අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය - 2013 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)

**General Certificate of Education (Adv. Level) Examination – August 2013 (New Syllabus)**

සංයුක්ත ගණිතය I / පැය තුනයි

# Combined Mathematics I / Three hours

උපදෙස් :
- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ ;
  **A කොටස** (ප්‍රශ්න 01 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
- **A කොටස**
  **සියලු** ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
- **B කොටස**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටස, B කොටසට** උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

## A කොටස

01. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}(2r+1) = n(n+2)$ බව සාධනය කරන්න.

02. $\frac{2x+1}{3x-1} \geq 1$ අසමානතාව සපුරාලන $x$ හි සියලු තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

03. සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා අපරිමිත ශ්‍රේණියක පළමු පද $n$ හි එකතුව $6 - \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$ මගින් දෙනු ලැබේ. මෙම ශ්‍රේණියෙහි $n$ වෙනි පදය සොයා, ශ්‍රේණිය, අභිසාරී ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක් බව පෙන්වන්න.

04. $a \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $\left(x+\frac{a}{x^3}\right)^{20}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයෙහි $x$ වලින් ස්වායත්ත පදය $\frac{969}{2}$ වේ. $a$ හි අගය සොයන්න.

05. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

06. $\frac{d}{dx}\left\{x \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right\} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) dx$ සොයන්න.

07. $(3,1)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි $x+2y+a=0$ සරල රේඛාව මත ප්‍රතිබිම්බය $\left(\frac{3}{5}, b\right)$ ලක්ෂ්‍යය වේ; මෙහි $a$ හා $b$ නියත වේ. $a$ හා $b$ හි අගයන් සොයන්න.

08. $x = 2\cos\theta,\ y = \sin\theta$, මගින් දෙනු ලබන වක්‍රය $C$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\theta$ යනු පරාමිතියකි. $C$ වක්‍රයට $\theta = \frac{\pi}{4}$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ අභිලම්බයට, C වක්‍රය නැවත $\theta = \alpha$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයෙහි දී හමුවේ. $2\sin\alpha - 8\cos\alpha + 3\sqrt{2} = 0$ බව පෙන්වන්න.

........................................................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................................................

09. අරය 1 ක් වූ ද, කේන්ද්‍රය $x + y = 0$ සරල රේඛාව මත වූ ද, $C$ වෘත්තයක්, $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ වෘත්තය ප්‍රලම්බ ව ඡේදනය කරයි. $C$ හි කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

........................................................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................................................

10. $\sin\theta = -\frac{1}{3}$ හා $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ නම්, $\sin 2\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ හා $\tan 2\theta = \frac{4\sqrt{2}}{7}$ බව පෙන්වන්න.

........................................................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................................................

*** ***

**B කොටස**

11. (*a*) $f(x) = ax^3 + bx^2 - 11x + 6$ යැයි ගනිමු ; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.

$(x-1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් වේ නම් හා $f(x)$ යන්න $(x-4)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය -6 නම්, $a$ හා $b$ වල අගයන් සොයන්න. $f(x)$ හි අනෙක් ඒකජ සාධක දෙකත් සොයන්න.

(*b*) $\alpha$ හා $\beta$ යනු $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල යැයි ද, $\gamma$ හා $\delta$ යනු $x^2 + mx + n = 0$ සමීකරණයේ මූල යැයි ද ගනිමු; මෙහි $b, c, m, n \in \mathbb{R}$ වේ.

(i) $b$ හා $c$ ඇසුරෙන් $(\alpha - \beta)^2$ සොයා, **ඒ නයින්**, $m$ හා $n$ ඇසුරෙන් $(\gamma - \delta)^2$ ලියා දක්වන්න.
$\alpha + \gamma = \beta + \delta$ නම් $b^2 - 4c = m^2 - 4n$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(ii) $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta) = (c - n)^2 + (b - m)(bn - cm)$ බව, පෙන්වන්න.
$x^2 + bx + c = 0$ හා $x^2 + mx + n = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත්තේ $(c - n)^2 = (m - b)(bn - cm)$ ම නම් පමණක් බව **අපෝහනය** කරන්න.
$x^2 + 10x + k = 0$ හා $x^2 + kx + 10 = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත; මෙහි $k$ යනු තාත්ත්වික නියතයකි. $k$ හි අගයන් සොයන්න.

12. (*a*) සිසුන් 15 ක ශිෂ්‍ය සභාවක් විද්‍යා සිසුන් 3 දෙනකුගෙන්, කලා සිසුන් 5 දෙනකුගෙන් හා වාණිජ සිසුන් 7 දෙනකුගෙන් සමන්විත ය. ව්‍යාපෘතියක වැඩ කිරීම සඳහා මෙම ශිෂ්‍ය සභාවෙන් සිසුන් 6 දෙනකු තෝරා ගැනීමට අවශ්‍ය ව ඇත.

(i) සිසුන් 15 දෙනා ම තෝරා ගැනීම සඳහා සුදුසු නම්,
(ii) කිසියම් සිසුන් දෙදෙනෙකුට එකට වැඩ කිරීම සඳහා අවසර නොමැති නම්,
(iii) එක් එක් විෂය ධාරාවෙන් සිසුන් දෙදෙනෙකු බැගින් තේරීමට අවශ්‍ය නම්,

මෙය සිදු කළ හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.
ඉහත (iii) යටතේ තෝරා ගත් කණ්ඩායමක්, එම කණ්ඩායමෙහි විද්‍යා විෂය ධාරාවෙන් වූ සිසුන් දෙදෙනාට එක ළඟ වාඩි වීමට අවසර නොමැති නම්, වෘත්තාකාර මේසයක් වටේට වාඩි කළ හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{3(6r+1)}{(3r-1)^2(3r+2)^2}$ හා $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $S_n = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $Ur = \dfrac{A}{(3r-1)^2} + \dfrac{B}{(3r+2)^2}$ වන පරිදි $A$ හා $B$ නියතවල අගයන් සොයන්න.

**ඒ නයින්**, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $S_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{(3n+2)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබගේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

$\left|S_n - \dfrac{1}{4}\right| < 10^{-6}$ වන පරිදි වූ $n \in \mathbb{Z}^+$ හි කුඩාතම අගය සොයන්න.

13. (*a*) $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු.

$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \lambda\mathbf{I}$ වන පරිදි වූ $\lambda \in \mathbb{R}$ හි අගය සොයන්න ; මෙහි $\mathbf{Q}^T$ යනු $\mathbf{Q}$ න්‍යාසයෙහි පෙරළුම වන අතර, $\mathbf{I}$ යනු $2 \times 2$ ඒකක න්‍යාසය වේ.

**ඒ නයින්**, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ න්‍යාසයෙහි ප්‍රතිලෝමය සොයන්න.

$\mathbf{A} = \mathbf{AP} = \mathbf{PD}$ වන පරිදි වූ $2 \times 2$ න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු; මෙහි $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ වේ.
$\mathbf{A}$ සොයන්න.

(*b*) $z = x + iy$ යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් යැයි ගනිමු; මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$ වේ. $z$ හි මාපාංකය $|z|$ හා $z$ හි සංකීර්ණ ප්‍රතිබද්ධය $\bar{z}$ අර්ථ දක්වන්න.

$|z|^2 = z\bar{z}$ හා $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z$ බව පෙන්වන්න.

**ඒ නයින්,** $|z - 3i|^2 = |z|^2 - 6\mathrm{Im}\,z + 9$ හා $|1 + 3iz|^2 = 9|z|^2 - 6\mathrm{Im}\,z + 1$ බව පෙන්වන්න.

$|z - 3i| > |1 + 3iz|$ වන්නේ $|z| < 1$ නම් පමණක් **අපෝහනය** කරන්න.

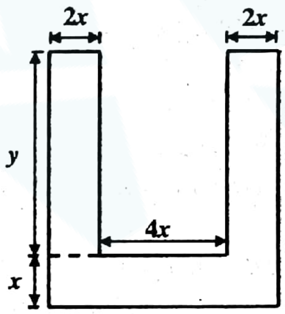
$|z - 3i| > |1 + 3iz|$ හා $\mathrm{Arg}\,z = \frac{\pi}{4}$ අවශ්‍යතා සපුරාලන පරිදි වූ $z$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ආගන්ඩ් සටහනක අඳින්න.

14. (*a*) $x \neq 1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - 1}$ යැයි ගනිමු.

$x \neq 1$ සඳහා $f'(x) = -\dfrac{x\,(x^3 + 2)}{(x^3 - 1)^2}$ බව පෙන්වා, $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයට $(0, 0)$ හා $\left(-2^{1/3}, -\dfrac{4^{1/3}}{3}\right)$ හි දී හැරුම් ලක්ෂ්‍ය පවතින බව **අපෝහනය** කරන්න.

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින්, $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) මායිම සෘජුකෝණික ලෙස හමුවන සරල රේඛා ඛණ්ඩ අටකින් සමන්විත ගෙවත්තක් රූපසටහනෙහි දක්වේ. ගෙවත්තේ මාන මීටරවලින් එහි දක්වා ඇත. ගෙවත්තේ වර්ගඵලය $800\ \mathrm{m}^2$ බව දී ඇත. $x$ ඇසුරෙන් y ප්‍රකාශ කර, මීටරවලින් මනින ලද ගෙවත්තේ පරිමිතිය $P$ යන්න $P = \dfrac{800}{x} + 10x$ මගින් දෙනු ලබන බව ද, පරිමිතිය සඳහා වන මෙම සූත්‍රය වලංගු වන්නේ $0 < x < 10$ සඳහා පමණක් බව ද පෙන්වන්න.




**ඒ නයින්,** ගෙවත්තේ පරිමිතියෙහි අවම අගය සොයන්න.

15. (*a*) **කොටස් වශයෙන් අනුකලනය** භාවිතයෙන් $\int x^2 \sin^{-1} x\ \mathrm{d}x$ සොයන්න.

(*b*) **භින්න භාග** භාවිතයෙන් $\int \dfrac{x^2 + 3x + 4}{(x^2 - 1)(x + 1)^2}\ \mathrm{d}x$ සොයන්න.

(*c*) $a^2 + b^2 > 1$ වන පරිදි $a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ද,

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{a + \cos x}{a^2 + b^2 + a\cos x + b\sin x}\,\mathrm{d}x \text{ හා } J = \int_0^{\pi/2} \frac{b + \sin x}{a^2 + b^2 + a\cos x + b\sin x}\,\mathrm{d}x$$ යැයි ද ගනිමු.

$aI + bJ = \dfrac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$bI - aJ$ සැලකීමෙන් $I$ හා $J$ හි අගයන් සොයන්න.

16. $x^2 + y^2 - 2y - 2y + 1 = 0$ සමීකරණය මගින් දෙනු ලබන S වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක හා අරය සොයා, $xy$, තලය මත $S$ වෘත්තයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

$P$ යනු $S$ වෘත්තය මත $O$ මූලයෙහි සිට ඈතින් ම පිහිටි ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. $P$ ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වා $S$ වෘත්තයට $P$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ ස්පර්ශක රේඛාව වන $l$ හි සමීකරණය $x + y = 2 + \sqrt{2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

$l$ රේඛාව ස්පර්ශ කරන $S'$ වෘත්තයක්, $S$ වෘත්තය $P$ ගෙන් ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍යයක දී බාහිර ව ස්පර්ශ කරයි. $(h, k)$ යනු $S'$ වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක යැයි ගනිමු. $l$ රේඛාව අනුබද්ධයෙන් O හි හා $S'$ හි කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සලකා බැලීමෙන්, $h + k < 2 + \sqrt{2}$ බව පෙන්වන්න.

S' හි කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක $h^2 - 2hk + k^2 + 4\sqrt{2}(h + k) = 8(\sqrt{2} + 1)$ සමීකරණය සපුරාලන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

17. (*a*) $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma - \cos(\alpha + \beta + \gamma) \equiv 4\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\beta + \gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma + \alpha)$
සර්වසාම්‍ය සාධනය කරන්න.

(*b*) $f(x) = 2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 4\cos^2\frac{x}{2}$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ යන්න $a\sin(x + \theta) + b$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න;

ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $a\ (> 0)$, b හා $\theta\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$1 \le f(x) \le 5$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{11\pi}{6}$ සඳහා $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(*c*) $P > 2q > 0$ යැයි ගනිමු.
$ABC$ ත්‍රිකෝණයක $BC$, $CA$ හා $AB$ පාදවල දිග පිළිවෙළින් $p + q$, $p$ හා $p - q$ වේ.

$\sin A - 2\sin B + \sin C = 0$ බව පෙන්වා $\cos\frac{A - C}{2} = 2\cos\frac{A + C}{2}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

*** ***

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය - 2013 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)

# General Certificate of Education (Adv. Level) Examination – August 2013 (New Syllabus)

සංයුක්ත ගණිතය II / පැය තුනයි

## Combined Mathematics II / Three hours

උපදෙස් :

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.
- **A කොටස** (ප්‍රශ්න 01 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17)
- **A කොටස**

  **සියලු ම** ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
- **B කොටස**

  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටස, B කොටසට** උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාගශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.
- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි $g$ මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දක්වෙයි.

### A කොටස

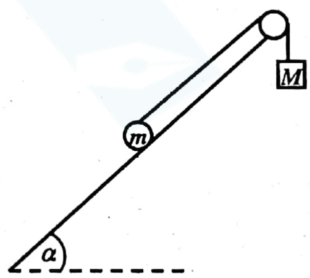
01. අංශුවක් $O$ ලක්ෂ්‍යයක සිට තිරසට $\frac{\pi}{3}$ කෝණයකින් $u$ වේගයකින් ගුරුත්වය යටතේ ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අංශුව $k$ දුරක් තිරස් ව ගමන් කළවිට $O$ හි මට්ටමට ඉහළින් එහි සිරස් දුර $h$ යැයි ගනිමු.

$\sqrt{3}k = h + \frac{2gk^2}{u^2}$ බව පෙන්වන්න.

02. පළල $b$ වූ වෑන් රථයක් ඒකාකාර $u$ ප්‍රවේගයෙන් ඍජු පාරක් දිගේ පදික වේදිකාවට සමාන්තර ව එහි ගෑවී නොගෑවී ගමන් කරයි. පිරිමි ළමයෙක් වෑන් රථයට $d$ දුරක් ඉදිරියෙන් පදික වේදිකාවේ සිට පාරට බැස, වෑන් රථයේ චලිත දිශාව සමඟ $\alpha$ සුළු කෝණයක් සාදන දිශාවට $v\,(< u \sec \alpha)$ ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් ඇවිද යයි. ළමයා, වෑන් රථයෙහි නො හැපී, යන්තමින් බේරෙයි නම්, $bu = (b \cos \alpha + d \sin \alpha)\, v$ බව පෙන්වන්න.

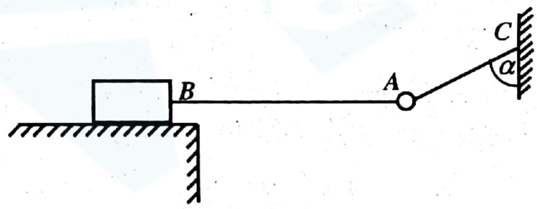
03. ස්කන්ධය $m$ වූ අංශුවක්, සුමට තිරස් මේසයක් මත නිසල ව ඇත. එක එකක ස්කන්ධය $2m$ වූ අංශු දෙකක් මේසය මත ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවලට $u$ හා $2u$ වේගවලින්, නිසල ව තිබෙන අංශුව දෙසට චලනය වෙමින් එය සමඟ එකවිට ගැටී හා වේ. ගැටුම්වලට පසු සංයුක්ත අංශුවේ වේගය සොයා, ගැටුම් නිසා සිදුවන චාලක ශක්ති හානිය $\frac{23}{5}mu^2$ බව පෙන්වන්න.

