අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය - 2011 අගෝස්තු

General Certificate of Education (Adv. Level) Examination – August 2011

සංයුක්ත ගණිතය I / පැ තුනයි

Combined Mathematics I / Three hours

වැදගත් :
- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.
- **A කොටස** (ප්‍රශ්න 1 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17)
- **A කොටස**

  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
- **B කොටස**

  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.

  නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු A කොටස, B කොටසට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.

  ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි B කොටස **පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

A කොටස

01. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $n^3 + 5n$ යන්න 3 න් බෙදෙන බව සාධනය කරන්න.

02. 1, 2, 3 හා 4 සංඛ්‍යාංක යොදාගෙන 2000 ත් 4000 ත් අතර සංඛ්‍යා කොපමණ ගණනක්, සංඛ්‍යාංක පුනරාවර්තනයට
(i) ඉඩ නැති විට, (ii) ඉඩ ඇති විට
සෑදිය හැකිද'යි සොයන්න.

03. ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා ද්විපද ප්‍රසාරණය යොදා ගනිමින්, $(1+\sqrt{3})^6 + (1-\sqrt{3})^6 = 416$ බව පෙන්වන්න. එනයින්, $(1+\sqrt{3})^6$ හි පූර්ණ සංඛ්‍යාමය කොටස සොයන්න.

04. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4 + 3\sin x} - \sqrt{4 - 3\sin x}}{2x} = \dfrac{3}{4}$ බව පෙන්වන්න.

05. $\dfrac{d}{dx} e^{2x} (A \sin 3x + B \cos 3x) = 13\, e^{2x} \sin 3x$ වන පරිදි A හා B නියත සොයන්න.
එනයින්, $\int e^{2x} \sin 3x \, dx$ සොයන්න.

06. $3x + 2y + 5 = 0$ සරල රේඛාවට සමාන්තර වූද, (2, 3) හා (-1, 2) ලක්ෂ්‍ය යා කරන සරල රේඛාව 3 : 2 අනුපාතයට බාහිරව බෙදන ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන්නා වූ ද සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

07. වක්‍රයක් $x = 3t$, $y = 3/t$ මගින් දෙනු ලැබෙයි ; මෙහි t යනු නිශ්ශුන්‍ය පරාමිතියකි. වක්‍රයට, (3t, 3/t) ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $x + t^2y = 6t$ බව පෙන්වන්න. t විචලනය වනවිට ඛණ්ඩාංක අක්ෂ හා මෙම ස්පර්ශකය මගින් සපරියන්ත ත්‍රිකෝණාකාර පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය නියතයක් බව අපෝහනය කරන්න.

08. $x + y + 1 = 0$ සරල රේඛාව ස්පර්ශ කරන්නා වූ ද, කේන්ද්‍රය y අක්ෂය මත පිහිටියා වූද, එක එකක අරය $\sqrt{2}$ වූද වෘත්ත දෙකෙහි සමීකරණ සොයන්න.

09. P ලක්ෂ්‍යයක සිට $x^2 + y^2 - 12x = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග, P ලක්ෂ්‍යයේ සිට $x^2 + y^2 - 9 = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග මෙන් දෙගුණයකි. P ලක්ෂ්‍යය $x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

10. ත්‍රිකෝණයක පාද $P - 1$, P හා $P + 1$ වෙයි. P යනු $P > 1$ වන පරිදි වූ තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවකි. ත්‍රිකෝණයේ විශාලතම කෝණය කුඩාතම කෝණය මෙන් දෙගුණයක් නම්, සයින් නියමය හා කෝසයින් නියමය යොදා ගනිමින් P හි අගය සොයන්න.

*** ***

B කොටස

11. (a) α හා β යනු $ax^2 + bx + c = 0$, වර්ගජ සමීකරණයේ මූල යැයි ගනිමු ; මෙහි a, b හා c යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ.

α හා β දෙක ම

(i) $b^2 - 4ac \geq 0$ ම නම් පමණක් තාත්ත්වික,

(ii) $b = 0$ හා $ac > 0$ ම නම් පමණක් හුදෙක් අතාත්ත්වික

බව පෙන්වන්න.

මූල α^2 හා β^2 වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.

එක්කෝ α හා β දෙක ම තාත්ත්වික, **නැත්නම්** α හා β දෙක ම හුදෙක් අතාත්ත්වික ම නම් පමණක් මෙම වර්ගජ සමීකරණයේ මූල දෙක ම තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න.

(b) $f(x) = x^3 - 3abx - (a^3 + b^3)$ යැයි ගනිමු ; මෙහි a හා b යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. $(x - a - b)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. $f(x)$ හි අනෙක් සාධකය වර්ගජ ආකාරයෙන් සොයන්න.

ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, a හා b ප්‍රභින්න නම්, $f(x) = 0$ ට තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් තිබෙන බව පෙන්වන්න.

$x^3 - 9x - 12 = 0$ ට තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් තිබෙන බව **අපෝහනයකර**, එය සොයන්න.

12. (a) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r = \dfrac{1}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$ යැයි ගනිමු.

r ඇසුරෙන් $\dfrac{u_{r+1}}{u_r}$ සොයන්න.

ඒ නයින්, $r = 1, 2, 3, \ldots$ සඳහා $(2r - 1)\, u_r - (2r + 1)\, u_{r+1} = 4u_{r+1}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{n} u_r = \frac{1}{12} - \frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(b) $y = |2x - 8|$ හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

ඒ නයින්, $y = -|2x - 8|$ හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

$y = 4 - |2x - 8|$ හා $y = |2x - 10|$ හි ප්‍රස්තාර, **එක ම රූප සටහනක** අඳින්න.

ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $|2x - 10| + |2x - 8| \leq 4$ අසමානතාව සපුරාලනු ලබන x හි තාත්ත්වික අගය කුලකය සොයන්න.

13. (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ හා $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $A(\lambda A + \mu I) = I$ වන අයුරින් λ හා μ අගයන් සොයන්න ; මෙහි I යනු 2×2 ඒකක න්‍යාසය වේ.

ඒ නයින්, A^{-1} සොයන්න.

(b) P, Q හා R යනු ආර්ගන් සටහනෙහි පිළිවෙළින් z_0, z_1 හා z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය තුනක් යැයි ගනිමු.

$PQ = PR$ ද, θ යනු PQ සිට PR ට වාමාවර්ත ලෙස මනින ලද කෝණය ද නම්,
$z_2 - z_0 = (z_1 - z_0)(\cos\theta + i\sin\theta)$ බව පෙන්වන්න.

වාමාවර්ත ලෙස ගන්නා ලද A, B, C හා D ලක්ෂ්‍ය ආර්ගන් සටහනෙහි සමචතුරස්‍රයක් සාදයි. A හා B ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා පිළිවෙළින් $1 - i$ හා z යැයි ගනිමු. C හා D ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා z ඇසුරෙන් සොයන්න.

$AC = 2$ වන අයුරින් C විචලනය වෙයි නම්, B හි පථය ආර්ගන් සටහනෙහි සොයන්න.

14. (*a*) $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx$ යැයි ගනිමු ; මෙහි a හා b යනු තාත්ත්වික නියත වේ. $f'(3) = 12$ හා $f''(3) = 18$ යැයි සිතමු ; මෙහි f' හා f'' ට සුපුරුදු තේරුම් තිබෙයි.

a හා b හි අගයන් සොයන්න.

a හා b හි මෙම අගයන් සඳහා $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක්, හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් අඳින්න.

ඒ නයින්, $2x^2 + ax + b = \dfrac{3}{x}$ සමීකරණයේ විසඳුම් ගණන සොයන්න.

(*b*) සමචතුරස්‍රාකාර පතුලක් සහිත සංවෘත සෘජුකෝණාස්‍රාකාර පෙට්ටියක් තුනී කාඩ්බෝඩ්වලින් සාදා ඇත. පෙට්ටියේ පරිමාව $8192\ \text{cm}^3$ වෙයි. සමචතුරස්‍රාකාර පතුලෙහි පැත්තක දිග $4x$ cm යැයි ගනිමු. අරය x cm වන වෘත්තාකාර සිදුරක් ඉහළ සමචතුරස්‍රාකාර මුහුණතෙන් කපා ඉවත්කර ඇත. සිදුර සහිත පෙට්ටියේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය වන $A\ \text{cm}^2$ යන්න,

$A = (32 - \pi)x^2 + \dfrac{8192}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $x = \dfrac{16}{\sqrt[3]{32 - \pi}}$ වන විට A අවම වන බව පෙන්වන්න.

15. (*a*) **කොටස් වශයෙන් අනුකලනය** යොදාගනිමින්, $\displaystyle\int_1^e x^{\frac{3}{2}} \ln x\, dx$ අගයන්න.

(*b*) $t = \tan x$ යැයි ගනිමු.

$\cos 2x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $\sin 2x = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ හා $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{1 + t^2}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\cos 2x + 3\sin 2x + 5}\, dx = \frac{1}{12}$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) a හා b යනු ප්‍රභින්න තාත්ත්වික සංඛ්‍යා යැයි ගනිමු.

$x \in \mathbb{R} - \{a, b\}$ සඳහා $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b}$ වන අයුරින් A හා B නියත සොයන්න.

ඉහත සමීකරණයේ x, a හා b සුදුසු ලෙස ප්‍රතිස්ථාපනය කරමින්, $\dfrac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$ යන්න භින්න භාග ඇසුරෙන් ලියා දක්වා,

ඒ නයින්, $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}\, dx$ සොයන්න.

16. (*a*) $lx + my + 1 = 0$ සරල රේඛා සමඟ සමද්විපාද සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක් සාදන ලෙස මූල ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ එකිනෙකට ලම්බව යන සරල රේඛා දෙකෙහි සමීකරණ $(l - m)x + (l + m)y = 0$ හා $(l + m)x - (l - m)y = 0$ බව පෙන්වන්න.

(b) $S' \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ වෘත්තය, $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තය, $S = 0$ වෘත්තයෙහි විෂ්කම්භයක කෙළවරවල දී ඡේදනය කරයි නම්, $2g^2 + 2f^2 - c = 2gg' + 2ff' - c'$ බව පෙන්වන්න.

විචල්‍ය වෘත්තයක්, $S_1 \equiv x^2 + y^2 - 25 = 0$ හා $S_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$ වෘත්ත, එක එකක විෂ්කම්භයක කෙළවරවල දී ඒවා ඡේදනය කරයි. විචල්‍ය වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $x + 2y + 2 = 0$ සරල රේඛාව මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

17. (a) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ සර්වසාම්‍යය යොදාගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ,
$\cos^6\theta + \sin^6\theta = a + b\cos 4\theta$ වන අයුරින් a හා b යන තාත්ත්වික නියත නිර්ණය කරන්න.

ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ,

(i) $y = 8(\cos^6 x + \sin^6 x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(ii) $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin 4x$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(b) $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න.

*** ***

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය - 2011 අගෝස්තු

General Certificate of Education (Adv. Level) Examination – August 2011

සංයුක්ත ගණිතය II / පැ තුනයි

Combined Mathematics II / Three hours

වැදගත් :
- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.
- **A කොටස** (ප්‍රශ්න 1 - 10 සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17)
- **A කොටස**

  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකිය.
- **B කොටස**

  ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A** කොටස, **B** කොටසට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාගශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B** කොටස **පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

A කොටස

01. අවකාශයෙහි වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට P අංශුවක් $2u$ ප්‍රවේගයෙන් සිරස්ව ඉහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබෙයි. එම මොහොතේදී ම, එම O ලක්ෂ්‍යයේ ම සිට, Q අංශුවක් u ප්‍රවේගයෙන් සිරස්ව පහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබෙයි. අංශු දෙකම ගුරුත්වය යටතේ චලනය වේ. P හා Q අංශුවල චලිත සඳහා ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාර **එකම රූප සටහනක** ඇඳ, P අංශුව එහි උපරිම උසට ළඟාවන විට, Q අංශුවෙහි ප්‍රවේගය $3u$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

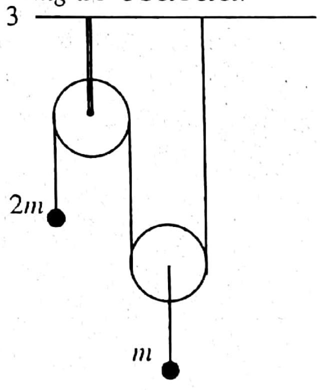
....

....

....

....

02. සුමට අචල කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරකින් ස්කන්ධය $2m$ වූ අංශුවක් දරා සිටී. තන්තුව, ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් දරා සිටින සැහැල්ලු කප්පියක් යටින් යයි. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර රූප සටහනෙහි පෙන්වා ඇති පරිදි සිවිලිමකට සවිකර ඇත. පද්ධතිය ගුරුත්වය යටතේ නිදහසේ චලනය වෙයි. තන්තුවේ ආතතිය $\frac{2}{3}mg$ බව පෙන්වන්න.



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

03. පාපැදිකරුවකුගේ සහ ඔහුගේ පාපැදියෙහි මුළු ස්කන්ධය M kg වේ. ඔහු, තිරසට α කෝණයකින් ආනත සෘජු මාර්ගයක ඉහළට, චලිතයට වූ R N ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහිව, V ms^{-1} නියත වේගයෙන් පැද යන විට, H W නියත සීඝ්‍රතාවකින් කාර්ය කරයි. $H = (R + Mg\sin\alpha)\,V$ බව පෙන්වන්න.

04. ස්වාභාවික දිග l ද, ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය λ ද වන තුනී සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ දුන්නක් සුමට තිරස් මේසයක් මත නිසලව ඇත. එහි එක කෙළවරක් මේසය මත වූ අචල ලක්ෂ්‍යයකට සවිකර ඇත. එහි අනෙක් කෙළවරට ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් ඇඳා ඇත. මේසය දිගේ දුන්න ඇද මුදා හරිනු ලැබෙයි. ආවර්ත කාලය $2\pi\sqrt{\frac{ml}{\lambda}}$ සහිත සරල අනුවර්තී චලිතයක අංශුව යෙදෙන බව පෙන්වන්න.

05. $-2\mathbf{p} + 5\mathbf{q}$, $7\mathbf{p} - \mathbf{q}$ හා $\mathbf{p} + 3\mathbf{q}$ යනු අචල O මූල ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් පිළිවෙළින් A, B හා C ලක්ෂ්‍ය තුනක පිහිටුම් දෛශික යැයි ගනිමු ; මෙහි $\mathbf{p}$ හා $\mathbf{q}$ යනු සමාන්තර නොවන දෛශික දෙකක් වේ. A, B හා C ලක්ෂ්‍යය ඒකරේඛීය බව පෙන්වා, C ලක්ෂ්‍යය AB බෙදන අනුපාතය සොයන්න.

06. දිග a හා b වන තන්තු දෙකක් මගින් W භාරයක්, එකම තිරස් මට්ටමක $\sqrt{a^2 + b^2}$ දුරක පරතරයකින් පිහිටි ලක්ෂ්‍ය දෙකකින් එල්ලා ඇත. තන්තුවල ආතති $\frac{Wa}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ හා $\frac{Wb}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ බව පෙන්වන්න.

07. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක නිරවශේෂ සිද්ධි දෙකක් (එනම් $A \cup B = \Omega$) යැයි ගනිමු. $P(A) = \frac{2}{5}$ හා $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ නම්, (i) $P(B)$, (ii) $P(A/B)$, (iii) A' හා B' යනු පිළිවෙළින් A හා B හි අනුපූරක සිද්ධි වන $P(A'/B')$ සොයන්න.

08. ගැටලුවක් විසඳීමට මිතුරන් දෙදෙනෙක් ස්වායත්ත ලෙස උත්සාහ කරති. ඔවුන්ගේ සාර්ථකවීමේ සම්භාවිතා $\frac{1}{3}$ හා $\frac{1}{4}$ වේ. ගැටලුව විසඳීමේදී (i) ඔවුන් දෙදෙනාම සාර්ථකවීමේ, (ii) කිසිවකු සාර්ථක නොවීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

09. පවුල 1 000 ක දෛනික වියදම් පහත වගුවෙහි දී ඇත.

දෛනික වියදම් රුපියල්වලින්	400 - 600	600 - 800	800 - 1000	1000 - 1200	1200 - 1400
පවුල් ගණන	50	x	500	y	50

ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය රුපියල් 900 නම්, x හා y සංඛ්‍යාත සොයා, ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය ද රුපියල් 900 බව පෙන්වන්න.

10. පසුගිය මාස 15 තුළ එක්තරා භාණ්ඩයක් සඳහා ලැබුණු ඇනවුම් සංඛ්‍යාවෙහි සාමාන්‍යය, මසකට ඇනවුම් 24 කි. හොඳම මාස තුනට, මසකට ඇනවුම් 35 ක සාමාන්‍යයක් ඇත. අඩුම මාස හතරෙහිදී භාණ්ඩ සඳහා ඇනවුම් 11 ක්, 14 ක්, 16 ක් හා 22 ක් ලැබිණි.

(i) ඉතිරි මාස 8 හි ලැබුණු ඇනවුම් සංඛ්‍යාවල සාමාන්‍යය,

(ii) මාස 15 හි ඇනවුම් සංඛ්‍යාවල පළමුවන චතුර්ථකය සොයන්න.

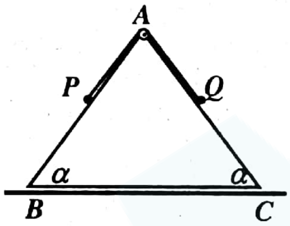
*** ***

(මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි g මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දක්වෙයි.)

11. (a) පහත් කණු තුනක ඉහළම ලක්ෂ්‍ය වන A, B හා C තිරස් තලයක වූ පාදයක දිග a වන සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂවල පිහිටා ඇත. සුළඟක් සතත u වේගයෙන් $\overrightarrow{AC}$ හි දිශාවට හමා යයි. සුළඟට සාපේක්ෂව $v\,(>u)$ වේගයක් ඇති කුරුල්ලෙක් AB දිගේ A සිට B දක්වා ද, BC දිගේ B සිට C දක්වා ද පියාඹයි.
ගමනේ කොටස් දෙකම සඳහා සාපේක්ෂ ප්‍රවේගවල ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ එකම රූප සටහනක අඳින්න.

ඒ නයින්, A සිට C දක්වා B හරහා වූ ගමන සඳහා ගතවන මුළු කාලය $\dfrac{4a}{u+\sqrt{4v^2-3u^2}}$ බව පෙන්වන්න.

(b) ස්කන්ධය $2m$ වූ සුමට කුඤ්ඤයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය ඔස්සේ යන ABC ත්‍රිකෝණාකාර සිරස් හරස්කඩෙහි A ශීර්ෂයේ දී, කුඩා සුමට කප්පියක් සවිකර ඇත. BC ඔස්සේ යන මුහුණත අචල සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා ඇත. AB සහ AC යනු අදාළ මුහුණත්වල වැඩිතම බෑවුම් රේඛා යැයි ද, $A\hat{B}C = A\hat{C}B = \alpha$ යැයි ද දී ඇත. ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m හා λm $(\lambda > 1)$ වූ P හා Q සුමට අංශු දෙකක් සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඈඳ ඇත. තන්තුව කප්පිය මතින් යන අතර, P හා Q අංශු, පිළිවෙළින් AB හා AC මත රූප සටහනෙහි පෙන්වා ඇති පරිදි තන්තුව නොබුරුල්ව පවතින සේ තබා ඇත.

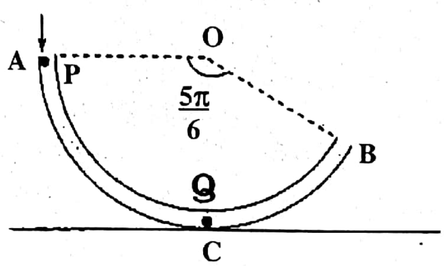


පද්ධතිය නිසලතාවෙන් මුදා හැරේ.
P හා Q අංශු සඳහා පිළිවෙළින් BA හා AC ඔස්සේ ද, පද්ධතිය සඳහා තිරසට ද, චලිත සමීකරණ ලබා ගන්න.

කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව P හා Q අංශු එක එකක ත්වරණයේ විශාලත්වය $\dfrac{(\lambda-1)(\lambda+3)\, g \sin\alpha}{(\lambda+1)\,[(\lambda+3)-(\lambda+1)\cos^2\alpha]}$ බව පෙන්වන්න.

Q අංශුව C වෙත ළඟාවන විට තන්තුව හදිසියේම කැඩී යයි. P අංශුව කප්පිය වෙත ළඟ වී නොමැති බව උපකල්පනය කරමින්, තන්තුව කැඩීයාමෙන් මොහොතකට පසු, කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව P අංශුවේ ත්වරණයේ විශාලත්වය ලියා දක්වන්න.

12. අරය a වූ ද, ස්වකීය කේන්ද්‍රය වන O හි $\dfrac{5\pi}{6}$ කෝණයක් ආපාතනය කරන්නා වූ ද, වෘත්තාකාර චාපයක හැඩය ඇති සුමට සිහින් ACB බටයක්, OA තිරස්ව ද, බටයෙහි පහළම ලක්ෂ්‍යය වන C, අචල තිරස් පොළොවක් ස්පර්ශ කරමින් ද සිරස් තලයක, රූප සටහනෙහි පෙන්වා ඇති පරිදි සවිකර ඇත.



ස්කන්ධය m වූ සුමට P අංශුවක් $\sqrt{2ga}$ වේගයෙන් A කෙළවරේදී බටය තුළට සිරස්ව පහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබෙයි.

OP රේඛාව OA සමග $\theta\left(0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදන විට P අංශුවෙහි වේගය $\sqrt{2ga(1+\sin\theta)}$ බව ද, P අංශුව මත බටයෙන් ඇතිවන ප්‍රතික්‍රියාවෙහි විශාලත්වය $mg\,(2+3\sin\theta)$ බව ද පෙන්වන්න.

P අංශුව C ලක්ෂ්‍යය වෙත ළඟාවන විට, බටය තුළ C ලක්ෂ්‍යයෙහි නිසලව ඇති ස්කන්ධය m වූ සුමට Q නම් තවත් අංශුවක් හා ගැටෙයි. P හා Q අංශු අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\dfrac{1}{2}$ වෙයි.

ගැටුමට මොහොතකට පෙර P අංශුවෙහි වේගය සොයා, ගැටුමට මොහොතකට පසුව P හා Q අංශුවල වේග පිළිවෙළින් $\dfrac{1}{2}\sqrt{ga}$ හා $\dfrac{3}{2}\sqrt{ga}$ බව පෙන්වන්න.

P අංශුව කිසිවිටෙක බටය හැර නොයන බවත්, Q අංශුව $\frac{1}{2}\sqrt{5ga}$ වේගය සහිතව B කෙළවර වෙත එළඹෙන බවත් පෙන්වන්න.

Q අංශුව බටය හැරගිය පසු එය පොළොවෙහි සිට ළඟාවන උපරිම උස සොයන්න.

13. ස්වාභාවික දිග l වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරකට ස්කන්ධය m වූ P නම් අංශුවක් ඈඳ ඇත. තන්තුවෙහි අනෙක් කෙළවර තිරස් පොළොවක සිට $4l$ උසින් පිහිටි අචල O ලක්ෂ්‍යයකට සවිකර ඇත. P අංශුව සමතුලිතතාවෙන් එල්ලෙන විට තන්තුවේ විතතිය l වේ.

තන්තුවේ ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය mg බව පෙන්වන්න.

P අංශුව දැන් O හි තබා, $\sqrt{gl}$ ප්‍රවේගයෙන් සිරස්ව පහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබෙයි. P අංශුව l දුරක් වැටුණු විට එහි ප්‍රවේගය සොයන්න.

තන්තුවෙහි දිග $2l + x$ වන විට, P අංශුව සඳහා චලිත සමීකරණය ලියා දක්වා, සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0$ බව පෙන්වන්න ; මෙහි $-l \leq x \leq 2l$ වේ.

ඉහත සමීකරණයෙන්, $c\ (> 0)$ නියතයක් වන $\dot{x}^2 = \frac{g}{l}(c^2 - x^2)$ දෙනු ලැබේ යැයි උපකල්පනය කරමින්, c හි අගය සොයන්න.

P අංශුව පොළොවට එළඹෙන විට ක්ෂණික නිශ්චලතාවට පැමිණෙන බව පෙන්වා, O සිට පොළොවට එළඹීමට ගතවන කාලය

$\frac{1}{3}(3\sqrt{3} - 3 + 2\pi)\sqrt{\frac{l}{g}}$ බව පෙන්වන්න.

14. (a) **a** හා **b** දෛශික දෙකක් තිත් ගුණිතය වන $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ අර්ථ දක්වන්න.

a, **b**, **c** හා **d** ඕනෑම දෛශික හතරක් සඳහා $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{d}$ යැයි උපකල්පනය කරමින් $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2$ බව පෙන්වන්න.

$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2$ සඳහා අනුරූප ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වන්න.

$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2$ නම් $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින්, සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණ සමාන නම් එය සෘජුකෝණාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

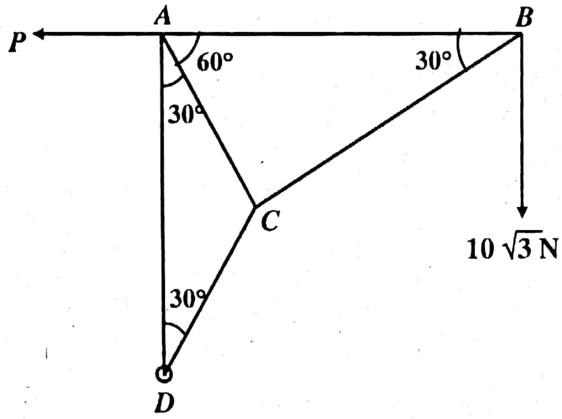
(b) A, B, C, D, E හා F යනු පැත්තක දිග මීටර $2a$ වන සවිධි ෂඩස්‍රයක වාමාවර්ත අතට ගන්නා ලද ශීර්ෂ වේ. විශාලත්ව නිව්ටන $P, 2P, 3P, 4P, 5P, L, M$ හා N වන බල පිළිවෙළින් $AB, CA, FC, DF, ED, BC, FA$ හා FE දිගේ, අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශා අතට ක්‍රියා කරයි.
පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ පවතී නම්, P ඇසුරෙන් L, M හා N සොයන්න.

15. (a) AB හා BC ඒකාකාර දඬු දෙකක් දිගින් සමාන වේ. AB හි බර $2w$ වන අතර BC හි බර w වේ. දඬු B හි දී සුමට ලෙස අසවු කර ඇති අතර දඬුවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කර ඇත. A හා C සුමට තිරස් මේසයක් මත සිටින සේ පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයෙහි සිටුවා ඇත.

$A\hat{B}C = 2\theta$ නම්, තන්තුවේ ආතතිය $\frac{3}{2}w\tan\theta$ බව පෙන්වන්න.

B හි දී ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා එය තිරස සමග සාදන කෝණය සොයන්න.

(b) AB, BC, CD, DA හා AC සැහැල්ලු දඬු පහක්, රූප සටහනෙහි පෙන්වා ඇති පරිදි රාමුකට්ටුවක් සෑදෙන ආකාරයට, ඒවායේ කෙළවරවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත.



$A\hat{B}C = A\hat{D}C = D\hat{A}C = 30°$ හා $B\hat{A}C = 60°$ වේ. රාමුකට්ටුව D හිදී සුමට ලෙස අසවු කර ඇති අතර, B හිදී නිව්වන $10\sqrt{3}$ ක බරක් දරයි. AB තිරස් වන පරිදි රාමුකට්ටුව සිරස් තලයක තබා ඇත්තේ A හිදී වූ නිව්වන P තිරස් බලයක් මගිනි.

(i) P හි අගය සොයන්න.

(ii) D හි ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

(iii) බෝ අංකනය භාවිතයෙන් රාමුකට්ටුව සඳහා ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් ඇඳ, ආතති හා තෙරපුම් වෙන්කොට දක්වමින් දඬු සියල්ලෙහි ප්‍රත්‍යාබල සොයන්න.

16. අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, එහි සමමිතික අක්ෂය මත අර්ධගෝලයේ ආධාරකයේ සිට $\frac{3}{8}$ a දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

ඒකාකාර ඝන අර්ධගෝලාකාර කවචයක අභ්‍යන්තර හා බාහිර අරයන් a හා b (> a) වේ. කේන්ද්‍රයේ සිට සමමිතික අක්ෂය දිගේ

එහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $\dfrac{3(a+b)(a^2+b^2)}{8(a^2+ab+b^2)}$ බව පෙන්වන්න.

ස්වකීය වක්‍ර පෘෂ්ඨය තිරස් රළු පොළොවක් හා සමාන ලෙස රළු සිරස් බිත්තියක් ස්පර්ශ වන පරිදි මෙම අර්ධගෝලාකාර කවචය සමතුලිතතාවේ පවතී.

සමතුලිතතාව සීමාකාරී නම්, තිරසට අධාරකයේ ආනතිය $sin^{-1}\left\{\dfrac{8\mu b(1+\mu)(a^2+ab+b^2)}{3(1+\mu^2)(a+b)\,(a^2+b^2)}\right\}$ බව පෙන්වන්න. ;

මෙහි μ යනු කවචය හා රළු පෘෂ්ඨ අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ.

17. (a) හිස වැටීමේ සම්භාවිතාව p වූ නැඹුරු කාසියකින් නිමල්, සුනිල් හා පියල් ක්‍රීඩාවක යෙදෙති. නිමල්, සුනිල් හා පියල් එම පටිපාටියට මෙම කාසිය උස දමති. අගය ලබාගත් පළමුවන තැනැත්තා ක්‍රීඩාව දිනයි.

නිමල් ඔහුගේ

(i) දෙවන වාරයේදී,

(ii) තෙවන වාරයේදී

ක්‍රීඩාව දිනීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

ඒ නයින් අවසානයේ දී, නිමල් ක්‍රීඩාව දිනීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

කාසියෙන් හිස වැටීමට වඩා අගය වැටීමට වැඩි භව්‍යතාවක් ඇත්නම්, නිමල්ට ක්‍රීඩාව දිනීම සඳහා 50% ට වඩා වැඩි ඉඩක් ඇති බව අපෝහනය කරන්න.

