍ර එකම සරල රේඛාවක පිහිටන ලෙස ය. කේන්ද්‍ර රේඛාව දිගේ u ප්‍රවේගයෙන් A ගෝලය ප්‍රක්ෂේප කරනු ලබන්නේ B හි ගැටෙන පරිදි ය. ඊළඟට B ගෝලය C සමග ගැටෙයි. එක් එක් ගෝල යුගලය සඳහා ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වෙයි. C ඉවතට චලනය වන ප්‍රවේගය

$$\frac{(1 + e)^2 u}{\left(1 + \dfrac{b}{a}\right)\left(1 + \dfrac{c}{b}\right)}$$ බව පෙන්වන්න.

පිළිවෙළින් පළමුවැනි සහ දෙවැනි ගැටුම්වලින් පසු A සහ B නිසලතාවට පැමිණෙන බව තවදුරටත් දී ඇත් නම්, a : b : c අනුපාත සොයා, පද්ධතියෙහි ඉතිරිවන චාලක ශක්තිය මුල් චාලක ශක්තියේ භාගයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.

03. කේන්ද්‍රය O සහ අරය a වූ අචල සුමට ගෝලීය කබොලක $\dfrac{a}{4}$ දුරක් O ට ඉහළින් වූ තිරස් තලයෙන් කැපෙන උඩ කොටස ඉවත්කිරීමෙන් පාත්‍රයක් සාදා ඇත. P අංශුවක් පාත්‍රය ඇතුළත පහත්ම ලක්ෂ්‍යයේ සිට u වේගයකින් තිරස්ව ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ.

(i) OP **උඩු සිරස** සමග θ කෝණයක් සාදන විට අංශුවේ වේගය සහ පාත්‍රයත් අංශුවත් අතර ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය සොයන්න.

(ii) $u^2 > \dfrac{11\,ga}{4}$ බව දී ඇත්නම්, අංශුව පාත්‍රයේ දාරය හැර යන බව පෙන්වන්න.

(iii) $u^2 > \dfrac{13\,ga}{2}$ බව දී ඇත්නම්, අංශුව පාත්‍රයේ දාරය හැර ගිය පසුව ගුරුත්වය යටතේ සිදුවන නිදහස් චලිතයේ දී, අංශුව පාත්‍රය ඇතුළතට නොවැටෙන බවත් පෙන්වන්න.

04. ස්වභාවික දිග l වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක එක කෙළවරක් අචල O ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇති අතර, අනෙක් කෙළවරෙහි පිළිවෙළින් ස්කන්ධ m සහ 3m වූ P සහ Q අංශු දෙකක්, තන්තුව $l + 4a$ දිගකට විස්තීරණය කරමින්, සමතුලිතතාවේ එකට එල්ලෙයි. Q අංශුව ක්ෂණිකව ඉවතට වැටෙයි. t කාලයකට පසුව තන්තුවේ දිග $l + x$ වෙයි නම්,

$x > 0$ සඳහා $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{a}(x - a) = 0$ සමීකරණය ලබා ගන්න.

ඉහත සමීකරණයෙහි විසඳුම $x = a + b\sin\omega t + c\cos\omega t$ බව දී ඇත්නම්, b සහ c නියතවල අගයන් සොයන්න. ;

මෙහි $\omega^2 = \frac{g}{a}$ වෙයි.

P අංශුව, ආරම්භක පිහිටීමෙන් ඉහළට ළඟාවන උපරිම උස සොයා, එම උසට ළඟාවීමට ගතවන කාලය $\sqrt{\frac{a}{8}}\{\pi - \alpha + 2\sqrt{2}\}$ බව පෙන්වන්න ; මෙහි α යනු $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ සුළු කෝණයයි.

05. (a) බර W වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයක්, තිරසට α කෝණයකින් ආනත රළු තලයක් මත වක්‍ර පෘෂ්ඨය පිහිටන සේ තබා ඇත. එයි තල මුහුණතේ පරිධියෙහි ලක්ෂ්‍යයක w කුඩා භාරයක් තැබූ විට, තල මුහුණත තිරස්ව, අර්ධගෝලය සීමාකාරී සමතුලිතතාවේ පිහිටයි. ඝර්ෂණ සංගුණකය μ නම්, $\mu = \frac{w}{\sqrt{W(W + 2w)}} = \tan\alpha$ වන බව පෙන්වන්න.

(b) අරය a වූ H සුමට කුහර සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක්, එහි අක්ෂය තිරස්ව සවිකර ඇත. එක එකක අරය $b\left(< \frac{a}{2}\right)$ සහ බර W වූ A සහ B සමාන සුමට ඒකාකාර සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩර දෙකක් සමමිතිකව H ඇතුළත තබා ඇත්තේ, ඒවායේ අක්ෂ H හි අක්ෂයට සමාන්තරව, සමතුලිතව තිබෙන පරිදි ය. A සහ B අතර ප්‍රතික්‍රියාව $\frac{bW}{\sqrt{a(a - 2b)}}$ බව පෙන්වන්න.

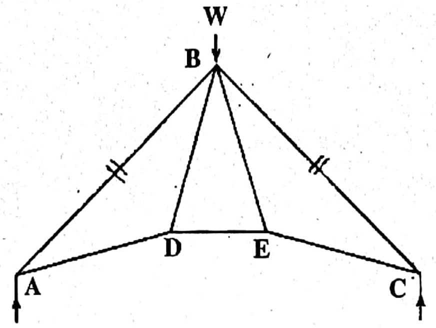
A සහ B එක එකකට සමාන C සිලින්ඩරයක්, සිය අක්ෂය H හි අක්ෂයට සමාන්තර වන පරිදි, ඒ දෙක මත පරෙස්සමෙන්, සමමිතිකව තබනු ලැබේ. $a < b(1 + 2\sqrt{7})$ නම් පමණක් A සහ B ස්පර්ශව සමතුලිතතාව පැවතිය හැකි බව පෙන්වන්න.

06. (a) සුමට ලෙස සන්ධි කළ සමාන සැහැල්ලු දඬු හතරකින් සැදි පැත්තක දිග 2a වූ ABCD රොම්බසයක් සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා ඇත. AB දණ්ඩ සවිකර ඇත. BC සහ CD දඬුවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කර, තන්තුව ඇදී පවතින පරිදි, ඝූර්ණය M වූ බල යුග්මයක්, රොම්බසයේ තලයෙහි, DA දණ්ඩට දෙනු ලැබේ. $A\hat{B}C$ කෝණය 2θ වෙයි නම්

(i) C සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව තන්තුවට සමාන්තර වන බව සහ

(ii) තන්තුවේ ආතතිය $\frac{M}{a\sin\theta}$ බව පෙන්වන්න.

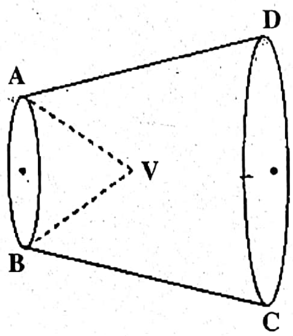
(b) පහත රූපයෙහි දක්වෙන්නේ නිදහස් ලෙස සන්ධි කළ සැහැල්ලු දඬුවලින් සමන්විත B හි දී W භාරයක් දරන රාමු සැකිල්ලකි. එකම තිරස් මට්ටමේ පිහිටි A සහ C හි දී එය සිරස් ලෙස ආධාර කරනු ලැබ තිබේ. $A\hat{B}C$ සෘජුකෝණයක් වන අතර එය BD සහ BE මගින් ත්‍රිච්ඡේද වෙයි. $B\hat{A}D$ සහ $B\hat{C}E$ කෝණ එක එකක් 30° ක් ද, BA = BC ද වෙයි.



බෝ අංකනය යෙදීමෙන් ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින්, AD, AB, DE සහ DB එක් එක් දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යාබලය, ආතතියක් ද තෙරපුමක්ද යන්න ප්‍රකාශ කරමින් සොයන්න.

07. පහත රූපයෙහි ABCD මගින් නිරූපණය වන්නේ ඍජු වෘත්ත කේතුවක උස h වූ ඡින්නකයක ආකාරයේ, ඝනත්වය ρ වූ ඒකාකාර ඝන වස්තුවකි. එහි වෘත්තාකාර තල මුහුණත්වල විෂ්කම්භ $AB = 2\lambda a$ සහ $CD = 2a$ වේ ; මෙහි λ පරාමිතියක් සහ $0 < \lambda < 1$ වෙයි.



එහි ස්කන්ධය $\frac{1}{3}\rho\pi a^2 h(1+\lambda+\lambda^2)$ බවත්, එහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, G කුඩා මුහුණතෙහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{h}{4}\frac{(3+2\lambda+\lambda^2)}{(1+\lambda+\lambda^2)}$ දුරකින් පිහිටන බවත්, අනුකලනය භාවිතයෙන් පෙන්වන්න.

ආධාරකයේ අරය a සහ උස h වූ ඒකාකාර ඍජු වෘත්ත ඝන කේතුවක ස්කන්ධය සහ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම අපෝහනය කරන්න.

ABCD ඡින්නකයෙන් ආධාරකයේ අරය λa සහ උස $\frac{h}{2}$ වූ VAB ඍජු වෘත්ත ඝන කේතුවක් හාරා ඉවත් කිරීමෙන් J ඝන වස්තුව ලැබෙයි. J වස්තුවෙහි G_1 ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයෙහි පිහිටීම සොයා, එය V සමඟ සම්පාත විය නොහැකි බව පෙන්වන්න.

J වස්තුව, වඩා විශාල මුහුණතෙහි පරිධියේ ලක්ෂ්‍යයකින් නිදහසේ එල්ලනු ලැබේ. සමතුලිත පිහිටීමේ දී J හි සමමිතික අක්ෂය සිරස සමඟ සාදන β සුළු කෝණය $\tan\beta = \frac{8a}{h}\frac{(2+2\lambda+\lambda^2)}{(4+8\lambda+5\lambda^2)}$ මගින් දෙන බව පෙන්වන්න.

08. (a) A සහ B යනු සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. පහත දැක්වෙන ප්‍රකාශ එක එකක් අර්ථ දක්වන්න.

(i) A සහ B සිද්ධි ස්වායත්ත වෙයි,

(ii) A සහ B සිද්ධි අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර වෙයි,

(iii) A සහ B සිද්ධි නිරවශේෂ වෙයි.

A සහ B යන සිද්ධි දෙකෙහි අනුපූරක සිද්ධි පිළිවෙළින් A' සහ B' මගින් දක්වමු.
$P(A \cap B) + P(A \cap B') = P(A)$ බව පෙන්වන්න.

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ සහ $P(A \cap B') = \frac{1}{2}$ බව දී ඇති විට, $P(A' \cap B)$ හි අගය සහ $P(A' \cap B')$ හි අගය සොයන්න.

(b) A සහ B යනු $P(B) > 0$ වන සිද්ධි දෙකකි. $P(A|B)$ මගින් දැක්වෙන, B දී ඇති විට A හි අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව, $P(A \cap B)$ සහ $P(B)$ සමඟ ඇති සම්බන්ධය ප්‍රකාශ කරන්න.

ශිෂ්‍යයෙක් පාසැලට පාපැදියෙන් හෝ බසයෙන් හෝ යයි. ඔහු නියමිත වේලාවට හෝ ඊට පෙර හෝ පාසැලට පැමිණීමේ සම්භාවිතාව $\frac{19}{28}$ කි. ඔහුට පාසැලට පාපැදියෙන් පැමිණි බව දී ඇති විට පමා වී පැමිණීමේ සම්භාවිතාව, ඔහු බසයෙන් පැමිණි බව දී ඇති විට පමා වී පැමිණීමේ සම්භාවිතාව මෙන් දෙගුණයක් වෙයි. ඔහු බසයෙන් පාසැලට පැමිණි ඕනෑම විටෙක නියමිත වේලාවට හෝ ඊට පෙර හෝ පැමිණීමේ සම්භාවිතාව $\frac{3}{4}$ කි. සසම්භාවී ලෙස තෝරාගත් දිනයෙක

(i) ඔහු පාපැදියෙන් පාසලට පැමිණීමේ,

(ii) ඔහු පමා වී පැමිණි බව දී ඇති විට ඔහු බසයෙන් ගමන් කර තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

09. මධ්‍යන්‍යය $\overline{x}$ ද, සම්මත අපගමනය S_x ද වූ $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ යන n සංඛ්‍යා කුලකය $i = 1,2, \ldots, n$ සඳහා $y_i = ax_i + b$ සූත්‍ර මගින් $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ යන n සංඛ්‍යා කුලකයට පරිණාමනය කරනු ලැබේ ; මෙහි a සහ b නියත වේ.
$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ යන n සංඛ්‍යා කුලකයෙහි මධ්‍යන්‍යය සහ සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් $\overline{y}$ සහ s_y යැයි ගනිමු.

(i) $\overline{y} = a\overline{x} + b$ සහ (ii) $s_y = |a|\, s_x$

බව පෙන්වන්න.