04. ස්කන්ධය $m$ වූ අංශුවක් තිරසට ආනතිය $\alpha$ වූ අවල සුමට තලයක් මත නිසල ව ඇති අතර එය, තලයේ ඉහළ ම කෙළවරෙහි වූ කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින්, නිදහසේ එල්ලෙන $M(M > m \sin \alpha)$ ස්කන්ධයකට සම්බන්ධ කර ඇත. රූපයේ දක්වා ඇති පරිදි, $M$ ස්කන්ධය කප්පිය ආසන්නයේ තබා ආනත තලයේ උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් දිගේ තන්තුව තදව, පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. ස්කන්ධය $m$ වූ අංශුව තලය දිගේ ඉහළට $d$ දුරක් චලනය වූ විට එහි වේගය $v$ යන්න $(M + m) v^2 = 2gd (M - m \sin \alpha)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.



05. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $O$ අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් $A$ හා $B$ ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{i}$ හා $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ යැයි ගනිමු. $C$ යනු, $A$ හරහා $OB$ ට සමාන්තර සරල රේඛාව මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ද ගනිමු. $\overrightarrow{OC} = (1 + \lambda)\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\lambda$ යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් වේ. $OB$ ට $BC$ ලම්බ වන පරිදි වූ $\lambda$ හි අගය සොයන්න.

06. රළු තිරස් මේසයක් මත නිසල ව ඇති බර $w_1$ වූ ලී කුට්ටියක්, සැහැල්ලු අවිතන්‍ය $BC$ තන්තුවකින් සිරස් බිත්තියක් මත පිහිටි කුඩා අචල ඇණයකට රූපයෙහි දක්වා ඇති පරිදි සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුවේ $A$ ලක්ෂ්‍යයක දී බර $w_2$ වූ අංශුවක් ගැටගසා ඇත්තේ $CA$ යටි අත් සිරස සමඟ $\alpha$ කෝණයක් සාදන පරිදි ය. $AB$ කොටස තිරස් නම් සහ කුට්ටිය සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ ඇත්නම්, $\mu w_1 = w_2 \tan \alpha$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mu$ යනු කුට්ටිය හා මේසය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ.



07. $A$, $B$ හා $C$ යනු $\Omega$ නියැදි අවකාශයක අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර හා නිරවශේෂ සිද්ධි තුනක් යැයි ගනිමු. $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, $P(B \cup C) = \frac{1}{2}$ හා $P(C \cup A) = \frac{2}{3}$ යන සම්භාවිතාවන් එකවිට තිබිය හැකි ද?

ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

08. $A$ හා $B$ යනු $\Omega$ නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. $P(A/B) = P(A/B')$ නම්, $A$ හා $B$ ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න; මෙහි $B'$ මගින් $B$ හි අනුපූරක සිද්ධිය දැක්වේ.

09. පහත දැක්වෙන නිරීක්ෂණ අටෙහි මධ්‍යන්‍යය හා මාතය පිළිවෙළින් 4 හා 6 වේ :

$$2,\ 3,\ 6,\ 2,\ 1,\ x,\ y,\ z.$$

මෙහි $x$, $y$ හා $z$ තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. $x$, $y$ හා $z$ හි අගයන් සොයා, නිරීක්ෂණ අටෙහි සම්මත අපගමනය ගණනය කරන්න.

........................................................................................................................................................................................................

10. සංඛ්‍යාත වගුවකට පළලින් සමාන පන්ති ප්‍රාන්තර පහක් ඇත. තෙවන පන්ති ප්‍රාන්තරයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය 22.5 වේ. පස්වන පන්ති ප්‍රාන්තරයේ උඩත් පන්ති මායිම 40 වේ. පළමු පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සිට අනුපිළිවෙළින් පන්ති ප්‍රාන්තරවල සංඛ්‍යාතයන් 7, 19, 27, 15 හා 2 වේ. ව්‍යාප්තියේ මාතය ගණනය කරන්න.

........................................................................................................................................................................................................

*** ***

## B කොටස

**(මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි $g$ මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දක්වෙයි.)**

11. (a) අංශුවක්, අචල දෘඪ තිරස් ගෙබිමක වූ ලක්ෂ්‍යයකින් සිරස් ව උඩු අතට $u$ ප්‍රවේගයකින් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. ගුරුත්වය යටතේ චලනය වීමෙන් පසු එය ගෙබිම හා ගැටෙයි. අංශුව හා ගෙබිම අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $e(0 < e < 1)$ වේ.

(i) තුන්වෙනි ගැටුම දක්වා අංශුවේ චලිතය සඳහා ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

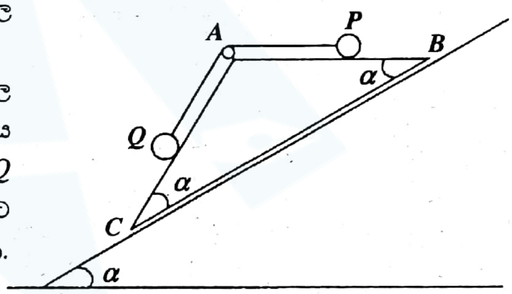
(ii) තුන්වෙනි ගැටුම දක්වා අංශුව ගන්නා කාලය $\dfrac{2u}{g}(1 + e + e^2)$ බව පෙන්වන්න.

(iii) නිශ්චලතාවයට පැමිණීමට අංශුව ගන්නා මුළු කාලය $\dfrac{2u}{g(1 - e)}$ බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(b) මුළු ස්කන්ධය මෙට්‍රික් ටොන් 300 ක් වූ දුම්රියක්, එන්ජිම ක්‍රියා විරහිත කර, තිරසට $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{98}\right)$ ආනතියක් ඇති සෘජු දුම්රිය මාර්ගයක් දිගේ පහළට නියත වේගයෙන් චලනය වේ. දුම්රියේ ඉහළට චලිතය කෙරෙහි ඝර්ෂණ ප්‍රතිරෝධයේ විශාලත්වය, පහළට චලිතයේ දී වූ නියත අගයේ ම පවතියි නම්, දුම්රිය නියත $54 \text{ km h}^{-1}$ වේගයකින් එම දුම්රිය මාර්ගයේ ම ඉහළට ඇදගෙන යාම සඳහා අවශ්‍ය ජවය $900 \text{ kW}$ බව පෙන්වන්න.

දුම්රිය සෘජු තිරස් මාර්ගයක, කලින් තිබුණු විශාලත්වය ම ඇති ප්‍රතිරෝධයක් සහිත ව $18 \text{ km h}^{-1}$ ක වේගයකින් ගමන් කරන විට එන්ජිම මෙම ජවය සහිත ව ක්‍රියා කරන බව උපකල්පනය කරමින් දුම්රියෙහි ත්වරණය සොයන්න.
[ගුරුත්වජ ත්වරණය $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ ලෙස ගන්න.]

12. (a) $ABC$ ත්‍රිකෝණය, ස්කන්ධය $M$ වූ ඒකාකාර සුමට කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය ඔස්සේ වූ සිරස් හරස්කඩකි. $AC$ හා $BC$ රේඛා අදාළ මුහුණත්වල වැඩිතම බෑවුම් රේඛා වන අතර, $BA$ හා $AC$ රේඛා $BC$ සමඟ සමාන $\alpha\ (0 < \alpha < \frac{\pi}{4})$ කෝණ සාදයි. තිරසට $\alpha$ කෝණයක ආනතියකින් යුතු අචල සුමට තලයක් මත BC අන්තර්ගත මුහුණත ඇතිව ද, $AB$ තිරස්ව ද කුඤ්ඤය රූපයේ දැක්වෙන පරිදි තබා ඇත. ස්කන්ධ පිළිවෙළින් $m_1$ හා $m_2$ වන $P$ හා $Q$ අංශු දෙකක්, පිළිවෙළින් $AB$ හා $AC$ මත තබා, $A$ ශීර්ෂයෙහි වූ කුඩා සුමට කප්පියක් උඩින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුව තද ව, පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙහි සිට මුදා හරිනු ලැබේ.




එක් එක් අංශුවේ කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂ ව ත්වරණයත්, කුඤ්ඤයේ ත්වරණයත් නිර්ණය කිරීම සඳහා $P$ අංශුවට $BA$ දිගේ ද, $Q$ අංශුවට $AC$ දිගේ ද, මුළු පද්ධතියට $BC$ දිගේ ද චලිත සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

$m_1 = m_2$ නම්, කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂ ව එක් එක් අංශුවේ ත්වරණය ශූන්‍ය වන බව ද, කුඤ්ඤයේ ත්වරණයේ විශාලත්වය $g \sin \alpha$ බව ද පෙන්වන්න.

(b) ස්කන්ධය $m$ වූ $P$ අංශුවක්, අරය $a$ හා කේන්ද්‍රය $O$ වූ අචල ගෝලයක සුමට බාහිර පෘෂ්ඨයේ ඉහළ ම ලක්ෂ්‍යයෙහි තබා ඇත. ස්කන්ධය $2m$ වූ වෙනත් $Q$ අංශුවක් තිරස් ව $u$ ප්‍රවේගයෙන් චලනය වෙමින් $P$ සමඟ සරල ලෙස ගැටෙයි. $P$ හා $Q$ අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\dfrac{1}{2}$ වේ. ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු $P$ අංශුවේ ප්‍රවේගය සොයන්න.

$OP$ අරය $\theta$ කෝණයකින් හැරී ඇති විට තවමත් $P$ අංශුව ගෝලය සමඟ ස්පර්ශ ව ඇතැ'යි උපකල්පනය කරමින්, $P$ අංශුව මත ගෝලය මගින් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\dfrac{m}{a}\,[ga\,(3 \cos \theta - 2) - u^2]$ බව පෙන්වන්න.

$u = \sqrt{ga}$ නම්, $Q$ සමඟ ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු $P$ අංශුව ගෝලීය පෘෂ්ඨය හැර යන බව ද පෙන්වන්න.

13. ස්කන්ධය $m$ වූ අංශුවක්, ස්වභාවික දිග $l$ වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක කෙළවරකට ඈඳා ඇති අතර, තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර අචල $O$ ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇත. අංශුව සමතුලිත ව එල්ලෙන විට තන්තුවේ විතතිය $\dfrac{l}{3}$ වේ. තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය සොයන්න.

අංශුව, $O$ ට $\frac{l}{2}$ දුරකින් සිරස් ව පහළින් වූ ලක්ෂ්‍යයේ තබා නිශ්චලතාවේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. $O$ සිට $l$ දුරකින් සිරස් ව පහළින් වූ $A$ ලක්ෂ්‍යය වෙත අංශුව ප්‍රථම වතාවට ළඟා වන විට එහි ප්‍රවේගය සොයන්න. $B$ යනු අංශුව ළඟා වන පහළ ම ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. $A$ සිට $B$ දක්වා අංශුවේ චලිතය සඳහා තන්තුවේ **විතතිය** $x$ යන්න $\ddot{x} + \frac{3g}{l}\left(x - \frac{l}{3}\right) = 0$ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න.

ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම් $x = \frac{l}{3} + \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$ ආකාරයේ බව උපකල්පනය කරමින්, $\alpha$, $\beta$ හා $\omega$ නියතවල අගයන් සොයන්න.

**ඒ නයින්,** අංශුව $A$ සිට $B$ දක්වා යෙදෙන සරල අනුවර්තී චලිතයේ කේන්ද්‍රය හා විස්තාරය සොයන්න.

මුදා හළ මොහොතේ සිට $\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right\}$ කාලයකට පසු ව අංශුව $B$ වෙත ළඟා වන බව පෙන්වන්න.

අංශුව, $B$ හි ඇතිවිට තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.

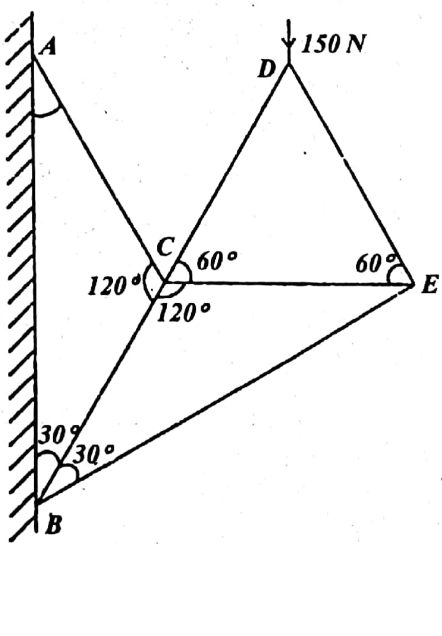
14. (a) $OABC$ යනු චතුරශ්‍රයක් යැයි ද, $D$ හා $E$ යනු පිළිවෙළින් $OB$ හා $AC$ විකර්ණවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යැයි ද ගනිමු. තව ද, $DE$ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $F$ යැයි ගනිමු. $O$ අනුබද්ධයෙන් $A$, $B$ හා $C$ ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ හා $\mathbf{c}$ යැයි ගනිමින්, $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ බව පෙන්වන්න.

$P$ හා $Q$ යනු පිළිවෙළින් $OA$ හා $BC$ පැතිවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යැයි ගනිමු. $P$, $F$ හා $Q$ ලක්ෂ්‍ය ඒකරේඛීය බව පෙන්වා $PF : FQ$ අනුපාතය සොයන්න.

(b) $ABCD$ යනු, පැත්තක දිග $2l$ හා $BD = 2l$ වූ රොම්බසයක් යැයි ගනිමු. රොම්බසයේ විකර්ණ $O$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී හමු වේ. විශාලත්ව නිව්ටන $2P$, $6P$, $4P$, $8P$ හා $6P$ වූ බල පිළිවෙළින් $AB$, $BC$, $DC$, $DA$ හා $BD$ දිගේ, අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරයි. $\overrightarrow{OC}$ හා $\overrightarrow{OD}$ දිශාවලට බල පද්ධතිය විභේදනය කර, සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව $BC$ ට සමාන්තර වන බව පෙන්වන්න.
පද්ධතියේ $O$ වටා ඝූර්ණයත් සොයන්න.
සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාවට $E$ ලක්ෂ්‍යයේ දී දික් කරන ලද $AB$ හමු වේ නම්, $BE = 2l$ බව පෙන්වන්න. දැන්, නිව්ටන $\alpha P$, $\beta P$, $\gamma P$ හා $\alpha P$ විශාලත්ව සහිත අතිරේක බල පිළිවෙළින් $EB$, $CE$, $CA$ හා $DC$ දිගේ, අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරයි. මුළු පද්ධතිය සමතුලිතතාවයේ ඇත්නම් $\alpha$, $\beta$ හා $\gamma$ හි අගයන් සොයන්න.

