අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය - 2009 අගෝස්තු

General Certificate of Education (Adv. Level) Examination – August 2009

සංයුක්ත ගණිතය I / පැ තුනයි

Combined Mathematics I / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

01. (a) α සහ β යනු $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල වේ ; මෙහි $c \neq 0$ වේ. $\alpha^3\beta^2$ හා $\alpha^2\beta^3$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\alpha^3\beta^2 + \dfrac{1}{\alpha^2\beta^3}$ හා $\alpha^2\beta^3 + \dfrac{1}{\alpha^3\beta^2}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය, b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න.

(b) $f(x)$ බහුපදය $x - \alpha$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $f(\alpha)$ බව පෙන්වන්න.

$f(x)$ බහුපදය $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය

$A(x - \beta)(x - \gamma) + B(x - \alpha)(x - \gamma) + C(x - \alpha)(x - \beta)$ ආකාරය ගනියි ; මෙහි α , β සහ γ සමාන නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ.

$\alpha, \beta, \gamma, f(\alpha)\, f(\beta)$ සහ $f(\gamma)$ ඇසුරෙන් A, B සහ C නියත ප්‍රකාශ කරන්න.

ඒ නයින්, $x^5 - kx$ යන්න $(x + 1)(x - 1)(x - 2)$ න් බෙදූ විට ශේෂයේ x හි පදය අඩංගු **නොවන** ලෙස k නියතයේ අගය සොයන්න.

02. (a) PHILOSOPHY යන වචනයෙහි අකුරු දහයම ගෙන සෑදිය හැකි වෙනස් පිළියෙල කිරීම් සංඛ්‍යාව සොයන්න. මෙම පිළියෙල කිරීම්වලින් කොපමණක H, I, S සහ Y යන අකුරු එකට තිබෙයි ද?

PHILOSOPHY යන වචනයෙහි අකුරු දහයෙන් 5 ක් තෝරා ගත හැකි වෙනස් ආකාර සංඛ්‍යාව ද සොයන්න.

(b) $P_n = n(n + 1) \ldots (n + r - 1)$ යැයි ගනිමු ; මෙහි n සහ r ධන පූර්ණ සංඛ්‍යා වේ.

$n P_{n+1} = nP_n + rP_n$ බව පෙන්වන්න.

P_n / n යන්න $(r - 1)!$ වලින් බෙදෙන බව උපකල්පනය කර, $P_{n+1} - P_n$ යන්න $r!$ වලින් බෙදෙන බව පෙන්වන්න.

අනුයාත ධන නිඛිල r සංඛ්‍යාවක ගුණිතය $r!$ වලින් බෙදෙන බව අපෝහනය කරන්න.

03. (a) ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිත කර ගනිමින්, $(x + y)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^{n-r} y^r$ බව සාධනය කරන්න ;

මෙහි n ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවක් වන අතර, ${}^nC_r = \dfrac{n!}{(n - r)!\, r!}$ වේ.

$(p + q)^n - p^n - q^n$ යන්න pq වලින් බෙදෙන බව අපෝහනය කරන්න ; මෙහි p, q සහ n ධන පූර්ණ සංඛ්‍යා වේ.

(b) අපරිමිත ශ්‍රේණියක r වෙනි පදය U_r යන්න $\dfrac{(2r + 1)}{(3r - 2)(3r + 1)} \cdot \dfrac{1}{7^r}$ මගින් දෙනු ලැබේ.

$U_r = f(r - 1) - f(r)$ වන පරිදි $f(r)$ සොයන්න.

ඒ නයින්, $\sum_{r=1}^{n} U_r = S_n$ සොයා, $\lim_{n \to \infty} S_n$ හි අගය සොයන්න.

04. (a) $-80 - 18i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවෙහි වර්ගමූල සොයා,

$4z^2 + (16i - 4)z + (65 + 10i) = 0$ වර්ගජ සමීකරණය විසඳන්න.

(b) ආගන්ඩ් සටහනක $\arg(z + 1) = \dfrac{\pi}{3}$ සමීකරණය විචරණය කර $|z|$ හි අවම අගය සොයන්න.

(c) ω යනු $z^3 - 1 = 0$ සමීකරණයෙහි සංකීර්ණ මූලයක් නම්, එවිට ω^2 අනෙක් සංකීර්ණ මූලය බව පෙන්වන්න.

$\omega^{2k} + (1 + \omega)^k = 0$ බව ද පෙන්වන්න ; මෙහි k ඔත්තේ ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි.

ඔත්තේ ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාමය k සඳහා $x^2 + x + 1$ යන්න $x^{2k} + (1 + x)^k$ හි සාධකයක් බව අපෝහනය කරන්න.

05. (a) **ප්‍රමුලධර්ම භාවිතයෙන්,** $f(x) = \sin x$ ශ්‍රිතයෙහි x විෂයයෙන් ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.

$g(x) = \cos x$ හි ව්‍යුත්පන්නය අපෝහනය කරන්න.

(i) $\sin(\ln(1 + x^2))$

(ii) $\cos(\sin x)$

x විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

(b) $y = \sin k\theta \ \ \mathrm{cosec}\,\theta$ සහ $x = \cos\theta$ යැයි ගනිමු ; මෙහි k නියතයකි.

(i) $(1 - x^2)\dfrac{dy}{dx} - xy + k\cos k\theta = 0,$

(ii) $(1 - x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3x\dfrac{dy}{dx} + (k^2 - 1)\,y = 0$

බව සාධනය කරන්න.

(c) $P\left(3, \dfrac{1}{5}\right)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී $y(1 + x^2) = 2$ වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකය, Q හි දී නැවතත් වක්‍රය හමුවෙයි. Q හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

06. (a) $I_k = \displaystyle\int \frac{e^t}{t^k}\,dt$ යැයි ගනිමු ; මෙහි $t > 0$ වන අතර k ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි.

$(k - 1)\,I_k - I_{k-1} + \dfrac{e^t}{t^{k-1}} = C$ බව පෙන්වන්න ; මෙහි C අභිමත නියතයකි.

$\displaystyle\int e^x\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^2 dx$ සොයන්න ; මෙහි $x > -1$ වේ.

(b) f යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා කුලකය මත අර්ථ දක්වා ඇති තාත්ත්වික අගයන් ගන්නා ශ්‍රිතයක් වන අතර,

$J = \displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ වේ ; මෙහි $a > 0$ වේ.

$\displaystyle\int_0^a f(a - x)\,dx = J$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2k}x}{\cos^{2k}x + \sin^{2k}x}\,dx$ අගයන්න ; මෙහි k ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි.

07. (x_0, y_0) ලක්ෂ්‍යය හරහා යන $ax + by + c = 0$ සරල රේඛාවට ලම්බ සරල රේඛාව මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(x_0 + at\,;\, y_0 + bt)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න ; මෙහි t යනු පරාමිතියකි.

ඒ නයින්, $ax + by + c = 0$ රේඛාව තුළ (x_0, y_0) ලක්ෂ්‍යයෙහි දර්පණ ප්‍රතිබිම්බයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

OAB ත්‍රිකෝණයෙහි OA සහ AB පාදවල ලම්බ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ පිළිවෙළින් $x\cos\theta + y\sin\theta = 1$ සහ $x - y = 1$ වේ ; මෙහි $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ වන අතර, O යනු මූල ලක්ෂ්‍යය වේ. OAB ත්‍රිකෝණයෙහි පාද තුනෙහි සමීකරණ සොයන්න.

තව ද, OB පාදයෙහි ලම්බ සමච්ඡේදකයෙහි සමීකරණය සොයා, OAB ත්‍රිකෝණයෙහි පාදවල ලම්බ සමච්ඡේදක ඒකලක්ෂ්‍ය වන බව සත්‍යාපනය කරන්න.

08. $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ සහ $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ සමීකරණ මගින් ඡේදනය නොවන වෘත්ත දෙකක් නිරූපණය කෙරෙයි. වෘත්ත දෙකෙහි කේන්ද්‍ර O_1 සහ O_2 යැයි ගනිමු. O_1 සහ O_2 අතර පිහිටි T ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්ත දෙකට පොදු ස්පර්ශක යුගලයක් ඇඳිය හැකි ය.

T ලක්ෂ්‍යය හඳුනාගෙන, එහි ඛණ්ඩාංක O_1 සහ O_2 හි ඛණ්ඩාංක සහ වෘත්ත දෙකේ අරයන් ඇසුරෙන් සොයන්න.