(b) $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ නිරීක්ෂණ කුලකයක මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් $\bar{x}$ හා S_x වේ. a හා b නියත වන $y_i = a + bx_i$ රේඛීය පරිමාණය යොදාගෙන, $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ නිරීක්ෂණ කුලකය $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ කුලකයකට පරිණාමනය කර ඇතැයි සිතමු.

$\overline{y} = a + b\overline{x}$ හා $s_y^2 = b^2 s_x^2$ බව පෙන්වන්න ; මෙහි $\overline{y}$ හා s_y යනු $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය වේ.

(i) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ නිරීක්ෂණ කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මිත අපගමනය සොයන්න.

ඒ නයින්,

(α) $\{2.01, 3.02, 4.03, 5.04, 6.05, 7.06, 8.07\}$ නිරීක්ෂණ කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය,

(β) මධ්‍යන්‍යය 5 හා සම්මත අපගමනය 6 වන අගය හතක්

සොයන්න.

(ii) ලුණු, මලුවල අසුරනු ලබන අතර නිෂ්පාදකයා ඒවා එක එකක 25 kg ක් ඇති බව සඳහන් කරයි. නියම බර නොදන්නා එවැනි මලු 80 ක් සඳහා පහත දැක්වෙන තොරතුරු දී ඇත.

$\sum_{i=1}^{80} (x_i - 25) = 27.2$ හා $\sum_{i=1}^{80} (x_i - 25)^2 = 85.1$; මෙහි x_i $(i = 1, 2, ..., 80)$ මගින් i වෙනි මල්ලේ නියම බර දැක්වේ.

සුදුසු රේඛීය පරිණාමනයක් යොදාගෙන හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ මලු අසූවෙහි නියම බරෙහි මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව සොයන්න.

*** ***

A - කොටස

01. $F(n) = n^3 + 5n$ යයි ගනිමු.

$n = 1$ විට $F(1) = 1^3 + 5 \times 1 = 6$ මෙය 3 න් බෙදේ.

$\therefore$ $n = 1$ විට ප්‍රකාශය සත්‍ය වේ.

$n = p$ විට ප්‍රකාශය සත්‍ය යයි උපකල්පනය කරමු.

මෙහි $p \in \mathbb{Z}^+$

එවිට $F(p) = p^3 + 5p$, 3 න් බෙදේ.

දැන් $n = p + 1$ විට

$$F(p+1) = (p+1)^3 + 5(p+1)$$
$$= (P^3 + 3p^2 + 3p + 1 + 5p + 5$$
$$= p^3 + 5p + 3(p^2 + p + 2)$$

F(p), 3 න් බෙදෙන බැවින් F(p+1) ද 3 න් බෙදේ.

එනම් $n = p$ ට ප්‍රකාශය සත්‍ය නම් $n = p + 1$ විට ද ප්‍රකාශය සත්‍ය වේ.

$\therefore$ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$n^3 + 5n$, 3 න් බෙදේ.//

02. (i) පුනරාවර්තයන්ට ඉඩ නැතිවිට

පළමු ස්ථානයට සංඛ්‍යාංකයක් තෝරාගත හැකි ආකාර ගණන = 2

අනෙක් ස්ථාන තුනට සංඛ්‍යාංක තෝරා ගත හැකි ආකාර ගණන $3 \times 2 \times 1 = 6$

පුනරාවර්තයන්ට ඉඩනැති විට සෑදිය හැකි සංඛ්‍යා ගණන $= 2 \times 6 = 12$//

(ii) පුනරාවර්තයන්ට ඉඩ ඇතිවිට

පළමු ස්ථානයට සංඛ්‍යාංකයක් තෝරා ගතහැකි විධිගණන = 2

අනෙක් ස්ථානවලට සංඛ්‍යාංක තෝරා ගත හැකි විධි ගණන $= 4 \times 4 \times 4 = 64$

පුනරාවාර්තයන්ට ඉඩ ඇතිවිට සෑදිය හැකි සංඛ්‍යා ගණන $= 2 \times 64$

$= 128$//

03. $$(1+\sqrt{3})^6 = {}^6c_0 + {}^6c_1\sqrt{3} + {}^6c_2(\sqrt{3})^2 + {}^6c_3(\sqrt{3})^3 + {}^6c_4(\sqrt{3})^4 + {}^6c_5(\sqrt{3})^5 + {}^6c_6(\sqrt{3})^6$$

$$(1+\sqrt{3})^6 = {}^6c_0 - {}^6c_1\sqrt{3} + {}^6c_2(\sqrt{3})^2 - {}^6c_3(\sqrt{3})^3 + {}^6c_4(\sqrt{3})^4 - {}^6c_5(\sqrt{3})^5 + {}^6c_6(\sqrt{3})^6$$

$$(1+\sqrt{3})^6 + (1-\sqrt{3})^6 = 2\left[{}^6c_0 + {}^6c_2(\sqrt{3})^2 + {}^6c_4(\sqrt{3})^4 + {}^6c_6(\sqrt{3})^6\right]$$
$$= 2[1 + 15 \times 3 + 15 \times 9 + 1 \times 27]$$
$$= 2 \times 208 = 416$$

දැන් $(1 + \sqrt{3})^6 = 416 - (1 - \sqrt{3})^6$

$-1 < 1 - \sqrt{3} < 0$ බැවින් $0 < (1 - \sqrt{3})^6 < 1$ වේ.

$\therefore$ $(1 + \sqrt{3})^6$ හි නිඛිල කොටස $= 415$//

04. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4 + 3\sin x} - \sqrt{4 - 3\sin x}}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4 + 3\sin x} - \sqrt{4 - 3\sin x}}{2x} \times \frac{\sqrt{4 + 3\sin x} + \sqrt{4 - 3\sin x}}{\sqrt{4 + 3\sin x} + \sqrt{4 - 3\sin x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4 + 3\sin x - (4 - 3\sin x)}{2x(\sqrt{4 + 3\sin x} + \sqrt{4 - 3\sin x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{6\sin x}{2x(\sqrt{4 + 3\sin x} + \sqrt{4 - 3\sin x}}$$

$$= 3\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{4 + 3\sin x} + \sqrt{4 - 3\sin x}}$$

$$= 3 \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{4}}$$

$$= \frac{3}{4}$$//

05. $$\frac{d}{dx}\{e^{2x}(A\sin 3x + B\cos 3x)\}$$

$$= e^{2x}(3A\cos 3x - 3B\sin 3x) + (A\sin 3x + B\cos 3x).2e^{2x}$$

$$= e^{2x}\{(2A - 3B)\sin 3x + (2B + 3A)\cos 3x\}$$

$= 13\, e^{2x} \sin 3x$ වන්නේ නම්

$2A - 3B = 13$ හා $2B + 3A = 0$ වේ.

එනම් $A = 2$ හා $B = -3$ නම් පමණි.

එනයින් $\int e^{2x} \sin 3x = e^{2x}\left(\frac{2}{13}\sin 3x - \frac{3}{13}\cos 3x\right) + C$

මෙහි C අභිමත නියතයකි.//

06. $3y + 2x + 5 = 0$ සරල රේඛාවට සමාන්තර ඕනෑම සරල රේඛාවක සමීකරණය $3y + 2x + c = 0$ ආකාර වේ.

මෙහි c නිර්ණය කළයුතු නියතයකි.

දැන් (2, 3) හා (-1, 2) ලක්ෂ්‍ය යා කර රේඛාව 3 : 2 අනුපාතයට බාහිරව බෙදන ලක්ෂ්‍යය (x_0, y_0) නම්

$$x_0 = \frac{3x(-1) + (-2) \times 2}{3 - 2} = -7$$

$$y_0 = \frac{3 \times 2 + (-2) \times 3}{3 - 2} = 0 \text{ වේ.}$$

අවශ්‍ය රේඛාව (-7, 0) හරහා යන බැවින්

$3 \times 0 + 2 \times (-7) + c = 0 \Rightarrow c = 14$

$\therefore$ අවශ්‍ය රේඛාවේ සමීකරණය

$3y + 2x + 14 = 0$ වේ.//

07. $x = 3t$, $y = \frac{3}{t}$

$$\frac{dx}{dt} = 3, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{-3}{t^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{-3}{t^2} \times \frac{1}{3} = \frac{-1}{t^2}$$

$\therefore (3t, \frac{1}{3})$ හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය

$$\frac{y-\frac{3}{t}}{x-3t} = \frac{-1}{t^2} \quad \text{වේ.}$$

$\Rightarrow x - 3t = -t^2\left(y - \frac{3}{t}\right)$

$\Rightarrow x + t^2 y = 6t$ වේ.

මෙම ස්පර්ශකය $A \equiv (6t, 0)$ හා $B \equiv (0, \frac{6}{t})$ හිදී x හා y අක්ෂ ඡේදනය කරයි.
එවිට AOB ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times 6t \times \frac{6}{t} = 18$ වර්ග ඒකක
$\therefore$ t විචලනය වූවද ලැබෙන ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය නියතයකි.

08. අවශ්‍ය වෘත්ත වල කෝණ y අක්ෂය මත බැවින් කෝණයේ ඛණ්ඩාංක (0, b) ආකාර ගනී. එම වෘත්ත $x + y + 1 = 0$ රේඛාව ස්පර්ශකරන අරය $\sqrt{2}$ වූ ඒවා බැවින්

$$\frac{|b+1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \text{වේ.}$$

$\Rightarrow \quad b + 1 = \pm 2$

$\Rightarrow \quad b = 1$ හෝ -3

$\therefore$ අවශ්‍ය වෘත්ත දෙකේ සමීකරණ

$x^2 + (y-1)^2 = 2$ හා

$x^2 + (y+3)^2 = 2$ වේ.

09. $P \equiv (\bar{x}, \bar{y})$ යයි සිතමු.
P සිට $x^2 + y^2 - 12x = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග $= \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 12\bar{x}}$ හා
P සිට $x^2 + y^2 - 9 = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග $= \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 9}$ වේ.

එවිට $\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 12\bar{x}} = 2\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 9}$ බැවින්

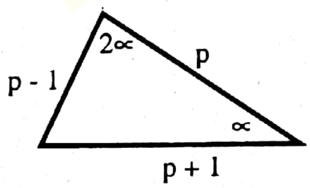
$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 12\bar{x} = 4(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 9)$

$\Rightarrow 3\bar{x}^2 + 3\bar{y}^2 + 12\bar{x} - 36 = 0$

$\Rightarrow \quad \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 4\bar{x} - 12 = 0$

එබැවින් P ලක්ෂ්‍යය $x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටයි.

10. ත්‍රිකෝණයට සයින් නීතිය යෙදීමෙන්



$$\frac{\sin 2\alpha}{P+1} = \frac{\sin \alpha}{P-1}$$

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{P+1} = \frac{\sin\alpha}{P-1}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{P+1}{2(P-1)}$$

කෝ සයින් නියමයෙන්

$$\cos\alpha = \frac{(P+1)^2 + P^2 - (P-1)^2}{2P(P+1)} = \frac{P^2 + 4P}{2P(P+1)} = \frac{P+4}{2(P+1)}$$

එබැවින් $\frac{P+1}{2(P-1)} = \frac{P+4}{2(P+1)}$

$\Rightarrow (P+1)^2 = (P+4)(P-1)$

$\Rightarrow P^2 + 2P + 1 = P^2 + 3P - 4$

$\Rightarrow P = 5$ //

11. (i) (a) $ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$ හි මූල α හා β නම්

$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ —① $\quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$ —②

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

$= \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$

$\therefore (\alpha - \beta) = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$

$b^2 - 4ac \geq 0$ ම නම් පමණක් $\alpha - \beta = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$ තාත්ත්වික වේ. —③

එනම් $b^2 - 4ac \geq 0$ ම නම් පමණක් ① හා ③ අනුව දී ඇති සමීකරණයේ මූල වන $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ හා $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ දෙකම තාත්ත්වික වේ.

(ii) $b = 0$ හා $ac > 0$ ම නම් පමණක්

$\alpha - \beta = \pm \frac{\sqrt{-4ac}}{a} = \pm \frac{\sqrt{4ac}}{a} i = \pm pi$ හුදෙක් අතාත්ත්වික වේ.

(මෙහි $P = \frac{\sqrt{4ac}}{a}$ තාත්ත්වික වේ.)

තවද $\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 0$ බැවින්

$b = 0$ හා $ac > 0$ ම. නම් පමණක්
α හා β දෙකම හුදෙක් අතාත්ත්වික වේ.
α^2 හා β^2 මූල වූ වර්ගජ සමීකරණය
$x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0$ ලෙස ලිවිය හැක.
එවිට $x^2 - [(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta]x + (\alpha\beta)^2 = 0$ වේ.

එනම් ; $x^2 - \left[\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}\right]x + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 0$

එනම් ; $a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0$ //

α හා β යනු $ax^2 + bx + c = 0$ හි මූල වනවිට α හා β දෙකම

(i) $b^2 - 4ac \geq 0$ ම නම් පමණක් තාත්ත්වික ද
(ii) $ac > 0$ හා $b = 0$ ම නම් පමණක් හුදෙක් අතාත්වික ද
(iii) $b^2 - 4ac < 0$ ම නම් පමණක් සංකීර්ණ ද වේ.

α හා β දෙකම සංකීර්ණ නම් α^2 හා β^2 දෙකම තාත්ත්වික විය නොහැක.
එනම් එක්කෝ α හා β දෙකම තත්ත්වික නැත්නම් දෙකම හුදෙක් අතාත්ත්වික ම නම් පමණක්
α^2 හා β^2 දෙකම එනම් ඉහත සමීකරණයේ මූල දෙකම තාත්ත්වික වේ.

(b) $f(a+b) = (a+b)^3 - 3ab(a+b) - (a^3+b^3) = 0$

$\therefore$ $(x - a - b)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයකි.

$$
\begin{array}{r l}
 & x^2 + (a+b)x + (a^2+b^2-ab) \\
(x-a-b) & \overline{\big)\, x^3 - 3abx - (a^3+b^3)} \\
 & \underline{x^3 - (a+b)x^2} \\
 & (a+b)x^2 - 3abx - (a^3+b^3) \\
 & \underline{(a+b)x^2 - (a+b)^2 x} \\
 & (a^2+b^2-ab)x - (a^3+b^3) \\
 & \underline{(a^2+b^2-ab)x - (a^3+b^3)} \\
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore f(x) \equiv x^3 - 3abx - (a^3+b^3) \equiv (x-a-b)\{x^2 + (a+b)x + a^2 + b^2 - ab\}$

$f(x) = 0$ ට එක් තාත්ත්වික මූලයක් පමණක් ඇත්නම්

$x^2 + (a+b)x + a^2 + b^2 - ab = 0$ හි මූල තාත්ත්වික නොවිය යුතුය.

එවිට $(a+b)^2 - 4(a^2+b^2-ab) < 0$

$\Rightarrow (a+b)^2 - 4((a+b)^2 - 3ab) < 0$

$\Rightarrow -3(a+b)^2 + 12ab < 0$

$\Rightarrow 3(a+b)^2 - 12ab > 0$

$\Rightarrow (a+b)^2 - 4ab > 0$

$\Rightarrow (a-b)^2 > 0$

$\Rightarrow$ a හා b ප්‍රභින්න විය යුතුය.