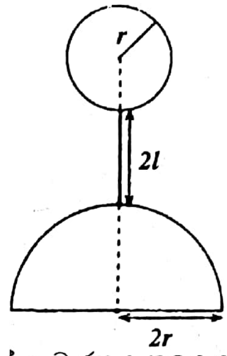
15. (a) එක එකක දිග $2a$ හා බර $w$ වූ $AB$, $BC$ හා $CA$ ඒකාකාර දඬු තුනක් $ABC$ සමපාද ත්‍රිකෝණයක් සෑදෙන පරිදි ඒවායේ කෙළවරවල දී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. $A$ ශීර්ෂය අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත්තේ ත්‍රිකෝණයට සිරස් තලයක නිදහසේ භ්‍රමණය වීමට හැකි වන පරිදි ය. ත්‍රිකෝණයේ තලයෙහි, $BC$ ට ලම්බ ව $B$ හි දී යෙදූ $P$ බලයකින් ත්‍රිකෝණය, $AB$ තිරස්ව හා $AB$ ට පහළින් $C$ තිබෙන පරිදි, අල්ලා තබා ඇත. $P$ හි අගය සොයන්න.
$C$ හි දී $AC$ මගින් $BC$ මත යෙදෙන බලයේ තිරස් හා සිරස් සංරචකත් සොයන්න.

(b) යාබද රූප සටහනින් අන්තවල දී සුමට ලෙස සන්ධි කරන ලද සැහැල්ලු දඬු හයකින් සමන්විත රාමු සැකිල්ලක් නිරූපණය වේ. එය සිරස් බිත්තියකට $A$ හා $B$ හි දී සුමට ව අසව් කර ඇති අතර, $D$ හි දී 150 N භාරයක් දරයි. බෝ අංකනය යෙදීමෙන් ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් ඇඳ, **ඒ නයින්,** දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල, ආතති හෝ තෙරපුම් වශයෙන් දක්වමින්, නිර්ණය කරන්න.



16. අරය $a$ වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, එහි සමමිතික අක්ෂය මත, ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3a}{8}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

එක ම ඒකාකාර ද්‍රව්‍යයකින් සෑදි ඝන අර්ධ ගෝලයක් හා ඝන ගෝලයක්, දිග $2l$ සහ ස්කන්ධය $m$ වූ ඒකාකාර දණ්ඩක දෙකෙළවරට, රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට අර්ධ ගෝලයේ සමමිතික අක්ෂය, දණ්ඩ හා ගෝලයේ කේන්ද්‍රය එක ම සරල රේඛාවක් මත පිහිටන පරිදි දෘඪ ලෙස සවි කිරීමෙන්, සංයුක්ත වස්තුවක් සාදා ඇත. ගෝලයේ අරය $r$ ද, ස්කන්ධය $m$ ද වන අතර, අර්ධ ගෝලයේ අරය $2r$ වේ. සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, අර්ධ ගෝලයේ ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{1}{6}(8r+3l)$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.




මෙම සංයුක්ත වස්තුව තිරසට $\theta$ කෝණයකින් ආනත අචල තලයක් මත, අර්ධ ගෝලයේ ආධාරකය තලය ස්පර්ශ කරමින් තබා ඇත. ලිස්සා යාම වැළැක්වීමට ප්‍රමාණවත් තරම් තලය රළු යැයි උපකල්පනය කරමින්, $\tan\theta < \frac{12r}{8r+3l}$ නම් සංයුක්ත වස්තුව නොපෙරළෙන බව පෙන්වන්න.

$l=\frac{4r}{3}$ හා $\theta=\frac{\pi}{6}$ නම්, සංයුක්ත වස්තුව නොපෙරළෙන බව පෙන්වා සංයුක්ත වස්තුව මත ආනත තලය මගින් යොදන අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය සොයන්න.

17. (*a*) පාසලක එක්තරා විභාගයකට පෙනී සිටි සිසුන් 100 දෙනකු පිළිබඳ සමීක්ෂණයකට අනුව, එම සිසුන්ගෙන් 48 දෙනකු විභාගය සමත් වී ඇති බව අනාවරණය විය. තව ද, මෙම සිසුන් 100 දෙනා අතුරෙන් 50 දෙනකු පාසලේ දී ක්‍රීඩා කටයුතු සඳහා සහභාගි වී ඇති බව ද, 30 දෙනකු පාසලේ දී සංගීත කටයුතු සඳහා සහභාගි වී ඇති බව ද, කිසිම සිසුවකු ක්‍රීඩා කටයුතු හා සංගීත කටයුතු යන දෙකට ම සහභාගි වී නොමැති බව ද අනාවරණය විය. තව ද, පාසලේ දී ක්‍රීඩා කටයුතු සඳහා සහභාගි වූ සිසුන්ගෙන් 60% ක් විභාගය සමත් වී ඇති අතර පාසලේ දී ක්‍රීඩා කටයුතු හෝ සංගීත කටයුතු සඳහා සහභාගි නො වූ සිසුන්ගෙන් 30% ක් විභාගය සමත් වී ඇත.
ඉහත සිසුන් 100 දෙනාගෙන් එක් සිසුවකු සසම්භාවී ව තෝරා ගනු ලැබේ. මෙම සිසුවා
(i) පාසලේ දී සංගීත කටයුතු සඳහා සහභාගි වූ අයකු බව දී ඇති විට, ඔහු විභාගය සමත් අයකු වීමේ,
(ii) විභාගය සමත් වූ අයකු බව දී ඇති විට, පාසලේ දී ඔහු ක්‍රීඩා කටයුතු සඳහා සහභාගි වූ අයකු වීමේ
සම්භාවිතාව සොයන්න.

(*b*) කුඩා ලෝහ බෝල 50 කින් සමන්විත කුලකයක විෂ්කම්භවල සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වෙන වගුවේ දී ඇත :

| විෂ්කම්භය (cm) | කුඩා බෝල සංඛ්‍යාව |
|---|---|
| 0.80 - 0.81 | 1 |
| 0.81- 0.82 | 3 |
| 0.82 - 0.83 | 9 |
| 0.83 - 0.84 | 20 |
| 0.84 - 0.85 | 14 |
| 0.85 - 0.86 | 2 |
| 0.86 - 0.87 | 1 |

විෂ්කම්භවල ව්‍යාප්තියේ පළමු චතුර්ථකය ගණනය කරන්න.

මෙම ලෝහ බෝල 50 කින් සමන්විත කුලකයේ විෂ්කම්භවල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය 0.835 cm හා 0.01 cm බව දී ඇත. කුඩා ලෝහ බෝල 100 ක තවත් කුලකයක් සඳහා විෂ්කම්භවල මධ්‍යන්‍යය පළමු ලෝහ බෝල 50 හි කුලකයේ විෂ්කම්භවල මධ්‍යන්‍යය ම බව ද සම්මත අපගමනය 0.015 cm බව ද දී ඇත.

ලෝහ බෝල 150 හි සංයුක්ත කුලකයේ විෂ්කම්භවල මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව සොයන්න.

දෙවන ලෝහ බෝල 100 ක කුලකය සඳහා මිනුම් ගැනීමේ දී භාවිත කරනු ලැබූ උපකරණය දෝෂ සහිත බව ද එමගින් එක් එක් බෝලයක විෂ්කම්භය 0.015 cm ප්‍රමාණයකින් අවතක්සේරු වී ඇති බව ද පසු ව සොයා ගනු ලැබිණ. මෙම ලෝහ බෝල 100 හි විෂ්කම්භයන්හි සත්‍ය මධ්‍යන්‍යය හා සත්‍ය සම්මත අපගමනය සොයන්න.

*** ***

## A - කොටස

**01.** n = 1 විට L.H.S. $= \sum_{r=1}^{1} (2r + 1) = 3$ හා

R.H.S. $= 1(1 + 2) = 3$

$\therefore$ n = 1 විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

දැන් ඕනෑම $P \in \mathbb{Z}^+$ විට n = P සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යයි. උපකල්පනය කරමු.

එවිට $\sum_{r=1}^{p} (2r + 1) = P(P + 2)$ වේ.

දැන් $\sum_{r=1}^{p+1} (2r + 1) = \sum_{r=1}^{p} (2r + 1) + 2(P + 1) + 1$

$$= P(P + 2) + 2P + 3$$
$$= P^2 + 4P + 3 = (P + 1)(P + 3)$$
$$= (P + 1)(P + 1 + 2)$$

$\therefore$ n = p වන විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම්, n = P + 1 විට ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. n = 1 ට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බැවින් ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු ධන නිඛිලමය n සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

**02.** $\frac{2x + 1}{3x - 1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x + 1}{3x - 1} - 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2x + 1 - (3x - 1)}{3x - 1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - x}{3x - 1} \geq 0$$

| | $x < \frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3} < x < 2$ | $x = 2$ | $2 < x$ |
|---|---|---|---|---|
| $2 - x$ | (+) | (+) | 0 | (-) |
| $3x - 1$ | (-) | (+) | (+) | (+) |
| $\frac{2 - x}{3x - 1}$ | (-) | (+) | 0 | (-) |

$\therefore$ අදාළ විසඳුම් කුලකය

$$\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{3} < x \leq 2 \}$$

**03.** $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ශ්‍රේණියේ n වන පදය $a_n$ ලෙස ද,

$S_n = 6 - \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $a_n = S_n - S_{n-1}$

$$= \left(6 - \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}\right) - \left(6 - \frac{2^n}{3^{n-2}}\right)$$

$$= \frac{2^n}{3^{n-2}} \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2^n}{3^{n-1}}$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

මෙය $ar^{n-1}$ ආකාර වේ.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ මුල් පදය 2 වූ පොදු අනුපාතය $\frac{2}{3}$ ක් වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියකි.

මෙහි $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ බැවින් ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ.

**04.** $\left(x + \frac{a}{x^3}\right)^{20} = \sum_{r=0}^{20} {}^{20}C_r \, x^{20-r} \left(\frac{a}{x^3}\right)^r$ මෙහි ${}^{20}C_r = \frac{20!}{r!(20-r)!}$

$$= \sum_{r=0}^{20} {}^{20}C_r \, a^r x^{20-4r} \qquad r = 0, 1, 2, \ldots 20$$

x වලින් ස්වායත්ත පදයක් වනවිට

$20 - 4r = 0 \quad \Leftrightarrow r = 5$

$\therefore$ x වලින් ස්වායත්ත පදය $= {}^{20}C_5 \, a^5$ වේ.

එවිට ${}^{20}C_5 \, a^5 = \frac{969}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{20!}{5!\,15!} a^5 = \frac{969}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^5 = \frac{969}{2} \times \frac{5!\,15!}{20!}$$

$= \frac{1}{32}$ (සුළු කිරීමෙන්)

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

**05.** $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 x/2}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}} \left(\frac{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 (x/2)}{2x^2} \left(\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{4} \frac{\sin^2 (x/2)}{(x/2)^2} \left(\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \left[\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x/2)}{(x/2)}\right]^2 \cdot \lim_{x \to 0} \left(\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \times 1 \times 2$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

**06.** $\frac{d}{dx} \{x \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})\}$

$$= \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) + \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) + \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$$

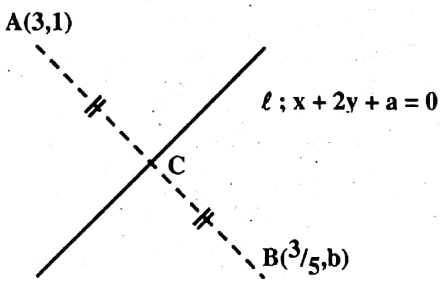
$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\frac{d}{dx} \left(x \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\therefore \int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx = x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}+C$$

<u>මෙහි C අභිමත නියතයකි.</u>

07. 


AB සරල රේඛාවේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය C නම්,

$$C \equiv \left(\frac{3+{}^{3}/_{5}}{2}, \frac{1+b}{2}\right) = \left(\frac{9}{5}, \frac{1+b}{2}\right)$$

C ලක්ෂ්‍යය $\ell$ රේඛාව මත බැවින්,

$$\frac{9}{5} + (1+b) + a = 0$$

$$\therefore a + b = -\frac{14}{5} \quad — ①$$

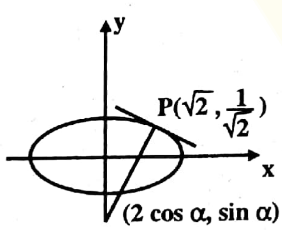
AB $\perp$ $\ell$ බැවින්

$$\left(\frac{b-1}{{}^{3}/_{5}-3}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$(b-1) = 2 \times \left(-\frac{12}{5}\right)$$

$$\therefore b = \frac{-24}{5} + 1 = \frac{-19}{5}$$

<u>එවිට ① න් a = 1</u>

08. 


$\theta = {}^{\pi}/_{4}$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යය P නම්

$$P = \left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$x = 2\cos\theta$ හා $y = \sin\theta$ බැවින්,

$$\frac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta \text{ හා } \frac{dy}{d\theta} = \cos\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos\theta}{2\sin\theta} = -\frac{1}{2}\cot\theta$$

P හි දී වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය $= -\frac{1}{2}$

$$\left(\therefore \cot\frac{\pi}{4} = 1\right)$$

P හි දී වක්‍රයට ඇඳි අභිලම්බයේ අනුක්‍රමණය = 2

එම අභිලම්බයේ සමීකරණය $y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 2(x - \sqrt{2})$

අභිලම්බයට $(2\cos\alpha, \sin\alpha)$ හි දී නැවත C වක්‍රය හමුවන බැවින්,

$$\sin\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} = 2(2\cos\alpha - \sqrt{2})$$

$$2\sin\alpha - 8\cos\alpha + 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$$

$$2\sin\alpha - 8\cos\alpha + 3\sqrt{2} = 0$$

09. අවශ්‍ය වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $x + y = 0$ මත බැවින් එය $(t, -t)$ ආකාරයට t පරාමිතියක් මගින් දැක්විය හැක. මෙහි $t \in \mathbb{R}$

මෙම වෘත්තයේ අරය ඒකක 1 ක් වන විට එහි සමීකරණය $(x-t)^2 + (y+t)^2 = 1$

එනම්, $x^2 + y^2 - 2tx + 2ty + 2t^2 - 1 = 0$ වේ.

මෙය $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ ප්‍රලම්භක ව ඡේදනය කරන බැවින්

$$2(t)(2) = (2t^2 - 1) + 3$$

$$2t^2 - 4t + 2 = 0$$

එනම් $(t-1)^2 = 0$

$\therefore$ $t = 1$

<u>C හි කේන්ද්‍රය $\equiv (1, -1)$</u>

10. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ බැවින්,

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \quad \left(\because \sin\theta = -\frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore \cos\theta = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ බැවින් $\cos\theta = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$

දැන් $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$= 2\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

තවද $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$

$$\therefore \tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \times \frac{9}{7} = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{2}}{7}}}$$

## B - කොටස

11. (*a*) $f(x) = ax^3 + bx^2 - 11x + 6$

(x - 1) සාධකයක් බැවින් f(1) = 0 වේ. (සාධක ප්‍රමේයය විලෝමය)

එනම් $a + b - 11 + 6 = 0 \Rightarrow a + b = 5$ —— ①

ශේෂ ප්‍රමේයයට අනුව f(x), (x - 4) න් බෙදූ විට ශේෂයක් -6 බැවින් f (4) = -6

එනම් $64a + 16b - 44 + 6 = -6 \Rightarrow 64a + 16b = 32$

එනම් $4a + b = 2$ —— ②

② - ① න් a = -1 හා b = 6 බව ලැබේ.