වෘත්ත දෙකට දෙවන ස්පර්ශක යුගලයක් ඇඳිය හැකි, O_1O_2 විස්තෘත රේඛාව මත පිහිටි T' ලක්ෂ්‍යය ද හඳුනාගෙන T' හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

$x^2 + y^2 - 18x + 6y + 86 = 0$ සහ $x^2 + y^2 + 18x - 6y + 74 = 0$ වෘත්ත දෙකට ඇඳිය හැකි පොදු ස්පර්ශක හතරේ සමීකරණ සොයන්න.

09. (a) සුපුරුදු අංකනයෙන් **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කර, සාධනය කරන්න.

A, B සහ C ලක්ෂ්‍ය තුනක්, ආරෝහණ පිළිවෙළට, තිරසට θ කෝණයකින් ආනත වූ සරල රේඛාවක් මත පිහිටයි. AB = x වන අතර, D යනු C සිට h උසකින් සිරස්ව ඉහළින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යය වේ. CD මගින්, A සහ B හි දී පිළිවෙළින් α සහ β කෝණ ආපාතනය කෙරෙයි.

(i) $h = \dfrac{x \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)\cos\theta}$,

(ii) $d = \dfrac{x \sin(\alpha + \theta)\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$

බව සාධනය කරන්න ; මෙහි d යනු A හි මට්ටමේ සිට D හි උස වේ.

(d) (i) $\sin\theta - \cos\theta = 1$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුමත්,

(ii) $\tan^{-1}\dfrac{1}{2} - \tan^{-1}\dfrac{1}{3} = \sin^{-1} x$ සමීකරණය සපුරාලන x හි අගයත් සොයන්න.

*** ***

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය - 2009 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination – August 2009
සංයුක්ත ගණිතය II / පැ තුනයි
Combined Mathematics II / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
(මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි g මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.)

01. (a) බැලූනයක්, පොළවට සාපේක්ෂව නියත U ප්‍රවේගයෙන් ඉහළ නඟියි. කාලය $t = 0$ හි දී P අංශුවක්, බැලූනයට සාපේක්ෂව V ප්‍රවේගයෙන්, බැලූනයේ සිට සිරස්ව ඉහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. කාලය $t = t_1$ හි දී තවත් Q අංශුවක්, බැලූනයට සාපේක්ෂව V ප්‍රවේගයෙන් ම, බැලූනයේ සිට සිරස්ව ඉහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. කාලය $t = t_2$ හි දී P සහ Q අංශු දෙක එකිනෙකට හමුවෙයි.

(i) $0 \leq t \leq t_1$ ප්‍රාන්තරයේ දී, බැලූනයට සාපේක්ෂව P හි චලිතය,

සහ (ii) $t_1 \leq t \leq t_2$ ප්‍රාන්තරයේ දී, P ට සාපේක්ෂව Q හි චලිතය

සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන්, **වෙන වෙනම** අඳින්න.

ඒ නයින් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ, $t_2 = \dfrac{V}{g} + \dfrac{1}{2}t_1$ බව පෙන්වන්න.

අංශු දෙක හමුවන විට Q සහ P හි ප්‍රවේග පිළිවෙළින් $U \pm \dfrac{1}{2}gt_1$ බව, තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(b) u km h^{-1} වේගයෙන් ගමන් කරන සබ්මැරීනයක් දකුණින් 30° ක් බටහිර දිශාවට d km දුරකින්, මුහුදේ වූ නැවක් දකියි. එම නැව v km h^{-1} ප්‍රවේගයෙන් උතුරට ගමන් කරමින් තිබෙයි ; මෙහි $u < v < 2u$ වේ. නැවට සාපේක්ෂව සබ්මැරීනයේ චලිතය සැලකීමෙන්, නැව අල්ලා ගැනීම සඳහා සබ්මැරීනය දිශා දෙකකින් එකක් ඔස්සේ ගමන් කළ යුතු බව පෙන්වා, එම දිශා දෙක අතර කෝණය සොයන්න.

ඒවාට අනුරූප කාල, පැය $\dfrac{d\sqrt{4u^2 - v^2}}{v^2 - u^2}$ කින් වෙනස්වන බව, තවදුරටත් පෙන්වන්න.

02. (a) ස්කන්ධය $2m$ වූ සුමට කුඤ්ඤයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය ඔස්සේ වූ හරස්කඩ, C හි දී සෘජුකෝණී වූ ABC ත්‍රිකෝණයකි. $B\hat{A}C$ කෝණය 60° වන පරිදි වූ A ශීර්ෂයෙහි කුඩා සුමට කප්පියක් සවිකර ඇත. සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් කප්පිය උඩින් යන අතර, එහි දෙකෙළවරට ස්කන්ධ පිළිවෙළින් $3m$ සහ m වූ P සහ Q අංශු ඈඳා ඇත. කුඤ්ඤය, එහි BC මුහුණත සුමට තිරස් මේසයක ස්පර්ශ වන පරිදි තබා ඇත. Q අංශුව, AC සිරස් මුහුණත සමග ස්පර්ශ වන පරිදි A ට සිරස්ව පහළින් අල්ලා තබන අතර P අංශුව AB ආනත තලය මත තබා ඇත. දැන්, Q නිදහස් කරනු ලැබේ නම්, කුඤ්ඤයේ ත්වරණය $\dfrac{\sqrt{3}g}{23}$ බව පෙන්වා, තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.

(b) දිග l වූ සරල අවලම්බයක් නිශ්චලතාවේ එල්ලී ඇත්තේ, බට්ටා, තිරස් ගෙබිමක සිට $2l$ උසකින් ඇතිව ය. බට්ටාට සමාන ස්කන්ධයෙන් යුතු අංශුවක්, බට්ටා සමඟ තිරස්ව ගැටී, පසුව තන්තුවේ ආරම්භක රේඛාවේ සිට $\dfrac{l}{2}$ තිරස් දුරකින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක දී ගෙබිමට ළඟාවෙයි. ක්ෂණිකව නිශ්චලතාවට පැමිණීමට පෙර තන්තුව α සුළු කෝණයකින් හැරෙයි නම්, අංශු දෙක අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය

$$\frac{8\sin\dfrac{\alpha}{2} - 1}{8\sin\dfrac{\alpha}{2} + 1}$$ බව පෙන්වන්න.

03. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් දිග l වූ සැහැල්ලු අප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක කෙළවරකට සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර, අචල O ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇති අතර, අංශුව ගුරුත්වය යටතේ සමතුලිතව පවතී. අංශුව ඊළඟට u වේගයෙන් තිරස්ව ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ.

(i) O ඔස්සේ යන යටිඅත් සිරස සමඟ තන්තුව θ කෝණයක් සාදන විට එහි ආතතිය $m\left(3g\cos\theta - 2g + \dfrac{u^2}{l}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(ii) පසුව, අංශුව O හි තිරස් මට්ටමට ළඟාවීමට හැකිවන පරිදි u ට තිබිය හැකි අඩුතම අගය සොයන්න.

(iii) තන්තුව පළමුවරට තිරස් වන විට, එහි චලන තලයට ලම්බව, O සිට $\frac{l}{2}$ දුරකින් සවිකර ඇති සිහින් තිරස් දණ්ඩක් සමග ස්පර්ශ වෙයි. $2gl < u^2 < \frac{7}{2}gl$ වෙයි නම්, අංශුව දණ්ඩේ මට්ටමෙන් $\frac{l}{2}$ උසකින් පිහිටි උච්චතම ලක්ෂ්‍යයට ළඟාවීමට පෙර තන්තුව බුරුල් වන බව පෙන්වන්න.

04. P අංශුවක්, $x^2 + y^2 = a^2$ වෘත්තය මත, ඒකාකාර $a\omega$ වේගයෙන් චලනය වෙයි. Q යනු P සිට y- අක්ෂය මත ලම්බයේ අඩිය නම්, කාලාවර්තය $\frac{2\pi}{\omega}$ වූ සරල අනුවර්තී චලිතයක Q යෙදෙන බව පෙන්වන්න.

ස්වභාවික දිග l වූ සැහැල්ලු සර්පිල දුන්නක් ස්වකීය අක්ෂය සිරස්ව ඇති ව, පහත කෙළවරෙහි සවිකර ඇත. දුන්නේ උඩු කෙළවර මත තබන ලද ස්කන්ධය m වූ අංශුවකට නිශ්චලව තිබෙන දුන්න d දුරක් සම්පීඩනය කළ හැකි ය. මෙහි $d < \ell$ වේ. එම අංශුවම h උසක සිට දුන්නේ උඩු කෙළවර මත වැටීමට සැලැස්වූයේ නම්, $l \geq a + d$ බව දී ඇති විට, විස්තාරය $a = \sqrt{d^2 + 2dh}$ වන සරල අනුවර්තී චලිතයක අංශුව යෙදෙන බව පෙන්වන්න.