$ab = 3$ හා $a^3 + b^3 = 12$ නම් $x^3 - 9x - 12 = x^3 - 3abx - (a^3+b^3)$ වේ.

එනම් $a^3 + (\frac{3}{a})^3 = 12$ නම් $x^3 - 9x - 12 = x^3 - 3abx - (a^3+b^3)$ වේ.

එනම් $a^6 - 12a^3 + 27 = 0$ නම් $x^3 - 9x - 12 = x^3 - 3abx - (a^3+b^3)$ වේ.

එනම් $(a^3 - 9)(a^3 - 3) = 0$ නම් $x^3 - 9x - 12 = x^3 - 3abx - (a^3+b^3)$ වේ.

එනම් $a = 3^{\frac{2}{3}}$ හා $b = 3^{\frac{1}{3}}$ නම් $x^3 - 9x - 12 = x^3 - 3abx - (a^3+b^3)$ වේ.

එනම් $a = 3^{\frac{2}{3}}$ හා $b = 3^{\frac{1}{3}}$ නම් $x^3 - 9x - 12 = 0,$
$= x^3 - 3abx - (a^3+b^3) = 0$
ලෙස ලිවිය හැක.

$3^{\frac{2}{3}}$ හා $3^{\frac{1}{3}}$ ප්‍රභින්න බැවින් ඉහත ලබාගත් ප්‍රතිඵලය අනුව $x^3 - 9x - 12 = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් ඇත.
එම තාත්ත්වික මූලය වන්නේ $3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$ වේ.//

12. $U_r = \dfrac{1}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$

$\Rightarrow U_{r+1} = \dfrac{1}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)}$

$\dfrac{U_{r+1}}{U_r} = \dfrac{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)} = \dfrac{2r-1}{2r+5}$

එනම් $(2r-1)U_r = (2r+5)U_{r+1}$
$= (2r+1)U_{r+1} + 4U_{r+1}$

එනම් $(2r-1)U_r - (2r+1)U_{r+1} = 4U_{r+1} \quad \forall r \in \mathbb{Z}^+$

$4U_1 = 5U_1 - U_1$

$r = 1$ විට $4U_2 = U_1 - 3U_1$

$r = 2$ විට $4U_3 = 3U_2 - 5U_3$

....

....

$r = n-2$ විට $4U_{n-1} = (2n-5)U_{n-2} - (2n-3)U_{n-1}$

$r = n-1$ විට $4U_n = (2n-3)U_{n-1} - (2n-1)U_n$

$$4\sum_{r=1}^{n} U_r = 5U_1 - (2n-1)U_n$$

$$= 5 \times \frac{1}{1 \times 3 \times 5} - (2n-1) \times \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{12} - \frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$$

ඔව් $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී වේ.

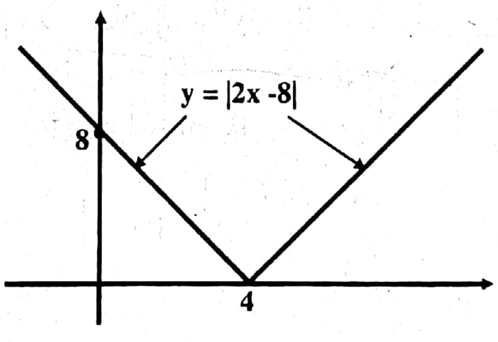
$$\sum_{r=1}^{\infty} U_r = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{12} - \frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}\right\}$$

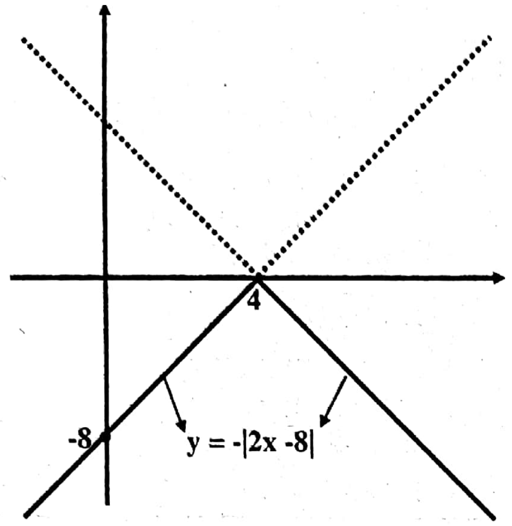
$$= \frac{1}{12} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2(2+\frac{1}{n})(2+\frac{3}{n})}$$

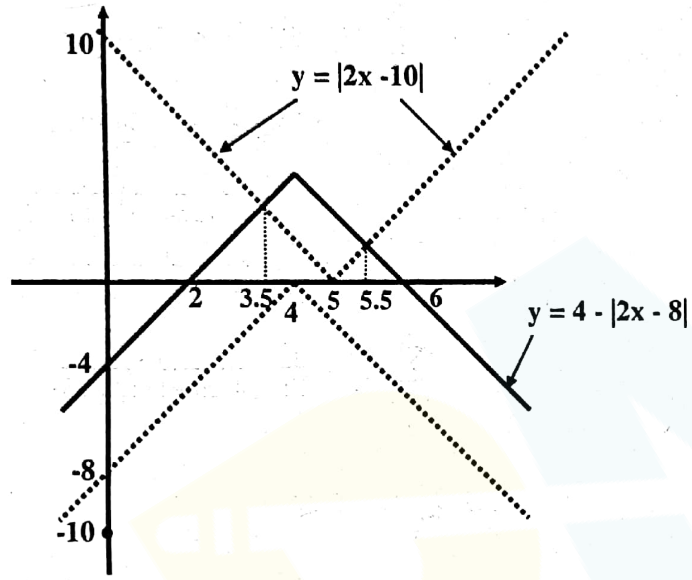
$$= \frac{1}{12}$$

$\therefore$ $n \to \infty$ විට ශ්‍රේණිය පරිමිත අගයක් කරා එළඹෙන බැවින් ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ.

(b)







$3.5 \le x \le 5.5$ වන විට $y = 4 - |2x - 8|$
ප්‍රස්තාරය $y = |2x - 10|$ හි ප්‍රස්තාරයට ඉහළින් පිහිටයි. නැතහොත් ඡේදනය වන බව ප්‍රස්තාර අනුව පැහැදිලි වේ.

එබැවින් $3.5 \le x \le 5.5$ වන විට
$|2x - 10| \le 4 - |2x - 8|$

එනම් $3.5 \le x \le 5.5$ වන විට
$|2x - 10| + |2x - 8| \le 4$ වේ. //

13. (a) $A(\lambda A + \mu I) = I$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

එනම් $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\lambda + \mu & \lambda \\ -\lambda & 3\lambda + \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

එනම් $\begin{pmatrix} 3\lambda + 2\mu & 5\lambda + \mu \\ -5\lambda - \mu & 8\lambda + 3\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$3\lambda + 2\mu = 1$, $5\lambda + \mu = 0$ හා $8\lambda + 3\mu = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{-1}{7}$ හා

$\mu = \frac{5}{7}$ වේ.

$$A^{-1} = A^{-1} A(\lambda A + \mu I) = \lambda A + \mu I$$

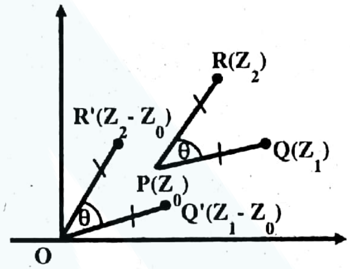
$$= \begin{pmatrix} 2\lambda + \mu & \lambda \\ -\lambda & 3\lambda + \mu \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-2}{7} + \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{-3}{7} + \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} //$$

(b)

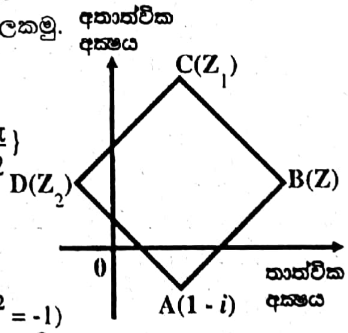


ආගන් සටහනේ O මූලය හරහා, PQ ට සමානව හා සමාන්තරව OQ' ඇන්ද විට Q' ලක්ෂ්‍යයෙන් $(Z_1 - Z_0)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව දැක්වේ. එසේම PR ට සමානව හා සමාන්තරව OR' ඇන්ද විට R' මගින් $(Z_2 - Z_0)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව දැක්වේ.

තවද $Q'OR' \measuredangle \theta$ වන බැවින්
OQ' රේඛා ඛණ්ඩය θ කෝණයකින් වාමාවර්තව භ්‍රමණය කිරීමෙන් OR' පිහිටීමට පැමිණෙන බැවින් R' ලක්ෂ්‍යයෙන්,
$(Z_1 - Z_0)(\cos\theta + i\sin\theta)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපනය කෙරේ.

එබැවින් $Z_2 - Z_0 = (Z_1 - Z_0)(\cos\theta + i\sin\theta)$ වේ.

A, B, හා D ලක්ෂ්‍ය තුන සලකමු.



ඉහත ප්‍රතිඵල යෙදීමෙන්
$Z_2 - (1 - i) =$
$\{Z - (1 - i)\}\{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\}$
ලැබේ.
එනම්
$Z_2 = i\{Z - (1 - i)\} + 1 - i$
$Z_2 = iZ - 2i = i(Z - 2)$ $(\because i^2 = -1)$

C, D හා B ලක්ෂ්‍ය තුන සලකමු.
ඉහත ප්‍රතිඵලය නැවත යෙදීමෙන්

$Z - Z_1 = \{i(Z - 2) - Z_1\}\{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\}$ ලැබේ.

එනම් $Z - Z_1 = i\{i(Z - 2) - Z_1\} = -(Z - 2) - iZ_1$

එනම් $Z_1 = (1 - i) = 2Z - 2$

එනම් $Z_1 = \frac{2(z-1)}{1-i} = \frac{2(Z-1)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+i)(Z-1)}{2} = (1+i)(z-1)$

$Z = (x+iy)$ නම්

$AC = |Z_1 - (1-i)| = |(1+i)(Z-1)-(1-i)| = |(1+i)Z-2|$

$= |(x-y-2)+i(x+y)|$

AC = 2 බැවින් $(x-y-2)^2+(x+y)^2 = 4$ වේ.

එනම් $x^2+y^2-4x+4y+4+x^2+y^2 = 4$

එනම් $x^2+y^2-2x+2y = 0$

එවිට B හි පථය $(x-1)^2+(y+1)^2 = 2$ වේ.

14. (a) $f(x) = 2x^3+ax^2+bx$

$f'(x) = 6x^2+2ax+b$ හා $f''(x) = 12x+2a$ වේ.

$f'(3) = 12$ හා $f''(3) = 18$ බැවින්

$54+6a+b = 12$ හා $36+2a = 18$ ලැබේ.

එබැවින්, $a = -9$ හා $b = 12$ වේ.

එවිට $f(x) = 2x^3-9x^2+12x$ වන අතර

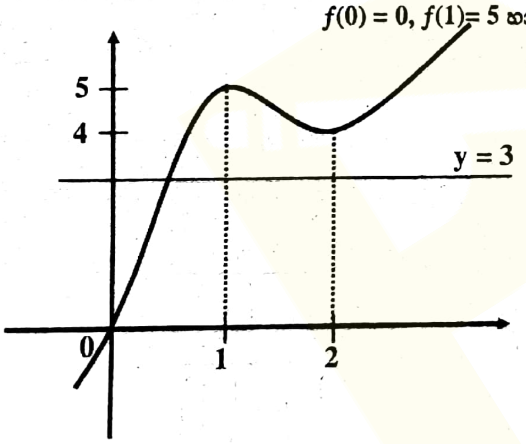
වර්තන ලක්ෂ්‍ය වලදී

$f'(x) = 6x^2-18x+12 = 6(x-1)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = 1$ හා $x = 2$ වේ. //

	$x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(+)	(-)	(+)
	$f(x)$ වැඩි වේ.	$f(x)$ අඩු වේ.	$f(x)$ වැඩි වේ.

$f(0) = 0$, $f(1) = 5$ හා $f(2) = 4$ වේ.

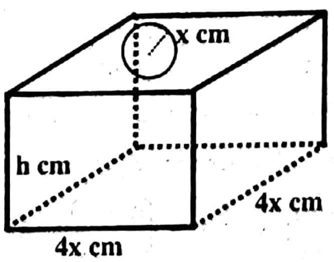


$2x^2+ax+b = \frac{3}{x} \Leftrightarrow f(x) = 3$

$2x^2+ax+b = \frac{3}{x}$ හි විසඳුම් ගණන, $y = f(x)$ වක්‍රයේ හා $y = 3$ රේඛාවේ ඡේදන ලක්ෂ්‍ය ගණන වේ.

ඉහත ප්‍රස්තාරයට අනුව ඡේදන ලක්ෂ්‍ය එකක් පමණක් ඇති බැවින් දී ඇති සමීකරණයට එක් විසඳුමක් පමණක් ඇත.

(b)



පෙට්ටියේ උස h cm යැයි ගනිමු.

$A = (2\times 16x^2 + 4\times 4xh) - \pi x^2$

පෙට්ටියේ පරිමාව වන $16x^2h$ යන්න 8192 ට සමාන වේ.

එබැවින්

$16x^2h = 8192 \Rightarrow 16h = \frac{8192}{x^2}$

එවිට

$A = (32-\pi)x^2 + \frac{8192}{x}$

$\frac{dA}{dx} = 2(32-\pi)x - \frac{8192}{x^2}$

$\therefore \frac{dA}{dx} = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{4096}{(32-\pi)} = \frac{(16)^3}{(32-\pi)} \Leftrightarrow x = \frac{16}{\sqrt[3]{(32-\pi)}}$

$x < \frac{16}{\sqrt[3]{(32-\pi)}}$ විට $\frac{dA}{dx} <$ වන අතර $x > \frac{16}{\sqrt[3]{(32-\pi)}}$

විට $\frac{dA}{dx} > 0$ වේ.

එබැවින් $x = \frac{16}{\sqrt[3]{(32-\pi)}}$ විට A අවම වේ.

15. (a) $\int_1^e x^{\frac{3}{2}} \ell n\, x\, dx$

$= \int_1^e \ell n\, x \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right) dx$

$= \left(\frac{2}{5}\ell n\, x\, x^{\frac{5}{2}}\right)_1^e - \frac{2}{5}\int_1^e x^{\frac{5}{2}} \frac{d}{dx}(\ell n\, x)\, dx$

$= \frac{2}{5}\left(\ell n\, e.e^{\frac{5}{2}} - \ell n\, 1.1^{\frac{5}{2}}\right) - \frac{2}{5}\int_1^e x^{\frac{5}{2}}.\frac{1}{x}\, dx$

$= \frac{2}{5}(e^{\frac{5}{2}} - 0) - \frac{2}{5}\int_1^e x^{\frac{3}{2}} dx$ $(\because \ell n\, e = 1$ හා $\ell n\, 1 = 0)$

$= \frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)_1^e$

$= \frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}} - \left(\frac{2}{5}\right)^2\left(e^{\frac{5}{2}} - 1^{\frac{5}{2}}\right)$

$= \frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}}\left(1-\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^2$

$= \frac{6}{25}e^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{25}$ //

(b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

$= \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\sin 2x = 2\cos x \sin x = \frac{2\cos x\, \sin x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

$= \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{2t}{1+t^2}$

$t = \tan x \Rightarrow \dfrac{dt}{dx} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2$

එබැවින් $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2}$ වේ.