එවිට $-x^3 + 6x^2 - 11x + 6 = (x-1)(px^2 + qx + r)$ වේ.

අනුරූප සංගුණක සමාන කිරීමෙන් p = -1, r = -6, q = 5 බව ලැබේ.

$$\begin{aligned} \text{එවිට } f(x) &= (x-1)(-x^2+5x-6) \\ &= -(x-1)(x^2-5x+6) \\ &= -(x-1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

මේ අනුව (x - 1) ට අමතර ව f(x) හි අනෙක් ඒකජ සාධක දෙක වන්නේ (x - 2) හා (x - 3) ය.

(*b*) $x^2 + bx + c = 0$ හි මූල α හා β බැවින්,

$\alpha + \beta = -b \quad \alpha\beta = c$

ඒ ආකාරයට ම $\gamma + \delta = -m \quad \gamma\delta = n$

(i)
$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^2 &= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \\ &= (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= b^2 - 4c \end{aligned}$$

මේ ආකාරයට ම $(\gamma - \delta)^2 = m^2 - 4n$ වේ.

$\alpha + \gamma = \beta + \delta$ බැවින්

$\alpha - \beta = \delta - \gamma$

වර්ග කිරීමෙන් $(\alpha - \beta)^2 = (\delta - \gamma)^2$

$= (\gamma - \delta)^2$

ලෙස ද ලිවිය හැක.

එවිට ඉහත ප්‍රතිඵලවලට අනුව

$$b^2 - 4c = m^2 - 4n$$

(ii)
$$\begin{aligned} &(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta) \\ &= (\alpha^2 - \alpha\gamma - \alpha\delta + \gamma\delta)(\beta^2 - \beta\delta - \beta\gamma + \gamma\delta) \\ &= [\alpha^2 - \alpha(\gamma+\delta) + \gamma\delta][\beta^2 - \beta(\gamma+\delta) + \gamma\delta] \\ &= [\alpha^2 + m\alpha + n][\beta^2 + m\beta + n] \\ &= \alpha^2\beta^2 + m^2\alpha\beta + n^2 + m\alpha^2\beta + m\alpha\beta^2 + \\ &\qquad n\alpha^2 + n\beta^2 + m\alpha n + m\beta n \\ &= c^2 + m^2c + n^2 + m\alpha\beta(\alpha+\beta) + n[(\alpha+\beta)^2 \\ &\qquad - 2\alpha\beta] + mn(\alpha+\beta) \\ &= c^2 + m^2c + n^2 - mbc + n(b^2 2c) - mnb \\ &= c^2 - 2cn + n^2 + nb^2 - mnb + m^2c - mbc \\ &= (c-n)^2 + nb(b-m) + mc(m-b) \\ &= (c-n)^2 + nb(b-m) - mc(b-m) \\ &= (c-n)^2 + (b-m)(nb-mc) \\ &= (c-n)^2 + (b-m)(bn-cm) \end{aligned}$$

දී ඇති සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත්තේ, $\alpha = \gamma$ හෝ $\alpha = \delta$ හෝ $\beta = \gamma$ හෝ $\beta = \delta$ හෝ ම නම් පමණි.

$\Leftrightarrow (\alpha - \gamma)$ හෝ $(\alpha - \delta)$ හෝ $(\beta - \gamma)$ හෝ $(\beta - \delta)$ හෝ වලින් එකක්වත් ශූන්‍ය වේ.

$\Leftrightarrow (c-n)^2 + (b-m)(bn-cm) = 0$

$\Leftrightarrow (c-n)^2 = (m-b)(bn-cm)$

$x^2 + 10x + k = 0$ හා $x^2 + kr + 10 = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත්නම් ඉහත ප්‍රතිඵලයේ

b = 10, c = k, m = k, n = 10 ආදේශයෙන්

$$\begin{aligned} &(k-10)^2 = (k-10)(100-k^2) \\ &(k-10)^2 - (k-10)(100-k^2) = 0 \\ &(k-10)(k-10-100+k^2) = 0 \\ &(k-10)(k^2+k-110) = 0 \\ &(k-10)(k-10)(k+11) = 0 \end{aligned}$$

එවිට k = 10 හෝ k = -11 විය යුතු ය.

12. (*a*) (i) විද්‍යා සිසුන් 3; කලා සිසුන් 5; වාණිජ සිසුන් 7 ; සිසුන් 15 දෙනා ම සුදුසු විට ඔවුන් අතරින් 6 ක් තෝරාගත හැකි ආකාර ගණන = ${}^{15}C_6$

$$\begin{aligned} &= \frac{15!}{6!\,9!} \\ &= \frac{\cancel{15}^{3} \times \cancel{14}^{7} \times 13 \times \cancel{12} \times 11 \times \cancel{10}^{5} \times \cancel{9!}}{\cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{9!}} \\ &= 91 \times 55 \\ &= \underline{5005} \end{aligned}$$

(ii) එකට වැඩ කිරීමට අවසර නැති සිසුන් දෙදෙනා A හා B යයි ගනිමු.

ඔවුන් දෙදෙනා ම ඇතුළු කර, තවත් සිසුන් 4 ක් ඉතිරි 13 දෙනාගෙන් තෝරාගත හැකි ආකාර ගණන $= {}^2C_2 \times {}^{13}C_4$

$= 1 \times \dfrac{13!}{4! \times 9!} = 715$

එවිට A හා B දෙදෙනා ම එකවර ඇතුළු නොවන පරිදි 6 ක් තෝරාගත හැකි ආකාර ගණන = 5005 - 715

$= \underline{4290}$

(iii) එක් එක් විෂය ධාරාවෙන් දෙදෙනා බැගින් 6 ක් තෝරාගත හැකි ආකාර

ගණන $= {}^3C_2 \times {}^5C_2 \times {}^7C_2$

$= 3 \times 10 \times 21$

$= \underline{\underline{630}}$

තෝරාගත් හය දෙනා A, B, C, D, E හා F යයි ද, විද්‍යා ධාරාවේ දෙදෙනා A හා B යයි ද සිතමු.

එවිට ඔවුන් 6 දෙනාට වෘත්තාකාර මේසයක් වටේ වාඩි විය හැකි ආකාර ගණන $= (6 - 1)\,!$
$= 120$

A හා B එක ළඟ වන පරිදි වාඩිවිය හැකි ආකාර ගණන (එක් අයෙකු දෙපස අනෙකා)
$= 2$

ඉතිරි C, D, E, F හතරදෙනාට වාඩි විය හැකි ආකාර $= 4\,!$

$\therefore$ A හා B එක ළඟවන පරිදි හය දෙනාට වාඩිවිය හැකි ආකාර $= 2 \times 4! = 48$

A හා B එක ළඟ නොවන පරිදි හයදෙනාට වාඩිවිය හැකි ආකාර ගණන
$= 120 - 48 = 72$

(*b*) $U_r = \dfrac{3(6r+1)}{(3r-1)^2(3r+2)^2}$ $r, n \in \mathbb{Z}^+$ වේ.

$$\frac{3(6r+1)}{(3r-1)^2(3r+2)^2} = \frac{A}{(3r-1)^2} + \frac{B}{(3r+2)^2}$$

$$\frac{3(6r+1)}{(3r-1)^2(3r+2)^2} = \frac{A(3r+2)^2 + B(3r-1)^2}{(3r-1)^2(3r+2)^2}$$

අනුරූප සංගුණක සමාන කිරීමෙන්,

$r^2$ පද ; $0 = 9A + 9B$ — ①

$r$ පද ; $18 = 12A - 6B$ — ②

නියත පද ; $3 = 4A + B$ — ③

(සැ. යු. r ධන නිඛිලයක් බව දී ඇති නිසා සුපුරුදු ලෙස $r = \dfrac{1}{3}$ හා $r = \dfrac{-2}{3}$ ආදේශ කිරීමෙන් වැලකී සිටිය යුතු ය.)

① න් $A + B = 0$

② න් $2A - B = 3$

$A = 1, B = -1$ බව ලැබේ.

එවිට $\dfrac{3(6r+1)}{(3r-1)^2(3r+2)^2} = U_r = \dfrac{1}{(3r-1)^2} - \dfrac{1}{(3r+2)^2}$

$f(r) = \dfrac{1}{(3r-1)^2}$ ලෙස ගත් විට,

$f(r+1) = \dfrac{1}{(3r+2)^2}$ වේ.

එවිට $U_r = f(r) - f(r+1)$

$r = 1\,;\ U_1 = f(1) - \cancel{f(2)}$

$r = 2\,;\ U_2 = \cancel{f(2)} - \cancel{f(3)}$

$r = 3\,;\ U_3 = \cancel{f(3)} - \cancel{f(4)}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$r = n-1\,;\ U_{n-1} = \cancel{f(n-1)} - \cancel{f(n)}$

$r = n\,;\ U_n = \cancel{f(n)} - f(n+1)$

එවිට $U_1 + U_2 + \dots + U_n = f(1) - f(n+1)$

$$\therefore S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{(3n+2)^2}$$

$\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ.

$\because n \to \infty$ විට $\dfrac{1}{(3n+2)^2} \to 0$ නිසා $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \dfrac{1}{4}$

මෙය පරිමිත අගයක් බැවින් අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ.

$\left|S_n - \dfrac{1}{4}\right| < 10^{-6}$ ; $\left|S_n - \dfrac{1}{4}\right| = \dfrac{1}{(3n+2)^2}$ බැවින්

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{(3n+2)^2} < \dfrac{1}{10^6}$

$\Leftrightarrow 10^6 < (3n+2)^2$

$\Leftrightarrow 10^3 < 3n + 2$ $\quad n \in \mathbb{Z}^+$ නිසා

$\Leftrightarrow 1000 - 2 < 3\,n$ $\quad n \in \mathbb{Z}^+$

$\Leftrightarrow 998 < 3\,n$ $\quad n \in \mathbb{Z}^+$

$\therefore n = 333$ මෙය n හි අවම නිඛිලමය අගයයි.

13. (*a*) $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ නිසා Q හි පෙරළුම $Q^T$ නම්,

$Q^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$Q^T Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= 2I$

$Q^TQ = 2I$ නිසා $\lambda = 2$ වේ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2I$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

දැන් $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ බැවින්

$$\therefore P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$AP = PD \Rightarrow APP^{-1} = PDP^{-1}$$
$$\Rightarrow A = PDP^{-1}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}}}$$

(*b*) $Z = x + iy \,;\, x, y \in \mathbb{R}$

$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ වන අතර $\overline{Z} = x - iy$ වේ.

$|Z|^2 = x^2 + y^2$ — ①

$Z\overline{Z} = (x + iy)(x - iy)$

$= x^2 + y^2$ — ②

① හා ② න් $|Z|^2 = Z\overline{Z}$

$Z - \overline{Z} = x + iy - (x - iy)$

$= x + iy - x + iy$

$= 2iy$

$= \underline{\underline{2i\,\mathrm{Im}\,z}}$

($\because \mathrm{Im}\,Z = \mathrm{Im}\,(x + iy) = y$ නිසා)

$|Z - 3i|^2 = (Z - 3i) \times \overline{(Z - 3i)}$

$= (Z - 3i)(\overline{Z} + 3i)$ $(\because \overline{Z_1 - Z_2} = \overline{Z}_1 - \overline{Z}_2)$

$= Z\overline{Z} + 3iZ - 3i\overline{Z} - 9i^2$

$= |Z|^2 + 3i(Z - \overline{Z}) + 9$

$= |Z|^2 + 3i(2i\,\mathrm{Im}Z) + 9$

$= |Z|^2 + 6i^2\mathrm{Im}Z + 9$

$= |Z|^2 - 6\mathrm{Im}Z + 9$

$|1 + 3iz|^2 = (1 + 3iZ)\overline{(1 + 3iZ)}$

$= (1 + 3iZ)(1 - 3i\overline{Z})$

$= 1 + 3iZ - 3i\overline{Z} - 9i^2Z\overline{Z}$

$= 1 + 3i(Z - \overline{Z}) + 9|Z|^2$

$= 1 + 3i(2i\,\mathrm{Im}\,Z) + 9|Z|^2$

$= 1 + 6i^2\,\mathrm{Im}Z + 9|Z|^2$

$= 9|Z|^2 - 6\mathrm{Im}Z + 1$

$|Z - 3i| > |1 + 3iZ| \Leftrightarrow |Z - 3i|^2 > |1 + 3iZ|^2$

ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන්,

$\Leftrightarrow |Z|^2 - 6\mathrm{Im}Z + 9 > 1 - 6\mathrm{Im}Z + 9|Z|^2$

$\Leftrightarrow \quad 0 > 8|Z|^2 - 8$

$\Leftrightarrow \quad 0 > |Z|^2 - 1$

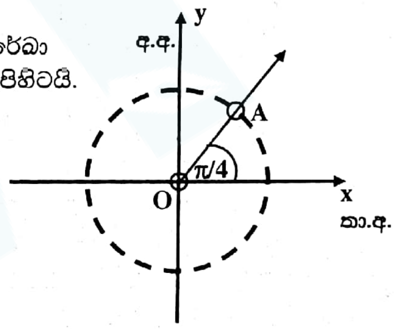
$\Leftrightarrow \quad 1 > |Z|^2$

$\Leftrightarrow \quad |Z| < 1$

$|Z - 3i| > |1 + 3iZ| \Leftrightarrow |Z| < 1$ බැවින් Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව, කේන්ද්‍රය 0 මූල ලක්ෂ්‍යය හා අරය ඒකක 1 වන වෘත්තය තුළ වේ.

arg Z = $^{\pi}/_{4}$ යනු 0 මූල ලක්ෂ්‍යයේ සිට විහිදෙන තාත්ත්වික අක්ෂයේ ධන දිශාව සමඟ වාමාවර්ත ව $^{\pi}/_{4}$ කෝණයක් සාදන සරල රේඛාවකි.

O හා A අතර රේඛා ඛණ්ඩය මත Z පිහිටයි.




14. (*a*) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - 1} \;;\; x \neq 1$

x = 1 විට ශ්‍රිතය අර්ථ නොදක්වේ.

x විෂයයේ අවකලනයෙන්

$$f'(x) = \frac{(x^3 - 1) \times 2x - x^2 \times 3x^2}{(x^3 - 1)^2} = \frac{-2x - x^4}{(x^3 - 1)^2} = \frac{-x(2 + x^3)}{(x^3 - 1)^2}$$

වර්තන ලක්ෂ්‍යවල දී $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ හෝ $x = (-2)^{1/3}$

| x | $x < -2^{\frac{1}{3}}$ | $-2^{\frac{1}{3}} < x < 0$ | $0 < x < 1$ | $1 < x$ |
|---|---|---|---|---|
| f'(x) හි සලකුණ | (-) | (+) | (-) | (-) |
| f(x) | අඩු වේ. | වැඩි වේ. | අඩු වේ. | අඩු වේ. |

$x = -2^{1/3}$ විට අවමයකි. $x = 0$ විට උපරිමයකි.