මෙම චලිතයේ දී අංශුව, **අඩු තරමින්** $\frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{d}{g}}$ කාල ප්‍රාන්තරයක් වත් දුන්න මත රැඳී පවතී නම්, $\left(\frac{h}{d}\right)$ හි උපරිම අගය සොයන්න.

05. (a) බර W වූ ඒකාකාර වෘත්තාකාර වළල්ලක්, තිරසට 30° කෝණයකින් ආනත වූ අවල රළු පීල්ලක් මත නිශ්චලතාවේ ඇත. වළල්ල සහ පීල්ල එකම සිරස් තලයේ තිබේ. වළල්ල සමතුලිතතාවයේ අල්ලා තබා ඇත්තේ, වළල්ලෙන් ස්පර්ශීව ඉවත්වන සහ පීල්ලට 30° ආනතියකින් යුතු තන්තුවක ආධාරයෙනි. මෙම කෝණය, පීල්ලේ ආනතිය මනින අතටම මනිනු ලැබේ. තන්තුවේ ආතතිය සොයා, පීල්ල සහ වළල්ල අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $(2 - \sqrt{3})\sqrt{2}\cos 15^\circ$ ට වඩා අඩු නොවිය යුතු බව පෙන්වන්න.

(b) $ABCDEF$ යනු පැත්තක දිග මීටර a වූ සවිධි ෂඩස්‍රයකි. නිව්ටන P, $3P$, $2P$ සහ $4P$ බල පිළිවෙළින් BA, EB, DE සහ AD දිගේ, අකුරු පිළිවෙළට දක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරයි. පද්ධතියෙහි සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය සහ දිශාව සොයන්න.

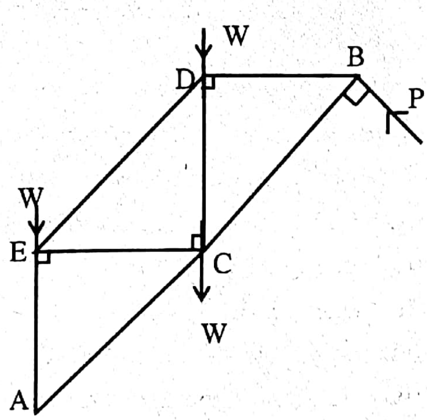
ෂඩස්‍රයෙහි එක් ශීර්ෂයක් වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්, සම්ප්‍රයුක්තයෙහි ක්‍රියා රේඛාවත් සොයන්න.

ෂඩස්‍රයෙහි තලයේ ක්‍රියා කරන කුමන බල යුග්මයක් පද්ධතියට එකතු කිරීමෙන් පද්ධතිය $\overrightarrow{FE}$ දිගේ ක්‍රියා කරන තනි බලයකට ඌනනය වෙයි ද?

06. (a) එක එකක දිග 2a සහ බර W වූ AB, BC සුමට ඒකාකාර දඬු දෙකක් B හිදී නිදහස් ලෙස අසව්කර, O අවල ලක්ෂ්‍යයකට බැඳි එක එකක දිග 2a වූ AO, CO සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු දෙකකින් එල්ලා ඇත. බර W සහ අරය $\frac{a}{3}$ වූ ඒකාකාර ගෝලයක් දඬු සමග ස්පර්ශව සහ ඒවායින් ආධාර කරනු ලැබ ඇත. සමතුලිත පිහිටීමේ දී, එක් එක් දණ්ඩ සිරස සමඟ සාදන θ කෝණය $\cot^3\theta + \cot\theta - 30 = 0$ සමීකරණය මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

$\cot\theta$ සඳහා තිබිය හැකි එකම අගය සොයා, **ඒ නයින්,** B අසව්වේ ප්‍රතික්‍රියාව W බව පෙන්වන්න.

(b) රූපයෙහි දක්වෙන, සැහැල්ලු දඬුවලින් සැදි රාමු සැකිල්ලෙහි තිරස් සහ සිරස් දඬු සමාන දිගින් යුක්ත වන අතර, සියලු ම කෝණ 90° හෝ 45° හෝ වේ. සිරස් තලයක පිහිටන එය, A හි දී සුමට ලෙස විවර්තනය කර, B හි දී AB ට ලම්බ P බලයකින් ආධාර කරනු ලැබ ඇති අතර, C, D, E හි දී නිව්ටන W භාර දරයි. P හි අගය W ඇසුරෙන් සොයන්න.



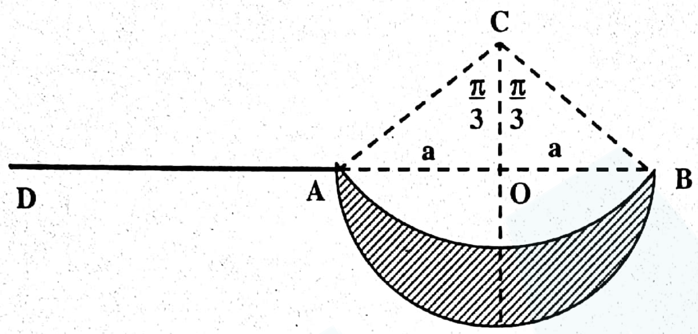
CD දණ්ඩේ ප්‍රත්‍යාබලය ශූන්‍ය බව තවදුරටත් දී ඇත්නම්, BD, BC සහ DE දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල සෙවීම සඳහා, බෝ අංකනය භාවිතයෙන්, ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් අඳින්න. මෙම ප්‍රත්‍යාබල සොයා, ඒවා ආතති ද, තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරන්න.

07. කේන්ද්‍රයෙහි 2α කෝණයක් ආපාතනය කරන, අරය r වූ ඒකාකාර වෘත්ත චාපයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, කේන්ද්‍රයෙහි 2α කෝණයක් ආපාතනය කරන, අරය a වූ ඒකාකාර වෘත්ත ඛණ්ඩයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{2a \sin \alpha}{3\alpha}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

ළසඳ හැඩ ඒකාකාර ආස්තරයක්, රූපයෙහි දක්වෙන පරිදි, කේන්ද්‍රය O සහ අරය a වූ අර්ධ වෘත්තයකින් සහ ස්වකීය C කේන්ද්‍රයෙහි $\frac{2\pi}{3}$ කෝණයක් ආපාතනය කරන වෘත්ත චාපයකින් පර්යන්තගත වේ.

මෙම ආස්තරයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, C සිට ka දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න ; මෙහි $k = \frac{3\sqrt{3}\pi}{\pi + 6\sqrt{3}}$ වේ.



ආස්තරයේ ස්කන්ධය M යැයි ගනිමු. දිග $2a$ සහ ස්කන්ධය m වන AD සිහින් ඒකාකාර සෘජු දණ්ඩක්, දික් කරන ලද BA රේඛාව දිගේ පිහිටන පරිදි A කෙළවරේදී දෘඪ ලෙස ළසඳට සවිකර, රූපයෙහි දක්වෙන පරිදි දැකැත්තක් සාදා ඇත. ආස්තරයේ තලය සිරස්ව, අර්ධ වෘත්තය සහ දණ්ඩේ නිදහස් D කෙළවර, ගෙබිම ස්පර්ශ කරන පරිදි, දැකැත්ත තිරස් ගෙබිමක තබා ඇත. මෙම පිහිටීමේ, එය සමතුලිතව පවතී නම්,

$M(\sqrt{3}k - 1) < 4\sqrt{6}m$ බව පෙන්වන්න.

08. A සහ B යනු $P(A) > 0$ වන සිද්ධි දෙකකි.

A දී ඇති විට B හි අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව වන $P(B \mid A)$ අර්ථ දක්වන්න.

A, B හා C සිද්ධි තුනක් සඳහා $P(A) > 0$ හා $P(A \cap B) > 0$ වෙතොත්,

$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B \mid A)\, P(C \mid (A \cap B))$ බව පෙන්වන්න.

$\{B_1, B_2, B_3\}$ යනු Ω නියැදි අවකාශයක විභාගනයක් ද, A යනු Ω හි ඕනෑම සිද්ධියක් ද යැයි ගනිමු.

$i = 1, 2, 3$ සඳහා $P(B_i \mid A) = \dfrac{P(B_i)\, P(A \mid B_i)}{P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)\, P(A \mid B_2) + P(B_3)P(A \mid B_3)}$ බව පෙන්වන්න.