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{4\cos 2x + 3\sin 2x + 5}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\frac{4(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{6t+5)}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{\cancel{(1+t^2)}}{(t^2+6t+9)} \frac{dt}{\cancel{(1+t^2)}}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(t+3)^2} dt = \left(-\frac{1}{(t+3)}\right)_0^1$$

$$= \frac{-1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12} //$$

(c) $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{A}{(x-a)} + \dfrac{B}{(x-b)}$ $x \neq a, x \neq b$ විට

$= A(x-b) + B(x-a)$

අනුරූප සංගුණක සැමයීමෙන් $A+B=0$ හා $bA+aB=1$

$\Rightarrow A = \dfrac{1}{a-b}, B = \dfrac{1}{b-a}$

එබැවින් $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{1}{(a-b)(x-a)} - \dfrac{1}{(a-b)(x-b)}$ —— ①

① හි x, a, b පිළිවෙළින් x^2, $-a^2$ හා $-b^2$ මගින් ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන්

$$\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{1}{(-a^2+b^2)(x^2+a^2)} - \frac{1}{(-a^2+b^2)(x^2+b^2)}$$

$$\therefore \int \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx = \frac{1}{(b^2-a^2)} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)} + \frac{1}{(a^2-b^2)} \int \frac{dx}{(x^2+b^2)}$$

$$= \frac{1}{(b^2-a^2)} \left\{ \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} - \frac{1}{b} \tan^{-1} \frac{x}{b} \right\} + c \qquad a \neq b$$

මෙහි c අභිමත නියතයකි.

$a = 0$ නම් $b \neq 0$ වේ.

එවිට $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2+b^2)} dx = \frac{1}{b^2} \int \frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{b^2} \int \frac{1}{(x^2+b^2)} dx$

$$= -\frac{1}{b^2 x} - \frac{1}{b^3} \tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right) + c$$

මෙහි c අභිමත නියතයකි.

$b = 0$ නම් $a \neq 0$ වේ.

එවිට ඉහත පරිදි

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+a^2)} = -\frac{1}{a^2 x} - \frac{1}{a^3} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

මෙහි c අභිමත නියතයකි.//

16. (a) මූලය හරහා යන ඕනෑම රේඛාවක සමීකරණය $y = kx$ ලෙස ලිවිය හැක.

මෙම රේඛාව $\ell x + my + 1 = 0$ සරල රේඛාව සමග ඡේදනය වන විට

$\ell x + m(kx) + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1}{\ell + mk}$ වේ.

එවිට $y = -\dfrac{k}{\ell + mk}$ වේ.

එනම් රේඛා දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය

$$\equiv \left(\frac{-1}{\ell + mk}, \frac{-k}{\ell + mk}\right) \text{ වේ.}$$

මූල ලක්ෂ්‍යයේ සිට ඉහත ඡේදන ලක්ෂ්‍යයට ඇතිදුර

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{\ell + mk}\right)^2 + \left(\frac{k}{\ell + mk}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+k^2}{(\ell + mk)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+k^2}}{|\ell + mk|}$$

මූලයේ සිට $y = kx$ ට ලම්බගතව ඇඳි රේඛාවේ අනුක්‍රමණය $= -\dfrac{1}{k}$ බැවින් මූලයේ සිට එම රේඛාවේ හා $\ell x + my + 1 = 0$ රේඛාවේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යයට

$$\text{ඇති දුර} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{-1}{k}\right)^2}}{\left|\ell + m\left(\frac{-1}{k}\right)\right|} \text{ වේ.}$$

$$\text{එනම්} = \frac{\sqrt{k^2+1}}{|\ell k - m|} \text{ වේ.}$$

සෑදෙන ත්‍රිකෝණය සමද්විපාද වන බැවින්

$$\frac{\sqrt{1+k^2}}{|\ell + mk|} = \frac{\sqrt{k^2+1}}{|k\ell - m|}$$

එබැවින් $\ell + mk = \pm(k\ell - m)$

එනම් $k = \dfrac{\ell + m}{\ell - m}$ හෝ $k = \dfrac{m - \ell}{\ell + m}$ වේ.

මේවා එකිනෙකට ⊥ රේඛාවලට අදාල k අගය වේ.

∴ අදාළ සරල රේඛා දෙකේ සමීකරණ

$$y = \left(\frac{\ell + m}{\ell - m}\right) x \text{ හා } y = \left(\frac{m - \ell}{\ell + m}\right) x \text{ වේ.}$$

එනම්

$(\ell - m)x + (\ell + m)y = 0$ හා

$(\ell + m)x - (\ell - m)y = 0$ වේ.

(b) $S = 0$ හා $S' = 0$ වෘත්ත දෙකේ ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන ජ්‍යාය $S - S' = 0$ මගින් ලැබේ.

එනම් $2(g - g')x + 2(f - f')y + c - c' = 0$ වේ.

$S' = 0$ මගින් $S = 0$ හි විශ්කම්භයක දෙකෙලෙවරදී කපයි නම් $S = 0$ හි කේන්ද්‍රය වන $(-g, -f)$ ලක්ෂ්‍ය ඉහත ජ්‍යාය මත පිහිටයි.

එබැවින් $2(g - g')(-g) + 2(f - f')(-f) + c - c' = 0$

එනම්, $2g^2 + 2f^2 - c = 2gg' + 2ff' - c'$ වේ. //

විචල්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ යයි ගනිමු.

$S = 0$ වෘත්තය $S_1 = 0$ වෘත්තය $S_1 = 0$ හි විශ්කම්භයක දෙකෙලවරදී ඡේදනය කරන බැවින්

$-(-25) = -c \Rightarrow c = -25$

$S = 0$ වෘත්තය, $S = 0$ වෘත්තය $S_2 = 0$ හි විශ්කම්භයක දෙකෙලවරදී ඡේදනය කරයි නම්

$2(-1)^2 + 2(-2)^2 - (-11) = -2g - 4f - c$ විය යුතුය.

එනම් $2g + 4f = -c - 21$ වේ.

c සඳහා ආදේශයෙන් $g + 2f = 2$ ලැබේ.

එනම් $-g + 2(-f) = -2$

එබැවින්, විචල්‍ය වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය වන $(-g, -f)$

$x + 2y + 2 = 0$ රේඛාව මත පිහිටයි.

17. (a) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\Rightarrow (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^3 = 1$

$\Rightarrow \cos^6\theta + 3\cos^4\theta\sin^2\theta + 3\cos^2\theta\sin^4\theta + \sin^6\theta = 1$

එනම්

$\cos^6\theta + 3\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \sin^6\theta = 1$

එනම්

$\cos^6\theta + \frac{3}{4}(2\cos\theta\sin\theta)^2 + 3\sin^6\theta = 1$

එනම් $\cos^6\theta + \sin^6\theta = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\theta$

එනම් $\cos^6\theta + \sin^6\theta = 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos 4\theta)$

එනම් $\cos^6\theta + \sin^6\theta = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4\theta$

එබැවින් $\cos^6\theta + \sin^6\theta = a + b\cos 4\theta$ වේ.

මෙහි $a = \frac{5}{8}$ හා $b = \frac{3}{8}$ වේ. //

$y = 8(\cos^6 x + \sin^6 x) \quad = 8\left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x\right)$

$= 5 + 3\cos 4x$

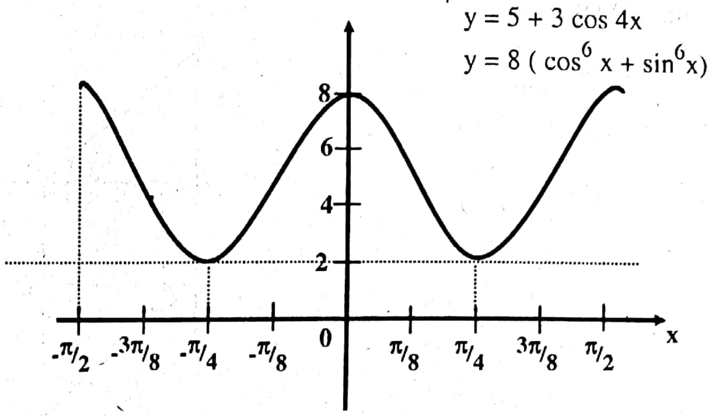
$|x| < \pi/2$ පරාසය තුළ $y = 8(\cos^6 x + \sin^6 x)$ හි ප්‍රස්තාරය $y = 5 + 3\cos 4x$ හි ප්‍රස්තාරයම වේ.

x	$-\pi/2$	$-\pi/4$	$-\pi/8$	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/2$
$5 + 3\cos 4x$	8	2	5	8	5	2	8

$\cos 4x = 1$ විට y උපරිම වේ.

එනම් $y_{උපරිම} = 8$

$\cos 4x = -1$ විට y අවම වේ. $y_{අවම} = 2$



(iii) $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin 4x$

නමුත් $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$ බැවින්

$\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin 4x$

$\frac{3}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\sin 4x = \frac{5}{4} - \frac{5}{8}$

එනම් $3\cos 4x - 4\sin 4x = 5$

$\frac{3}{5}\cos 4x - \frac{4}{5}\sin 4x = 1$

එනම් $\cos\alpha\cos 4x - \sin\alpha\sin 4x = 1$

මෙහි $\cos\alpha = 3/5$ හා $\sin\alpha = 4/5$ වේ.

එවිට $\cos(4x + \alpha) = 1$

එනම් $4x + \alpha = 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

එනම් $x = \frac{n\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}$ වේ.

මෙහි $n \in \mathbb{Z}$ වේ.

(b) $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{x - 1}{x - 2}\right)$ හා

$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{x + 1}{x + 2}\right)$ යයි ගනිමු.

එවිට $\tan\alpha = \frac{x - 1}{x - 2}$ හා $\tan\beta = \frac{x + 1}{x + 2}$

හා $\alpha + \beta = \pi/4$ වේ.

$\alpha + \beta = \pi/4 \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = 1$

එනම් $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = 1$

එනම් $\frac{\frac{x - 1}{x - 2} + \frac{x + 1}{x + 2}}{1 - \frac{(x - 1)}{(x - 2)} \cdot \frac{(x + 1)}{(x + 2)}} = 1$

$\frac{(x - 1)(x + 2) + (x + 1)(x - 2)}{(x - 2)(x + 2) - (x - 1)(x + 1)} = 1$

$\frac{2(x^2 - 2)}{-3} = 1$

$\Rightarrow 2x^2 = 1$

$\Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ //

*** ***

A - කොටස

01. OAB ත්‍රිකෝණයෙන්

$$\tan\theta = \frac{OA}{OB} \Rightarrow g = \frac{2u}{T} \Rightarrow gT = 2u$$

CDE ත්‍රිකෝණයෙන්

$$\tan\theta = \frac{DE}{CD}$$

$$g = \frac{-u-v}{T}$$

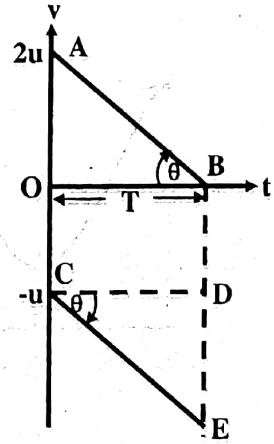
$$gT = -u-v$$

$$2u = -u-v$$

$$v = -3u$$

Q අංශුවෙහි ප්‍රවේගය = $\downarrow 3u$

(මෙහි T යනු P අංශුව උපරිම උසට එළඹි කාලයයි.)



02. තන්තුව අවිතන්‍ය බැවින් එහි දිග ℓ නම් (ℓ නියතයකි.) එවිට $x + 2y + k = \ell$ වේ. මෙහි k යනු කප්පි සමඟ ස්පර්ශ වූ තන්තු කොටස්වල දිග වේ.

t විෂයයේ දෙවරක් අවකලනයෙන්

$$\ddot{x} + 2\ddot{y} = 0 \quad \text{①}$$

$$\underline{F} = m\underline{a}$$

P අංශුවට ↓ යෙදීමෙන්

$$2mg - T = 2m\ddot{x} \quad \text{②}$$

Q කප්පියට ↓ යෙදීමෙන්

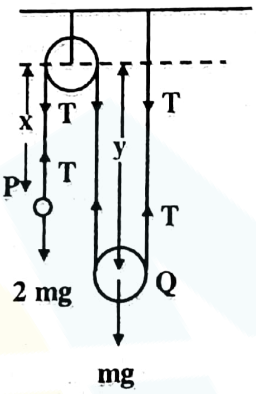
$$mg - 2T = m\ddot{y} \quad \text{③}$$

② හා ③ න් $\ddot{x}$ සහ $\ddot{y}$ උක්ත කර ① හි ආදේශ කිරීමෙන්

$$\frac{2mg - T}{2m} + \frac{2(mg - 2T)}{m} = 0$$

$$g - \frac{T}{2m} + 2g - \frac{4T}{m} = 0$$

$$3g = \frac{T}{2m}(1+8) \Rightarrow T = \frac{6mg}{9} = \frac{2}{3}mg$$



03. ජවය H W ද, වේගය $V\ ms^{-1}$ ද බැවින් ප්‍රකර්ෂණ බලය P නම්

$$P = \frac{H}{V}$$

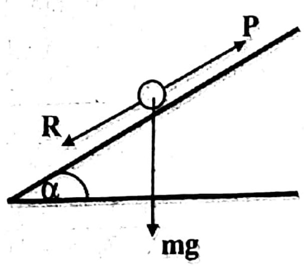
$\underline{F} = m\underline{a}$ ↗ යෙදීමෙන්

$$P - R - mg\sin\alpha = M \times 0$$

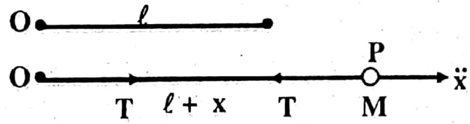
$$\frac{H}{V} - R - Mg\sin\alpha = 0$$

$$\frac{H}{V} = R + Mg\sin\alpha$$

$$H = (R + Mg\sin\alpha)V$$



04.



හුක්ගේ නියමයෙන් $T = \frac{\lambda x}{\ell}$

P ගේ චලිතය සලකා F = ma යෙදීමෙන් →

$$-T = m\ddot{x} \Rightarrow \frac{-\lambda x}{\ell} = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{-\lambda}{m\ell}x$$

මෙය ලාක්ෂණික සමීකරණයයි. ∴ P අංශුව සරල අනුවර්තී චලිතයේ යෙදෙයි.

දුන්නක් බැවින් දෝලන කාලාවර්තය $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\lambda}{m\ell}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell}{\lambda}}$

05. දත්තයට අනුව

$OA = -2p + 5q,\ OB = 7p - q,\ OC = p + 3q$

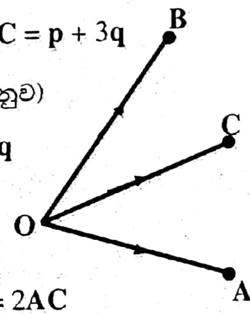
$AC = AO + OC$ (Δ නියමයට අනුව)

$= 2p - 5q + p + 3q = 3p - 2q$

$CB = CO + OB$

$= -p - 3q + 7p - q = 6p - 4q$

$= 2(3p - 2q) = 2AC$



∴ CB = 2AC බැවින් A, C, B ඒක රේඛීය වේ.