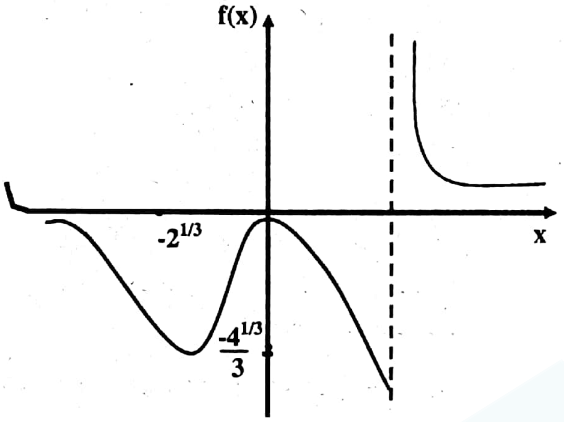
$f(-2^{1/3}) = -\dfrac{2^{2/3}}{3} = \dfrac{-4^{1/3}}{3}$ $\quad f(0) = 0$

$\therefore$ (0, 0) හා $(-2^{1/3}, -4^{1/3}/_3)$ හි දී වක්‍රයට හැරුම් ලක්ෂ්‍යය පවතී.

$x = 1$ විට අර්ථ නොදක්වෙන බැවින් $h \to 0^+$ විට
$x = 1 - h$ විට $f(1 - h) \to -\infty$ හා
$f(1 + h) \to +\infty$ වේ.

$f(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^3}}$ බැවින් $x \to +\infty$ $f(x) \to 0^+$
$x \to -\infty$ $f(x) \to 0^-$

$\left(-2^{1/3}, \dfrac{-4^{1/3}}{3}\right)$ විට අවමයක් ද, $(0, 0)$ විට උපරිමයක් ද ඇත. එවිට දළ ප්‍රස්තාරය පහත දැක්වේ.




(*b*) රූපයේ දැක්වෙන ගෙවත්තේ පරිමිතිය P නම්,

$P = 18x + 4y$ —— ①

ගෙවත්තේ වර්ගඵලය ; $800 = 4xy + 8x^2$ —— ②

② න් $y = \dfrac{200}{x} - 2x$

$$\therefore P = 18x + \frac{800}{x} - 8x$$
$$= 10x + \frac{800}{x}$$
$$y = \frac{2(100 - x^2)}{x}$$

$x > 0$ හා $y > 0$ බැවින් $100 - x^2 > 0$

$\Rightarrow x^2 < 100 \Rightarrow x < 10$ $(\because x > 0)$

$\therefore 0 < x < 10$

දැන් $\dfrac{d(P)}{dx} = 10 - \dfrac{800}{x^2}$

$$\frac{d(P)}{dx} = 0 \Leftrightarrow 10 - \frac{800}{x^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 80$$
$$\Leftrightarrow x = 4\sqrt{5}$$

| $x$ | $0 < x < 4\sqrt{5}$ | $4\sqrt{5} < x < 10$ |
|---|---|---|
| $\dfrac{d(P)}{dx}$ | (-) | (+) |
| | P අඩු වේ. | P වැඩි වේ. |

$\therefore$ $x = 4\sqrt{5}$ විට P අවම අගයක් ගනී.

$\therefore$ අවම පරිමිතිය $= 10 \times 4\sqrt{5} + \dfrac{800}{4\sqrt{5}}$
$$= 40\sqrt{5} + 40\sqrt{5}$$
$$= \underline{\underline{80\sqrt{5}\ m}}$$

**15.** (a) $\int x^2 \sin^{-1} x\, dx = \int \sin^{-1} x\, d\left(\dfrac{x^3}{3}\right)$

$$= \frac{x^3}{3}\sin^{-1} x - \int \frac{x^3}{3}\, d(\sin^{-1} x)$$
$$= \frac{x^3}{3}\sin^{-1} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$
$$= \frac{x^3}{3}\sin^{-1} x + \frac{1}{3}\int x^2\, d\sqrt{1 - x^2}$$
$$= \frac{x^3}{3}\sin^{-1} x + \frac{1}{3}\left[x^2\sqrt{1 - x^2} - \int \sqrt{1 - x^2}\, d(x^2)\right]$$
$$= \frac{x^3}{3}\sin^{-1} x + \frac{1}{3}\left[x^2\sqrt{1 - x^2} - \int \sqrt{1 - x^2}\, .\, 2x\, dx\right]$$
$$= \frac{x^3}{3}\sin^{-1} x + \frac{1}{3}\left[x\sqrt{1 - x^2} + \frac{2}{3}(1 - x^2)^{3/2}\right] + c$$
$$= \frac{x^3}{3}\sin^{-1} x + \frac{1}{3}x\sqrt{1 - x^2} + \frac{2}{9}(1 - x^2)^{3/2} + c$$

<u>c අභිමත නියතයකි.</u>

(*b*) $\dfrac{x^2 + 3x + 4}{(x^2 - 1)(x + 1)^2} = \dfrac{x^2 + 3x + 4}{(x - 1)(x + 1)^3}$

$$\frac{x^2 + 3x + 4}{(x - 1)(x + 1)^3} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x + 1)} + \frac{C}{(x + 1)^2} + \frac{D}{(x + 1)^3}$$

$$x^2 + 3x + 4 \equiv A(x + 1)^3 + B(x - 1)(x + 1)^2 + C(x - 1)(x + 1) + D(x - 1)$$

$x = 1$ ; $8 = 8A \Rightarrow A = 1$

$x = -1$ ; $2 = -2D \Rightarrow D = -1$

$x^3$ හි සංගුණක සැසඳීමෙන් $0 = A + B \Rightarrow B = -A = -1$

$x^2$ හි සංගුණක සැසඳීමෙන් $1 = 3A + B + C \Rightarrow C = -1$

$$\therefore \frac{x^2 + 3x + 4}{(x^2 - 1)(x + 1)^2} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{(x + 1)^2} - \frac{1}{(x + 1)^3}$$

$$\int \frac{x^2 + 3x + 4}{(x^2 - 1)(x + 1)^2}\, dx = \int \frac{1}{(x - 1)}\, dx - \int \frac{1}{(x + 1)}\, dx - \int \frac{1}{(x + 1)^2}\, dx - \int \frac{1}{(x + 1)^3}\, dx$$

$$= \ell n\,|x - 1| - \ell n\,|x + 1| + \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{2(x + 1)^2} + C$$

<u>C අභිමත නියතයකි.</u>

(c) $$aI + bJ = \int_0^{\pi/2} \frac{a^2 + b^2 + a\cos x + b\sin x}{a^2 + b^2 + a\cos x + b\sin x}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} dx = [x]_0^{\pi/2} = \pi/2 \quad —— ①$$

$$bI - aJ = \int_0^{\pi/2} \frac{ba + b\cos x - ab - a\sin x}{a^2 + b^2 + a\cos x + b\sin x}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{-a\sin x + b\cos x}{a^2 + b^2 + a\cos x + b\sin x}\, dx$$

$$= [\ell n(a^2 + b^2 + a\cos x + b\sin x)]_0^{\pi/2}$$

$; a^2 + b^2 > 1$

$$= \ell n\,(a^2 + b^2 + b) - \ell n\,(a^2 + b^2 + a)$$

$$= \ell n\left(\frac{a^2 + b^2 + b}{a^2 + b^2 + a}\right) \quad —— ②$$

① × a + ② × b

$$\Rightarrow (a^2 + b^2)\, I = \left[a\,\frac{\pi}{2} + b\,\ell n\left(\frac{a^2 + b^2 + b}{a^2 + b^2 + a}\right)\right]$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{a^2 + b^2}\left[a\,\frac{\pi}{2} + b\ell n\left(\frac{a^2 + b^2 + b}{a^2 + b^2 + a}\right)\right]$$

① × b - ② × a

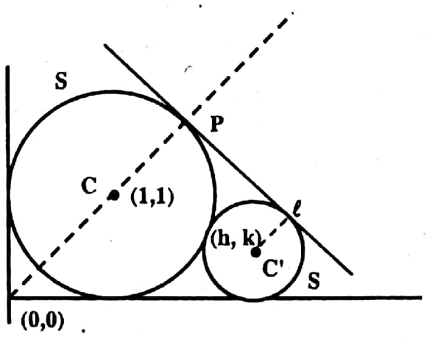
$$\Rightarrow J = \frac{1}{a^2 + b^2}\left[b\,\frac{\pi}{2} - a\,\ell n\left(\frac{a^2 + b^2 + b}{a^2 + b^2 + a}\right)\right]$$

**16.** $S \equiv x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ වෘත්තයේ සමීකරණය

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ ආකාරයට ලිවිය හැක.

මෙය කේන්ද්‍රය (1, 1) වූ අරය ඒකක 1 වූ වෘත්තයේ සමීකරණයයි.

$\therefore$ S හි කේන්ද්‍රය $C \equiv (1, 1)$ හා අරය = 1 ඒකක වේ.




$OP = OC + CP = \sqrt{2} + 1$ සහ

$P \equiv (OP\cos \pi/4,\ OP\sin \pi/4)$ නිසා

$$\equiv \left((\sqrt{2} + 1).\frac{1}{\sqrt{2}},\ (\sqrt{2} + 1).\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\equiv \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}},\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

OP රේඛාවේ අනුක්‍රමණය = 1

$OP \perp \ell$ නිසා $\ell$ හි අනුක්‍රමණය = -1

$\therefore$ $\ell$ රේඛාවේ සමීකරණය $y - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1\left[x - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$

$$\Rightarrow x + y = 2 + \sqrt{2}$$

(0, 0) හා (h, k) ලක්ෂ්‍යය $\ell$ රේඛාව අනුබද්ධයෙන් එක ම පැත්තේ පිහිටයි.

එබැවින් $(2 + \sqrt{2})\,[h + k - (2 + \sqrt{2})] > 0$

$$\Rightarrow h + k < 2 + \sqrt{2}$$

S' හි කේන්ද්‍රය $C' \equiv (h, k)$ ලෙස ගනිමු.
C' සිට $\ell$ රේඛාවට ලම්බ දුර d නම්,

$$d = \frac{|h + k - (2 + \sqrt{2})|}{\sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2} - (h + k)}{\sqrt{2}}$$

$\because h + k < 2 + \sqrt{2}$

S' වෘත්තය $\ell$ රේඛාව ස්පර්ශ කරන බැවින් d යනු S' හි අරය වේ.

S හා S' වෘත්ත දෙක බාහිර ව ස්පර්ශ වන බැවින් $CC' = 1 + d \Rightarrow CC'^2 = (1 + d)^2$

$$\Rightarrow (h - 1)^2 + (k - 1)^2 = \left[1 + \frac{2 + \sqrt{2} - (h + k)}{\sqrt{2}}\right]^2$$

$$\Rightarrow h^2 + k^2 - 2h - 2k + 2 = \left[\frac{2 + 2\sqrt{2} - (h + k)}{\sqrt{2}}\right]^2$$

$$\Rightarrow 2h^2 + 2k^2 - 4h - 4k + 4$$
$$= (2 + 2\sqrt{2})^2 + (h + k)^2 - 2(2 + 2\sqrt{2})\,(h + k)$$
$$= 4 + 8 + 8\sqrt{2} + h^2 + k^2 + 2hk - 4h - 4k - 4\sqrt{2}\,h - 4\sqrt{2}k$$

$$\underline{h^2 - 2hk + k^2 + 4\sqrt{2}\,(h + k) = 8\,(\sqrt{2} + 1)}$$

17. (*a*) $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma - \cos(\alpha+\beta+\gamma)$

$$= \cos\alpha + \cos\beta - [\cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma)]$$

$$= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$- 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right)\right]$$

$$= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$$

$$= 4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$$

(*b*) $f(x) = 2\sin^2 {}^{x}/_{2} + 2\sqrt{3}\sin {}^{x}/_{2}\cos {}^{x}/_{2} + 4\cos^2 {}^{x}/_{2}$

$$= 1 - \cos x + \sqrt{3}\sin x + 2(1+\cos x)$$

$$= \sqrt{3}\sin x + \cos x + 3$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) + 3$$

$$= 2(\cos {}^{\pi}/_{6}\sin x + \sin {}^{\pi}/_{6}\cos x) + 3$$

$$= 2\sin(x + {}^{\pi}/_{6}) + 3$$

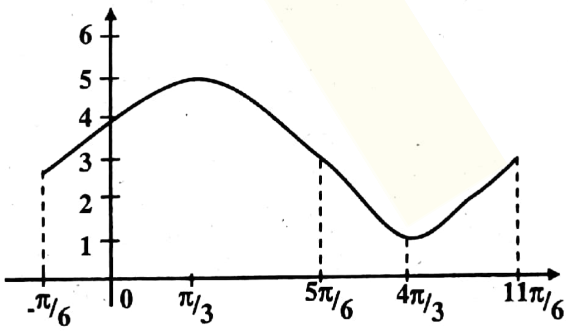
$a = 2,\ \theta = {}^{\pi}/_{6},\ b = 3$

$-1 \le \sin(x + \pi/6) \le 1$

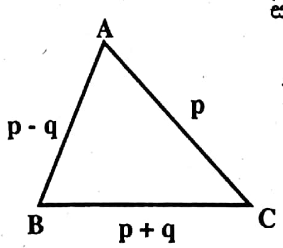
$-2 \le 2\sin(x + \pi/6) \le 2$

$-2 + 3 \le 2\sin(x + \pi/6) + 3 \le 2 + 3$

එනම් $1 \le f(x) \le 5$




(*c*)




$p > 2q > 0 \Rightarrow p - q > q > 0$

සයින් නීතිය යෙදීමෙන්,

$$\frac{\sin A}{p+q} = \frac{\sin B}{p} = \frac{\sin C}{p-q} = k$$

යයි ගනිමු.

$\Rightarrow \sin A = k(p+q)$, $\sin B = kp$, $\sin C = k(p-q)$

$\Rightarrow \sin A - 2\sin B + \sin C = k(p+q) - 2kp + k(p-q) = 0$

එවිට $\sin A + \sin C = 2\sin B$

$$2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = 2\sin(\pi - \overline{A+C})$$

$$\Rightarrow \sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = \sin(A+C)$$

$$\Rightarrow \sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}$$

$0 < \frac{A+C}{2} , {}^{\pi}/_{2}$ නිසා $\sin\frac{A+C}{2} > 0$ බැවින්

$$\cos\frac{A-C}{2} = 2\cos\frac{A+C}{2}$$

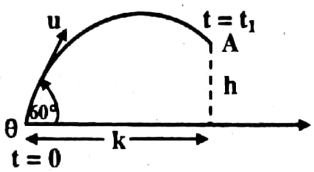
*** ***

## A - කොටස

01. O →A චලිතය සලකා $S = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්,

$\rightarrow k = u\cos 60\, t_1$ — ①

$\uparrow h = u\sin 60\, t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$ — ②




① න් $t_1 = \frac{2k}{u}$

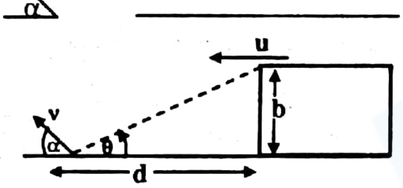
② හි ආදේශයෙන්,

$$h = \cancel{u}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}k}{\cancel{u}} - \frac{1}{\cancel{2}} g \times \frac{\overset{2}{\cancel{4}}k^2}{u^2}$$

$$\underline{\underline{h + \frac{2gk^2}{u^2} = \sqrt{3}\,k}}$$

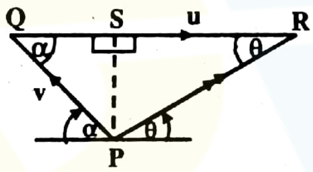
02. (වැ E) = $\leftarrow u$

(ළ E) = v, α




ළමයා වෑන් රථයෙහි නොහැපී යන්තමින් බේරීමට නම්,

(ළ වැ) = θ විය යුතු ය.