එක්තරා විභාගයක භූගෝල විද්‍යාව සහ ඉතිහාසය යන විෂයවලට පෙනී සිටි අයදුම්කරුවන්ගේ ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය සහ සම්මත අපගමනය පහත වගුවෙහි දැක්වේ :

	මධ්‍යන්‍යය	සම්මත අපගමනය
භූගෝල විද්‍යාව	m	12
ඉතිහාසය	53	s

එක් එක් විෂයයෙහි ලකුණු ඒකජ ලෙස පරිමාණගත කරන ලද්දේ මධ්‍යන්‍යය 50 ක් ද සම්මත අපගමනය 15 ක් ද තිබෙන ලෙස යැයි සිතමු. එක්තරා අපේක්ෂකයකුගේ මුල් ලකුණු සහ පරිමාණගත ලකුණු පහත දැක්වේ :

	මුල් ලකුණ	පරිමාණගත ලකුණ
භූගෝල විද්‍යාව	40	40
ඉතිහාසය	61	56

m හි අගය සහ s හි අගය සොයන්න.

අයදුම්කරුවන්ට ඔවුන්ගේ උත්තර පත්‍ර නැවත සමීක්ෂණය කර ගැනීම සඳහා ඉල්ලුම් කිරීමට ඉඩ දෙන ලදී. නැවත සමීක්ෂණයෙන් පසුව ඉතිහාසය විෂයයට පෙනී සිටි මුළු අයදුම්කරුවන් ගණනින් 0.1% ක ගේ ඉතිහාසය ලකුණු වෙනස් විය. ලකුණු වෙනස් වූ අයදුම්කරුවන්ගේ ඉතිහාසය ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය 65 සිට 68 තෙක් වැඩි වී තිබුණි. ඉතිහාසය විෂයයට පෙනී සිටි මුළු අයදුම්කරුවන්ගේ, නැවත සමීක්ෂණයට පසු ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය සොයන්න.

*** ***

01. (a) $\alpha + \beta = -b \qquad \alpha\beta = c$

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2$$
$$= [(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta]^2 - 2(\alpha\beta)^2$$
$$= (b^2 - 2c)^2 - 2c^2$$
$$= b^4 - 4b^2c + 4c^2 - 2c^2$$
$$= b^4 - 4b^2c + 2c^2$$

$$\alpha^4\beta^4 = (\alpha\beta)^4 = C^4$$

එලෙස α^4, β^4 මූලවන වර්ගජ සමීකරණය

$$x^2 - (b^4 - 4b^2c + 2c^2)x + c^4 = 0 \text{ —— } ①$$

$$\frac{\alpha^4}{\beta^4} + 1 = \frac{\alpha^4 + \beta^4}{\beta^4} = \frac{b^4 - 4b^2c + 2c^2}{\beta^4}$$

එසේම $\dfrac{\beta^4}{\alpha^4} + 1 = \dfrac{b^4 - 4b^2c + 2c^2}{\alpha^4}$

දැන් $\dfrac{b^4 - 4b^2c + 2c^2}{x} = y$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $\dfrac{b^4 - 4b^2c + 2c^2}{y} = x$

එවිට ① න් $\left(\dfrac{b^4 - 4b^2c + 2c^2}{y}\right)^2 - \dfrac{(b^4 - 4b^2c + 2c^2)^2}{y} + c^4 = 0$

අවශ්‍ය සමීකරණය

$$\underline{c^4y^2 - (b^4 - 4b^2c + 2c^2)^2 y + (b^4 - 4b^2c + 2c^2)^2 = 0}$$

(b) f(x), $(x - \alpha)$ න් බෙදුවිට ලබ්ධිය $Q(x)$ හා ශේෂය R නම්

$f(x) = (x - \alpha)\,Q(x) + R$

$\Rightarrow f(\alpha) = 0\ Q(\alpha) + R = R$

$f(x)$ $(x-\alpha)(x-\beta)$ න් බෙදූ විට ලබ්ධිය $\phi(x)$ නම්

$f(x) \equiv (x-\alpha)(x-\beta)\,\phi(x) + Ax + B\,; \quad \alpha \neq \beta$ විට

$\left.\begin{array}{l} f(\alpha) = A\alpha + B \\ f(\beta) = A\beta + B \end{array}\right\} \Rightarrow A = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{(\beta - \alpha)}$ සහ

$B = \dfrac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha}$

$f(x) = x^3 + kx^2 + k$ යයි ගනිමු.

$\alpha = 1, \beta = -2$ හෝ $\alpha = -2, \beta = 1$ වන විට $B = 0$ යයි ගනිමු.

එවිට $0 = \dfrac{-2f(1) - f(-2)}{-3}$

$\Rightarrow -2f(1) - f(-2) = 0$

$\Rightarrow -2f(1) = f(-2)$

$\Rightarrow -2(1 + k + k) = -8 + 4k + k$

$\Rightarrow -4k - 2 = -8 + 5k$

$\Rightarrow 9k = 6$

$\Rightarrow k = \frac{2}{3}$

02. (a) ගැහැණු ළමයි 7 අතරින් දෙදෙනෙකු තෝරා ගත හැකි විධි ගණන $= {}^7C_2$

පිරිමි ළමයි 8 අතරින් තිදෙනෙකු තෝරා ගතහැකි විධි ගණන $= {}^8C_3$

අවශ්‍ය තේරීම කළහැකි විධි ගණන

$$= {}^7C_2 \times {}^8C_3$$
$$= \frac{7!}{2!\,5!} \times \frac{8!}{3!\,5!}$$
$$= \frac{7 \times \cancel{6}^{3} \times \cancel{5!}}{\cancel{2} \times \cancel{5}} \times \frac{8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5!}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{5!}}$$
$$= 21 \times 56$$
$$= \underline{\underline{1176}}$$

(ii) කණ්ඩායාමට උපරිම වශයෙන් පිරිමි ළමයි. තිදෙනෙක් පමණක් ඇතුළත් විය හැකි විධි

ගැහැණු ළමයි 5 දෙනෙක්

පිරිමි ළමයි 1 ගැහැණු ළමයි 4

පිරිම ළමයි 2 ගැහැණු ළමයි 3

පිරිමි ළමයි 3 ගැහැණු ළමයි 2

$\therefore$ අවශ්‍ය තේරීම් කළහැකි විධි ගණන

$$= {}^8C_0 \cdot {}^7C_5 + {}^8C_1 \cdot {}^7C_4 + {}^8C_2 \cdot {}^7C_3 + {}^8C_3 \cdot {}^7C_2$$
$$= 1 \times \frac{7!}{2!\,5!} + \frac{8!}{1!\,7!} \times \frac{7!}{3!\,4!} + \frac{8!}{6!\,2!} \times \frac{7!}{3!\,4!} + \frac{8!}{5!\,3!} \times \frac{7!}{5!\,2!}$$
$$= (1 \times 21) + (8 \times 35) + (28 \times 35) + ((56 \times 21)$$
$$= 21 + 280 + 980 + 1176 = \underline{\underline{2457}}$$

(iii) 15 දෙනා අතරින් ඕනෑම 5 දෙනෙක් තේරිය හැකි විධි ගණන $= {}^{15}C_5$

විශේෂිත පිරිමි ළමයා හා ගැහැණු ළමයා ඇතුළත් වනසේ කණ්ඩායම තේරිය හැකි විධි ගණන $= {}^{13}C_3$

$\therefore$ අවශ්‍ය තේරිය හැකි විධි ගණන

$$= {}^{15}C_5 - {}^{13}C_3$$
$$= \frac{15!}{10!\,5!} - \frac{13!}{10!\,3!}$$
$$= \frac{13!}{5!\,10!}(15 \times 14 - 5 \times 4)$$
$$= \frac{13 \times 12 \times 11 \times \cancel{10!}}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times \cancel{10!}}(210 - 20)$$
$$= \frac{13 \times \cancel{12}^{\cancel{2}\,1} \times 11}{\cancel{5} \times \cancel{4}_{\cancel{2}\,1} \times \cancel{6}} \times \cancel{190}^{\cancel{38}\,19}$$
$$= 13 \times 209$$
$$= \underline{\underline{2717}}$$

(b) $(1+x)^n$ හි ප්‍රසාරණයේ අනුයාත සංගුණක තුන ${}^nC_r$, ${}^nC_{r+1}$, ${}^nC_{r+2}$ යයි සිතමු.

එවිට ${}^nC_r = 45$, ${}^nC_{r+1} = 120$, ${}^nC_{r+2} = 210$ බව දී ඇත.

$$\frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r+1}} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!\,r!}}{\frac{n!}{(n-r-1)!\,(r+1)!}} = \frac{(n-r-1)!\,(r+1)!}{(n-r)!\,r!}$$

$$= \frac{\cancel{(n-r-1)!}\,(r+1)\cancel{r!}}{(n-r)\cancel{(n-r-1)!}\,\cancel{r!}} = \frac{r+1}{n-r}$$

එවිට $\frac{r+1}{n-r} = \frac{\cancel{45}^{\,3}}{\cancel{120}_{\,8}}$ හා $\frac{r+2}{n-r-1} = \frac{\cancel{120}^{\,4}}{\cancel{210}_{\,7}}$

එනම් $8r + 8 = 3n - 3r$ සහ $7r + 14 = 4n - 4r - 4$

$11r - 3n = -8$ —— ① $\quad 11r - 4n = -18$ —— ②

① හා ② න් $n = 10$ තවද $r = 2$

එවිට ${}^{10}C_2 = 45$ ${}^{10}C_3 = 120$ ${}^{10}C_4 = 225$

(c) විය නොහැක.

${}^nC_r$, ${}^nC_{r+1}$, ${}^nC_{r+2}$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක වේ යයි සිතමු. මෙහි $n > 0$

එවිට $\frac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r} = \frac{{}^nC_{r+2}}{{}^nC_{r+1}}$ එනම් $\frac{n-r}{r+1} = \frac{n-r-1}{r+2}$

$(n-r)(r+2) = (n-\overline{r+1})(r+1)$

$nr + 2n - r^2 - 2r = nr + n - r^2 - 2r - 1$

$\Rightarrow n = -1$

මෙය විසංවාදයකි.

$\therefore$ අනුයාත සංගුණක තුන ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක පිහිටිය නොහැක.

03. (a) $f(n) = 5^{n+1} - 2^{n+1} - 3^{n+1}$, $n \in z^+$ යයි ගනිමු.

$n = 1$ විට $f(1) = 5^2 - 2^2 - 3^2 = 25 - 4 - 9 = 12$

$\therefore f(1)$, 6 න් බෙදේ.

$\therefore$ $n = 1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

$n = p \in \mathbb{Z}^+$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍යයයි උපකල්පනය කරමු.

එවිට $f(p) = 5^{p+1} - 2^{p+1} - 3^{p+1} = 6k, k \in \mathbb{Z}^+$

දැන් $f(p+1) = 5^{p+2} - 2^{p+2} - 3^{p+2}$

$= 5(5^{p+1} - 2^{p+1} - 3^{p+1})$
$+ 3.2^{p+1} + 2.3^{p+1}$

$= 5(5^{p+1} - 2^{p+1} - 3^{p+1}) + 6(2^p + 3^p)$

$= 30k + 6(2p + 3p)$

$= 6[5k + 2p + 3p]$

$= 6m \quad , m \in \mathbb{Z}^+$

$\therefore n = p$ විට $f(n)$, 6 න් බෙදේ නම් $n = p + 1$ විට ද $f(n)$, 6 න් බෙදේ.

$\therefore$ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(n) = 5^{n+1} - 2^{n+1} - 3^{n+1}$, 6 න් බෙදේ.

(b) (i) n ධන නිඛිලයක් විට

$$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + \dots {}^nC_rx^r + \dots + {}^nC_nx^n$$

$x = 1$ විට

$$2^n = 1 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \dots + {}^nC_r + \dots + {}^nC_n$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{n} {}^nC_r$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} {}^nC_r = 2^n - 1$$

දැන් ${}^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2} < \sum_{r=1}^{n} {}^nC_r$

$$\frac{n(n-1)}{2} < 2^n - 1$$

$$\therefore \quad \frac{n(n-1)}{2} < 2^n$$

$$\therefore \frac{2^n}{n} > \frac{n-1}{2} \quad , n \in \mathbb{Z}^+$$

(ii) $U_r = \frac{2^{r-1}r}{(r+1)(r+2)} = 2^{r-1}\frac{r}{(r+1)(r+2)}$

$= 2^{r-1}\left(\frac{A}{r+2} + \frac{B}{r+1}\right)$ ලෙස ගනිමු.

$= 2^{r-1}\left(\frac{2}{r+2} - \frac{1}{r+1}\right)$

$= \frac{2^r}{r+2} - \frac{2^{r-1}}{r+1}$

$= f(r) - f(r-1)$

මෙහි $f(r) = \frac{2^r}{r+2}$ වේ.

$r = 1$ විට $U_1 = f(1) - f(0)$

$r - 2$ විට $U_2 = f(2) - f(1)$

$r = 3$ විට $U_3 = f(3) - f(2)$

....