හරස් මාර්ගයක් වෙත ළඟාවන වාහන, වමට, දකුණට හෝ සෘජුව ඉදිරියට යන දිශා තුනකින් එකක් ඔස්සේ යා යුතුය. බටහිර දෙසින් පැමිණෙන වාහනවලින් 50% ක් වමට හා 20% ක් දකුණට හරවන අතර, ඉතිරි වාහන සෘජුව ඉදිරියට ධාවනය කරන බව රථවාහන ඉංජිනේරුවන් නිරීක්ෂණය කර ඇත. එක් එක් වාහනයේ රියැදුරු ස්වායත්ත ලෙස දිශාව තෝරා ගන්නේ යැයි උපකල්පනය කරමින්, බටහිර දෙසින් හරස් මාර්ගය වෙත ළඟාවන ඊළඟ වාහන තුනකින්,

(i) සියල්ලම සෘජුව ඉදිරියට,

(ii) සියල්ලම එකම දිශාවට,

(iii) දෙකක් දකුණට හා එකක් වමට හරවා,

(iv) සියල්ලම වෙනස් දිශාවලට,

ධාවනය කිරීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

අනුයාත වාහන තුනම එකම දිශාවට ධාවනය කෙරෙයි නම්, බොහෝ විට ඒවා සියල්ලම වමට හරවන බව පෙන්වන්න.

09. (a) සංගහනයකින් ගන්නා ලද තරම n වන සසම්භාවී නියැදියක අගයන් $x_1, x_2, \ldots, x_n$ යැයි ගනිමු.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$$ බව පෙන්වන්න ; මෙහි $\bar{x}$ යනු නියැදි මධ්‍යන්‍යය වේ.

පිටු 250 ක් අඩංගු පොතක පළමු පිටු 200 තුළ එක එකක ඇති මුද්‍රණ දෝෂ ගණන වන x නිරීක්ෂණය කරන ලද අතර, පහත සඳහන් විස්තර සොයා ගන්නා ලදී.

මුද්‍රණ දෝෂවල මුළු ගණන 920,
මුද්‍රණ දෝෂවල වර්ගවල එකතුව 5032.

පිටුවකට ඇති මුද්‍රණ දෝෂ ගණනෙහි මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය සොයන්න.
අවසාන පිටු 50 තුළ පිටුවකට ඇති මුද්‍රණ දෝෂවල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් 4.4 හා 2.2 වේ. ප්‍රමූල ධර්ම උපයෝගී කර ගනිමින් පොතෙහි පිටුවකට ඇති මුද්‍රණ දෝෂ ගණනෙහි මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය දශමස්ථාන දෙකකට නිවැරදි ව සොයන්න.

(b) පරීක්ෂණයක දී සිසුන් කණ්ඩායමක් ශුද්ධ ගණිතය සඳහා ලබාගත් ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය 45 වේ. මෙම ලකුණු, මධ්‍යන්‍යය 50 හා සම්මත අපගමනය 15 වන ආකාරයට රේඛීය ලෙස පරිමාංකනය කරනු ලැබේ. තවද, පරිමාංකනය කරන ලද 80 ලකුණ, 70 මුල් ලකුණකට අනුරූප වන බව දී ඇත.

(i) රේඛීය පරිමාණය,
(ii) මුල් ලකුණුවල සම්මත අපගමනය,
(iii) පරිමාංකනය මගින් වෙනස් නොවන ලකුණ

ගණනය කරන්න.

පරිමාංකනය කරන ලද ලකුණුවල අඩුතම හා වැඩිතම ලකුණු පිළිවෙළින් 2 හා 92 යැයි දී ඇත. ඒවාට අනුරූප මුල් ලකුණු සොයන්න.

*** ***

01. **(a)** α, β යනු $x^2 + bx + c = 0$ හි මූල බැවින්,

$\alpha + \beta = -b \qquad \alpha\beta = c$

එවිට $\alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3 = \alpha^2\beta^2(\alpha+\beta) = -bc^2$

$\alpha^3\beta^2 . \alpha^2\beta^3 = (\alpha\beta)^5 = c^5$

$\therefore$ $\alpha^3\beta^2, \alpha^2\beta^3$ මූල වූ වර්ගජ සමීකරණය

$x^2 - (\alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3)x + \alpha^3\beta^2 . \alpha^2\beta^3 = 0$

එනම්, $x^2 + bc^2x + c^5 = 0$//

$$\alpha^3\beta^2 + \frac{1}{\alpha^2\beta^3} = \frac{\alpha^5\beta^5+1}{\alpha^2\beta^3} = \frac{c^5+1}{\alpha^2\beta^3}$$

එසේම, $\alpha^2\beta^3 + \dfrac{1}{\alpha^3\beta^2} = \dfrac{c^5+1}{\alpha^3\beta^2}$

දැන්, $y = \dfrac{c^5+1}{x}$ ලෙස ලියූ විට,

ඉහත සමීකරණයෙන්,

$$\left(\frac{c^5+1}{y}\right)^2 + bc^2\left(\frac{c^5+1}{y}\right) + c^5 = 0$$

$(c^5+1)^2 + bc^2(c^5+1)y + c^5y^2 = 0$

$\therefore$ $\alpha^3\beta^2 + \dfrac{1}{\alpha^2\beta^3}$ හා $\alpha^2\beta^3 + \dfrac{1}{\alpha^3\beta^2}$

මූල වූ වර්ගජ සමීකරණය

$c^5x^2 + bc^2(c^5+1)x + (c^5+1)^2 = 0$ වේ.

(b) $f(x)$ බහුපදය $(x-\alpha)$ ගෙන් බෙදූ විට ලබ්ධිය $\varnothing(x)$ හා ශේෂය R නම්,

$f(x) = \phi(x)(x-\alpha) + R$

$x = \alpha$ විට $\underline{\underline{f(\alpha) = R}}$

α, β, Υ යනු අසමාන තාත්වික සංඛ්‍යා විට,

$f(x)$ බහු පදය $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\Upsilon)$ ගෙන් බෙදූ විට ශේෂය $A(x-\beta)(x-\Upsilon) + B(x-\alpha)(x-\Upsilon) + C(x-\alpha)(x-\beta)$ බව දී ඇත.

එවිට, $f(x) = \phi(x)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\Upsilon)$
$+ A(x-\beta)(x-\Upsilon) + B(x-\alpha)(x-\Upsilon)$
$+ C(x-\alpha)(x-\beta)$

මෙහි $\phi(x)$ යනු ලබ්ධිය යි.

ඉහත ප්‍රතිඵලය අනුව,

$f(\alpha) = A(\alpha-\beta)(\alpha-\Upsilon)$

$f(\beta) = B(\beta-\alpha)(\beta-\Upsilon)$ හා

$f(\Upsilon) = C(\Upsilon-\alpha)(\Upsilon-\beta)$ වේ.

එවිට, $A = \dfrac{f(\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\Upsilon)}$, $B = \dfrac{f(\beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\Upsilon)}$ හා

$C = \dfrac{f(\Upsilon)}{(\Upsilon-\alpha)(\Upsilon-\beta)}$ වේ.

එවිට ශේෂය,

$$\frac{f(\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\Upsilon)}(x-\beta)(x-\Upsilon) + \frac{f(\beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\Upsilon)}(x-\alpha)(x-\Upsilon) + \frac{f(\Upsilon)}{(\Upsilon-\alpha)(\Upsilon-\beta)}(x-\alpha)(x-\beta)$$ වේ.

ශේෂයෙහි x හි සංගුණකය,

$$-\left\{\frac{f(\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\Upsilon)}(\beta+\Upsilon) + \frac{f(\beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\Upsilon)}(\alpha+\Upsilon) + \frac{f(\Upsilon)}{(\Upsilon-\alpha)(\Upsilon-\beta)}(\alpha+\beta)\right\}$$

$f(x) - x^5 - kx$ හා $\alpha = -1$, $\beta = 1$ හා $\Upsilon = 2$ ලෙස ගනිමු.