මෙහි $\tan\theta = \frac{b}{d}$ වේ.

(ළ වැ) = (ළ E) + (E වැ)

θ = α, v + $\rightarrow u$

$= \mathbf{PQ + QR}$

$= \mathbf{PR}$

$PS = v\sin\alpha,\ QS = v\cos\alpha$

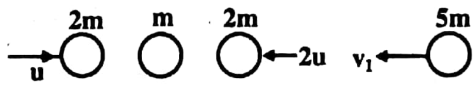
$SR = u - v\cos\alpha$ ($v < u\sin\alpha$, එනම් $v\cos\alpha < u$ බැවින්)

$\tan\theta = \frac{PS}{SR}$

$$\frac{b}{d} = \frac{v\sin\alpha}{u - v\cos\alpha} \Rightarrow bu - bv\cos\alpha = dv\sin\alpha$$

$$\underline{\underline{bu = v\,(d\sin\alpha + b\cos\alpha)}}$$

03.




$I = \Delta(mv)$ යෙදීමෙන්,

$\leftarrow 0 = 5m\,v_1 - [(2m \times 2u) + (2m \times -u) + m \times 0]$

$v_1 = \frac{2u}{5}$ බව ලැබේ.

චාලක ශක්ති පරිවර්තනය = පසු චා. ශ. - පෙර චා. ශ.

$$= \frac{1}{2} \times 5m \times v_1^2 - \left(\frac{1}{2} \times 2m \times (2u)^2 + \frac{1}{2} \times 2m \times u^2 + 0\right)$$

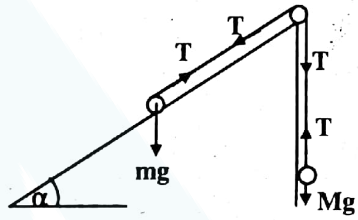
$$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{5}\, m \times \frac{\overset{2}{\cancel{4}}u^2}{\cancel{25}_5} - \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}m\,(4u^2 + u^2)$$

$$= \frac{2}{5} mu^2 - 5\,mu^2$$

$$= -\frac{23}{5} mu^2$$

<u>හානියකි.</u>

04. ස්කන්ධය m වන අංශුව d දුරක් ඉහළ යෑමේ දී M ස්කන්ධය d දුරක් පහළ යයි.




කරන ලද කාර්යය = චාලක ශක්ති පරිවර්තනය

[W = Δ(T)] යෙදීමෙන්,

$$\frac{1}{2}(M + m)v^2 = Mgd - mg\sin\alpha\, d$$

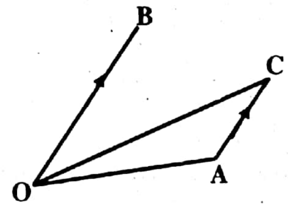
$$\underline{\underline{(M + m)\,v^2 = 2gd\,(M - m\sin\alpha)}}$$

**<u>විකල්ප ක්‍රම</u>**

i. ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදිය හැක.

ii. පද්ධතියේ පොදු ත්වරණය සොයා එක් අංශුවකට $v^2 = u^2 + 2as$ යෙදීමෙන් ද ලබාගත හැක.

05.




$\mathbf{OA} = \boldsymbol{i}$

$\mathbf{OB} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$

OB // AC නිසා

$\mathbf{AC} = \lambda\,\mathbf{OB} = \lambda\,(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$ ; λ අදිශයකි.

$\mathbf{OC} = \mathbf{OA} + \mathbf{AC}$

$= \boldsymbol{i} + \lambda\,(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$

OB හා BC ලම්බ නම් $\mathbf{OB}\,.\,\mathbf{BC} = 0$ විය යුතු ය.

$\mathbf{BC} = \mathbf{BO} + \mathbf{OC} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{i} + \lambda\,(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) = \lambda\boldsymbol{i} + (\lambda - 1)\,\boldsymbol{j}$

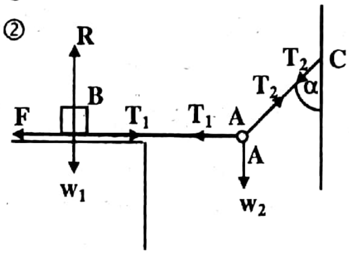
$(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})\,.\,[(\lambda\boldsymbol{i} + (\lambda - 1)\boldsymbol{j}] = 0 \Rightarrow \lambda + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

**06.** A හි සමතුලිතතාවය සැලකීමෙන්,

$T_2 \cos\alpha = w_2$ —— ①

$T_2 \sin\alpha = T_1$ —— ②

$\dfrac{②}{①} \quad \tan\alpha = \dfrac{T_1}{w_2}$




B හි සමතුලිතතාවය සැලකීමෙන්,

$T_1 = F$

$R = w_1$

B සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ ඇති බැවින්

$$\frac{F}{R} = \mu \Rightarrow \frac{T_1}{R} = \mu \Rightarrow \frac{w_2 \tan\alpha}{w_1} = \mu \Rightarrow \mu w_1 = w_2 \tan\alpha$$

**07.** A, B, C අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර නිසා

$P(A \cup B) = \frac{1}{2} = P(A) + P(B)$ —— ①

$P(B \cup C) = \frac{1}{2} = P(B) + P(C)$ —— ②

$P(C \cup A) = \frac{2}{3} = P(C) + P(A)$ —— ③

① + ② + ③

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 2[P(A) + P(B) + P(C)]$

$\frac{5}{6} = P(A) + P(B) + P(C)$ —— ④

A, B, C නිරවශේෂ සිද්ධි බැවින්,

$A \cup B \cup C = \Omega \Rightarrow P[A \cup B \cup C] = P[\Omega]$

$P(A) + P(B) + P(C) = 1$ —— ⑤

④ හා ⑤ එකවර සිදුවිය නොහැක.

$\therefore$ දී ඇති සම්භාවිතාවන් සපුරාලන A, B, C සිද්ධි නොපවතී.

**08.** $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(A|B') = \dfrac{P(A \cap B')}{P(B')}$

$P(A|B) = P(A|B') \Rightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A \cap B')}{P(B')}$

$P(A \cap B)\, P(B') = P(B)\, P(A \cap B')$

$P(A \cap B)\,[1 - P(B)] = P(B)\,[P(A) - P(A \cap B)]$

{ප්‍රමේයයන් / සිද්ධාන්තයීය සම්භාවිතාව}

$P(A \cap B) - P(A \cap B)\, P(B) = P(B)\, P(A) - P(A \cap B)\, P(B)$

$\therefore P(A \cap B) = P(A)\, P(B) \Rightarrow$ A හා B ස්වායත්ත වේ.

**09.** දත්ත ආරෝහණ ක්‍රමයට ලියන්න.

1, 2, 2, 3, 6, x, y, z

මාතය 6 බැවින් x, y, z යන තුනෙන් අවම වශයෙන් දෙකක්වත් (y හා z යයි සිතමු.), 6 විය යුතු ය. ($\because$ 2 ඒවා 2 ක් ඇත.)

එවිට, මධ්‍යන්‍ය 4 බව ද දී ඇති නිසා

$\dfrac{1 + 2 + 2 + 3 + 6 + x\;\; 6 + 6}{8} = 4$

$26 + x = 32$

$x = 6$

$\therefore x = y = z = 6$

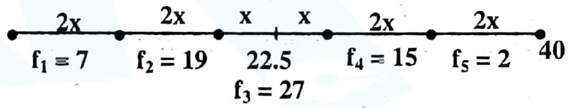
විචලතාව

$= \dfrac{(1-4)^2 + (2-4)^2 + (2-4)^2 + (3-4)^2 + 4 \times (6-4)^2}{8}$

$= \dfrac{34}{8} = \dfrac{17}{4}$

සම්මත අපගමනය $= \sqrt{\dfrac{17}{4}} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$

**10.** පන්ති ප්‍රාන්තරයක තරම 2x යයි ගනිමු.




සටහනට අනුව $x + 2x + 2x = 40 - 22.5$

$5x = 17.5$

$x = 3.5$

$\therefore$ ප්‍රාන්තරයක තරම $i = 7$

සංඛ්‍යාතය 27 බැවින් මාතය අඩංගු වන්නේ තුන්වන ප්‍රාන්තරය තුළ ය.

$f_1 = 27,\ f_2 = 15,\ f_0 = 19,\ L_1 = 22.5 - 3.5 = 19$

මාතය $= L + \left(\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_2 - f_0}\right) i$

$= 19 + \dfrac{(27 - 19)}{(54 - 15 - 19)} \times 7$

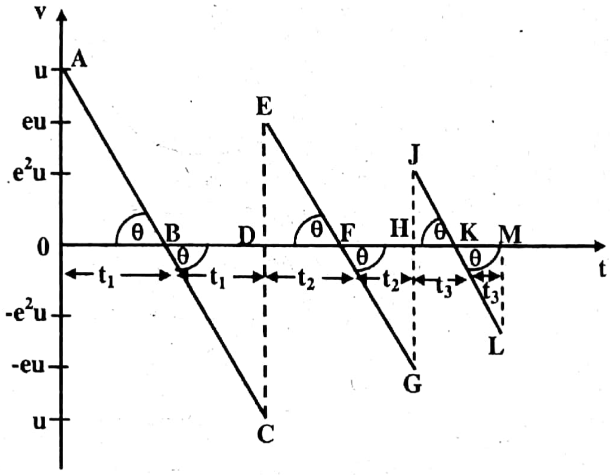
$= 19 + \dfrac{14}{5}$

$= \underline{21.8}$

*** ***

## B - කොටස

11. (a) (i) අංශුව ගුරුත්වය යටතේ චලනය වන බැවින්, චලිත දිශාව එකිනෙකට ප්‍රතිවිරුද්ධ අවස්ථා ඇති වේ. සිරස් ව ඉහළට ප්‍රවේගය ධන ලෙස සලකමු.




$\tan\theta = g$ වේ.

$OAB\Delta \equiv BCD\Delta$ ; $DEF\,\Delta \equiv FGH\,\Delta$ ; $JHK\,\Delta \equiv KLM\,\Delta$

$OAB\,\Delta$ න් $\tan\theta = \frac{u}{t_1} \Rightarrow g = \frac{u}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{u}{g}$

$OB = BD$ නිසා $OD = \frac{2u}{g}$

$DEF\,\Delta$ න් $\tan\theta = \frac{eu}{t_2} \Rightarrow g = \frac{eu}{t_2} \Rightarrow t_2 = \frac{eu}{g}$

$DE = FH$ නිසා $DH = \frac{2e^2u}{g}$ ;

මේ ආකාරයට $HM = \frac{2e^2u}{g}$ වේ.

(ii) තුන්වන ගැටුම තෙක් ගත වූ කාලය $= \frac{2u}{g} + \frac{2eu}{g} + \frac{2e^2u}{g}$

$$= \frac{2u}{g}(1+e+e^2)$$

(iii) නිශ්චලතාවට පත්වීමට ගතවන මුළු කාලය යනු,

$$\lim_{n\to\infty} \text{විට} \left(\frac{2u}{g} + \frac{2eu}{g} + \frac{2e^2u}{g} + \frac{2e^3u}{g} + \ldots + \frac{2e^nu}{g} + \ldots\right)$$

අපරිමිත ශ්‍රේණි ඓක්‍යය වේ.

එනම් $\lim_{n\to\infty} \frac{2u}{g}[1 + e + e^2 + e^3 + \ldots + e^n + \ldots]$

$$= \frac{2u}{g} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-e^n}{1-e}\right) = \frac{2u}{g(1-e)}$$

$\because 0 < e < 1$ නිසා $\lim_{n\to\infty} e^n \to 0$ බැවින්

(ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක් ලෙස සලකා ඇත.)

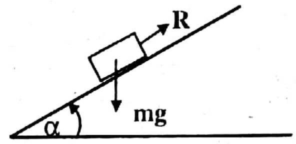
(b) **පහළට චලිතය**

දුම්රියේ ස්කන්ධය $= 300 \times 1000$ kg

දුම්රියේ බර $= 300 \times 1000 \times 9.8$ N

චලිතයට එරෙහි ප්‍රතිරෝධය R N නම් හා දුම්රිය නියත ප්‍රවේගයෙන් චලනය වන බැවින්

$F = ma$ යෙදීමෙන්




$\sin\alpha = \frac{1}{98}$

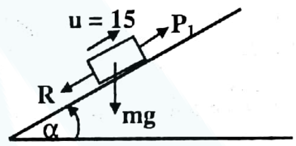
$mg\sin\alpha - R = m \times 0 \Rightarrow R = mg\sin\alpha$

$\therefore R = 30 \times 1000 \times \cancel{98} \times \frac{1}{\cancel{98}}$ N $= \underline{\underline{30\,000 \text{ N}}}$

**ඉහළට චලිතය**

දුම්රිය යා යුතු ඒකාකාර වේගය $= 54$ km h$^{-1}$ $= 15$ ms$^{-1}$

දුම්රියේ තිබිය යුතු ජවය H kW නම්,




$P_1 = \frac{H \times 1000}{15}$

$F = ma$ යෙදීමෙන්,

$P_1 - R - mg\sin\alpha = m \times 0$ (වේගය නියත බැවින්)

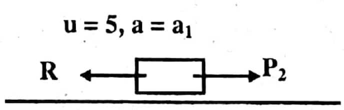
$\frac{H \times 1000}{15} = 30\,000 + 30\,000$

($\because R = mg\sin\alpha$ බැවින්)

$$H = \frac{60\,0\cancel{00} \times 15}{1\cancel{000}} = \underline{\underline{900 \text{ kW}}}$$

**තිරස් මගක චලිතය**

දුම්රිය ගමන් කරන වේගය $= 18$ km h$^{-1}$ $= 5$ ms$^{-1}$




$P_2 = \frac{900 \times 1000}{5}$ N

$F = ma \rightarrow$ යෙදීමෙන්,

$P_2 - R = m \times a_1$

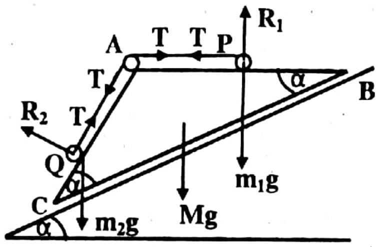
$$\frac{\overset{180}{\cancel{900}} \times 1\cancel{000}}{\cancel{5}} - 30\,\cancel{000} = 300 \times 1\cancel{000} \times a_1$$

$$a_1 = \frac{180 \times 30}{300} = \frac{150}{300}$$

$$= \underline{\underline{0.5 \text{ ms}^{-2}}}$$

**(සෑම පිළිතුරක ම ඒකක නිවැරදි ව යෙදීම අත්‍යවශ්‍ය ය.)**

12. (*a*)




$(m_1\ කු) = \leftarrow f_1$

$(m_2\ කු) = f_2\ (2\alpha)$

$(කු\ \ E) = (\alpha)\ f_2$

$(m_i\ E) = (m_i\ \ කු) + \ (කු\ \ E)$

$i = 1$ විට $(m_1\ \ E) = \leftarrow f_1 + (\alpha)\ f_2 = f_2,\ \alpha,\ f_1$

$i = 2$ විට $(m_2\ \ E) = f_1\ (2\alpha) + f_2\ (\alpha) = f_1,\ f_2,\ \alpha,\ \alpha$

**F = ma** යොදමු.

P ට $\leftarrow T = m_1 (f_1 + f_2 \cos \alpha)$ —— ①

Q ට $(2\alpha)\ m_2 g \sin 2\alpha - T = m_2(f_1 + f_2 \cos \alpha)$ —— ②

පද්ධතියට $(\alpha)\ (M + m_1 + m_2)\, g \sin \alpha = Mf_2 +$
$m_1(f_2 + f_1 \cos \alpha) + m_2 (f_2 + f_1 \cos \alpha)$ —— ③

$m_1 = m_2$ නම්, $m_1 = m_2 = m$ යයි ගනිමු.