CB = 2AC වන අතර $\frac{AC}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC : CB = 1 : 2$

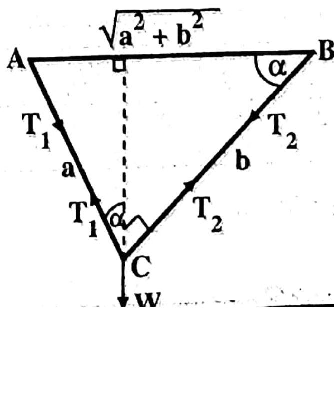
06. W භාරයේ සමතුලිතතාවය සලකා ලාමීගේ ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

$$\frac{T_1}{\sin(90+\alpha)} = \frac{W}{\sin 90} = \frac{T_2}{\sin(180-\alpha)}$$

$$\frac{T_1}{\cos\alpha} = W = \frac{T_2}{\sin\alpha}$$

$T_1 = W\cos\alpha$ හා $T_2 = W\sin\alpha$

$T_1 = \frac{Wb}{\sqrt{a^2+b^2}}$ හා $T_2 = \frac{Wa}{\sqrt{a^2+b^2}}$



$AC^2 + BC^2 = AB^2$ වන බැවින් $\hat{C} = 90°$ වේ.

07. $P(A) = \frac{2}{5}$ හා $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ බව දී ඇත.

A හා B නිරවශේෂ සිද්ධීන් බැවින් $A \cup B = \Omega$ බැවින්

$P(\Omega) = P(A \cup B) = 1$ වේ.

නමුත් $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ බැවින්

$1 = \frac{2}{5} + P(B) - \frac{1}{3}$ වේ.

(I) $\therefore \quad P(B) = 1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{14}{15}$ //

(II) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{14}{15}} = \frac{5}{14}$

(III) $P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A \cup B)'}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)}$

$= \frac{1 - 1}{1 - \frac{1}{3}} = \underline{\underline{0}}$

08. X මිතුරා සාර්ථකව ගැටලුව විසඳීමේ සම්භාවිතාව $= \frac{1}{3}$

Y මිතුරා සාර්ථකව ගැටළුව විසඳීමේ සම්භාවිතාව $= \frac{1}{4}$ බව දී ඇත.

A ; X මිතුරා සාර්ථකව ගැටළුව විසඳීම

B ; Y මිතුරා සාර්ථකව ගැටළුව විසඳීම

(I) ඔවුන් දෙදෙනාම සාර්ථක වීම C නම්

$C = A \cap B$

$P(C) = P(A \cap B)$

$= P(A) \times P(B)$

[$\therefore$ A හා B සිද්ධීන් ස්වායත්ත බැවින්]

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$

$= \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$

(II) කිසිවකු සාර්ථක නොවීම D නම්

$D = A' \cap B'$

$D = (A \cup B)'$

$P(B) = P(A \cup B)'$

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - \{(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\}$

$= 1 - [\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}]$

$= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

09. මධ්‍යස්ථ වියදම 900/- බව දී ඇත.

මධ්‍යස්ථය = මධ්‍යස්ථය අඩංගු පන්තියේ පහළ සීමාව + $\frac{\left(\frac{N}{2} - Cf\right)}{f_{med}} \times i$

$N = 1\,000$

cf = මධ්‍යස්ථය අඩංගු පන්තියට පෙර පන්තිවල සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය = 50 + x

f_{med} = මධ්‍යස්ථය අඩංගු පන්තියේ සංඛ්‍යාතය= 500

$i = 200$

$900 = 800 + \frac{\left(\frac{1000}{2} - 50 - x\right)}{500} 200 \Rightarrow 100 \times 500$

$= (500 - 50 - x)\, 200$

$\frac{500}{2} = 450 - x \Rightarrow x = 200$, එවිට $y = 200$

එවිට ව්‍යාප්තිය සමමිතික වේ.

එවිට මධ්‍යස්ථය = මධ්‍යන්‍යය = $\underline{\underline{900}}$

10. මාස 15 ක ඇනවුම් සංඛ්‍යාවේ සාමාන්‍යය 24 ක් බැවින් $n = 15$ හා $\bar{x} = 24$ බැවින් මුළු ඇනවුම් සංඛ්‍යාව

$= 24 \times 15 = 360$

හොඳම මාස තුනේ ඇනවුම් සංඛ්‍යාව $= 35 \times 3 = 105$

අඩුම මාස හතරෙහි ඇනවුම් සංඛ්‍යාව $= 11 + 4 + 16 + 22 = 63$

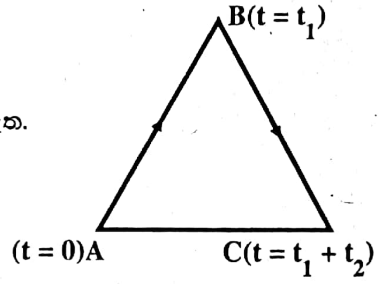
(I) ඉතිරි මාස අටෙහි ඇනවුම් සංඛ්‍යාව $= 360 - 105 - 63 = 192$

ඉතිරි මාස අටෙහි ඇනවුම්වල සාමාන්‍යය $= \frac{192}{8} = \underline{\underline{24}}$

(II) පළමුවන චතුර්ථකය හතරවෙනි $\left(\frac{15 + 1}{4} = 4\right)$ දත්තය වේ. 11, 14, 16, 22, ...ආකාරයට දත්ත පිහිටා ඇති බැවින් පළමුවන චතුර්ථකය 22 වේ.

<u>**B - කොටස**</u>

11. (a) සු - සුළඟ
කු - කුරුල්ලා
ලෙස ගෙන ඇත.



(සු E) $= \rightarrow u$ බවත්

(කු සු) $= v\ (> u)$ බවත් දී ඇත.

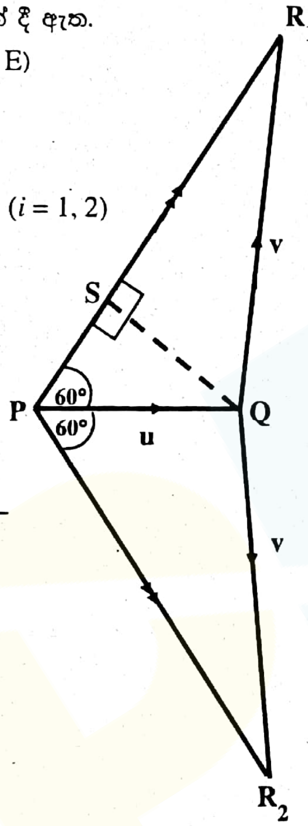
(කු E) $=$ (කු සු) $+$ (සු E)

$= v + \rightarrow u$

$= \rightarrow u + v$

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_i} \quad (i = 1, 2)$

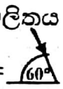
$= \overrightarrow{PR_i}$



A→ B චලිතය සලකමු.

(කු E) = 

B →C චලිතය සලකමු.

(කු E) = 

$QS = u\sin 60 = \frac{u\sqrt{3}}{2}$

$PS = u\cos 60 = \frac{u}{2}$

$SR_1^2 = v^2 - \frac{3u^2}{4}$

$SR_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4v^2 - 3u^2}$

$PR_1 = PS + SR_1$

$= \frac{u}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4v^2 - 3u^2}$

$= \frac{1}{2}\left(u + \sqrt{4v^2 - 3u^2}\right)$

$PQR_1\,\Delta$ හා $PQR_2\,\Delta$ අංගසම බැවින්

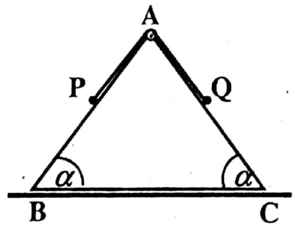
$PR_1 = PR_2 = \frac{1}{2}\left(u + \sqrt{4v^2 - 3u^2}\right)$

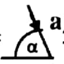
ඒ අනුව $t_1 = t_2 = \frac{a}{PR_1} = \frac{2a}{u + \sqrt{4v^2 - 3u^2}}$

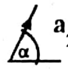
∴ A → B හා B → C දක්වා යාමට කුරුල්ලා ගත කරන

මුළු කාලය $\frac{4a}{u + \sqrt{4v^2 - 3u^2}}$ වේ.

(b) $\lambda > 1$ බැවින් $\lambda m > m$ වේ.

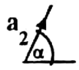


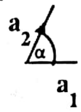
(Q කු) =  a_2

(P කු) =  a_2

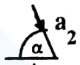
(කු E) = $\leftarrow a_1$

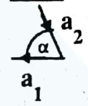
(P E) = (P කු) + (කු E)

=  a_2 + $\leftarrow a_1$

= 

(Q E) = (Q කු) + (කු E)

=  a_2 + $\leftarrow a_1$

= 

$\underline{F} = m\underline{a}$

P ↗ $T - mg\sin\alpha = m(a_2 - a_1\cos\alpha)$ —— ①

Q ↘ $\lambda mg\sin\alpha - T = \lambda m(a_2 - a_1\cos\alpha)$ —— ②

පද්ධතියට ← $0 = 2ma_1 + m(a_1 - a_2\cos\alpha) + \lambda m(a_1 - a_2\cos\alpha)$ — ③

①+② න් $\cancel{m}g\sin\alpha(\lambda - 1) = \cancel{m}(\lambda+1)a_2 - \cancel{m}\cos\alpha(\lambda+1)a_1$ —— ④

③ න් $0 = (3+\lambda)\cancel{m}a_1 - (1+\lambda)\cancel{m}\cos\alpha\, a_2$ —— ⑤

④ × (λ+3)

$g\sin\alpha(\lambda-1)(\lambda+3) = (\lambda+1)(\lambda+3)a_2 - (\lambda+1)(\lambda+3)\cos\alpha\, a_1$ —— ⑥

⑤ × (λ +1) cos α $\quad 0 = (\lambda+1)(\lambda+3)\cos\alpha\, a_1 - (\lambda+1)^2\cos^2\alpha\, a_2$ —— ⑦

⑥ + ⑦ $g\sin\alpha(\lambda-1)(\lambda+3) = (\lambda+1)(\lambda+3)a_2 - (\lambda+1)^2\cos^2\alpha\, a_2$

$g\sin\alpha(\lambda-1)(\lambda+3) = (\lambda+1)\left[(\lambda+3) - (\lambda+1)\cos^2\alpha\right]a_2$

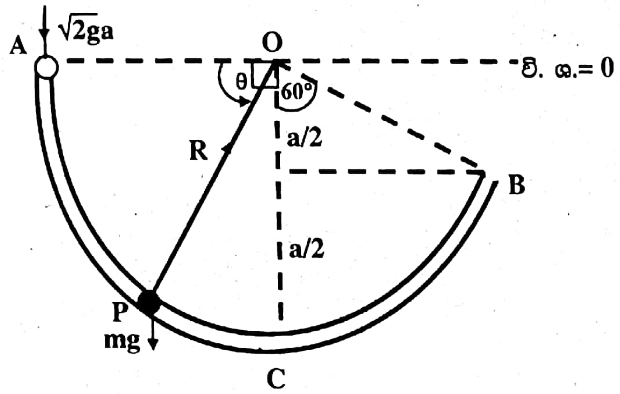
$\therefore\ a_2 = \frac{(\lambda-1)(\lambda+3)\, g\sin\alpha}{(\lambda+1)\left[(\lambda+3) - (\lambda+1)\cos^2\alpha\right]}$

Q අංශුව C වෙත ළඟාවන විට තන්තුව කැඩී යන බැවින් ඉහත ප්‍රතිඵලයේ $\lambda = 0$ යයි ආදේශ කිරීමෙන් කුඤ්ඤයට

සාපේක්ෂව P හි ත්වරණය ↗ $= \frac{(-1)(3)\, g\sin\alpha}{[3 - \cos^2\alpha]} = \frac{-3g\sin\alpha}{3 - \cos^2\alpha}$

∴ (P කු) =  $\frac{3g\sin\alpha}{3 - \cos^2\alpha}$ වේ.

12. O හරහා ඇති තිරස් මට්ටම සම්මත වින්‍යාසය ලෙස ගනිමු. රූප සටහන බලන්න. t = 0 හා t = t_1 අවස්ථා සඳහා ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්



$$\frac{1}{2} m \times (\sqrt{2ga})^2 + 0 = \frac{1}{2} \times mv_1^2 - mg\,a \sin\theta$$

$v_1^2 = 2ga(1 + \sin\theta)$ බව ලැබේ.

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදූ විට

$$R - mg\sin\theta = m \cdot \frac{v_1^2}{a}$$

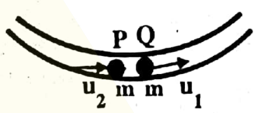
$$R = mg\sin\theta + \frac{m}{a}.2ga\,(1 + \sin\theta)$$

$$R = mg\,(2 + 3\cos\theta)$$

P අංශුව C වෙත එළඹෙන විට වේගය v_2 නම්

$$v_2^2 = 2ga\,(1 + \sin\pi/2) = 4\,ga$$

$$v_2 = 2\sqrt{ga}$$



P හා Q හි ගැටුම සලකා,

ශ. සං. නි. යෙදීමෙන්

$$\cancel{m}v_2 = \cancel{m}u_1 + \cancel{m}u_2 \quad ①$$

නි. ප. නි. යෙදීමෙන්

$$\frac{1}{2}v_2 = u_1 - u_2 \quad ②$$

① හා ② විසඳීමෙන් $u_1 = \frac{3v_2}{4}$ හා $u_2 = \frac{1}{4}v_1$

$v_2 = 2\sqrt{ga}$ බැවින් $u_1 = \frac{3\sqrt{ga}}{2}$ හා $u_2 = \frac{1}{2}\sqrt{ga}$

ගැටුමින් පසු OP රේඛාව යටිඅත් සිරස සමඟ α කෝණයක් සාදන විට P හි වේගය v_3 නම් ශ. සං. නි. යෙදීමෙන්

$$\frac{1}{2}\cancel{m}u_2^2 - \cancel{m}g\,a = \frac{1}{2}\cancel{m}v_3^2 - \cancel{m}g\,a\cos\alpha$$

$$\frac{1}{2}v_3^2 = \frac{1}{2}.\frac{ga}{4} - ga + ga\cos\alpha$$

$$\frac{1}{2}v_3^2 = ga\cos\alpha - \frac{7}{8}ga$$

$v_3 = 0$ වන්නේ $\cos\alpha = \frac{7}{8}$ වන විටය.

$C\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ බැවින් හා $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ නිසා

$$\cos\alpha > \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha < \frac{\pi}{3}$$

∴ P අංශුව B වෙත ළඟා වීමට ප්‍රථම ප්‍රවේගය ශූන්‍ය වේ.

∴ P අංශුව බටය හැර නොයයි.