එවිට ශේෂයේ x හි සංගුණකය,

$$-\left\{\frac{f(-1)}{(-1-1)(-1-2)}(1+2) + \frac{f(1)}{(1+1)(1-2)}(-1+2) + \frac{f(2)}{(2+1)(2-1)}(1+-1)\right\}$$

$$= -\left\{\frac{(-1)^5+k}{2} - \frac{(1)^5-k}{2}\right\}$$

$= -k+1$

x පදයක් අඩංගු නොවන විට,

$-k+1 = 0 \longrightarrow \underline{\underline{k=1}}$

02. **(a)**

P	H	O	I	L	S	Y
2	2	2	1	1	1	1

අකුරු 10 ම යොදා ගනිමින් ලබාගත හැකි වෙනස් පිළියෙල කිරීම් සංඛ්‍යාව,

$= \dfrac{10!}{2!\,2!\,2!}$

$= 453600$

HISY තනි අකුරක් ලෙස ගෙන කළ හැකි පිළියෙල

කිරීම් සංඛ්‍යාව $= \dfrac{7!}{2!\,2!} = \dfrac{7\times6\times5\times\cancel{4}^{2}\times3\times\cancel{2}}{\cancel{2}_{1}\times\cancel{2}}$

$= 1260$

$\therefore$ එම H, I, S, Y අකුරු පිළියෙල කළ හැකි ආකාර ගණන $= 4!$

$= 24$

$\therefore$ H අකුරු දෙක අතර I, S, Y අකුරු පිහිටන ආකාර ද ඇතුළත් ව H, I, S, Y අකුරු එකට පිහිටන පිළියෙල

කිරීම් සංඛ්‍යාව $= \frac{7!}{2!2!} \times 4!$

$= 1260 \times 24 = 30240$

H අකුරු දෙක අතර I, S, Y පිහිටන පිළියෙල කිරීම්

සංඛ්‍යාව $= \frac{6!}{2!2!} \times 3!$

$= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times \cancel{2}! \times 3 \times \cancel{2}!}{\cancel{2}! \times \cancel{2}!}$

$= 1080$

$\therefore$ අවශ්‍ය පිළියෙල කිරීම් සංඛ්‍යාව $= 30240 - 1080$

$= \underline{\underline{29160}}$

දී ඇති අකුරු 10 න් 5 ක් තේරිය හැකි විකල්ප ක්‍රම,

(i) සමාන අකුරු යුගල දෙකක් හා වෙනස් අකුරක්

(ii) සමාන අකුරු යුගලයක් හා වෙනස් අකුරු තුනක්

(iii) වෙනස් අකුරු පහක්

(i) විකල්පය අනුව කළ හැකි තේරීම් ගණන

$= {}^3C_2 \times {}^5C_1 = 3 \times 5 = 15$

(ii) විකල්පය අනුව කළ හැකි තේරීම් ගණන

$= {}^3C_1 \times {}^6C_3 = 3 \times \frac{\cancel{6} \times 5 \times 4}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1}$

$= 60$

(iii) විකල්පය අනුව කළ හැකි තේරීම්

$= {}^7C_5 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1}$

$= 21$

එලෙස කළ හැකි මුළු තේරීම් ගණන

$= 15 + 60 + 21 = \underline{\underline{96}}$

(b) $P_n = n(n+1)(n+2) \dots (n+r-1)$

මෙහි $n, r \in \mathbb{Z}^+$

$P_{n+1} = (n+1)(n+2)(n+3) \dots (n+r)$

$n P_{n+1} = n(n+1)(n+2) \dots \dots (n+r)$

$= n(n+1)(n+2) \dots (n+r-1)(n+r)$

$= n(n+1)(n+2) \dots (n+r-1)\, n + n(n+1)(n+2) \dots \dots (n+r-1) r$

$= n P_n + r P_n$

එනයින් $P_{n+1} - P_n = r\left(\frac{P_n}{n}\right)$

$\frac{P_n}{n}$, $(r-1)!$ න් බෙදෙන බව දී ඇති බැවින්,

$r\left(\frac{P_n}{n}\right)$, $r!$ න් බෙදේ.

එනම්, $P_{n+1} - P_n$, $r!$ න් බෙදේ.

$P_{n+1} - P_n = K_n r!$ ලෙස ගනිමු. මෙහි $K_n \in \mathbb{Z}$

$P_1 = 1, 2, 3, 4 \dots r = r!$

$P_2 - P_1 = K_1 r!$

$P_3 - P_2 = K_2 r!$

....

....

....

$P_{n-1} - P_{n-2} = K_{n-2} r!$

$P_n - P_{n-1} = K_{n-1} r!$

$P_n - P_1 = r! \sum_{r=1}^{n-1} K_r$

$P_n = r! \left(\sum_{r=1}^{n-1} K_r + 1 \right)$

$\therefore P_n$, $r!$ ගෙන් බෙදේ.

$\therefore$ අනුයාත ධන නිඛිල r හි ගුණිතය $r!$ ගෙන් බෙදේ.//

03. (a) n ධන නිඛිලයක් වීම,

$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^{n-r} y^r$,

${}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ වේ.

සාධනය :- $n = 1$ විට

L.H.S $= x + y$

R.H.S $= {}^nC_0\, x + {}^nC_1\, y = x + y$

${}^nC_0 = {}^nC_1 = 1$ බැවින්,

$\therefore$ $n = 1$ විට ප්‍රකාශය සත්‍ය වේ.

$n = p$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යයි උපකල්පනය කරමු.

මෙහි $p \in \mathbb{Z}^+$

එවිට, $(x+y)^p = \sum_{r=0}^{p} {}^pC_r x^{p-r} y^r$

දෙපසම $(x+y)$ ගෙන් ගුණ කරමු.

$(x+y)^{p+1} = \left(\sum_{r=0}^{p} {}^pC_r x^{p-r} y^r \right)(x+y)$

$= \sum_{r=0}^{p} {}^pC_r x^{p+1-r} y^r + \sum_{r=0}^{p} {}^pC_r x^{p-r} y^{r+1}$

දැන් $r > 0$ සඳහා R.H.S. හි $x^{p+1-r}\, y^r$ හි සංගුණකය

$$= {}^pC_r + {}^pC_{r-1} \text{ වේ.}$$

$${}^pC_r + {}^pC_{r-1} = \frac{p!}{(p-r)!\, r!} + \frac{p!}{(p+1-r)!\, (r-1)!}$$

$$= \frac{p!}{(p-r)!\, (r-1)!} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{(p+1-r)}\right)$$

$$= \frac{p!}{(p-r)!\, (r-1)!} \left(\frac{p+1 \cancel{-r} \cancel{+r}}{r\,(p+1-r)}\right)$$

$$= \frac{(p+1)!}{(p+1-r)!\, r!} = {}^{p+1}C_r \text{ හා}$$

$${}^pC_0 = {}^pC_p = {}^{p+1}C_0 = {}^{p+1}C_{p+1}$$
$$= 1 \text{ බැවින්,}$$

$$(x+y)^{p+1} = \sum_{r=0}^{p+1} {}^{p+1}C_r\, x^{p+1-r}\, y^r$$

$\therefore$ $n = p$ විට සත්‍ය නම් $n = p + 1$ විට ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

එනයින් ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු ධන නිඛිලමය n සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

$(x+y)^n = \sum\limits_{r=0}^{n} {}^nC_r\, x^{n-r}\, y^r$ හි $x = p$, $y = q$

ආදේශ කළ විට,

$$(p+q)^n = p^n + \sum_{r=1}^{n-1} {}^nC_r\, p^{n-r}\, q^r + q^n$$

$$(p+q)^n - p^n - q^n = \sum_{r=1}^{n-1} {}^nC_r\, p^{n-r}\, q^r$$

$$= pq \sum_{r=1}^{n-1} p^{n-r-1}\, q^{r-1}$$

n, p, q ධන නිඛිල විට $\sum$ සලකුණ තුළ වූ ප්‍රකාශය ධන නිඛිල අගයක් ගන්නා බැවින් $(p+q)^n - p^n - q^n$ යන්න pq ගෙන් බෙදේ.

(b) $$U_r = \frac{2r+1}{(3r-2)(3r+1)} \cdot \frac{1}{7^r}$$

$\dfrac{2r+1}{(3r-2)(3r+1)} \equiv \dfrac{A}{3r-2} + \dfrac{B}{3r+1}$ ලෙස ගනිමු.

එවිට, $2r + 1 \equiv (3r+1)\,A + (3r-2)\,B$

$\equiv 3(A+B)\,r + (A - 2B)$

$\Rightarrow$ අනුරූප සංගුණක සැමයීමෙන්,

$A + B = {}^2/_3$ ——— ① හා

$A - 2B = 1$ ——— ②

① හා ② න් $3B = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow B = -\dfrac{1}{9}$

$A = \dfrac{7}{9}$

එවිට $U_r = \dfrac{2r+1}{(3r-2)(3r+1)} \;\dfrac{1}{7^r}$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{7}{3r-2} - \frac{1}{3r+1}\right)\frac{1}{7^r}$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3r-2} \cdot \frac{1}{7^{r-1}} - \frac{1}{3r+1} \cdot \frac{1}{7^r}\right)$$

දැන් $f(r) = \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{1}{(3r+1)} \cdot \dfrac{1}{7^r}$ ලෙස ගත් විට,

$U_r = f(r-1) - f(r)$ වේ.

$r = 1$ විට $U_1 = f(0) - \cancel{f(1)}$

$r = 2$ විට $U_2 = \cancel{f(1)} - \cancel{f(2)}$

$r = 3$ විට $U_3 = \cancel{f(2)} - \cancel{f(3)}$

....