එවිට ① + ② න් හා $m_1$ හා $m_2$ සඳහා m ආදේශයෙන්,

$\cancel{m} g \sin 2\alpha = 2\, \cancel{m}(f_1 + f_2 \cos \alpha)$ —— ④

③ න් $(M + 2m)g \sin \alpha = (M + 2m)\, f_2 + 2m\, f_1 \cos \alpha$ — ⑤

④ න් $f_2 = \dfrac{g \sin 2\alpha - 2f_1}{2 \cos \alpha}$ , ⑤ හි ආදේශයෙන්,

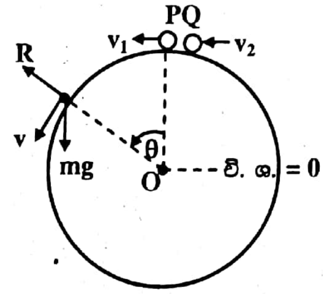
$$(M + 2m)\, g \sin \alpha = (M + 2m)\, \frac{(g \sin 2\alpha - 2f_1)}{2 \cos \alpha} + 2m\, f_1 \cos \alpha$$

$$\cancel{(M + 2m) g\, 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \cancel{(M + 2m)\, g.\, 2 \sin \alpha \cos \alpha} - \left(\frac{M + 2m - 4m \cos \alpha}{2 \cos \alpha}\right) f_1$$

$f_1 = 0$

$$f_2 = \frac{2g \sin \alpha \cos \alpha - 0}{2 \cos \alpha} = g \sin \alpha$$

(*b*) P හා Q අතර ගැටුම සලකමු. ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්, (ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු P හා Q හි වේග $V_1$ හා $V_2$ නම්)




$\leftarrow 2mu = mv_1 + 2mv_2$

$2u = v_1 + 2v_2$ —— ①

නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමය යෙදීමෙන්,

$\frac{1}{2} \times\ u = v_1 - v_2$ —— ②

② × 2 න්

$u = 2v_1 - 2v_2$ —— ③

① + ③ $u = 3v_1 \Rightarrow v_1 = u$

ගැටුමෙන් පසු P හි චලිතය සලකා ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්,

$$\frac{1}{2} mu^2 + mg\, a = \frac{1}{2}\, mv^2 + mg\, a \cos \theta$$

$$v^2 = u^2 + 2ga - 2g\, a \cos \theta \quad —— ④$$

**F = ma** (θ) යෙදීමෙන්,

$$mg \cos \theta - R = m\, \frac{v^2}{a}$$

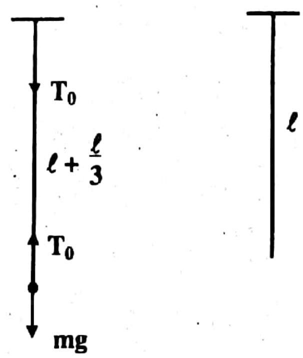
$$R = mg \cos \theta - \frac{m}{a}[u^2 + 2ga - 2ga \cos \theta]\ (④\ න්)$$

$$R = \frac{m}{a}\ [\, 3ga \cos \theta - 2ga - u^2]$$

$u = \sqrt{ga}$ නම් $R = \dfrac{m}{a}\, [3ga \cos \theta - 3ga]$

$R = 0$ වන්නේ $\cos \theta = 1$ වන විට ය. එනම් $\theta = 0$ විට ය. එනම් P හා Q ගැටුමත් සමඟ ම P පෘෂ්ඨයෙන් ඉවත් වේ.

13. (*a*)




ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය λ නම්,

$$T_0 = \frac{\lambda}{\ell} \times \frac{\ell}{3} = \frac{\lambda}{3}$$

අංශුවේ සමතුලිතතාවයට අනුව $T_0 = mg$

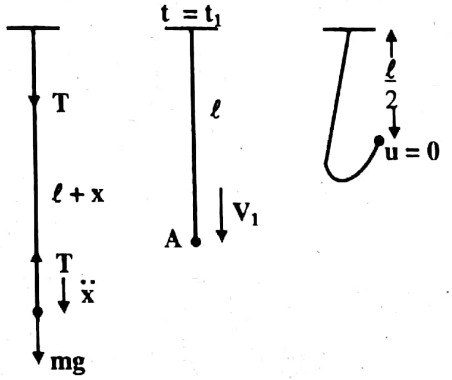
$$\therefore \quad \frac{\lambda}{3} = mg \Rightarrow \lambda = 3\,mg$$

අංශුව ගුරුත්වය පමණක් යටතේ $\frac{\ell}{2}$ දුරක් චලනය වන බැවින්,

$$V_1^2 = 0 + 2g\frac{\ell}{2} = g\ell \quad \text{—— ①}$$

$$V_1 = 0 + gt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{V_1}{g} = \frac{\sqrt{g\ell}}{g} = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \text{— ②}$$

තන්තුවේ විතතිය x යයි ගනිමු.




එවිට $T = \frac{3\,mg \times x}{\ell}$

$\downarrow$ **F** = ma යෙදීමෙන්,

$$mg - T = m\ddot{x}$$

$$\cancel{m}g - \frac{3\,\cancel{m}g\,x}{\ell} = \cancel{m}\,\ddot{x}$$

$$-\frac{3g}{\ell}\left(x - \frac{\ell}{3}\right) = \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{3g}{\ell}\left(x - \frac{\ell}{3}\right) = 0$$

$\dot{x} = \frac{\ell}{3} + \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ — ③ විසඳුමක් බව උපකල්පනයෙන් t විෂයේ අවකලනයෙන්,

$x = -\alpha\omega\sin\omega t + \beta\omega\cos\omega t$ — ④

අංශුව මුදා හැර $\frac{\ell}{2}$ දුරක් චලනය වී ඇති මොහොතේ

ස.අ.ච. අරඹන නිසා, $t = 0$ විට $x = 0$ හා $\dot{x} = \sqrt{g\ell}$ වේ.

③ න් $0 = \frac{\ell}{3} + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{-\ell}{3}$

④ න් $\sqrt{g\ell} = \beta\omega \Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{g\ell}}{\omega}$

④, t විෂයේ අවකලනයෙන්,

$$\ddot{x} = -\alpha\omega^2\cos\omega t - \beta\omega^2\sin\omega t \quad \text{—— ⑤}$$

⑤ න් $\ddot{x} = -\omega^2[\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t]$

$$\frac{-3g}{\ell}\left(x - \frac{\ell}{3}\right) = -\omega^2(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)$$

දී ඇති විසඳීමට අනුව

$x - \frac{\ell}{3} = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ බැවින්

③ න්, $\frac{-3g}{\ell}(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t) = -\omega^2(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)$

$$\therefore \omega^2 = \frac{3g}{\ell} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$$

ඒ අනුව $\beta = \frac{\sqrt{g\ell}}{\omega} = \frac{\sqrt{g\ell}}{\sqrt{\frac{3g}{\ell}}} = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$

එවිට $\alpha = -\frac{\ell}{3}$ ; $\beta = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$ ; $\omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$ ලැබේ.

ස.අ.ච. කේන්ද්‍රය $\ddot{x} = 0$ වන විට ලැබේ.

$\therefore \ddot{x} = 0$ වන්නේ $x = \frac{\ell}{3}$ විට ය.

එනම් කේන්ද්‍රය, A සිට $\frac{\ell}{3}$ දුරක් පහළින් පිහිටයි.

<u>හෝ</u>

$\ddot{x} = 0$ වන්නේ $t = T$ විට නම් ⑤ න්

$$0 = -\alpha\omega^2\cos\omega T - \beta\omega^2\sin\omega T$$

$$\Rightarrow \tan\omega T = \frac{-\alpha}{\beta} = \frac{-(-\ell/3)}{\ell/\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \omega T = \frac{\pi}{6} \Rightarrow T = \frac{\pi}{6\omega}$$

$x = \frac{\ell}{3} - \frac{\ell}{3}\cos\omega t + \frac{\ell}{\sqrt{3}}\sin\omega t$ හි $T = \frac{\pi}{6\omega}$ ආදේශ කළවිට

$x = \frac{\ell}{3} - \frac{\ell}{3}\cos\frac{\pi}{6} + \frac{\ell}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\ell}{3}$ බව ද ලැබේ.

<u>**විස්තාරය සෙවීම.**</u>

B හි දී අංශුව ක්ෂණික නිශ්චලතාවට පත්වන බැවින් $t = T_1$ විට $\dot{x} = 0$ වේ.

$\dot{x} = -\alpha\omega\sin\omega t + \beta\omega\cos\omega t$ —— ④

$0 = -\alpha\omega\sin\omega T_1 + \beta\omega\cos\omega T_1$

එවිට $\tan\omega T_1 = \frac{\beta}{\omega}$ බව ④ න් ලැබේ. $\tan\omega T_1 = \frac{\frac{\ell}{\sqrt{3}}}{-\frac{\ell}{3}} = -\sqrt{3}$

$\tan\omega T_1 = \tan\frac{2\pi}{3} \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{3\omega}$ —— ⑥

③ හි ආදේශයෙන් $x = \frac{\ell}{3} - \frac{\ell}{3}\cos\omega\frac{2\pi}{3\omega} + \frac{\ell}{\sqrt{3}}\sin\omega\frac{2\pi}{3\omega}$

$$= \frac{\ell}{3} - \frac{\ell}{3}\cos\frac{2\pi}{3} + \frac{\ell}{\sqrt{3}}\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{\ell}{3} - \frac{\ell}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\ell}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell}{3} + \frac{\ell}{6} + \frac{\ell}{2} = \ell$$

එවිට විස්තාරය $= \ell - \frac{\ell}{3} = \frac{2\ell}{3}$ ($\because$ x මැන ඇත්තේ A සිට) බැවින්

අංශුව B වෙත ළඟාවීමට ගත් කාලය

මෙය මුලින් ම සෙවූ $t_1$ හා ⑥ හි සඳහන් $T_1$ හි එකතුවයි.

$$\therefore \text{කාලය} = \sqrt{\frac{\ell}{g}} + \frac{2\pi}{3\omega} = \sqrt{\frac{\ell}{g}} + \frac{2\pi}{3\sqrt{\frac{3g}{\ell}}} = \sqrt{\frac{\ell}{g}} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$= \sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right)$$

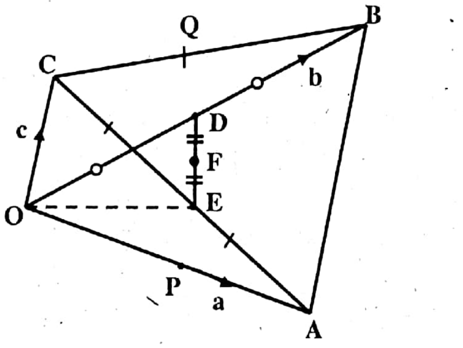
<u>**උපරිම ආතතිය සෙවීම**</u>

උපරිම ආතතිය ඇති වන්නේ විතතිය උපරිම වන විට ය.

උපරිම විතතිය $\ell$ බැවින් (A පසුකර ගිය දුර)

උපරිම ආතතිය $T = \frac{3\,mg \times \ell}{\ell} = 3\,mg$

14. (*a*) අනුපාත ප්‍රමේයය භාවිත කළ නොහැක.




$OE = OA + AE$ ($\Delta$ නියමය)

$= a + \frac{1}{2}AC$

$AC = AO + OC$

$= -a + c$

$\therefore OE = a + \frac{1}{2}(-a + c) = \frac{1}{2}(a + c)$

$EF = \frac{1}{2}ED$ ($\because EF = FD$)

$ED = EO + OD = -OE + \frac{1}{2}OB$ ($\because OD = DB$)

$= -\frac{1}{2}(a + c) + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(-a + b - c)$

$\therefore EF = \frac{1}{4}(-a + b + c)$

$OF = OE + EF$

$= \frac{1}{2}(a + c) + \frac{1}{4}(-a + b + c) = \frac{1}{4}(a + b + c)$

$OP = \frac{1}{2}a$, $CQ = \frac{1}{2}CB$

$CQ = \frac{1}{2}(CO + OB)$

$CQ = \frac{1}{2}(-c + b)$

$OQ = OC + CQ = c + \frac{1}{2}(-c + b) = \frac{1}{2}(b + c)$

$PF = PO + OF$

$= -\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}(a + b + c) = \frac{1}{4}(-a + b + c)$

$FQ = FO + OQ$

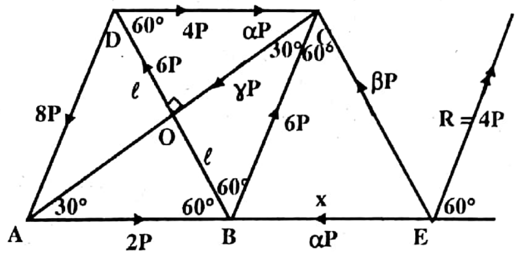
$= -\frac{1}{4}(a + b + c) + \frac{1}{2}(b + c) = \frac{1}{4}(-a + b + c)$

$\therefore$ PF = FQ $\Rightarrow$ PF = FQ හා PF//FQ බැවින්

P, F, Q ඒකරේඛීය වේ.

$\therefore$ PF : FQ = 1 : 1

(*b*)




AC දිගේ බල විභේදනයෙන්,

$\overrightarrow{X} = (4P + 6P - 8P + 2P)\cos 30°$

$= 2\sqrt{3}P$ — ①

BD දිගේ බල විභේදනයෙන්,

$\uparrow Y = 6P + (6P - 2P - 4P - 8P)\cos 60°$

$= 6P - 4P = 2P$ — ②

$\therefore R = \sqrt{X^2 + Y^2}$

$= 4P$

සම්ප්‍රයුක්ත බලය AC සමඟ θ කෝණයක් සාදයි නම්,

$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{2P}{2\sqrt{3}P} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = 30°$

එනම් සම්ප්‍රයුක්ත බලය BC පාදයට සමාන්තර වේ.

O වටා සූර්ණය (ABCD අතට) G නම්,

$G = (6P - 4P \times 8P + 2P) \times \ell \sin 60°$

$= 12P \times \ell\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}P\ell$

සම්ප්‍රයුක්ත බලය AB පාදය BE = x වන E හි දී හමුවේ යයි ගනිමු.

B වටා පද්ධතියේ සූර්ණය = B වටා සම්ප්‍රයුක්තය සූර්ණය

$(8P - 4P)2\ell \cancel{\sin 60°} = 4P \times x \cancel{\sin 60°}$

$\cancel{4P} \times 2\ell = \cancel{4P} \times x \Rightarrow x = 2\ell$

$\therefore$ BE $= 2\ell$

නව බල පද්ධතිය සමතුලිතතාවයේ ඇති බව දී ඇත.