Q අංශුව B වෙත ළඟාවන වේගය v_4 නම්,

Q සඳහා ශ. සං. නි. යෙදීමෙන්

$$\frac{1}{2}\cancel{m}u_1^2 - \cancel{m}ga = \frac{1}{2}\cancel{m}v_4^2 - \cancel{m}ga\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{9ga}{4} - ga = \frac{1}{2}v_4^2 - ga \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{9ga}{8} + \frac{ga}{2} - ga = \frac{1}{2}v_4^2$$

$\frac{5}{8}ga = \frac{1}{2}v_4^2 \Rightarrow v_4^2 = \frac{5ga}{4} > 0$ නිසා

Q අංශුව B හිදී බටය හැරයන අතර ඒ අවස්ථාවේ Q හි වේගය $\sqrt{\frac{5ga}{4}}$ වේ ; (ස්පර්ශකයේ දිශාවට)

එවිට Q හි සිරස් ප්‍රවේග සංරචකය $v_4\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{5ga}{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \sqrt{\frac{15ga}{4}}$$

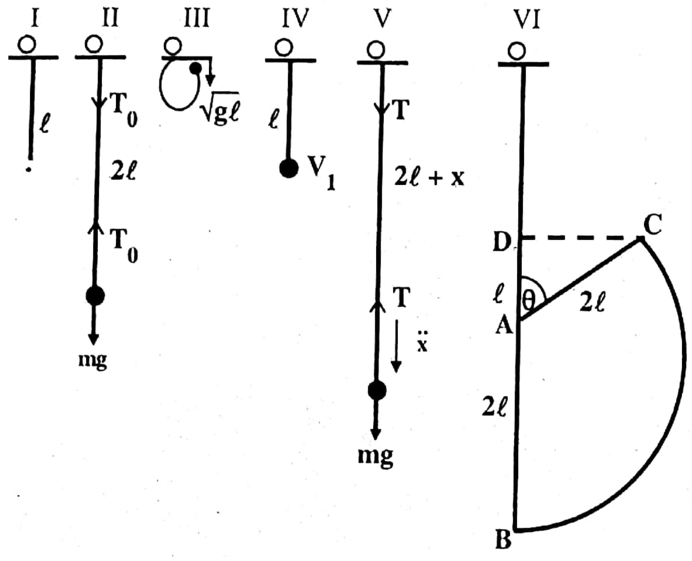
Q හි චලිතය සලකා $v^2 = u^2 + 2as$ යොදමු.

B හි සිට එළඹෙන උපරිම උස h_1 නම්

$$0 = \frac{15ga}{4} - 2gh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{15a}{8}$$

∴ C සිට එළඹෙන උපරිම උස $= \frac{15a}{8} + \frac{a}{2} = \frac{31a}{32}$

13.



II රූපයට අනුව සමතුලිත පිහිටීම සලකමු.

$$T_0 = mg \text{ ——— } ①$$

λ යනු ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය විට හුක්ගේ නියමය යෙදීමෙන්

$$T_0 = \frac{\lambda \ell}{\ell} \text{ ——— } ②$$

① හා ② න් $\lambda = mg$

III හා IV රූපවලට අනුව P අංශුවේ චලිතය සලකා

$v^2 = u^2 + 2as$ යෙදීමෙන්

$v_1^2 = g\ell + 2g\ell = 3g\ell \Rightarrow v_1 = \sqrt{3g\ell}$

V රූපයට අනුව

$T = \frac{mg \times (\ell + x)}{\ell}$ (හුක්ගේ නියමයෙන්)

$\underline{F} = m\underline{a} \downarrow$ යෙදීමෙන්

$mg - T = m\ddot{x}$

$mg - \frac{\cancel{m}g}{\ell}(\ell + x) = \cancel{m}\ddot{x} \Rightarrow \cancel{g} - \cancel{g} - \frac{g}{\ell}x = \ddot{x}$

$\ddot{x} = -\frac{g}{\ell}x \Rightarrow \ddot{x} + \frac{g}{\ell}x = 0$

$\dot{x}^2 = \frac{g}{\ell}(c^2 - x^2)$; ($c > 0$ වේ) තෘප්ත කරයි නම්

$x = -\ell$ විට $\dot{x} = v_1 = \sqrt{3g\ell}$ බැවින්

$3g\ell = \frac{g}{\ell}(c^2 - \ell^2) \Rightarrow 3\cancel{g}\ell^2 = \cancel{g}(c^2 - \ell^2) \Rightarrow c = 2\ell$ වේ.

එවිට $\dot{x}^2 = \frac{g}{\ell}(4\ell^2 - x^2)$

$-\ell \le x < 2\ell$ සඳහා $\dot{x} > 0$ හා $x = 2\ell$ සඳහා $\dot{x} = 0$ බැවින් P අංශුව පොළවට ළඟාවන මොහොතේ ක්ෂණික නිශ්චලතාවයට පත් වේ.

ACD ත්‍රිකෝණයෙන්

$$\cos\theta = \frac{\ell}{2\ell} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow C\hat{A}B = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

D සිට A හරහා B තෙක් ගමන් කිරීමට අංශුව ගන්නා කාලය t_1 නම්,

$$t_1 = \frac{\frac{2\pi}{3}}{w} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\sqrt{\frac{g}{\ell}}} = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \frac{2\pi}{3}$$

$0 \rightarrow D$ ගුරුත්වය යටතේ චලනය වීමට කාලය t_2 නම්

$\downarrow v = u + at$ යෙදීමෙන් $\sqrt{3g\ell} = \sqrt{g\ell} + gt_2$

$$t_2 = \sqrt{\frac{g\ell}{g}}(\sqrt{3} - 1) = \sqrt{\frac{\ell}{g}}(\sqrt{3} - 1)$$

∴ 0 සිට පොළව මට්ටම තෙක් පැමිණීමට අංශුව ගන්නා

කාලය $t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\frac{2\pi}{3} + \sqrt{\frac{\ell}{g}}(\sqrt{3} - 1)$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,[2\pi + 3\sqrt{3} - 3] //$$

14. (a) **a** හා **b** යනු නිශ්ශූන්‍ය දෛශික දෙකක් විට $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta$ වේ.

මෙහි $|\mathbf{a}|$ හා $|\mathbf{b}|$ යනු **a** හා **b** දෛශික වල විශාලත්ව වන අතර θ යනු **a** හා **b** අතර කෝණයයි.

$0 \le \theta \le \pi$ වේ. එසේ නොවන විට එය ශූන්‍ය වේ.

$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{d}$ ලෙස ගත හැක.

$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ බැවින්

$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{a}| \cos 0$ නිසා $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$ ද $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}|^2$ ද වේ.

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (අදිශ ගුණිතය න්‍යාදේශ්‍ය බැවින් වේ.

$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \text{ ——— } ①$$

මේ ආකාරයටම $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ බැවින්

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{a}|^2 - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \text{ ——— } ②$$

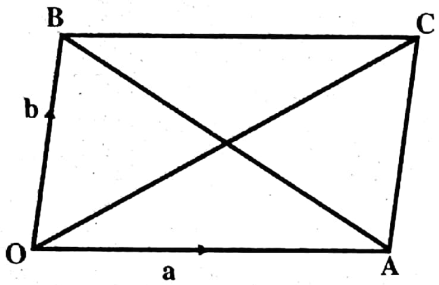
$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2$ නම් ① හා ② ට අනුව

$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ වේ.

මේ අනුව $2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = -2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \Rightarrow 4(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = 0$

$\therefore \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ වේ.

0 ලක්ෂ්‍යයත් අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික **a** හා **b** නම් OACB සමාන්තරාස්‍රය සම්පූර්ණකළවිට



$\mathbf{OC} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$ —— ③ හා

$\mathbf{BA} = \mathbf{a}-\mathbf{b}$ —— ④ වේ.

සමාන්තරාස්‍රයේ විකර්ණ සමාන නම්

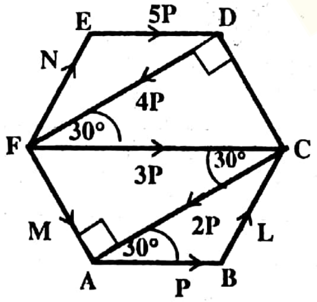
$\mathbf{OC} = \mathbf{AB} \Rightarrow |\mathbf{OC}| = |\mathbf{AB}|$

$\Rightarrow |\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$

එවිට $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2$ වන අතර මුල් කොටසට අනුව $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = 0$ වේ. $|\mathbf{a}| \neq 0$ හා $|\mathbf{b}| \neq 0$ බැවින් මේ සඳහා a හා b දෛශික දෙක අතර කෝණය 90° ක් විය යුතුය.

එනම් $A\hat{O}B = 90^\circ$ බැවින් සමාන්තරාස්‍රය සෘජු කෝණාස්‍රයක් බවට පත්වේ.

(b) බල පද්ධතිය සමතුලිතතාවයේ පවත්නා බැවින් R = 0 හා G = 0 වේ. R = 0 වීම සඳහා වෙන වෙනම X හා Y ශුන්‍යය විය යුතුය. AB දිශාවට හා ඊට ලම්බක AE දිශා ඔස්සේ බල විභේදනයෙන්



$$\overrightarrow{X} = P + 3P + 5P - 2P\cos 30^\circ - 4P\cos 30^\circ + M\cos 60^\circ + L\cos 60^\circ + N\cos 60^\circ = 0$$

$$9P - 6P \times \frac{\sqrt{3}}{2} + (L+M+N)\frac{1}{2} = 0$$

$$18P - 6\sqrt{3}P + L + M + N = 0 \text{ —— ①}$$

$$\uparrow Y = L\sin 60^\circ + N\sin 60^\circ - M\sin 60^\circ - 4P\sin 30^\circ - 2P\sin 30^\circ = 0$$

$$(L+N-M)\frac{\sqrt{3}}{2} - 6P\,.\,\frac{1}{2} = 0$$

$$(L+N-M)\sqrt{3} - 6P = 0 \text{ —— ②}$$

F වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$\circlearrowleft G = L \times 4\cancel{a}\cos 30^\circ - 5P \times 2\cancel{a}\sin 60^\circ - 2P \times 2\cancel{a} + P \times 2\cancel{a}\sin 60^\circ = 0$$

$$4L\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2} - 10P\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2} - 4P + 2P\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$4\sqrt{3}L - 2\sqrt{3}P - 10\sqrt{3}P - 8P = 0 \text{ —— ③}$$

$$4\sqrt{3}L - 8\sqrt{3}P - 8P = 0$$

$$\therefore L = \frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}+1)P \,//$$

② න් $L + N - M - 2\sqrt{3}P = 0$ —— ②'

$L + N + M - 6\sqrt{3}P + 18P = 0$ —— ①

① - ②' $2M + 18P - 4\sqrt{3}P = 0$

$$M = (2\sqrt{3} - 9)P$$

$$M = \sqrt{3}(2 - 3\sqrt{3})P \,//$$

② + ① $2L + 2N - 8\sqrt{3}P + 18P = 0$

$$N = 4\sqrt{3}P - 9P - L$$

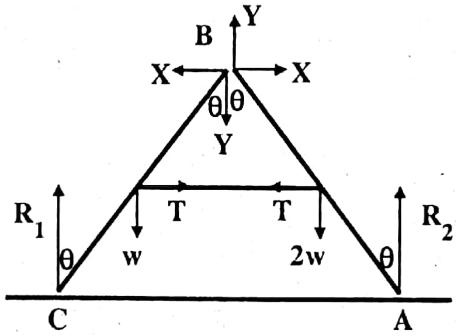
$$= 4\sqrt{3}P - 9P - \frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}+1)P$$

$$= 4\sqrt{3}P - 9P - 2P - \frac{2}{\sqrt{3}}P$$

$$= \frac{12P - 2P}{\sqrt{3}} - 11P$$

$$N = \frac{10P}{\sqrt{3}} - 11P = \left(\frac{10}{\sqrt{3}} - 11\right)P \,//$$

15. (a)



දණ්ඩක දිග 2a යයි ගනිමු.

පද්ධතියේ සමතුලිතතාවය සලකා A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$2w \times \cancel{a}\sin\theta + w \times 3\cancel{a}\sin\theta = R_1 \times 4\cancel{a}\sin\theta$$

$$R_1 = \frac{5w}{4}$$

BC දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සලකා B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$w \times \cancel{a}\sin\theta + T \times \cancel{a}\cos\theta - R_1 \times 2\cancel{a}\sin\theta = 0$$

$$T\cos\theta = \frac{5w}{4} \times 2\sin\theta - w\sin\theta$$

$$T\cos\theta = \frac{6}{4}\, w\sin\theta$$

$$T = \frac{3}{2}\, w\tan\theta$$

BC දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සලකා

← විභේදනයෙන් $X = T = \frac{3}{2}\, w\tan\theta$

$\uparrow \qquad R_1 - w - Y = 0$

$$Y = \frac{5w}{4} - w = \frac{w}{4}$$

B හි ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය R_3 නම්

$$R_3 = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9w^2\tan^2\theta}{4} + \frac{w^2}{16}}$$

$$= \frac{w}{4}\sqrt{36\tan^2\theta + 1}$$

R_3 තිරස සමඟ α කෝණයක් සාදයි නම්

$$\tan\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{\frac{w}{4}}{\frac{3w}{2}\tan\theta} = \frac{1}{6}\cot\theta \text{ වේ.}$$

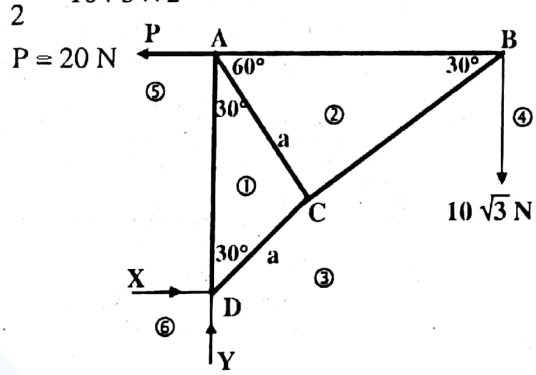
(b) ①,② ..... ⑥ ලෙස හෝ අංකනය කර ඇත.

රාමු සැකිල්ලේ බාහිර බල වල සමතුලිතතාවය සලකා D වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන් (AC = CD = a යයි ගනිමු.)

$$P \times 2a\cos 30^\circ = 10\sqrt{3} \times a \ \text{sce}\ 60^\circ$$

$$P \times 2.\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \times 2$$

$$P = 20\text{ N}$$



තිරස් විභේදනයෙන් $P = X = 20\text{ N}$

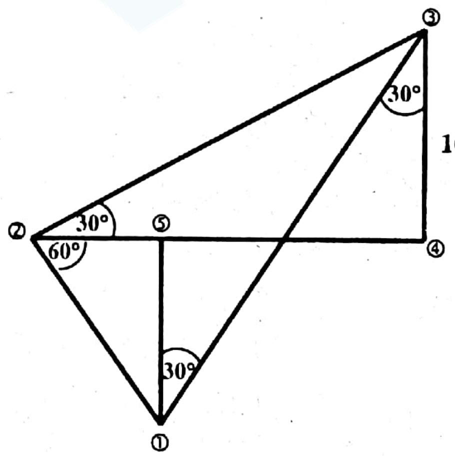
සිරස් විභේදනයෙන් $Y = 10\sqrt{3}\text{ N}$

D හි ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $= \sqrt{X^2 + Y^2}$

$= \sqrt{400 + 300}$

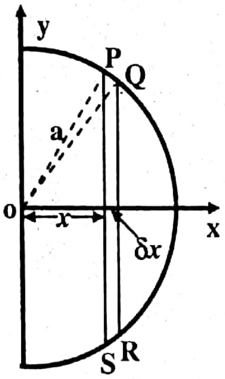
$= 310\sqrt{7}\text{ N}$

P, $10\sqrt{3}$ හා D හි ප්‍රතික්‍රියාව යන බාහිර බල තුන යටතේ රාමු සැකිල්ල සමතුලිතතාවයේ පිහිටන බැවින්, හා P හා $10\sqrt{3}$ බල දෙකේ ක්‍රියා රේඛා B හි දී ඡේදනය වන බැවින් D හි ප්‍රතික්‍රියාවද B හරහා යුතුය.