$r = n-2$ විට $U_{n-2} = \cancel{f(n-3)} - \cancel{f(n-2)}$

$r = n-1$ විට $U_{n-1} = \cancel{f(n-2)} - \cancel{f(n-1)}$

$r = n$ විට $U_n = \cancel{f(n-1)} - f(n)$

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} Ur = f(0) - f(n)$$

$$S_n = \frac{1}{9} - \frac{1}{9(3n+1)} \cdot \frac{1}{7^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9(3n+1)} \cdot \frac{1}{7^n}\right)$$

$$= \frac{1}{9} \quad \because \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9(3n+1)} \;\frac{1}{7^n} = 0$$

04. **(a)** $-80 - 18i$ හි වර්ගමූලයක් $a + ib$ යයි ගනිමු. මෙහි a හා b තාත්වික සංඛ්‍යා වේ.

එවිට,

$$(a+ib)^2 = -80 - 18i$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 + i\,2ab = -80 - 18i$$

තාත්වික හා අතාත්වික කොටස් සැමයීමෙන්,

$a^2 - b^2 = -80$ ——— ①

$2ab = -18$ ——— ②

② න් $b = -\dfrac{9}{a}$ එවිට ① න් $a^2 - \dfrac{81}{a^2} = -80$

$a^4 + 80\,a^2 - 81 = 0$

$(a^2 + 81)\,(a^2 - 1) = 0 \Rightarrow a^2 = -81$ හෝ $a^2 = 1$

a තාත්වික බැවින් $a^2 \neq -81 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

එවිට $b = -9$ හෝ 9

$\therefore$ - 80 - 18 i හි වර්ගමූල 1 - 9 i හා -1 + 9 i වේ.

$4z^2 + (16i - 4)z + (65 + 10i) = 0$ හි විවේචකය

$$\begin{aligned}(16i - 4)^2 - 16(65 + 10i) &= (-256 - 128i + 16) \\ &\quad - (1040 + 160i) \\ &= -1280 - 288i \\ &= 16(-80 - 18i) \\ &= \{4(1 - 9i)\}^2\end{aligned}$$

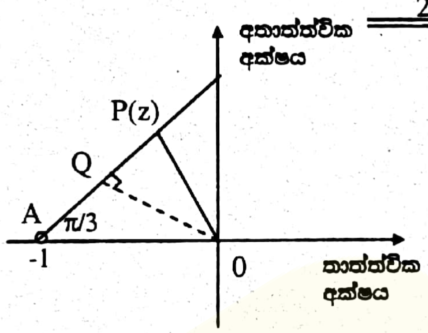
($-80 - 18i = (1 - 9i)^2$ බැවින්)

දී ඇති වර්ගජ සමීකරණයේ මූල $\dfrac{-(16i - 4) \pm 4(1 - 9i)}{8}$

$$= \frac{8 - 52i}{8} \text{ සහ } \frac{20i}{8}$$

$$= \underline{\underline{1 - \frac{13i}{2} \text{ සහ } \frac{5i}{2}}}$$

(b)



$\arg(z + 1) = \dfrac{\pi}{3}$ මගින් තාත්ත්වික අක්ෂය මත A ලක්ෂ්‍යයේ සිට ඇරඹෙන නමුත් A ලක්ෂ්‍යය අයත් නොවන තාත්ත්වික අක්ෂය සමඟ $\dfrac{\pi}{3}$ කෝණයක් සාදන රේඛා ඛණ්ඩය නිරූපණය කරයි. P යනු එම රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂයක් විට $|z|$ හි අගය OP හි දිග මගින් නිරූපණය වේ.

$|z|$ අවම විට OP ඉහත රේඛා කණ්ඩයට ලම්බ වේ.

$|z|$ අවම අගය $= OQ$

$$= 1\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(c) $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$

$z^3 - 1 = 0$ විට $(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$

මෙම සමීකරණයේ සංකීර්ණ මූල $z^2 + z + 1 = 0$ මගින් ලැබේ.

$\therefore$ $z^3 - 1 = 0$ හි සංකීර්ණ මූල $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ වේ.

දැන් $\omega = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ යයි ගනිමු.

එවිට, $\omega^2 = \left(\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^2$

$$= \frac{1 - 3 - 2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

එසේම $\left(\dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \dfrac{1 - 3 + 2\sqrt{3}i}{2} = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore$ ඉහත සමීකරණයේ එක් මූලයක් ω වන විට ω^2 ද එහි මූලයක් වේ.

$z^3 - 1 = 0$ හි මූල $1, \omega, \omega^2$ බැවින්,

$\omega^2 + \omega + 1 = 0 \Rightarrow \omega + 1 = -\omega^2$

එවිට k නිඛිලයක් වන විට,

$(\omega + 1)^k = (-\omega^2)^k$ බව ලැබේ.

k යනු ඔත්තේ ධන නිඛිලයක් විට $(-1)^k = -1$ බැවින්,

$(\omega + 1)^k = -\omega^{2k}$ වේ.

එවිට, $(\omega + 1)^k + \omega^{2k} = 0$

$f(x) = (x + 1)^k + x^{2k}$ යයි ගනිමු. මෙහි k ඔත්තේ ධන නිඛිලයකි.

$$\begin{aligned}\text{එවිට, } f(\omega) &= (\omega + 1)^k + \omega^{2k} = 0 \\ f(\omega^2) &= (\omega^2 + 1)^k + \omega^{4k} \\ &= (-\omega)^k + \omega^{4k} \\ &= (\omega^3)^k\, \omega^k - \omega^k \\ &= \omega^k(\omega^{3k} - 1) \;;\; \omega^3 = 1 \text{ බැවින්} \\ &= 0\end{aligned}$$

$\therefore$ $(x - \omega)$ හා $(x - \omega^2)$, $f(x)$ හි සාධක වේ.

එනම්, $(x - \omega)(x - \omega^2) = x^2 - (\omega + \omega^2)x + \omega^3$

$$= x^2 + x + 1$$

ද $f(x)$ හි සාධකයක් වේ.

එනම් $x^2 + x + 1$, $(x + 1)^k + x^{2k}$ හි සාධනයකි. මෙහි k ඔත්තේ නිඛිලයකි.//

05. (a)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$= 1 \cdot \cos x \quad \left(\because \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} = 1\right)$$

$$= \underline{\underline{\cos x}}$$

$$g(x) = \cos x$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$= f(y) \text{ මෙහි } y = \frac{\pi}{2} - x$$

දැන් $\frac{d}{dx}\, g(x) = \frac{d}{dx} f(y) = \frac{d f(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

$$= \cos y \,.\, (-1)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$= \sin x$$

(i) $\frac{d}{dx} \sin(\ln(1 + x^2)) = \cos(\ln(1 + x^2)) \cdot \frac{1}{1 + x^2} \cdot 2x$

$$= \frac{2x}{1 + x^2} \cos(\ln(1 + x^2))$$

(ii) $\frac{d}{dx} \cos(\sin x) = -\sin(\sin x) \,.\, \cos x$

$$= -\cos x \sin(\sin x)$$

(b) (i) $y = \sin k\theta \operatorname{cosec} \theta$ සහ $x = \cos \theta$, k නියතයකි.

$$\frac{dy}{d\theta} = k \cos k\theta \operatorname{cosec} \theta - \sin k\theta \,.\, \operatorname{cosec} \theta \cot \theta$$

සහ $\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx}$$
$$= -(k \cos k\theta \operatorname{cosec} \theta - \sin k\theta \operatorname{cosec} \theta \cot \theta) \cdot \frac{1}{\sin \theta}$$
$$= -k \cos k\theta \operatorname{cosec}^2\theta + \sin k\theta \operatorname{cosec}^2\theta \cot \theta$$
$$\sin^2 \theta \frac{dy}{dx} = -k \cos k\theta + \sin k\theta \cot \theta$$
$$(1 - x^2) \frac{dy}{dx} = -k \cos k\theta + xy$$
$$(1 - x^2) \frac{dy}{dx} - xy + k \cos k\theta = 0$$

(ii) ඉහත සමීකරණය x විෂයයෙහි අවකලනයෙන්,

$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - y - x\frac{dy}{dx} + k \frac{d}{d\theta} \cos k\theta \frac{d\theta}{dx} = 0$$
$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} - y - k^2 \sin k\theta \left(\frac{-1}{\sin \theta}\right) = 0$$
$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} - y + k^2 \sin k\theta \operatorname{cosec} \theta = 0$$
$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + (k^2 - 1)\, y = 0$$

(c) $y(1 + x^2) = 2 \longrightarrow$ ①, x විෂයයෙහි අවකලනයෙන්

$$\frac{dy}{dx}(1 + x^2) + 2xy = 0$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{1 + x^2}$ = ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක දී වක්‍රයේ අනුක්‍රමණය

$P(3, \frac{1}{5})$ දී වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය

$$= \frac{-2.3.\frac{1}{5}}{1 + 9}$$
$$= \frac{-3}{25}$$

∴ P හි දී වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

$$y - \frac{1}{5} = \frac{-3}{25}(x - 3)$$
$$25y - 5 = -3x + 9$$
$$\Rightarrow 3x + 25y = 14 \longrightarrow ②$$

වක්‍රය ස්පර්ශකය හා නැවත හමුවේ නම්,

① හා ② න්,

$$\frac{2}{1 + x^2} = \frac{14 - 3x}{25}$$
$$50 = 14 + 14x^2 - 3x - 3x^3$$
$$\Rightarrow 3x^3 - 14x^2 + 3x + 36 = 0$$

මෙහි මූල මගින් වක්‍රයේ P හි ස්පර්ශකය හමුවන ලක්ෂ්‍යවල පාටික ලැබේ. $x = 3$ දී ස්පර්ශ වන බැවින් $(x - 3)^2$ සාධකයකි.

$$\therefore 3x^3 - 14x^2 + 3x + 36 = (x - 3)^2(3x + 4)$$

∴ $x = 3$ (දෙවරක්) හා $x = -\frac{4}{3}$ ඉහත සමීකරණයේ මූල වේ.