I. AC ඔස්සේ බල විභේදනයෙන්,

$2\sqrt{3}P - \gamma P + \cancel{\alpha P\cos 30} - \cancel{\alpha P\cos 30} = 0$

[① යොදා ගෙන ඇත.]

$\gamma = 2\sqrt{3}$

II. BD ඔස්සේ බල විභේදනයෙන්,

$2P + \beta P + \cancel{\alpha P\cos 60} - \cancel{\alpha P\cos 60} = 0$

[② යොදා ගෙන ඇත.]

$\beta = 2$

III. E වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්,

(E වටා මුල් බල පද්ධතියේ සූර්ණය ශුන්‍ය බව සැලකිල්ලට ගන්න.)

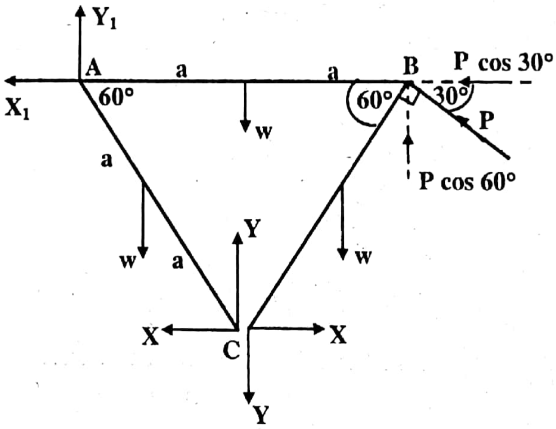
E $\quad \gamma P \times 2\ell - \alpha P \times 2\ell \sin 60 = 0$

$2\cancel{\sqrt{3}} \times \cancel{2\ell} = \alpha\cancel{P} \times \cancel{2\ell}\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2}$

$4 = \alpha$

$\alpha = 4, \beta = 2, \gamma = 2\sqrt{3}$

**15.** (*a*)




නිදහස් සන්ධිය වන්නේ C පමණි.

පද්ධතියේ සමතුලිතතාවය සලකා A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$w \times \frac{\cancel{a}}{2} + w \times \frac{3\cancel{a}}{2} + w \times a = P\cos 60 \times 2\cancel{a}$$

$$3w = P \times \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}$$

$$P = 3w$$

AC දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සලකා, A වටා

$$w \times \frac{\cancel{a}}{2} - Y \times \cancel{a} + X \times 2\cancel{a}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$w - 2Y + 2\sqrt{3}\ \times\ = 0 \text{ —— ①}$$

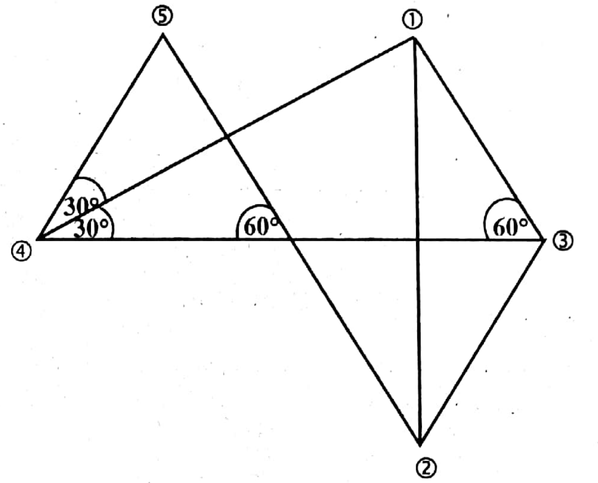
එසේ ම, BC ට B වටා

$$w \times \frac{\cancel{a}}{2} + Y \times \cancel{a} + X \times 2\cancel{a}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$w + 2Y + 2\sqrt{3}X = 0 \text{ — ②}$$

② - ①  $4Y = 0 \Rightarrow Y = 0$

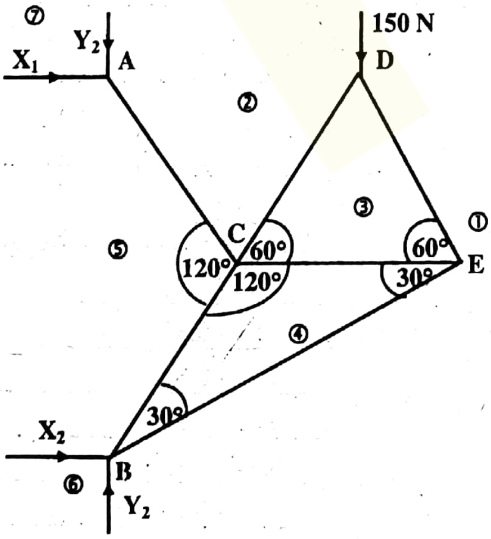
හා ① න්  $X = \frac{-w}{2\sqrt{3}}$



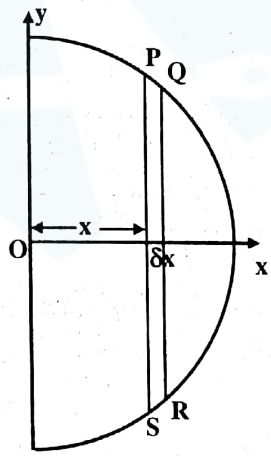

| දණ්ඩ | ප්‍රත්‍යාබලය | විශාලත්වය |
|---|---|---|
| CD | තෙරපුම | $50\sqrt{3}$ N |
| DE | තෙරපුම | $50\sqrt{3}$ N |
| CE | ආතතිය | $100\sqrt{3}$ N |
| BE | තෙරපුම | 150 N |
| BC | ආතතිය | $50\sqrt{3}$ N |
| AC | ආතතිය | $100\sqrt{3}$ N |

A හා B හි ප්‍රතික්‍රියා සෙවීම අනවශ්‍ය ය.

(*b*) 1 සිට 7 දක්වා අංක යෙදීමෙන් බෝ අංකනය කර ඇත.




**16.**




සමමිතිකත්වයට අනුව අර්ධ ගෝලයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x - අක්ෂය මත පිහිටයි. එය G නම්, $G \equiv (\bar{x}, 0)$ ආකාරය වේ.

y - අක්ෂයේ සිට x දුරින් වූ ඝනකම $\delta x$ වන PQRS තුනී තැටියක් සලකමු.

එහි අරය $= \sqrt{a^2 - x^2}$

එහි පරිමාව $= \pi(a^2 - x^2)\,\delta x$

අර්ධ ගෝලය සෑදී ද්‍රව්‍යයේ ඝනත්වය $\rho$ නම් තැටියේ ස්කන්ධය $= \pi(a^2 - x^2)\,\delta x\rho$

ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයේ අර්ථ දැක්වීමට අනුව

$$\bar{x} = \frac{\int m_r x_r}{\int m_r}$$ යන්නට අනුව

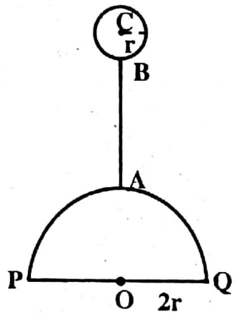
$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \pi(a^2 - x^2)\,dx\rho . x}{\int_0^a \pi(a^2 - x^2)\,dx\rho}$$

$$= \frac{\int_0^a a^2 x\,dx - \int_0^a x^3 dx}{\int_0^a a^2 dx - \int_0^a x^2 dx}$$

$$= \frac{a^2\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^a - \left(\frac{x^4}{4}\right)_0^a}{a^2(x)_0^a - \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^a} = \frac{\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}}{a^3 - \frac{a^3}{3}} = \frac{\frac{a^4}{4}}{\frac{2a^3}{3}}$$

$\bar{x} = \frac{3a}{8}$ $\quad \therefore G \equiv \left(\frac{3a}{8}, 0\right)$

සමමිතිකත්වයට අනුව සංයුක්ත වස්තුවෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය OABC රේඛාව මත පිහිටයි.




$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho = m$ බව දී ඇත.

| වස්තුව | ස්කන්ධය | ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට |
|---|---|---|
| අර්ධ ගෝලය | $\frac{16}{3}\pi r^3 \rho = 4\,m$ | $\frac{3}{8} \times 2r = \frac{3r}{4}$ |
| දණ්ඩ | m | $2r + \ell$ |
| ගෝලය | $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho = m$ | $2r + 2\ell + r$ |
| සංයුක්ත වස්තුව | 6 m | $\bar{x}$ |

PQ වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$4\cancel{m} \times \frac{3r}{4} + \cancel{m} \times (2r + \ell) + \cancel{m} \times (3r + 2\ell) = 6\cancel{m} \times \bar{x}$$

$$3r + 2r + \ell + 3r + 2\ell = 6\bar{x}$$

$$\frac{8r + 3\ell}{6} = \bar{x}$$

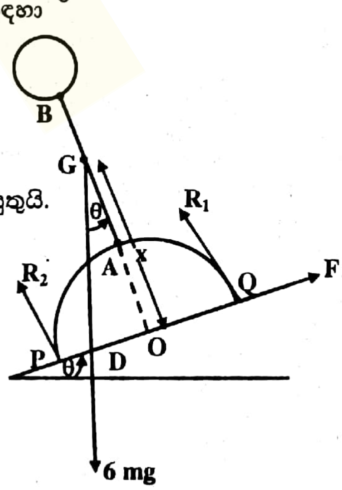
සංයුක්ත වස්තුව නොපෙරළීම සඳහා

OD < OP

$\bar{x} \tan\theta < 2r$

$\frac{(8r + 3\ell)}{6} \tan\theta < 2r$

$\tan\theta < \frac{12r}{8r + 3\ell}$ විය යුතුයි.




$\ell = \frac{4r}{3}$ හා $\theta = \pi/6$ නම්

$3\ell = 4r$ නිසා

$\frac{12r}{8r + 3\ell} = \frac{9\ell}{6\ell + 3\ell} = 1$

$\theta = \pi/6$ විට $\tan \pi/6 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ බැවින් $\tan\theta < \frac{12r}{8r + 3\ell}$ තෘප්ත වේ.

∴ සංයුක්ත වස්තුව නොපෙරෙළෙයි.

**17.** (*a*) විභාගයට පෙනී සිටින සිසුන් සංඛ්‍යාව = 50

S ; ක්‍රීඩා කටයුතු සඳහා සහභාගී වීම,

M ; සංගීත කටයුතු සඳහා සහභාගී වීම,

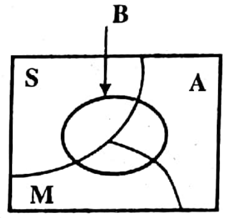
A ; ක්‍රීඩා හෝ සංගීත කටයුතු සඳහා සහභාගි නොවීම,

B ; විභාගය සමත් වීම,

$P(S) = \frac{50}{100}$ ; $P(M) = \frac{30}{100}$ $\quad S \cap M = \phi \quad P(B) = \frac{48}{100}$

$P(B|S) = \frac{60}{100}$ ; $P(B|A) = \frac{30}{100}$ හා $P(A) = \frac{20}{100}$

(A,S,M නියැදි අවකාශයේ විභාගනයකි.)




මුළු සම්භාවිතාව පිළිබඳ ප්‍රමේයයට අනුව,

I. $P(B) = P(B|S)\,P(S) + P(B|M)P(M) + P(B|A)\,P(A)$

$$\frac{48}{100} = \frac{60}{100} \times \frac{50}{100} + P(B|M)\,\frac{30}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{20}{100}$$

$$\frac{1}{100 \times \cancel{100}}(4800 - 3000 - 600) = P(B|M)\,\frac{30}{\cancel{100}}$$

$$\frac{12\cancel{00}}{30\cancel{00}} = \frac{12}{30} = P(B|M) = \frac{2}{5}$$

II. සෙවිය යුත්තේ $P(S|B)$ ය.

බේයස් ප්‍රමේයයට අනුව,

$$P(S|B) = \frac{P(B|S)\,P(S)}{P(B)} \text{ (I කොටසට අනුව)}$$

$$= \frac{\frac{60}{100} \times \frac{50}{100}}{\frac{48}{100}} = \frac{30\cancel{00}}{100\cancel{00}} \times \frac{1\cancel{00}}{48} = \frac{30}{48} = \underline{\underline{\frac{5}{8}}}$$

(*b*) පළමු චතුර්ථකය පිහිටන්නේ 0.82 - 0.83 ප්‍රාන්තරය තුළ ය.

මුළු නිරීක්ෂණ සංඛ්‍යාව = 50

$$\text{පළමු චතුර්ථකය} = L + \frac{\left(\frac{n}{4} - cf\right) \times c}{f_Q}$$

| විෂ්කම්භය (cm) | බෝල සංඛ්‍යාව |
|---|---|
| 0.80 - 0.81 | 1 |
| 0.81 - 0.82 | 3 |
| 0.82 - 0.83 | 9 |
| 0.83 - 0.84 | 20 |
| 0.84 - 0.85 | 14 |
| 0.85 - 0.86 | 2 |
| 0.86 - 0.87 | 1 |
| | 50 |

L ; පහළ සත්‍ය පන්ති සීමාව = 0.82
n ; දත්ත සංඛ්‍යාව = 50
cf ; පෙර පන්තිවල සමුච්චිත සංඛ්‍යාතය = 4
c ; ප්‍රාන්තරයක තරම = 0.01
$f_Q$ ; Q, අඩංගු පන්තියේ සංඛ්‍යාතය = 9

$$\text{පළමු චතුර්ථකය } Q_1 = 0.82 + \frac{\left(\frac{50}{4} - 4\right)}{9} \times 0.01$$

$$= 0.82 + 0.009$$

$$\underline{\underline{Q_1 = 0.829}}$$

| | පළමු නියැදිය | දෙවන නියැදිය |
|---|---|---|
| h | 50 | 100 |
| $\bar{x}$ | 0.835 | 0.835 |
| σ | 0.01 | 0.015 |

අවස්ථා දෙකෙහි මධ්‍යන්‍යය ($\bar{x}$) සමාන බැවින් සංයුක්ත ව්‍යාප්තියෙහි මධ්‍යන්‍යය = 0.835
සංයුක්ත ව්‍යාප්තියෙහි විචලතාව $\sigma^2$ නම්

$$\sigma^2 = \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2}{n_1 + n_2} = \frac{50 \times 0.0001 + 100 \times 0.000225}{50 + 100}$$

$$= \frac{0.0050 + 0.0225}{150} = \underline{\underline{0.00018}}$$

**<u>මිනුම් දෝෂ සහගතවීම.</u>**

සෑම බෝලයක ම විෂ්කම්භය සෙවීමේ දී -0.015 ක දෝෂයක් සිදු වී ඇති බැවින් නිවැරදි මධ්‍යන්‍යය සෙවීමේ දී පෙර මධ්‍යන්‍යයට 0.015 ක් එකතු විය යුතු ය.

∴ නිවැරදි මධ්‍යන්‍යය = 0.835 + 0.015 = 0.85

$y_i = ax_i + b$ පරිණාමනයෙන් $\bar{y} = a\bar{x} + b$ වන අතර, මෙහි දී a = 1 හා b = 0.015 වේ. එවිට විචලතාව

$$\text{Var } x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \text{ හා}$$

$$\text{නිවැරදි Var } x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} [ax_i + b - (a\bar{x} + b)]^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a^2 (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2$$

$(\because a = 1)$

∴ විචලතාවයේ වෙනසක් සිදු නොවේ.

*** ***