$r = n-1$ විට $U_{n-1} = f(n-1) - f(n-2)$

$r = n$ විට $U_n = f(n) - f(n-1)$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(n) - f(0) = S_n$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{2^n}{n+2} - \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{2^n}{n}\left(\frac{n}{n+2}\right) - \frac{1}{2}$$

නමුත් $\frac{2^n}{n} > \left(\frac{n-1}{2}\right)$

$$\therefore \; S_n > \frac{n(n-1)}{2(n+2)} - \frac{1}{2}$$

තවද $n \to \infty$ විට $\frac{n(n-1)}{2(n+2)} - \frac{1}{2} \to \infty$

එසේ $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$; $\mathbb{R}$ තුළ නොපවතී.

04. $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$

$z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$ හෝ $z^2 + z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow z = 1$ හෝ $z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

$w = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$ යයි ගනිමු.

එවිට $\omega^2 = \frac{1 \mp 2\sqrt{3}\,i - 3}{4} = \frac{-1 \mp \sqrt{3}\,i}{2}$

$\therefore$ එක සංකීර්ණ මූලයක් ω වනවිට ω^2 අනෙක් මූලය වේ.

තවද, $= \dfrac{1}{1 + \left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}\right)} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)} \times \dfrac{\left(\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)}{\left(\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)}$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} i}{1} = \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

ඉහත ලබාගත් ප්‍රතිඵලය අනුව

$$\frac{1}{1+\omega^2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$\omega^3 = 1$ බැවින් $\frac{1}{1+\omega^3} = \frac{1}{2}$

එලෙස $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+\omega^r}\right) = \frac{1}{2}$, $r = 1, 2, 3$ සඳහා

$\frac{1}{1+\omega^r}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව, $\mathrm{Re}\; Z = \frac{1}{2}$ රේඛාව මත පිහිටයි.

$$(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3)$$
$$= z_1^2 + \omega^3 z_2^2 + \omega^3 z_3^2 + (\omega^2+\omega) z_1 z_2 + (\omega^2+\omega) z_1 z_3 + (\omega^2 + \omega^4) z_2 z_3$$
$$= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_1 z_3 + \omega^2(1+\omega^2) z_2 z_3$$
$$= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_1 z_3 - \omega^3 z_2 z_3$$
$$= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_1 z_3 - z_2 z_3$$

මක්නිසායත් $\omega^3 = 1$, $\omega + \omega^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}\,i}{2} - \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}\,i}{2} = -1$

හා $\omega^4 = \omega$ වන බැවින්

එසේ $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_1 z_3 - z_2 z_3 = 0$

$\Leftrightarrow (z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0$

$\Leftrightarrow z_1 = -\omega z_2 - \omega^2 z_3$ හෝ

$\underline{\underline{z_1 = -\omega^2 z_2 - \omega z_3}}$

$z_1 = -\omega z_2 - \omega^2 z_3$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $z_1 - z_2 = -(1+\omega) z_2 - \omega^2 z_3$

$= \omega^2 z_2 - \omega^2 z_3 \qquad (\because 1 + \omega + \omega^2 = 0)$

$= \omega^2 (z_2 - z_3)$ —— ①

සහ $z_1 - z_3 = -\omega z_2 - (1+\omega^2) z_3$

$= -\omega z_2 + \omega z_3 \qquad (\because 1 + \omega + \omega^2 = 0)$

$= -\omega (z_2 - z_3)$ —— ②

දැන් $|\omega| = |\omega^2| = 1$ බැවින්

① හා ② න් $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_1 - z_3|$

$\therefore z_1, z_2, z_3$ සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ නිරූපනය කරයි.

එසේම $z_1 = -\omega^2 z_2 - \omega z_3$ ලෙස ගත් විට ද

ඉහත පරිදිම $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_2| = |z_1 - z_3|$ බව ලැබේ.

එමගින් ඉහත ප්‍රකාශය තහවුරු වේ.

එනම් z_1, z_2, z_3 සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ නිරූපනය කරයි.

05. (a)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\tan(x+\Delta x) - \tan x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x)\cos x - \cos(x+\Delta x)\sin x}{\Delta x \cos(x+\Delta x)\cos x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{(\Delta x)} \cdot \frac{1}{\cos(x + \Delta x) \cdot \operatorname{Cos} x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\cos(x + \Delta x) \cdot \operatorname{Cos} x}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(\because \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{Sin} \Delta x}{\Delta x} = 1\right)$$

$$= \operatorname{Sec}^2 x$$

$\frac{d}{dx} \tan(\operatorname{Sin}^{-1} x) = \sec^2(\sin^{-1} x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; $0<x<1$ විට

(b) $U = \ell n (\cos x)$ යයි ගනිමු. $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

එවිට $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\operatorname{Sin} x) = -\tan x$

දාම නිතිය අනුව

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= -\tan x \cdot \frac{dy}{du}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -\sec^2 x \frac{dy}{du} - \tan x \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\right)$$

$$= -\sec^2 x \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{du} - \tan x \cdot \frac{d^2y}{du^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= -\sec^2 x \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \left(\frac{-1}{\tan x}\right) - \tan x \cdot \frac{d^2y}{du^2} \cdot (-\tan x)$$

$$\tan x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 x \frac{dy}{dx} + \tan^3 x \frac{d^2y}{du^2}$$

$$\Rightarrow \sin^3 x \frac{d^2y}{du^2} = \cos^2 x \sin x \frac{d^2y}{dx^2} - \cos x \frac{dy}{dx}$$

(c) $\frac{dx}{dt} = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)$; $\frac{dy}{dt} = a\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2(t^2 + 1)}{(t^2 - 1)}$$

පරාමිතිය t_0 වන ලක්ෂ්‍යයේ දී C ට ඇඳි අභිලම්බයේ

$$\text{අනුක්‍රමණය} = \frac{-(t_0^2 - 1)}{2(t_0^2 + 1)}$$

$\therefore$ පරාමිතිය t_0 වන ලක්ෂ්‍යයේ දී C වක්‍රයට ඇඳි අභිලම්බයේ සමීකරණය

$$y - a\left(t_0 - \frac{1}{t_0}\right) = \frac{-(t_0^2 - 1)}{2(t_0^2 + 1)} \left\{x - \frac{a}{2}\left(t_0 + \frac{1}{t_0}\right)\right\}$$

$$4(t_0^2 + 1) y t_0 - 4a(t_0^2 + 1)(t_0^2 - 1)$$

$$= -2t_0(t_0^2 - 1)x + a(t_0^2 - 1)(t_0^2 + 1)$$

$$4(t_0^2 + 1) t_0 y - 4a(t_0^4 - 1) = -2(t_0^2 - 1) t_0 x + a(t_0^4 - 1)$$

$$2(t_0^2 - 1) t_0 x + 4(t_0^2 + 1) t_0 y = 5a(t_0^4 - 1)$$

මෙම අභිලම්බය $-(13a, 0)$ හරහා යයි නම්

$$-26(t_0^2 - 1) t_0 \cancel{a} = 5\cancel{a}(t_0^4 - 1)$$

$$(t_0^2 - 1)(5t^2 + 26t_0 + 5) = 0$$

$$(t_0 - 1)(t_0 + 1)(5t_0 + 1)(t_0 + 5) = 0$$

$$t_0 = \pm 1 \text{ හෝ } t_0 = -\frac{1}{5} \text{ හෝ } t_0 = -5$$

එනයින් $(-13a, 0)$ සිට C වක්‍රයට අභිලම්බ හතරක් ඇඳිය හැක. ඒවායේ අඩිවල පරාමිතීන් $\pm 1, -5$ හා $-\frac{1}{5}$ වේ.

06. (a)

$$\frac{1}{(x^2 - a^2)^2} \equiv \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a} + \frac{C}{(x - a)^2} + \frac{D}{(x + a)^2}$$

$$\Rightarrow 1 \equiv A(x + a)^2(x - a) + B(x - a)^2(x + a)$$
$$+ C(x + a)^2 + D(x - a)^2$$

$x = a$ විට $C = \frac{1}{4a^2}$

$x = -a$ විට $D = \frac{1}{4a^2}$

x^3 හි සංගුණක සැමයිමෙන්

$$0 = A + B \text{ —— ①}$$

නියත සැමයිමෙන්

$$1 = -a^3 A + a^3 B + a^2 C + a^2 D$$

$$\Rightarrow 1 = a^3(B - A) + a^2 \times \frac{1}{4a^2} + a^2 \times \frac{1}{4a^2}$$

$$\Rightarrow a^3(B - A) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad B - A = \frac{1}{2a^3} \text{ —— ②}$$

① හා ② න් $\quad B = \frac{1}{4a^3}$ හා $A = -\frac{1}{4a^3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x^2-a^2)^2} = \frac{1}{4a^3(x+a)} - \frac{1}{4a^3(x-a)} + \frac{1}{4a^2(x+a)^2} + \frac{1}{4a^2(x-a)^2}$$

දැන් $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{1}{4a^3}\int\frac{dx}{(x+a)} - \frac{1}{4a^3}\int\frac{dx}{(x-a)} + \frac{1}{4a^2}\int\frac{dx}{(x+a)^2} + \frac{1}{4a^2}\int\frac{dx}{(x-a)^2}$

$$= \frac{1}{4a^3}\ \ell n\,|x+a| - \frac{1}{4a^3}\ \ell n\,|x-a| - \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{1}{(x+a)} - \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{1}{(x-a)} + C$$

$$= \frac{1}{4a^3}\ \ell n\left|\frac{x+a}{x-a}\right| - \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{2x}{(x-a)(x+a)} + C$$

$$= \frac{1}{4a^3}\ \ell n\left|\frac{x+a}{x-a}\right| - \frac{1}{2a^2(x^2-a^2)} + C$$

(b) (i) $y = 2^x\ (>0) \Rightarrow \ell n y = x\,\ell n 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ell n 2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\,\ell n 2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\ell n 2}\right) = y$$

එනම් $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\frac{2^x}{\ell n 2}\right) = 2^x$ ——— ①

(ii) ① න් $\displaystyle\int 2^t\,dt = \frac{2^t}{\ell n 2} + C$ (අභිමත නියතයකි)

(iii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 2^{\sqrt{x+1}}\,dx = I$ ලෙස ගනිමු.

$t = \sqrt{x+1}$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $dt = \dfrac{dx}{2t}$ හා $\left\{\begin{array}{l} x=-1 \text{ විට } t=0 \\ x=1 \text{ විට } t=\sqrt{2} \end{array}\right\}$

$$\therefore I = \int_0^{\sqrt{2}} 2^t\cdot 2t\,dt$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} t\cdot 2^t\,dt$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} t\ \ d\left(\frac{2^t}{\ell n 2}\right)$$

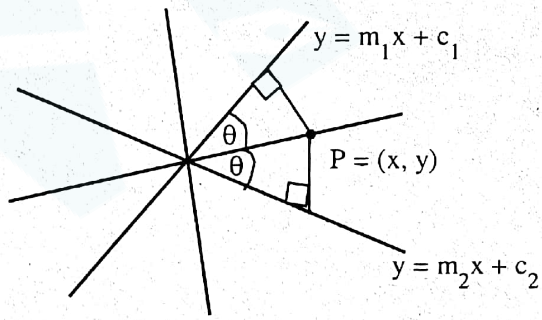
$$= 2\left\{\left(\frac{t.2^t}{\ell n 2}\right)_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}}\frac{2^t}{\ell n 2}\,dt\right\}$$

$$= 2\left(\frac{t.2^t}{\ell n 2}\right)_0^{\sqrt{2}} - 2\left(\frac{2^t}{(\ell n 2)^2}\right)_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}.2^{\sqrt{2}}}{\ell n 2} - \frac{2\ .2^{\sqrt{2}}}{(\ell n 2)^2} + \frac{2}{(\ell n 2)^2}$$

$$= 2^{\sqrt{2}+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\ell n 2} - \frac{1}{(\ell n 2)^2}\right) + \frac{2}{(\ell n 2)^2}$$

07.



$y = m_1x + c_1$ හා $y = m_2x + c_2$ $(m_1 \neq m_2)$ යන රේඛා දෙක අතර කෝණ සමච්ඡේදකයක් මත ඕනෑම $p_{(x,y)}$ ලක්ෂ්‍යයක සිට රේඛාවලට ඇති ලම්භදුර සමානවන බැවින්

$$\frac{y - m_1x - c_1}{\sqrt{1+m_1^2}} = \pm\frac{y - m_2x - c_2}{\sqrt{1+m_2^2}}$$

එවිට ; $(y - m_1x - c_1)\sqrt{1+m_2^2} = \pm(y - m_2x - c_2)\sqrt{1+m_1^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \ell_1 \equiv (a_2 - a_1)\,y = (a_2m_1 - a_1m_2)\,x + (a_2c_1 - a_1c_2) \\ \ell_2 \equiv (a_2 + a_1)\,y = (a_2m_1 + a_1m_2)\,x + (a_2c_1 + a_1c_2) \end{array}\right\}$$

ලෙස ගනිමු ; මෙහි $a_1 = \sqrt{1+m_1^2}$ හා $a_2 = \sqrt{1+m_2^2}$ වේ.