∴ P හි දී ඇඳි ස්පර්ශකයට වක්‍රය නැවත හමුවන ලක්ෂ්‍යය Q බැවින්,

$Q \equiv \left(\frac{-4}{3}, \frac{18}{25}\right)$ වේ.

06. (a) $I_k = \int \frac{e^t}{t^k}\, dt = \int \frac{(-1)}{k - 1}\, e^t \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^{k-1}}\right) dt$

$$= -\frac{1}{k - 1} \frac{e^t}{t^{k-1}} + \frac{1}{k - 1} \int \frac{e^t}{t^{k-1}}\, dt$$

$$(k - 1)I_k - I_{k-1} + \frac{e^t}{t^{k-1}} = C \longrightarrow ①$$

C අභිමත නියතයකි.

$$I = \int e^x \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 dx$$

$t = 1 + x$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $I = \int \frac{e^{t-1}(2-t)^2\, dt}{t^2} = \frac{1}{e}\int e^t \left\{\frac{4}{t^2} \frac{-4}{t} + 1\right\} dt$

$I_k = \int \frac{e^t}{t^k}\, dt$ බැවින්,

$$I = \frac{1}{e}\left\{4 I_2 - 4 I_1 + \int e^t\, dt\right\}$$

① න් $I_2 - I_1 = \frac{-e^t}{t} + C$

$\therefore I = \frac{1}{e}\left\{\frac{-4e^t}{t} + 4C + e^t + D\right\}$

මෙහි D අභිමත නියතයකි.

$= \frac{e^{1+x}}{e} - \frac{4}{e}\ \frac{e^{1+x}}{(1+x)} +$ නියතයක්

(b) $J = \int_0^a f(x)\, dx$, $a > 0$ යයි ගනිමු.

$y = a - x$ නම් එවිට $dy = -dx$

එවිට, $J = \int_a^0 f(a-y)(-dy)$

$= \int_0^a f(a-y)\, dy$

නිශ්චිත අනුකල විචල්‍යයෙන් ස්වායත්ත බැවින්,

$$J = \int_0^a f(a-x)\, dx$$

ඉහත සම්බන්ධය අනුව,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2k}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^{2k} x\, dx$$

k ධන නිඛිලයකි.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x}\, dx$$

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x}\, dx = \int_0^{\pi/2} dx$$

$$I = \frac{1}{2}[x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

07. $ax + by + c = 0$ රේඛාවට ලම්බ රේඛාවක සමීකරණය $bx - ay + c' = 0$ ආකාර වේ.

මෙම රේඛාව (x_o, y_o) හරහා යන විට,

$bx_o - ay_o + c' = 0$

$\therefore$ (x_o, y_o) හරහා යන $ax + by + c = 0$ ට ලම්බ රේඛාවේ සමීකරණය,

$bx - ay - bx_o + ay_o = 0$ වේ.

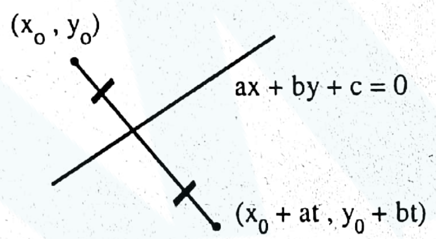
එනම්, $b(x - x_o) = a(y - y_o)$

$\Rightarrow \frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = t$ (යයි ගනිමු.)

එවිට, $x = x_o + at$ $\quad y = y_o + bt$

$\therefore$ (x_o, y_o) හරහා $ax + by + c = 0$ රේඛාවට ඇඳි ලම්බ රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් t පරාමිතියක් වූ

$(x_o + at, y_o + bt)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කළ හැක.



$ax + by + c = 0$ තුළින් (x_o, y_o) හි දර්පණ ප්‍රතිබිම්බය $(x_o + at, y_o + bt)$ නම්,

එම ලක්ෂ්‍ය දෙකේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන $\left(x_o + \frac{at}{2}, y_o + \frac{bt}{2}\right)$ $ax + by + c = 0$ මත වේ.

එවිට $a\left(x_o + \frac{at}{2}\right) + b\left(y_o + \frac{bt}{2}\right) + c = 0$

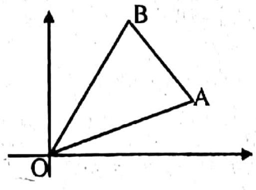
එමගින් $t = -2\,\frac{(ax_o + by_o + c)}{a^2 + b^2}$ බව ලැබේ.

$\therefore$ $ax + by + c = 0$ තුළින් (x_o, y_o) හි දර්පණ ප්‍රතිබිම්බය

$(x_o + at, y_o + bt)$ වේ. මෙහි $t = \frac{-2(ax_o + by_o + c)}{a^2 + b^2}$ වේ.

OA රේඛා ඛණ්ඩයේ ලම්බ සමච්ඡේදකය
$x \cos\theta + y \sin\theta - 1 = 0$ බැවින්, A යනු
$x \cos\theta + y \sin\theta - 1 = 0$ තුළින් O හි දර්පණ ප්‍රතිබිම්බය යි.

$\therefore$ A හි ඛණ්ඩාංක $(x_o + at, y_o + bt)$ මගින්
$(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ වේ.



∴ OA රේඛාවේ සමීකරණය $\frac{y}{x} = m$ මගින්

$$\frac{y}{x} = \frac{\cancel{2}\sin\theta}{\cancel{2}\cos\theta}$$

$y = x\tan\theta$ වේ.//

AB පාදයේ ලම්බ සමච්ඡේදකය

$x - y - 1 = 0$ බැවින් B යනු $x - y - 1 = 0$ තුළින් A හි දර්පණ ප්‍රතිබිම්බය වේ.

∴ B හි ඛණ්ඩාංක $\left\{2\cos\theta - \cancel{2}\frac{(2\cos\theta - 2\sin\theta - 1)}{\cancel{2}},\ 2\sin\theta + \cancel{2}\frac{(2\cos\theta - 2\sin\theta - 1)}{\cancel{2}}\right\}$

$= (1 + 2\sin\theta\ ,\ -1 + 2\cos\theta)$ වේ.

∴ OB රේඛා කාණ්ඩයේ සමීකරණය $\frac{y}{x} = m$ මගින්

$$\frac{y}{x} = \frac{-1 + 2\cos\theta}{1 + 2\sin\theta}$$

$$y(1 + 2\sin\theta) = x(-1 + 2\cos\theta)$$

එනම්, $x(1 - 2\cos\theta) + y(1 + 2\sin\theta) = 0$

AB හි සමීකරණය,

$$\frac{y - 2\sin\theta}{x - 2\cos\theta} = \frac{-1 + 2\cos\theta - 2\sin\theta}{1 + 2\sin\theta - 2\cos\theta}$$

OB හි ලම්බ සමච්ඡේදකයේ සමීකරණය

$$y - \left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right) = \frac{-(1 + 2\sin\theta)}{(-1 + 2\cos\theta)}\left\{x - \left(\sin\theta + \frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$y(2\cos\theta - 1) + x(1 + 2\sin\theta) - \frac{1}{2}(2\cos\theta - 1)^2 - \frac{1}{2}(2\sin\theta + 1)^2 = 0$$

$$y(2\cos\theta - 1) + x(1 + 2\sin\theta) - \frac{1}{2}[4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 + 4\sin^2\theta + 4\sin\theta + 1] = 0$$

$$y(2\cos\theta - 1) + x(1 + 2\sin\theta) - \frac{1}{2}(6 - 4\cos\theta + 4\sin\theta) = 0$$

$$y(2\cos\theta - 1) + x(2\sin\theta + 1) - (3 - 2\cos\theta + 2\sin\theta) = 0 \quad \text{———} \ ①$$

OA හා AB රේඛාවල ලම්බ සමච්ඡේදක වල ඡේදන ලක්ෂ්‍ය වල ඛණ්ඩාංක $x\cos\theta + y\sin\theta - 1 = 0$ හා $x - y - 1 = 0$ සමීකරණ දෙක මගින් ලැබේ.