දණ්ඩ	ප්‍රත්‍යාබලය	විශාලත්වය
AB	ආතතිය	30 N
BC	තෙරපුම	$20\sqrt{3}$ N
AC	තෙරපුම	20 N
CD	තෙරපුම	40 N
AD	ආතතිය	$10\sqrt{3}$ N

16. සමමිතිකත්වයට අනුව අර්ධ ගෝලයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටයි. එය G නම් $G \equiv (\bar{x}\ , 0)$ ආකාරය වේ. y අක්ෂයේ සිට x දුරින් වූ ඝනකම δx වන තුනී තැටියක් සලකමු.



එහි අරය $= \sqrt{a^2 - x^2}$

එම PQRS තැටියේ පරිමාව

$$= \pi\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 \delta x$$

අර්ධ ගෝලයේ ඝනත්වය ρ නම්

තැටියේ ස්කන්ධය $= \pi (a^2 - x^2)\, \delta x\, \rho$

තැටියේ ස්. කේ. ට y අංශයේ සිට දුර x වේ.

ස්. කේ. අර්ථ දක්වීමෙන්,

$\bar{x} = \dfrac{\int m_r x_r}{\int m_r}$ යොදා ගැනීමෙන්

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \pi (a^2 - x^2)\, \rho\, x\, dx}{\int_0^a \pi (a^2 - x^2)\, \rho\, dr}$$

$$= \frac{\cancel{\pi}\, \cancel{\rho} \int_0^a (a^2 x - x^3)\, dr}{\cancel{\pi}\, \cancel{\rho} \int (a^2 - x^2)\, dx}$$

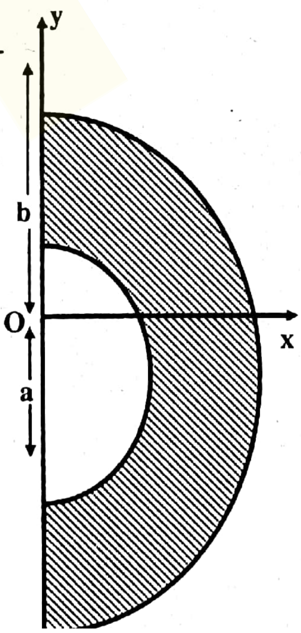
$$= \frac{\left(a^2 \frac{x^2}{2}\right)_0^a - \left(\frac{x^4}{4}\right)_0^a}{[a^2 x]_0^a - \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^a}$$

$$= \frac{\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}}{a^3 - \frac{a^3}{3}} = \frac{a^4 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right]}{a^3 \left[1 - \frac{1}{3}\right]}$$

$$= \frac{3}{8}\, a$$

$\therefore\ G \equiv \left(\frac{3}{8}\ , 0\right)$

වස්තුව	ස්කන්ධය	ස්. කේ. ට y අක්ෂයේ සිට දුර
	$\frac{2}{3}\pi b^3 \rho$	$\frac{3}{8}\, b$
	$\frac{2}{3}\pi a^3 \rho$	$\frac{3}{8}\, a$
	$\frac{2}{3}\pi (b^3 - a^3)\, \rho$	$\bar{\bar{x}}$



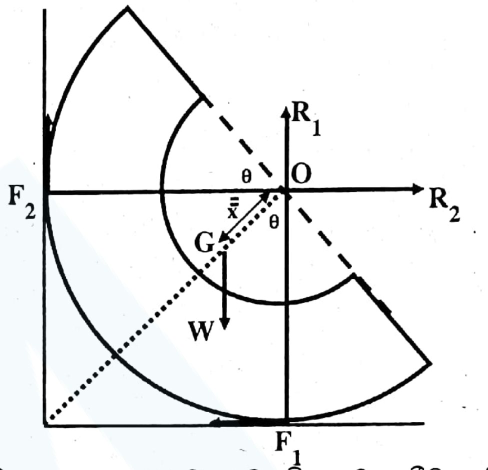
y අක්ෂය වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cancel{\pi} b^3 \cancel{\rho} \times \frac{3\,b}{8} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cancel{\pi} a^3 \cancel{\rho} \times \frac{3\,a}{8} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cancel{\pi}(b^3 - a^3)\, \cancel{\rho}\, \bar{\bar{x}}$$

$$\frac{3}{8}\ \frac{(b^4 - a^4)}{(b^3 - a^3)} = \bar{\bar{x}}$$

$$\frac{3(b^2 + a^2)\,(b + a)\,(b - a)}{8(b - a)\,(b^2 + ab + b^2)} = \bar{\bar{x}}$$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{3(b + a)\,(b^2 + a^2)}{8\,(b^2 + ba + a^2)}$$



කවචයේ සමතුලිතතාවය සලකමු. සමතුලිතතාවය සීමාකාරී බැවින්

$F_1 = \mu R_1$ —— ①

$F_2 = \mu R_2$ —— ②

$\uparrow\ R_1 + F_2 = W$ —— ③

$\rightarrow F_1 = R_2$ —— ④

O වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$(F_1 + F_2)\, b = W \times \bar{\bar{x}} \sin\theta$ —— ⑤

① හා ④ න් $\mu R_1 = R_2$ —— ⑥

② හා ③ න් $R_1 + \mu R_2 = W$ — ⑦

⑥ හා ⑦ න් $R_1 + \mu^2 R_1 = W$

$$R_1 = \frac{W}{1 + \mu^2}$$

$$R_2 = \frac{\mu W}{1 + \mu^2}$$

① , ② හා ⑤ න්

$$\mu R_1 b + \mu R_2 b = W\, \bar{\bar{x}} \sin\theta$$

$$\frac{\mu b W}{(1 + \mu^2)} + \frac{\mu^2 b W}{(1 + \mu^2)} = \frac{W\, 3(a + b)\,(a^2 + b^2)}{8\,(a^2 + ab + b^2)} \sin\theta$$

$$\frac{\mu b (1 + \mu)}{(1 + \mu^2)} = \frac{3(a + b)\,(a^2 + b^2)}{8\,(a^2 + ab + b^2)} \sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{8 \mu b (1 + \mu)\,(a^2 + ab + b^2)}{3\,(1 + \mu^2)\,(a + b)\,(a^2 + b^2)}$$ //

17. (a) කාසියේ හිස වැටීමේ සම්භාවිතාව $= p$ බැවින්
කාසියේ අගය වැටීමේ සම්භාවිතාව $= 1 - p$ වේ.

X : කාසියේ අගය වැටීම

Y : කාසියේ සිරස වැටීම

A : දෙවන වාරයේදී නිමල් ක්‍රීඩාව ජය ගැනීම,

$A = Y \cap Y \cap Y \cap X$ ($\because$ නිමල්, සුනිල් හා පියල් අනුපිළිවෙළට ක්‍රීඩා කරන බැවින්)

$\therefore P(A) = P[Y \cap Y \cap Y \cap X]$

$= P(Y)\,P(Y)\,P(Y)\,P(X)$ ($\because$ X හා Y ස්වායත්ත බැවින්)

$= p \times p \times p \times (1 - p)$

$= p^3 (1 - p)$ //

B ; තෙවන වාරයේදී නිමල් ක්‍රීඩාව ජය ගැනීම.

$B = Y \cap Y \cap Y \cap Y \cap Y \cap Y \cap X$

$P(B) = P(Y \cap Y \cap Y \cap Y \cap Y \cap Y \cap X)$

$= P(Y)P(Y)P(Y)P(Y)P(Y)P(Y)P(X)$

$= p^6 (1 - p)$ //

C ; අවසානයේදී නිමල් ක්‍රීඩාව ජය ගැනීම.

C = (1 වන වාරයේදී නිමල් ජය ගැනීම) හෝ (2 වන වාරයේදී නිමල් ජය ගැනීම.) හෝ .... හෝ (n වන වාරයේදී නිමල් ජය ගැනීම.)

$C = X \cup (Y \cap Y \cap Y \cap X) \cup (Y \cap Y \cap Y \cap Y \cap Y \cap Y \cap X) \cup \ldots\ldots \cup (Y \cap Y \ldots\ldots$ (3n -3 වාරයක්) $\cap X)$

$P(C) = P[X \cup (Y \cap Y \cap Y \cap X) \cup (Y \cap Y \cap Y \cap Y \cap Y \cap Y \cap X) \cup \ldots\ldots \cup (Y \cap Y \ldots$ (3n - 3 වාරයක්) $\cap X)]$

$= P(X) + P(Y \cap Y \cap Y \cap X) + P(Y \cap Y \cap Y \cap Y \cap Y \cap Y \cap X) + \ldots\ldots P(Y \cap Y) \ldots$ (3n- 3 වරයක්) $\cap X)$ ($\because$ ඉහත සිද්ධීන් අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර බැවින්)

$= P(X) \times P(Y) \times P(Y) \times P(Y) \times P(X) + P(Y) \times P(Y) \times P(Y) \times P(Y) \times P(Y) \times P(Y) \times P(X) + \ldots\ldots + P(Y) \times P(Y) \times \ldots$ (3n - 3 වාරයක්) $P(X)$

[$\because$ X හා Y ස්වායත්ත බැවින්]

$P(C) = (1-p) + (1 - p)\,p^3 + (1 - p)p^6 + \ldots\ldots + (1 - p)\,p^{n-3}$

මෙය ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියකි. මුල් පදය (1 - p)පොදු අනුපාතය p^3 ද වන අතර අවශ්‍ය ප්‍රතිඵලය වන්නේ $n \to \infty$ විට මෙම ශ්‍රේණියේ ඓක්‍යය යි.

$$P(C) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1 - p)\,[1 - p^{3n}]}{1 - p^3}\right) (\because 0 < p < 1 \text{ නිසා})$$

$$= \frac{1 - p}{1 - p^3} (\because 0 < p < 1 \text{ විට } \lim_{n\to\infty} p^{3n} \to 0 \text{ බැවින්})$$

$$= \frac{\cancel{(1 - p)}}{\cancel{(1 - p)}\,(1 + p + p^2)}$$

$$= \frac{1}{1 + p + p^2}$$

කාසියෙන් හිස වැටීමට වඩා අගය වැටීමට වැඩි හව්‍යතාවයක් ඇති බැවින් $p < \frac{1}{2}$ වේ.

$$1 + p + p^2 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\therefore P(C) > \frac{1}{7/4}$$

$$P(C) > \frac{4}{7} > \frac{1}{2}$$

$\therefore$ නිමල් අවසානයේ දී ජය ගැනීමේ සම්භාවිතාව 50% ඉක්මවයි.

(b) $\{x_1, x_2, \ldots\ldots x_n\}$ නිරීක්ෂණ කුලකයේ මධ්‍යන්‍ය $\bar{x}$ හා සම්මත අපගමනය s_x බැවින්

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ හා } s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \text{ වේ.}$$

$y_i = a + bx_i\,;\ i = 1, 2, \ldots\ldots n$ බැවින්

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n}(a + bx_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a + \sum_{i=1}^{n} bx_i$$

$$= na + b\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = na + bn\,\bar{x}\ (\because x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ නිසා})$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = a + b\bar{x}$$

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \ //$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

විචලතාවයේ අර්ථ දැක්වීමෙන්

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[a + bx_i - (a + b\bar{x})]^2$$

(මුල් ප්‍රතිඵලයට අනුව)

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\cancel{a} + bx_i - \cancel{a} - b\bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(bx_i - b\bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b^2 (x_i - \bar{x})^2$$

$$= b^2 \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$s_y^2 = b^2 \cdot s_x^2 \quad (\because s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ බැවින්)

(I) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

මධ්‍යන්‍යය $= \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = \underline{\underline{4}}$

විචල්‍යතාව $= \frac{1}{7}[(1-4)^2+(2-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2+(7-4)^2]$

$= \frac{1}{7}[9+4+1+0+1+4+9] = 4$

සම්මත අපගමනය $= 2$

(α) $\{2.01, 3.02, 4.03, 5.04, 6.05, 7.06, 8.07\}$

මුල් කොටසට අනුව සුදුසු රේඛීය පරිමාණයක් තෝරා ගනිමු.

$a = 1, b = 1.01$ විට $y_i = a + b x_i$ මඟින්

$\{1, 2, ...\}$ කුලකය $\{2.01, 3.02, ...\}$ කුලකය බවට පත්කර ගතහැක.

එවිට $\bar{y} = a + b\bar{x}$ හා $s_y^2 = b^2 s_x^2$ නිසා

$\bar{y} = 1 + 1.01 \times 4$ හා $s_y^2 = (1.01)^2 \times 4$ වේ.

මධ්‍යන්‍යය $= 5.04$ වන අතර සම්මත අපගමනය $= \sqrt{s_y^2} = 2.02$

(β) මධ්‍යන්‍යය $= 5$ හා සම්මත අපගමනය $= 6$ වන අගය හතක් සෙවීම.

$\bar{y} = 5, s_y = 6$ (මුල් ව්‍යාප්තිය හා සම්බන්ධ කිරීමෙන්)

$\bar{y} = a + b\bar{x} \Rightarrow 5 = a + 4b$ —— ①

$s_y = bs_x \Rightarrow 6 = b \times 2$ —— ②

② න් $b = 3$ හා ① න් $a = -7$ බව ලැබේ.

$y_i = a + bx_i$ නිසා

$x = 1$ විට $y_1 = -7 + 3 \times 1 = -4$

$x = 2$ විට $y_2 = -7 + 3 \times 2 = -1$

$\vdots$

$x = 7$ විට $y_7 = -7 + 3 \times 7 = 14$ වේ.

$\therefore$ අවශ්‍ය අගය 7 වනුයේ $\{-4, -1, 2, 5, 8, 11, 14\}$

(ii) $a = -25$ හා $b = 1$ වන $y_i = -25 + x_i$ පරිණාමනයෙන්,

එවිට $\bar{y} = -25 + \bar{x}$ බැවින්

$\frac{27.2}{80} = -25 + \bar{x}$ වේ. $[\because \sum_{i=1}^{80}(x_i - 25) = 27.2$ බව දී ඇත.]

මෙය විසඳීමෙන් $\bar{x} = 25 + 0.34 = 25.34$

$s_y^2 = s_x^2$ ($\because b = 1$ ලෙස ගත් බැවින්)

$s_x = \sqrt{\frac{85.1}{80}} = \sqrt{1.06375} = 1.031$

වෙනත් ක්‍රමයක්

25 යනු උපකල්පිත මධ්‍යන්‍යය නම්

$x = A + \frac{\sum d_i}{n}$ (අමු දත්ත සඳහා)

$= 25 + \frac{27.2}{80} = 25.34$

$\text{Var } x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

$= \frac{1}{80} \times 85.1 = 1.06375$

$\therefore S_x = \sqrt{1.06375}$

*** ***