එවිට ℓ_1 හා ℓ_2 මගින් දී ඇති රේඛා දෙක අතර කෝණ සමච්ඡේදක දෙක නිරූපනය කරයි.

$m_1 = -m_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ ($\because m_1 \neq m_2$)

එවිට ℓ_1 ; x = නියතයක් හා

ℓ_2 ; y = නියතයක් වේ.

$\therefore \ell_1 \perp \ell_2$ වේ.

$m_1 \neq -m_2$ විට

ℓ_1 ; $y = M_1x + k_1$; මෙහි $M_1 = \dfrac{a_2m_1 - a_1m_2}{a_2 - a_1}$

ℓ_2 ; $y = M_2x + k_2$; මෙහි $M_2 = \dfrac{a_2m_1 + a_1m_2}{a_2 + a_1}$

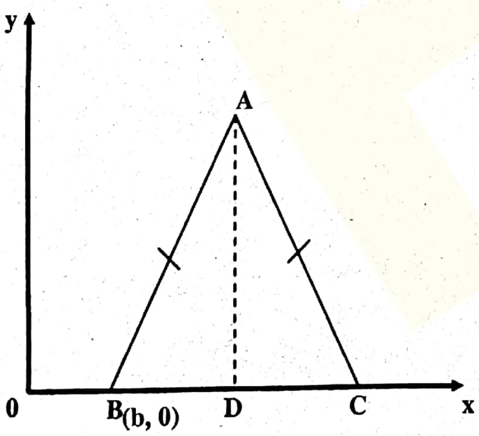
එවිට $M_1M_2 = \dfrac{a_2^2 m_1^2 - a_1^2 m_2^2}{a_2^2 - a_1^2}$

$$= \frac{(1+m_2)^2 m_1^2 - (1+m_1^2) m_2^2}{1 + m_2^2 - (1+m_1^2)}$$

$$= \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_2^2 - m_1^2} = -1$$

$\therefore \ell_1 \perp \ell_2$ වේ.

(b)



AD = h යයි ගනිමු.

එවිට $6h = 18 \Rightarrow h = 3$

$A = (a, 3)$, $B = (b, 0)$ හා $C = (b+6, 0)$

$\Rightarrow BD = DC = 3 = a - b$

AB හි සමීකරණය $y = \dfrac{3-0}{a-b}(x-b)$

$$y = \frac{3}{3}(x-b)$$

$$\underline{y = x - b}$$

AC හි සමීකරණය

$$y - 0 = \frac{3-0}{a-(b+6)}[x-(b+6)]$$

$$y = \frac{3}{a-b-6}[x-(b+6)]$$

$$y = \frac{3}{-3}[x-(b+6)]$$

$$\underline{\underline{y = -x + b + 6}}$$

B කෝණයේ සමච්ඡේදක වල සමීකරණ

$\ell_1 : y(1-\sqrt{2}) = x - b$ හා ($\circledast$ හි $m_1 = 1, m_2 = 0, c_1 = -b$

$\ell_2 : y(1+\sqrt{2}) = x - b$ $c_2 = 0$ මගින්)

දැන් $(y(1+\sqrt{2}) - x + b)_{(a,3)} = (3 + 3\sqrt{2} + b - a)$

$= (3 + 3\sqrt{2} - 3) = 3\sqrt{2} > 0$

$-$ $[y(1+\sqrt{2}) - x + b]_{(b+6,0)}$

$= [-(b+6) + b] = -6 < 0$

$\therefore \ell_2$ රේඛාව දෙපස A හා C පිහිටයි.

$\underline{\underline{\text{එනම් } \hat{B} \text{ හි අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදකය } \ell_2 \text{ වේ.}}}$

$\hat{C}$ හි සමච්ඡේදක වල සමීකරණ

($\circledast$ හි $m_1 = -1, m_2 = 0, c_1 = b + 6$ හා $c_2 = 0$ මගින්)

$\ell_3 : y = (\sqrt{2}+1)x - (\sqrt{2}+1)(b+6)$

$\ell_4 : y = -(\sqrt{2}-1)x + (\sqrt{2}-1)(b+6)$ වේ.

දැන් $[y + (\sqrt{2}-1)x - (\sqrt{2}-1)(b+6)]_{(a,3)} = 6 - 3\sqrt{2} > 0$

$[y + (\sqrt{2}-1)x - (\sqrt{2}-1)(b+6)]_{(b,0)} = -6(\sqrt{2}-1) < 0$

($\because a - b = 3$)

$\therefore$ A හා B ලක්ෂ්‍යය ℓ_4 හි දෙපස වේ.

$\therefore \hat{C}$ හි අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදකය ℓ_4 වේ.

$AB \perp AC$ හා $AB = AC$ බැවින්

$A\hat{B}C = \dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \ell_2$ හා $\overrightarrow{OX}$ අතර කෝණය $= \dfrac{\pi}{8}$

$\Rightarrow \ell_2$ හි අනුක්‍රමණය $= \tan\dfrac{\pi}{8}$

$$\Rightarrow \tan\frac{\pi}{8} = \underline{\underline{\frac{1}{1+\sqrt{2}}}}$$

$\hat{A}$ හි අභ්‍යන්ත්‍රතර සමච්ඡේදකය AD වන අතර එහි සමීකරණය $x = b + 3$ වේ.

දැන් $\ell_2 \equiv y(1+\sqrt{2}) = x - b$

$\Rightarrow y = (\sqrt{2} - 1)(x - b)$ —— ①

$\ell_4 \equiv y = (\sqrt{2} - 1)(-x + b + 6)$ —— ②

① හා ② විසඳීමෙන් ℓ_2 හා ℓ_4 හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය

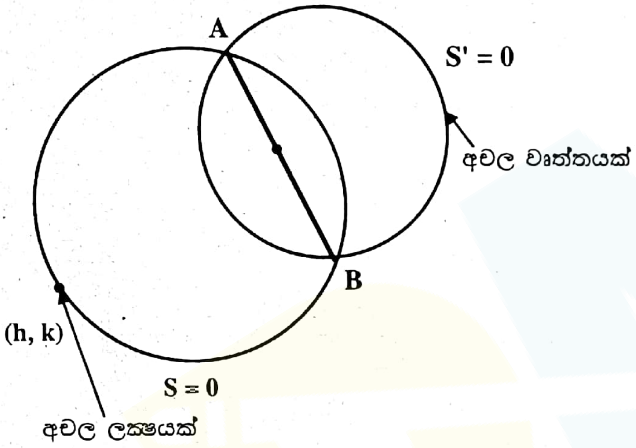
$x = b + 3,\ y = 3(\sqrt{2} - 1)$; b පරාමිතියක් මගින් ලැබේ.

එවිට ℓ_2, ℓ_4 හා AD සංගාමී වේ.

එසේ සංගාමී වන ලක්ෂ්‍යයෙහි $y = 3(\sqrt{2} - 1)$ (නියතයක්) නිසා ABC ත්‍රිකෝණයේ අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදක වල ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ පථය.

$y = 3(\sqrt{2} - 1)$ වේ.

08. (a)



$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$S' \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$

AB ජ්‍යායේ සමීකරණය $S - S' = 0$

එනම් $2(g - g')x + 2(f - f')y + c - c' = 0$

AB, $S' = 0$ හි විෂ්කම්භයක් බැවින් එය $(-g', -f')$ හරහා යයි.

එවිට $2(g - g')(-g') + 2(f - f')(-f') + c - c' = 0$ —— ①

$s = 0$ වෘත්තය (h, k) හරහා යන බැවින්

$h^2 + k^2 + 2gh + 2fk + c = 0$ —— ②

① හා ② න්

$-2gg' + 2g'^2 - 2ff' + 2f^2 - h^2 - k^2 - 2gh - 2fk - c' = 0$

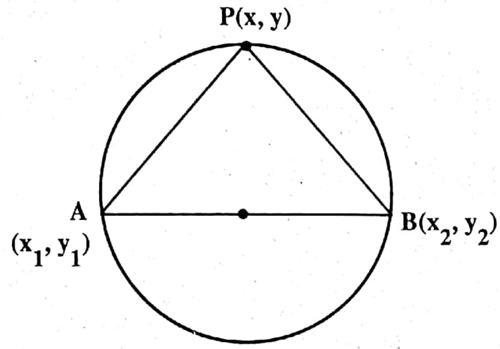
$-2g(g' + h) - 2f(f' + k) + 2g'^2 + 2f'^2 - h^2 - k^2 - c' = 0$

$2(g' + h)(-g) + 2(f' + k)(-f) + 2g'^2 + 2f'^2 - h^2 - k^2 - c' = 0$

$\therefore S = 0$ හි කේන්ද්‍රය

$2(g' + h)x + 2(f' + k)y + 2g'^2 + 2f'^2 - h^2 - k^2 - c' = 0$

සරල රේඛාව මත වේ. g', f', h, k හා c' නියත බැවින් මෙම සරල රේඛාව අචල සරල රේඛාවකි.



P(x, y) යනු වෘත්තය මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් ලෙස ගනිමු.

එවිට $\hat{P} = 90^\circ$ බැවින්

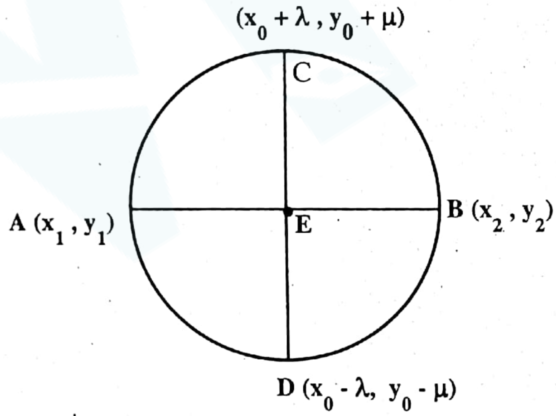
$AP^2 + PB^2 = AB^2$

$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y + x_1x_2 + y_1y_1 = 0$

එනම්

$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$



$E = (x_0, y_0)$ ලෙස ගනිමු.

E යනු AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය බැවින්

$x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ හා $y_0 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

$C \equiv (x_0 + \lambda, y_0 + \mu)$ නම් CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය E බැවින්

$D \equiv (x_0 - \lambda, y_0 - \mu)$ වේ.

$CE^2 = \lambda^2 + \mu^2$ හා $CE = \frac{1}{2} AB$ වේ.

$\Rightarrow \lambda^2 + \mu^2 = \frac{1}{4}\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\}$ —— ①

$CE \perp AB$ නිසා

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) = -1$$

$$\mu(y_2 - y_1) = -\lambda(x_2 - x_1) \quad —— ②$$

$$① \Rightarrow \lambda^2 + \lambda^2 \frac{(x_2 - x_1)^2}{(y_2 - y_1)^2} = ¼\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\}$$

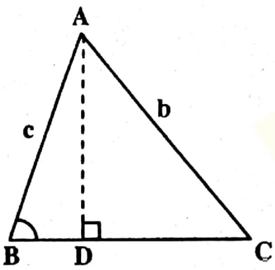
$$\Rightarrow \lambda^2 = ¼ (y_2 - y_1)^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm ½ (y_2 - y_1)$$

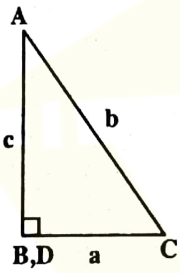
එවිට ② න් $\mu = \pm ½ (x_2 - x_1)$

09. ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් හා සම්බන්ධ සම්මත අංකනය අනුව

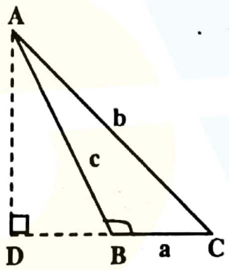
$$\frac{\text{Sin A}}{a} = \frac{\text{Sin B}}{b} = \frac{\text{Sin C}}{c}$$ වේ.



i රූපය



ii රූපය



iii රූපය

I අවස්ථාව ABC සුළුකෝණී විට (i) රූපය

$$\text{AD} = \text{AB sin B} = \text{AC sin C}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\text{Sin B}}{\text{AC}} = \frac{\text{Sin C}}{\text{AB}}$$

එසේම $\quad \frac{\text{Sin A}}{\text{BC}} = \frac{\text{Sin C}}{\text{AB}}$

$$\therefore \frac{\text{Sin A}}{\text{BC}} = \frac{\text{Sin B}}{\text{AC}} = \frac{\text{Sin C}}{\text{AB}}$$

එනම් $\quad \frac{\text{Sin A}}{a} = \frac{\text{Sin B}}{b} = \frac{\text{Sin C}}{c}$

II අවස්ථාව B සෘජුකෝණී විට (ii) රූපය

$$\text{AD} = \text{AB} = \text{AC Sin C}$$

$$\text{AB Sin } 90° = \text{AC sin C}$$

$$\Rightarrow \text{AB sin B} = \text{AC sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Sin B}}{b} = \frac{\text{Sin C}}{c}$$

III අවස්ථාව ABC මහාකෝණී විට (iii) රූපය

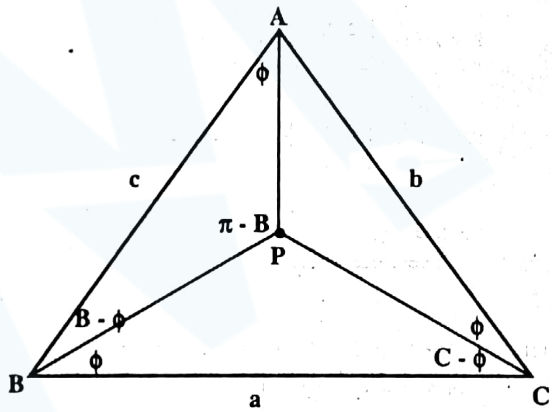
$$\text{AD} = \text{AB sin}(\pi - \text{B}) = \text{AC Sin C}$$

$$\text{AB Sin B} = \text{AC Sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Sin B}}{b} = \frac{\text{Sin C}}{c}$$

මෙලෙස ABC ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් විට

$$\frac{\text{Sin A}}{a} = \frac{\text{Sin B}}{b} = \frac{\text{Sin C}}{c}$$



ABP Δ න්

$$\frac{\text{BP}}{\sin\phi} = \frac{c}{\text{Sin}(\pi - \text{B})} \Rightarrow \text{BP} = \frac{c \text{ Sin }\phi}{\text{Sin}(\pi - \text{B})}$$

$$= \frac{c \text{ Sin }\phi}{\text{Sin B}} \quad —— ①$$

BPC Δ න් $\quad \text{CP} = \frac{a \text{ Sin }\phi}{\text{Sin C}} \quad —— ②$

APC Δ න් $\quad \text{AP} = \frac{b \text{ Sin }\phi}{\text{Sin A}} \quad —— ③$

$$\frac{\text{Sin}(\text{C} - \phi)}{\text{Sin }\phi} = \frac{\text{BP}}{\text{CP}} = \frac{c \text{ Sin C}}{a \text{ Sin B}}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Sin}(\text{C} - \phi)}{\text{Sin C Sin }\phi} = \frac{c}{a \text{ Sin B}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{ab}{c}(\cot\phi - \cot C) = \frac{b}{\text{Sin } B} \quad \text{——— I}$$

$$\frac{ac}{b}(\cot\phi - \cot B) = \frac{a}{\text{Sin } A} \quad \text{——— II}$$

$$\frac{bc}{a}(\cot\phi - \cot A) = \frac{c}{\text{Sin } C} \quad \text{——— III}$$

Sin නීතියෙන්

$$\underline{\underline{\frac{ab}{c}(\cot\phi - \cot C) = \frac{ac}{b}(\cot\phi - \cot B) = \frac{bc}{a}(\cot\phi - \cot A)}}$$

(b) $\cos x + \cos y = 1$

$\sin x + \sin y = t$

$x + y + z = \pi \,;\, x, y, z \geq 0$

$\therefore t \geq 0$

(i) $t = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$1 = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\Rightarrow t = \tan\left(\frac{x+y}{2}\right)$ ——— (I)

$\Rightarrow \underline{\underline{\tan^{-1}(t) = \frac{x+y}{2}}}$

(ii) $1 + t^2 = 2 + 2\cos(x-y)$ ——— (II)

$-1 \leq \cos(x-y) \leq 1$

$\therefore 0 \leq t^2 \leq 3$

$\Rightarrow \underline{\underline{0 \leq t \leq \sqrt{3}}}$ $(\because t \geq 0)$

$t^2 = 3$ විට $x - y = 0$

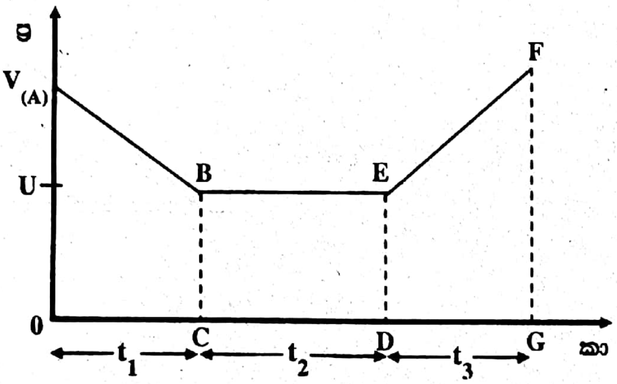
$\Leftrightarrow$ $x = y$

$\Leftrightarrow$ $\tan x = \tan y = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{x = y = \frac{\pi}{3} = z}}$

*** ***

01. (a)



OABC $\square$ = d ; BCDE $\square$ = 2d ; DEFG $\square$ = 3d

බව දී ඇත.

මෙම ගමන සඳහා සාමාන්‍ය දිනක ගතවන කාලය $= \dfrac{6d}{V}$

→ ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාරය සැලකීමෙන්,

$$\frac{1}{2}(V+U)t_1 = d \; ; \; U \times t_2 = 2d \; ; \; \frac{1}{2}(U+V)\,t_3 = 3d$$

$$t_1 = \frac{2d}{V+U} \; ; \quad t_2 = \frac{2d}{U} \quad ; \; t_3 = \frac{6d}{U+V}$$

විශේෂ දිනයේ ගත වූ කාලය $= t_1 + t_2 + t_3$

$$= \frac{2d}{V+U} + \frac{2d}{U} + \frac{6d}{U+V}$$

$$= \frac{2d}{U(V+U)}[U + V + U + 3U]$$

$$= \frac{2d(5U+V)}{U\,(V+U)}$$

මේ අනුව සිදුවන ප්‍රමාදය $= \dfrac{2d\,(5U+V)}{U(V+U)} - \dfrac{6d}{V}$

$$= \frac{2d}{UV\,(V+U)}[5UV + V^2 - 3U^2 - 3UV]$$

$$= \frac{2d}{UV\,(V+U)}[\,V^2 + 2UV - 3U^2]$$

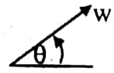
$$= \frac{2d}{UV\,(V+U)}\quad (V+3U)(V-U)$$

(b) (ෂෙ සු) = v

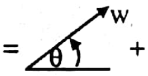
(සු E) =

(ෂෙ E) = (ෂෙ සු) + (සු E)

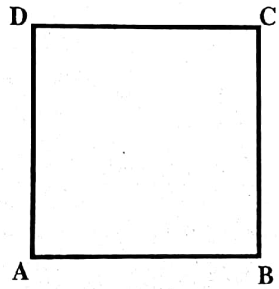
= v +



=



+ v



A → B චලිතය

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_1}$

$= \overrightarrow{PR_1}$

C → D චලිතය

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_3}$

$= \overrightarrow{PR_3}$

(පසුව අවශ්‍ය වේ.)

B → C චලිතය

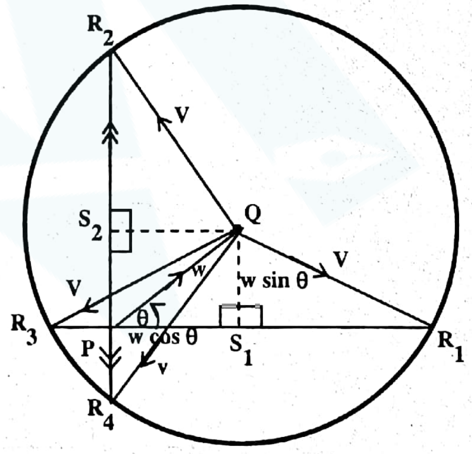
$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_2}$

$= \overrightarrow{PR_2}$

D → A චලිතය

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_4}$

$= \overrightarrow{PR_4}$



A → B යාමට කාලය t_1 නම් $t_1 = \dfrac{a}{|\overrightarrow{PR_1}|}$

C → D යාමට කාලය t_3 නම් $t_3 = \dfrac{a}{|\overrightarrow{PR_3}|}$

$$t_1 + t_3 = \frac{a}{PR_1} + \frac{a}{PR_3}$$

$$= \frac{a}{(S_1R_1 + PS_1)} + \frac{a}{(S_1R_3 - PS_1)}$$

$$= \frac{a}{(S_1R_1 + PS_1)} + \frac{a}{(S_1R_1 - PS_1)}$$

[∵ $S_1R_3 = S_1R_1$ බැවින්]

$$= \frac{a[S_1R_1 - \cancel{PS_1} + S_1R_1 + \cancel{PS_1}]}{(S_1R_1 + PS_1)\,(S_1R_1 - PS_1)}$$

$$= \frac{2aS_1R_1}{S_1R_1^2 - PS_1^2} = \frac{2a\sqrt{v^2 - w^2\sin^2\theta}}{v^2 - w^2\sin^2\theta - w^2\cos^2\theta}$$

$$t_1 + t_3 = \frac{2a\sqrt{v^2 - w^2\sin^2\theta}}{v^2 - w^2}$$

B → C හා D → A දක්වා චලිත වන කාලය t_2 හා t_4 නම් $t_2 + t_4$ කාලය ඉහත ප්‍රතිඵලයේ θ වෙනුවට $\frac{\pi}{2} - \theta$ යෙදීමෙන් අපෝහනය කළ හැක. ($\because Q\hat{P}S_2 = \pi/2 - \theta$ බැවින්)

$$\therefore t_2 + t_4 = \frac{2a\sqrt{v^2 - w^2\sin^2(\pi/2 - \theta)}}{(v^2 - w^2)}$$

පූර්ණ පෙත සඳහා ගන්නා මුළු කාලය T නම්

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{2a\sqrt{v^2 - w^2\sin^2\theta}}{(v^2 - w^2)} + \frac{2a\sqrt{v^2 - w^2\cos^2\theta}}{(v^2 - w^2)}$$

$$T = \frac{2a}{(v^2 - w^2)}\left[\sqrt{v^2 - w^2\sin^2\theta} + \sqrt{v^2 - w^2\cos^2\theta}\right]$$

θ විෂයයේ අවකලනයෙන්

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{2a}{(v^2 - w^2)} + \left[\frac{-2w^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{v^2 - w^2\sin^2\theta}} + \frac{2w^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{v^2 - w^2\cos^2\theta}}\right]$$

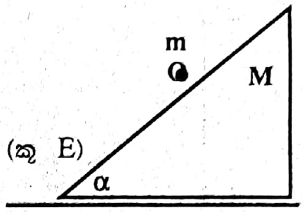
$$= \frac{4a\,w^2\sin\theta\cos\theta\left[\sqrt{v^2 - w^2\sin^2\theta} - \sqrt{v^2 - w^2\cos^2\theta}\right]}{(v^2 - w^2)\sqrt{v^2 - w^2\sin^2\theta}\;\sqrt{v^2 - w^2\cos^2\theta}}$$

$$\frac{dT}{d\theta} = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ විට $\frac{dT}{d\theta} > 0$ හා $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ විට $\frac{dT}{d\theta} < 0$

බව පැහැදිලිය. $\theta = \frac{\pi}{4}$ විට T උපරිම වේ.

02. (a) (කු, E) $= \rightarrow a_1$



(අං කු) = a^2 α

(අං E) = (අං කු) + (කු E)

$= a^2$ α $+ \rightarrow a_1$

$\underline{F} = \underline{m}\,a$ අංශුවට α යෙදීමෙන්

$$mg\sin\alpha = m(a_2 - a_1\cos\alpha) \text{ ——— ①}$$

පද්ධතියට → යෙදීමෙන්

$$0 = Ma_1 + m(a_1 - a_2\cos\alpha) \text{ —— ②}$$

② න් $ma_2\cos\alpha = (M + m)a_1$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{(M + m)}{m\cos\alpha}$$ නියතයක් වේ.

① හා ② විසඳීමෙන්

$$a_2 = g\sin\alpha + \frac{ma_2\cos^2\alpha}{(M + m)}$$

$$a_2\left(1 - \frac{m\cos^2\alpha}{(M + m)}\right) = g\sin\alpha$$

$$a_2\left(\frac{M + m(1 - \cos^2\alpha)}{M + m}\right) = g\sin\alpha$$

$$\therefore a_2 = \frac{(M + m)\,g\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව අංශුවේ චලිතය සලකා

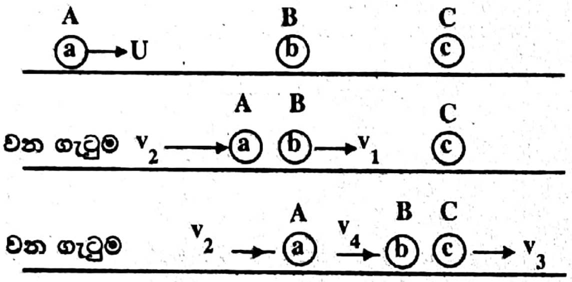
$S = ut + \frac{1}{2}at^2$ α යෙදීමෙන්

$$O = VT - \frac{1}{2}a_2T^2$$

$$T = \frac{2V}{a_2}$$

$$= \frac{2V(M + m\sin^2\alpha)}{(M + m)\,g\sin\alpha}$$

(b)



1 වන ගැටුම සලකමු

ග. සං. නි. යෙදීමෙන් $bv_1 + av_2 = au$ —— ①

නි. ප. නි. යෙදීමෙන් $v_1 - v_2 = eu$ —— ②

① හා ② විසඳීමෙන්

$$v_1 = \frac{au(1+e)}{a+b}\ ;\ v_2 = \frac{u(a-be)}{a+b}$$

2 වන ගැටුම සලකමු.

ග. සං. නි. යෙදීමෙන් $cv_3 + bv_4 = bv_1$ —— ③

නි. ප. නි. යෙදීමෙන් $v_3 - v_4 = ev_1$ —— ④

③ හා ④ විසඳීමෙන්

$$v_3 = \frac{bv_1(1+e)}{b+c}\ ;\ v_4 = \frac{v_1(b-ce)}{b+c}$$

$$v_3 = \frac{b(1+e)}{(b+c)} \times \frac{au(1+e)}{(a+b)} = \frac{abu(1+e)^2}{(a+b)(b+c)}$$

$$= \frac{u(1+e)^2}{(1+\frac{b}{a})(1+\frac{c}{b})}$$

① වන ගැටුමෙන් පසු A ගෝලය නිසල වෙයි නම්, $v_2 = 0$ විය යුතුය. මේ සඳහා $a = be$ ද,

② වන ගැටුමෙන් පසු B ගෝලය නිසල වෙයිනම් $v_4 = 0$ විය යුතුය. මේ සඳහා $b = ce$ ද විය යුතුය.

$\frac{a}{b} = e \Rightarrow a : b = e : 1$ $\frac{b}{c} = e \Rightarrow b : c = e : 1$

$\therefore a : b : c = e^2 : e : 1$ වේ.

මේ අවස්ථාවේ දී පද්ධතියේ ඉතිරිවන චාලක ශක්තිය $= \frac{1}{2}cv_3^2$

මුල් චාලක ශක්තිය $= \frac{1}{2}au^2$

භාගයක් ලෙස $= \dfrac{\frac{1}{2}cv_3^2}{\frac{1}{2}au_3^2} = \frac{c}{a}\,\frac{v_3^2}{u^2}$

$$v_3 = \frac{u(1+e)^2}{(1+\frac{b}{a})(1+\frac{c}{b})} = \frac{u(1+e)^2}{(1+\frac{1}{e})(1+\frac{1}{e})} = \frac{e^2u(1+e)^2}{(1+e)^2}$$

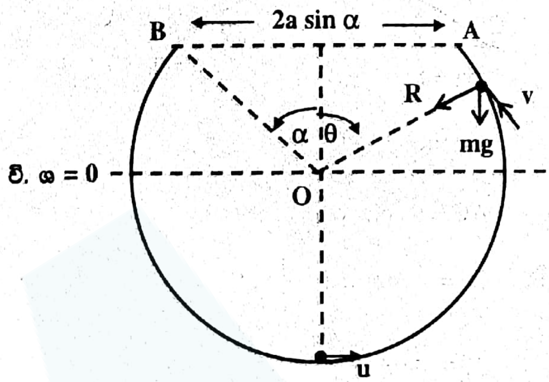
$$= e^2u$$

$\therefore$ ඉතිරි චාලක ශක්තිය මුල් චාලක ශක්තියේ භාගයක් ලෙස

$$= \frac{c}{a} \times \frac{e^4u^2}{u^2} = \frac{ce^4}{a} = \frac{e^4}{e^2} = e^2$$

[$\therefore a : b : c = e^2 : e : 1$ නිසා $a : c = e^2 : 1$]

03.



(i) අංශුවේ ස්කන්ධය m යයි ගනිමු.

ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්

$$\frac{1}{2}mu^2 - mga = \frac{1}{2}mv^2 + mga\cos\theta$$

$$v^2 = u^2 - 2ga(1+\cos\theta) \quad \text{——— ①}$$

$$v = \sqrt{u^2 - 2ga(1+\cos\theta)}$$

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

$$mg\cos\theta + R = m\frac{v^2}{a}$$

$$R = \frac{m}{a}[u^2 - 2ga - 2ga\cos\theta - ga\cos\theta]$$

$$R = \frac{m}{a}[u^2 - 2ga - 3ga\cos\theta]$$

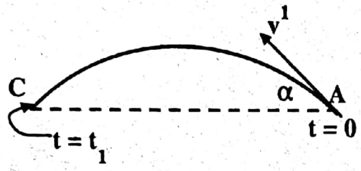
(ii) අංශුව දාරය හැර යයි නම් $\cos\theta = \frac{1}{4}$ විට $R > 0$ විය යුතුය. (එනම් දාරයට ළඟාවන තුරුම අංශුව කබොළ ස්පර්ශව පැවතිය යුතුය.)

$$\Rightarrow \frac{m}{a}[u^2 - 2ga - 3ga \times \frac{1}{4}] > 0 \Rightarrow u^2 - \frac{11ga}{4} > 0$$

එනම් $u^2 > \frac{11ga}{4}$ නම් අංශුව පාත්‍රය හැරයන්නේ දාරයේ දීය.

(iii) අංශුව කබොළ හැරයන මොහොතේ වේගය $v = v^1$ නම් ① න් $(v^1)^2 = u^2 - 2ga\left(1 + \frac{1}{4}\right) = u^2 - \frac{5}{2}ga$ වන අතර එහි දිශාව තිරස සමඟ α කෝණයක් සාදයි නම් $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ වේ.

අනතුරුව අංශුව ගුරුත්වය යටතේ චලිත වේ.
$A \rightarrow C$ තෙක් චලිතය සලකා



$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$\leftarrow \quad AC = v'\cos\alpha\, t_1$

$\uparrow \quad O = v'\sin\alpha\, t_1 - \frac{1}{2}g{t_1}^2$

$t_1 = \frac{2v'\sin\alpha}{g}$ නිසා

$$AC = \frac{2v'^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$$

අංශුව පාත්‍රය ඇතුලට නොවැටීමට $AC > AB$ විය යුතුයි.

$\frac{2v'^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} > 2a\sin\alpha$ ($\because$ ඉවත් වන විට $\theta = \alpha$ වේ.)

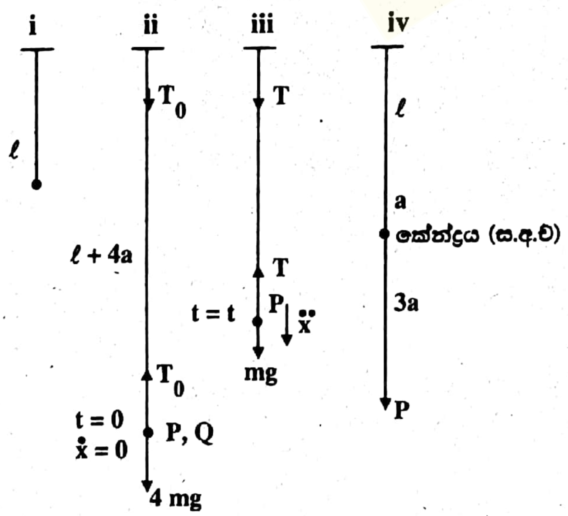
$v'^2 > \frac{ga}{\cos\alpha}$

$u^2 - \frac{5ga}{2} > \frac{ga}{\frac{1}{4}}$

$u^2 > \frac{5ga}{2} + 4ga$

$u^2 > \frac{13ga}{2}$ නම් ඉවත්වීමෙන් පසු සිදුවන චලිතයේ දී අංශුව පාත්‍රය තුළට නොවැටෙයි.

04.



II අවස්ථාව

ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය λ නම්

$T_0 = \frac{\lambda \times 4a}{\ell}$ —— ①

$T_0 = 4\,mg$ —— ②

① හා ② න් $\frac{4\lambda a}{\ell} = 4\,mg$

$\therefore \lambda = \frac{m\ell g}{a}$

III අවස්ථාව

$T = \frac{\lambda x}{\ell}$, $x > 0$ විට

$T = \frac{m\ell g}{a} \times \frac{x}{\ell} = \frac{mgx}{a}$

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

$mg - T = m\ddot{x}$

$mg - \frac{mgx}{a} = m\ddot{x}$

$\therefore \ddot{x} = \frac{-g}{a}(x - a)$ —— ③

$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{a}(x - a) = 0$, $x > 0$

$x = a + b\sin\omega t + c\cos\omega t$ —— ④ විසඳුමක් බව දී ඇත.

$t = 0$ විට $x = 4a$ (II අවස්ථාව බලන්න හා $\dot{x} = 0$ බැවින්

$4a = a + b\sin 0 + c\cos 0$

$\therefore c = 3a$

④, t විෂයයේ අවකලනයෙන්

$\dot{x} = b\omega\cos\omega t - c\omega\sin\omega t$

$0 = b\omega\cos 0 - c\omega\sin 0$

$\therefore b = 0$ ($\because \omega \neq 0$ නිසා)

$\therefore$ විසඳුම $x = a + 3a\cos\omega t$ —— ⑤

අංශුව චලිතය අරඹා t_1 කාලයකට පසු එහි විතතිය $x = 0$ වෙයි නම්, ⑤ න්

$0 = a + 3a\cos\omega t_1$

$\cos\omega t_1 = -\frac{1}{3}$

$\cos(\pi - \omega t_1) = -\cos\omega t_1$ බැවින්

$\cos(\pi - \omega t_1) = \frac{1}{3}$

$\pi - \omega t_1 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

$t_1 = \frac{1}{\omega}\left(\pi - \cos^{-1}\frac{1}{3}\right)$

$t = t_1$ විට ස. අ. ච. අවසන් වෙයි. එවිට P අංශුවේ ප්‍රවේගය v_1 නම්, $\dot{x} = -3a\,\omega \sin \omega t$, භාවිතයෙන්

$$v_1 = -3a\omega\sqrt{1 - \cos^2 \omega t}$$
$$= -3a\omega\sqrt{1 - \frac{1}{9}}$$
$$= -2\sqrt{2}\,a\,\omega \text{ වෙයි.}$$

සටහන :- $\dot{x}$ හි දිශාව ↓ බැවින් ප්‍රවේගය - අගයක් ගෙන ඇත්තේ අංශුව $t = t_1$ විට ↑ දිශාවට චලනය වන බැවිනි.

දැන් අංශුව හුදෙක් ගුරුත්වය යටතේ පමණක් චලනය වන බැවින්, ක්ෂණික නිශ්චලතාවට එළඹීමට පෙර අංශුව ගමන් කරන දුර h_1 නම් $v^2 = u^2 + 2as$ ↑ යෙදීමෙන්

$$0 = (-2\sqrt{2}a\omega)^2 - 2gh_1$$

$$h_1 = \frac{8a^2\omega^2}{2g} = \frac{8a^2}{2g} \times \frac{g}{a} \quad (\omega^2 = \frac{g}{a} \text{ බැවින්})$$

$$h_1 = 4a$$

මේ සඳහා ගතවන කාලය t_2 නම් ↑ $v = u + at$ යෙදීමේ

$0 = 2\sqrt{2}\,a\omega - gt_2$ වෙයි. එවිට $t_2 = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$

අංශුව මුදා හැරීමෙන් පසු ළඟාවන උපරිම උස $= 3a + a + 4a$
$= 8a$

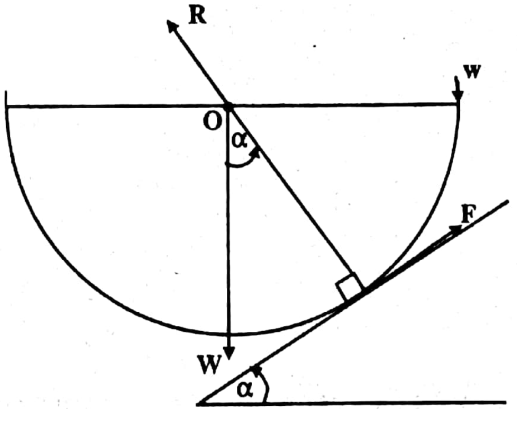
එකී චලිතය සඳහා ගතවන මුළු කාලය $= t_1 + t_2$

$$= \frac{1}{\omega}\left(\pi - \cos^{-1}\frac{1}{3}\right) + 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}}\left[\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\sqrt{2}\right]$$

සටහන :-
මෙම ගැටළුව විසඳීමේ දී ස. අ. චලිතයේ ලාක්ෂණික සමීකරණය ව්‍යුත්පන්න කිරීමෙන් පසු $v^2 = \omega^2\,[\,(3a)^2 - y^2]$ සමීකරණය හා ස. අ. චලිතයට අනුරූප වෘත්ත චලිතය භාවිතයෙන් ඉහත ප්‍රතිඵල ලබාගත හැකි නමුත් ඉදිරියේදී විභාගයට මුහුණ දෙන ඔබට අවකල සමීකරණය සඳහා යෝජිත විසඳුම භාවිතයෙන් ප්‍රතිඵල ලබාගැනීමට යොමු වීම වඩාත් සුදුසු වෙයි. සටහනේ මුලින් දක්වා ඇති විකල්ප ක්‍රමය භාවිතා කර පිළිතුරු ලබා ගැනීමට ද උනන්දු වන්න.

05. (a)



සංයුක්ත වස්තුවේ සමතුලිතතාවය සලකා ආනත තලයට,

I. ලම්බක දිශාවකට විභේදනයෙන්
$R = (W + w)\cos\alpha$ ——— ①

II සමාන්තර දිශාවකට විභේදනයෙන්
$F = (W + w)\sin\alpha$ ——— ②

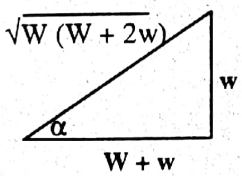
O වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්, අර්ධ ගෝලයේ අරය a නම්,

$F \times a = w \times a$
$\therefore F = w$ ——— ③

එවිට ② න් $w = (W + w)\sin\alpha$
$$\sin\alpha = \frac{w}{W + w}$$

අර්ධ ගෝලය සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ පිහිටන බැවින්

$\frac{F}{R} = \mu$ වෙයි.



① හා ② න් $\mu = \tan\alpha$ වෙයි.

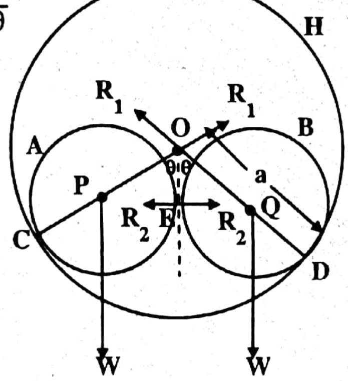
$$\therefore \mu = \frac{w}{\sqrt{W(W + 2w)}}$$

(b) A හා B සිලින්ඩර දෙකේ සමතුලිතතාව සලකා සිරස් විභේදනයෙන්

$2R_1\cos\theta = 2W$

$$R_1 = \frac{W}{\cos\theta}$$

මෙහි $P\hat{O}Q = 2\theta$ වෙයි.



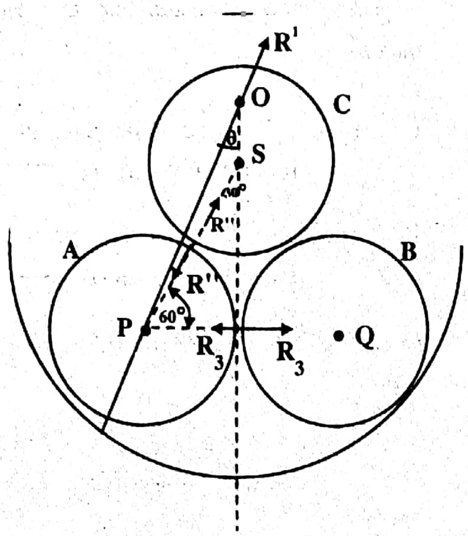
A සිලින්ඩරයේ සමතුලිතතාව සලකා තිරස් විභේදනයෙන්

$R_1\sin\theta = R_2$
$R_2 = W\tan\theta$

$OC = a$, $PC = b$ නිසා $OP = a - b$, $PE = b$ නිසා

$$OE = \sqrt{(a-b)^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - 2ab} = \sqrt{a(a - 2b)}$$

$$\therefore R_2 = W\frac{b}{\sqrt{a(a - 2b)}}$$



O යනු H සිලින්ඩරයේ කේන්ද්‍රය වේ.

A, B, C සිලින්ඩර තුනේ සමතුලිතතාවය සලකා සිරස් විභේදනයෙන්

$$2R'\cos\theta = 3W$$

C සිලින්ඩරයේ සමතුලිතතාවයෙන්

$$2R''\cos 30 = W$$

$$R'' = \frac{W}{\sqrt{3}}$$

A සිලින්ඩරයේ සමතුලිතතාවය සැලකීමෙන්

$$\rightarrow R'\sin\theta = R''\cos 60 + R_3$$

$$\frac{3W}{2\cos\theta}\sin\theta = \frac{W}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} + R_3$$

$$R_3 = \frac{3W}{2}\tan\theta - \frac{W}{2\sqrt{3}}$$

A හා B ගෝල ස්පර්ශව පැවතීමට නම්, $R_3 > 0$ විය යුතුය.

මේ සඳහා $\frac{3W}{2}\tan\theta - \frac{W}{2\sqrt{3}} > 0$ විය යුතුය.

$\tan\theta > \frac{1}{3\sqrt{3}}$ විය යුතුය.

$$\frac{b}{\sqrt{a(a-2b)}} > \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$27b^2 > a^2 - 2ab$$

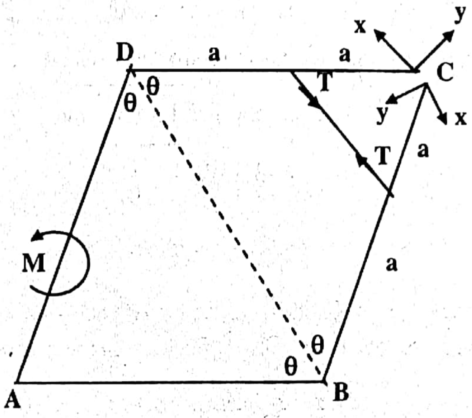
$$28b^2 > a^2 - 2ab + b^2$$

$$28b^2 > (a-b)^2$$

$$2\sqrt{7}\,b > a - b$$

$b(1 + 2\sqrt{7}) > a$ විය යුතුය.

06. (a) දඬු සැහැල්ලු වන අතර, සැකිල්ල සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා ඇත. C සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාවේ
BD ට සමාන්තර සංරචක X ද,
AC ට සමාන්තර සංරචක Y ද,
ලෙස ගෙන ඇත.



BC හා DC දඬු වල සමතුලිතතාවයක් සලකා B හා D වට ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

B $\curvearrowleft$ $T \times a\sin\theta = X \times 2a\sin\theta - Y \times 2a\cos\theta$ —— ①

D $\curvearrowright$ $T \times a\sin\theta = X \times 2a\sin\theta + Y \times 2a\cos\theta$ —— ②

① + ② න් $X = \frac{T}{2}$ බවත්

② - ① න් $Y = 0$ බවත් පහසුවෙන් ලබාගත හැක.

දැන් ADC කොටසේ සමතුලිතතාවය සලකා A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

(A) $M + (X \times 4a\sin\theta) + (Y \times 4a\cos\theta) = T \times 3a\sin\theta$

$$M + \frac{T}{\cancel{2}_1} \times \cancel{4}^{2} a\sin\theta + 0 = 3Ta\sin\theta$$

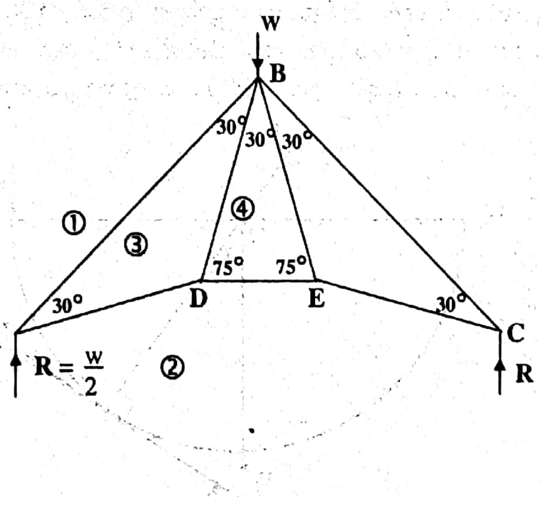
$$M = Ta\sin\theta$$

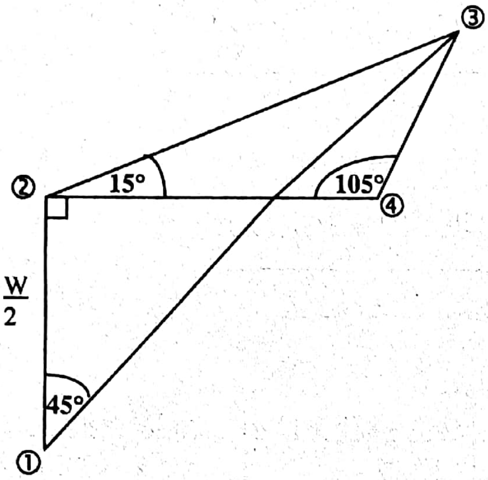
$$T = \frac{M}{a\sin\theta}$$

(b) රාමු සැකිල්ල B හරහා ඇති සිරස් රේඛාව වටා සමමිතික වේ.

$\therefore R = \frac{W}{2}$ වෙයි.

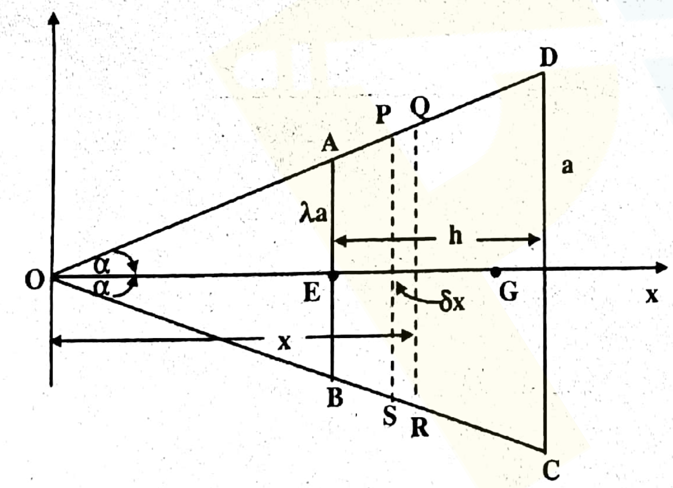
A සන්ධිය හා D සන්ධිය සලකා ප්‍රත්‍යාබල සටහන අඳින්න.





දණ්ඩ	ප්‍රත්‍යාබලය	විශාලත්වය
AD	ආතතිය	$\frac{W}{\sqrt{2}}$
AB	තෙරපුම	W sin 75°
DE	ආතතිය	$\frac{W\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\sin 75}$
DB	ආතතිය	$\frac{W}{\sqrt{2}}$

07.



සමමිතිකත්වයෙන් ජින්නතයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටයි.

කේතුවේ අඩ සිරස් කෝණය α යයි ගනිමු. y අක්ෂයේ සිට x දුරින් වූ ඝනකම δx වන PQRS තුනී තැටියක් සලකමු.

එම තැටියේ ස්කන්ධය $= \pi x^2 \tan^2\alpha\, \delta x\, \rho$

$\therefore$ ජින්නකයේ ස්කන්ධය $M = \int_{\lambda a \cot\alpha}^{a\cot\alpha} \pi\, \rho \tan^2\alpha\, x^2\, dx$

$$= \pi\rho \tan^2\alpha \left(\frac{x^3}{3}\right)_{\lambda a\cot\alpha}^{a\cot\alpha}$$

$$M = \frac{\pi\rho\tan^2\alpha}{3}\left[a^3\cot^3\alpha - \lambda^3 a^3\cot^3\alpha\right]$$

$$= \frac{\pi\rho\tan^2\alpha\cot^3\alpha\, a^3}{3}(1-\lambda^3)$$

$$M = \frac{1}{3}\pi\rho a^3\cot\alpha(1-\lambda^3)$$

ජින්නකයේ උස h බැවින්,

$h = a\cot\alpha - \lambda a\cot\alpha$ වේ.

$$\cot\alpha = \frac{h}{a(1-\lambda)}$$

$$\therefore M = \frac{1}{3}\pi a^3\rho\frac{h}{a(1-\lambda)}(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2)$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^2 h\rho(1+\lambda+\lambda^2)$$

ජින්නකයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G නම්, $G \equiv (\overline{x}, 0)$ ආකාරය ගනී.

ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයේ අර්ථ දැක්වීමට අනුව

$$\overline{x} = \frac{\int_{\lambda a\cot\alpha}^{a\cot\alpha}\pi\rho\tan^2\alpha\, x^2, x\, dx}{\int_{\lambda a\cot\alpha}^{a\cot\alpha}\pi\rho\tan^2\alpha\, x^2, dx}$$

$$\overline{x} = \frac{\pi\rho\tan^2\alpha\int_{\lambda a\cot\alpha}^{a\cot\alpha}x^3, dx}{\pi\rho\tan^2\alpha\int_{\lambda a\cot\alpha}^{a\cot\alpha}x^2, dx}$$

$$\overline{x} = \frac{1}{4}\left[x^4\right]_{\lambda a\cot\alpha}^{a\cot\alpha} \Big/ \frac{1}{3}\left[a^3\right]_{\lambda a\cot\alpha}^{a\cot\alpha}$$

$$= \frac{3}{4}\frac{[a^4\cot^4\alpha - \lambda^4 a^4\cot^4\alpha]}{[a^3\cot^3\alpha - \lambda^3 a^3\cot^3\alpha]}$$

$$= \frac{3a^4\cot^4\alpha}{4a^3\cot^3\alpha}\frac{(1-\lambda^4)}{(1-\lambda^3)}$$

$$\overline{x} = \frac{3}{4}a\cot\alpha\frac{(1-\lambda^4)}{(1-\lambda^3)}$$

කුඩා මුහුණතේ සිට ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට ඇති දුර

$$EG = \overline{x} - \lambda a\cot\alpha$$

$$= \frac{3}{4}a\cot\alpha\frac{(1-\lambda^4)}{(1-\lambda^3)} - \lambda a\cot\alpha$$

$$= \frac{1}{4}\ \frac{a \cot \alpha}{(1-\lambda^3)}\ [3(1-\lambda^4) - 4\lambda\,(1-\lambda)^3]$$

$$= \frac{h}{4a\,(1-\lambda)\,(1-\lambda^3)}\ [3(1-\lambda)\,(1+\lambda)\,(1+\lambda^2) - 4\,\lambda\,(1-\lambda)\,(1+\lambda+\lambda^2)]$$

$$= \frac{h\,\cancel{(1-\lambda)}}{4\cancel{(1-\lambda)}\,(1-\lambda^3)}\ [3 + 3\lambda + 3\lambda^2 + 3\lambda^3 - 4\lambda - 4\lambda^2 - 4\lambda^3]$$

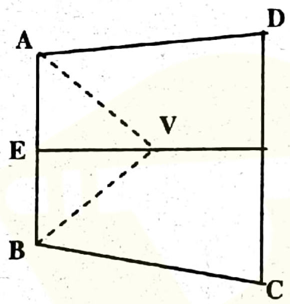
$$= \frac{h}{4(1-\lambda^3)}\ [\,3 - \lambda - \lambda^2 - \lambda^3]$$

$$= \frac{h}{4}\ \frac{(1-\lambda)\,(3+2\lambda+\lambda^2)}{(1-\lambda)\,(1+\lambda+\lambda^2)}$$

$$EG = \frac{h\,(3+2\,\lambda+\lambda^2)}{4\,(1+\lambda+\lambda^2)}$$

ඡින්නකය සඳහා වූ ප්‍රතිඵල ඝන කේතුවක සඳහා වූ ප්‍රතිඵල වලට අපෝහනය වන්නේ $\lambda \to {}^{+}0$ විටය.

එවිට $M = \frac{1}{3}\pi a^2 h\,\rho$ හා $OG = \frac{3}{4}h$ බව ලැබේ.



කොටස	ස්කන්ධය	ස්. කේ. ව E සිට දුර
ABCD ඡින්නකය	$m_1 = \frac{1}{3}\pi a^2 h\rho(1+\lambda+\lambda^2)$	$\frac{h}{4}\frac{(3+2\lambda+\lambda^2)}{(1+\lambda+\lambda^2)}$
ABV කේතුව	$m_2 = \frac{1}{3}\ \pi a^2\ \frac{h}{2}\rho$	$\frac{1}{4}\left[\frac{h}{2}\right]$
J ඝන වස්තුව	$m_1 - m_2$	EG_1

වගුව අනුව

ABV කේතුව හාරා ඉවත් කිරීමෙන් ලැබෙන J ඝන වස්තුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G_1 නම්

$$EG_1 = \frac{\frac{1}{3}\pi a^2 h\rho(1+\lambda+\lambda^2).\ \frac{h}{4}\,\frac{(3+2\lambda+\lambda^2)}{4\,(1+\lambda+\lambda^2)} - \frac{1}{3}\ \pi a^2\ \frac{h}{2}\rho \times \frac{h}{8}}{\frac{1}{3}\ \pi a^2 h\rho(1+\lambda+\lambda^2) - \frac{1}{3}\pi a^2\,\frac{h}{2}\,\rho\lambda^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\,h\,(\,3+2\lambda+\lambda^2) - \frac{\lambda^2 h}{16}}{1+\lambda+\lambda^2 - \frac{\lambda^2}{2}}$$

$$= \frac{\frac{12h + 8\lambda h + 4\lambda^2 h - \lambda^2 h}{16}}{\frac{2+2\lambda+2\lambda^2-\lambda^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{3\lambda^2 h + 8\lambda h + 12\,h}{2+2\lambda+\lambda^2}\right) = \frac{h\,(3\lambda^2 + 8\,\lambda + 12)}{8\,(\lambda^2+2\lambda+2)}$$

$G_1 \equiv V$ යයි උපකල්පනය කරමු.

මේ සඳහා $\frac{h\,(3\lambda^2+8\,\lambda+12)}{8\,(\lambda^2+2\lambda+2)} = \frac{h}{2}$ විය යුතුය.

මේ සඳහා $3\lambda^2 + 8\lambda + 12 = 4\lambda^2 + 8\lambda + 8$ විය යුතුය.

එනම් $\lambda^2 = 4$

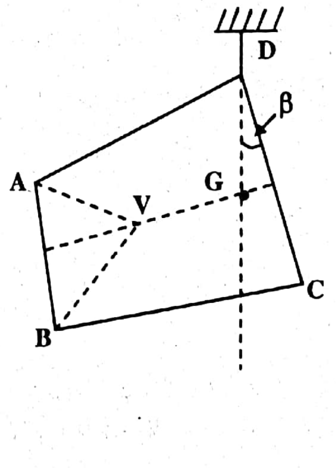
$\lambda = 2$ විය යුතුය.

නමුත් $0 < \lambda < 1$ බව දී ඇති නිසා මෙය සිදුවිය නොහැක.
එනම් G_1 ලක්ෂ්‍යය V සමඟ සම්පාත නොවේ. සමමිතික අක්ෂය සිරස සමඟ β කෝණයක් සාදයි නම්

$$\tan\beta = \frac{a}{h - EG_1} = \frac{a}{h - \frac{h}{8}\,\frac{(3\lambda^2+8\lambda+12)}{(\lambda^2+2\lambda+2)}}$$

$$= \frac{8a\,(\lambda^2+2\lambda+2)}{h\,(8\lambda^2+16\lambda+16-3\lambda^2-8\lambda-12)}$$

$$= \frac{8a\,(\,\lambda^2+2\lambda+2)}{h\,(\,5\lambda^2+8\lambda+4)}$$



08. (a) I. A හා B සිද්ධි ස්වායත්ත වෙයි නම්,
$P(A \cap B) = P(A) . P(B)$ වෙයි.

II. A හා B සිද්ධි අන්‍යොන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර වෙයි නම්,
$A \cap B = \varnothing$, එනම් $P(A \cap B) = 0$ වෙයි.

III. A හා B සිද්ධි නිරවශේෂ වෙයි නම්,
$A \cup B = \Omega$ (නියැදි අවකාශය)
එනම් $P(A \cup B) = 1$ වෙයි.

$A \cap B$ හා $A \cap B'$ අන්‍යොන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධීන් වෙයි.

$P[(A\cap B) \cup (A\cap B')] = P(A\cap B) + P(A\cap B')$ — ①

එසේම $A = (A\cap B) \cup (A\cap B')$

$\therefore P(A) = P[(A\cap B) \cup (A\cap B')]$

$P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B')$ — ②

① හා ② න්

$P(A) = P[(A\cap B) \cup (A\cap B')]$

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A\cap B') = \frac{1}{2}$

② ට අනුව $\frac{1}{2} = P(A\cap B) + \frac{1}{2}$

$\therefore P(A\cap B) = 0$

② ට අනුව $P(B) = P(A\cap B) + P(A'\cap B)$ බව ගම්‍ය වේ.

$\therefore \frac{1}{3} = 0 + P(A'\cap B)$

$\therefore P(A'\cap B) = \frac{1}{3}$

$P(A'\cap B') = P[(A\cup B)']$ (මෝගන් නියම)

$= 1 - P(A\cup B)$

$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A\cap B)]$

$= 1 - [\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0]$

$= \frac{1}{6}$

(b) B සිද්ධිය සිදුව ඇතැයි දී ඇතිවිට A සිදුවීමේ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ($\because P(B) > 0$ බැවින්)

පහත දැක්වෙන පරිදි සිද්ධීන් අර්ථ දක්වමු.

X ; ශිෂ්‍යයා පාපැදියෙන් පාසලට පැමිණීම.

Y ; ශිෂ්‍යයා බසයෙන් පාසලට පැමිණීම.

Z ; ශිෂ්‍යයා නියමිත වේලාවට හෝ ඊට පෙර පාසලට පැමිණීම.

Z' ; ශිෂ්‍යයා නියමිත වේලාවට වඩා ප්‍රමාද වී පාසලට පැමිණීම.

$P(Z) = \frac{19}{28}$, $\therefore P(Z') = \frac{9}{28}$ ($\because Z \cup Z' = \Omega$)

$P(Z | Y) = \frac{3}{4}$ $\therefore P(Z' | Y) = \frac{1}{4}$

$P(Z' | X) = 2(Z' | Y)$ බව දී ඇත.

$\therefore P(Z' | X) = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

I. ශිෂ්‍යයා ප්‍රමාද වී පාසලට පැමිණීමේ සම්භාවිතාව $P(Z')$,

$P(Z') = P(X \cap Z') + P(Y \cap Z')$

$= P(X) \times P(Z' |X) + P(Y) P(Z' |Y)$

$= (x \times \frac{1}{2}) + (1 - x)\frac{1}{4}$

නමුත් $P(Z') = \frac{9}{28}$ බැවින්, x යනු $P(X)$ නම් $P(Y) = 1 - x$ වේ.

$\frac{9}{28} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x$

$\frac{9}{28} - \frac{1}{4} = \frac{2}{28}x$

$= \frac{1}{4}x$

$x = \frac{2}{7}$

$\therefore$ ශිෂ්‍යයා පාපැදියෙන් පාසලට පැමිණීමේ සම්භාවිතාව

$P(X)$; $P(X) = \frac{2}{7}$ වේ.

ශිෂ්‍යයා ප්‍රමාද වී පැමිණි බව දී ඇති විටෙක ඔහු බසයෙන් පාසලට පැමිණීමේ සම්භාවිතාව $P(Y | Z')$ යන්න

$P(Y|Z') = P\frac{(Y \cap Z')}{P(Z')}$ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව අර්ථ දැක්වීමට අනුව

$P(Z' |Y) = P\frac{(Y \cap Z')}{P(Y)}$ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව අර්ථ දැක්වීමට අනුව

$\therefore P(Y |Z') = \frac{P(Z'|Y) P(Y)}{P(Z')}$

$= \frac{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{7}\right)}{\frac{9}{28}}$

$= \frac{5}{9}$

09. $x_1, x_2, ..., x_n$ දත්තයන්ගේ මධ්‍යන්‍යය $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$y_i = ax_i + b$ පරිණාමනයට අනුව

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} ax_i + \sum_{i=1}^{n} b$$

$$= a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= an\overline{x} + bn$$

$y_1, y_2, ..., y_n$ දත්තයන්ගේ මධ්‍යන්‍යය $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ බැවින්

$$\overline{y} = \frac{1}{n}[an\overline{x} + bn]$$

$$\overline{y} = a\overline{x} + b \quad \text{——} ①$$

$y_1, y_2, ..., y_n$ දත්තයන්ගේ සම්මත අපගමනය

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\{ax_i + b - (a\overline{x} + b)^2]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - ax - b)^2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a^2(x_i - \overline{x})^2}$$

$x_1, x_2, ..., x_n$ දත්තයන්ගේ සම්මත අපගමනය

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \text{ බැවින්}$$

$$\therefore S_y = \sqrt{a^2}S_x$$

$$S_y = |a|S_x \quad \text{——} ②$$

x_i යනු i වන ශිෂ්‍යයාගේ භූගෝල විද්‍යාව ලකුණද, y_i යනු ඔහුගේ පරිමාණයට ලක්කරන ලද ලකුණද නම්

$y_i = ax_i + b$ යෙදීමෙන්

$40 = 40a + b$ — ③

① න් $50 = am + b$ — ④ [$\because \overline{x} = m$ හා $\overline{y} = 50$ බැවින්]

② න් $15 = 12|a|$ — ⑤

⑤ න් $|a| = \frac{5}{4}$

④ - ③ න් $10 = a(m - 40)$

$a = \pm\frac{5}{4}$ බැවින්

$m = 48$ හෝ 32 වේ.

මේ ආකාරයටම ඉතිහාසය විෂය සැලකීමෙන්

$56 = 61a_1 + b_1$ ——— ⑥

$50 = 53a_1 + b_1$ ——— ⑦

$15 = |a_i|S$ ——— ⑧

⑥ - ⑦ න් $6 = 8a_1$

$a_1 = \frac{3}{4}$

$\therefore$ ⑧ න් $S = 20$

ඉතිහාසය විෂය සඳහා පෙනී සිටි අයදුම්කරුවන් සංඛ්‍යාව n යයි සිතමු.

එවිට ඔවුන් ලබාගත් මුළු ලකුණු සංඛ්‍යාව = 53 n වේ.

ඉතිහාසය ලකුණු වෙනස් වූ සිසුන්

සංඛ්‍යාව $= n \times 0.1\% = \frac{n}{1000}$

ලකුණු වෙනස් වූ පසු ඔවුන් n දෙනා ලබාගත් මුළු

ලකුණු සංඛ්‍යාව $= 53n + \frac{n}{1000}(68 - 65)$

$$= 53n + \frac{3n}{1000}$$

$$= \frac{53003\,n}{1000}$$

$\therefore$ ඉතිහාසය සඳහා නව මධ්‍යන්‍යය $= \frac{53003\,n}{1000} / n$

$$= \underline{\underline{53.003}}$$

*** ***