ඒවා විසඳීමෙන්,

$$x = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} \quad \text{හා} \quad y = \frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$

∴ OA හා AB හි ලම්බ සමච්ඡේදක වල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය

$$\left(\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\ ,\ \frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\right)$$

දැන් $\frac{(1 - \cos\theta)}{\cos\theta + \sin\theta}(2\cos\theta - 1) + \frac{(1 + \sin\theta)}{(\cos\theta + \sin\theta)}(2\sin\theta + 1)$

$$= \frac{3\cos\theta - \cancel{1} - 2\cos^2\theta + 3\sin\theta + 2\sin^2\theta + \cancel{1}}{\cos\theta + \sin\theta}$$

$$= \frac{3(\cos\theta + \sin\theta) + 2(\sin\theta + \cos\theta)(\sin\theta - \cos\theta)}{\cos\theta + \sin\theta}$$

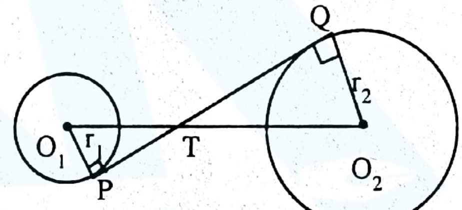
$$= \frac{\cancel{(\cos\theta + \sin\theta)}(3 + 2\sin\theta - 2\cos\theta)}{\cancel{\cos\theta + \sin\theta}}$$

$$= (3 + 2\sin\theta - 2\cos\theta)$$

∴ $\left(\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\ ,\ \frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\right)$ ලක්ෂ්‍යය OB හි ලම්බ සමච්ඡේදකය වන ① තෘප්ත කරයි.

එනම් OA, AB හා OB හි ලම්බ සමච්ඡේදක ඒක ලක්ෂ්‍ය වේ.

08.



PQ යනු $S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$

හා $S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$

වෘත්ත දෙකට ඇඳි පොදු ස්පර්ශකය යයි ද එය O_1O_2 රේඛා ඛණ්ඩය O_1 හා O_2 අතර T ලක්ෂ්‍යයේ දී ඡේදනය කරන්නේ යයි සිතමු.

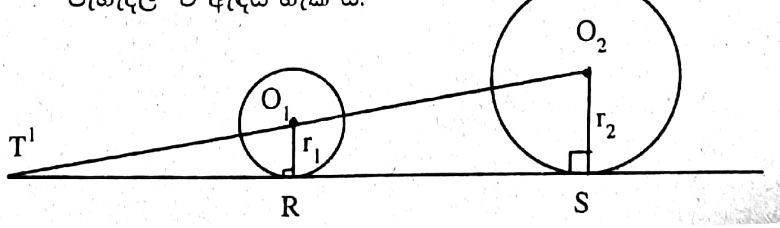
එවිට, $O_1PT\ \Delta$ හා $O_2QT\ \Delta$ සමරූපී වේ.

∴ $\frac{O_1T}{TO_2} = \frac{r_1}{r_2}$ මෙහි r_1 හා r_2 පිළිවෙළින් $S_1 = O$ හා $S_2 = O$ හි අරයන් වේ.

T යනු O_1O_2 රේඛා ඛණ්ඩය $r_1 : r_2$ අනුපාතයට අභ්‍යන්තරව බෙදන ලක්ෂ්‍යය බැවින්,

$$T \equiv \left(\frac{-g_1r_2 - g_2r_1}{r_1 + r_2}\ ,\ \frac{-f_1r_2 - f_2r_1}{r_1 + r_2}\right)$$

මෙලෙස T හරහා තවත් පොදු ස්පර්ශකයක් වෘත්ත දෙකට පැහැදිලි ව ඇඳිය හැකි ය.



$S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ ඇඳි පොදු ස්පර්ශකයක් RS යයි ද එයට $O_1 O_2$ රේඛාව දික් කළ විට T^1 හි දී හමුවන්නේ යයි ගනිමු.

එවිට $T^1 RO_1$ හා $T^1 SO_2$ සමරූපී බැවින්,

$$\frac{O_1 T^1}{O_2 T^1} = \frac{r_1}{r_2}$$

එනම්, T^1 යනු O_1O_2 රේඛාව බාහිර ව $r_1 : r_2$ අනුපාතයට බෙදන ලක්ෂ්‍යය යි.

$$T^1 \equiv \left(\frac{g_1r_2 - g_2r_1}{r_1 - r_2}, \frac{f_1r_2 - f_2r_1}{r_1 - r_2}\right)$$

පැහැදිලිව ම T^1 සිට තවත් පොදු ස්පර්ශකයක් වෘත්ත දෙකට ඇඳිය හැකි ය.

$x^2 + y^2 - 18x + 6y + 86 = 0$ හා $x^2 + y^2 + 18x - 6y + 74 = 0$ වෘත්ත දෙකේ සමීකරණ

$(x - 9)^2 + (y + 3)^2 = 2^2$ හා $(x + 9)^2 + (y - 3)^2 = 4^2$

ආකාරයට ලිවිය හැක.

එනම් T හා T^1 හි කණ්ඩාංක පිළිවෙළින්,

$$\left(\frac{9 \times 4 - 9 \times 2}{2 + 4}, \frac{-3 \times 4 + 3 \times 2}{2 + 4}\right) = (3, -1) \text{ හා}$$

$$\left(\frac{-2 \times 9 + 4 \times (-9)}{2 - 4}, \frac{-2 \times (-3) + 4 \times 3}{2 - 4}\right) = (27, -9)$$

වේ.

T හරහා ඇඳි රේඛාවක සමීකරණය $y + 1 = m(x - 3)$ ආකාර වේ.

එනම්, $y - mx + 3m + 1 = 0$ වේ.

මෙම රේඛාව $(x - 9)^2 + (y + 3)^2 = 2^2$ ස්පර්ශ කරයි නම්,

$$\frac{|-3 - 9m + 3m + 1|}{\sqrt{1 + m^2}} = 2$$

$$\begin{aligned}
\text{එනම්, } (-6m - 2)^2 &= 4(1 + m^2) \\
\cancel{4}(3m + 1)^2 &= \cancel{4}(1 + m^2) \\
8m^2 + 6m &= 0 \\
4m^2 + 3m &= 0 \\
m = 0 \text{ හෝ } m &= \frac{-3}{4}
\end{aligned}$$

මෙලෙස T හරහා යන පොදු ස්පර්ශක වල සමීකරණ

$y + 1 = 0$ හා $y + 1 = -\frac{3}{4}(x - 3)$

එනම් $y + 1 = 0$ හා $4y + 3x - 5 = 0$

T^1 හරහා යන රේඛාවක සමීකරණය

$y + 9 = m'(x - 27)$ ආකාර වේ.

එනම්, $y - m'x + 27m' + 9 = 0$

මෙම රේඛාව $(x - 9)^2 + (y + 3)^2 = 2^2$ වෘත්තය ස්පර්ශ කරන විට

$$\frac{|-3 - 9m' + 27m' + 9|}{\sqrt{1 + m^2}} = 2$$

$$\begin{aligned}
(6 + 18m')^2 &= 4(1 + m^2) \\
36(1 + 3m')^2 &= 4(1 + m'^2) \\
9(1 + 6m' + 9m'^2) &= 1 + m'^2 \\
9 + 54m' + 81m'^2 &= 1 + m'^2 \\
80m'^2 + 54m' + 8 &= 0 \\
40m'^2 + 27m' + 4 &= 0 \\
m' &= \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 - 640}}{80} \\
&= \frac{-27 \pm \sqrt{729 - 640}}{80} \\
&= \frac{-27 \pm \sqrt{89}}{80}
\end{aligned}$$

මෙසේ T' හරහා වෘත්ත දෙකට ඇඳි පොදු ස්පර්ශක වල සමීකරණ

$$y + 9 = \frac{-27 + \sqrt{89}}{80}(x - 27) \text{ හා}$$

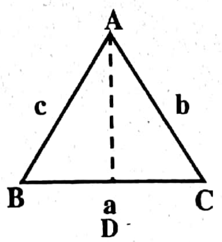
$$y + 9 = \frac{-27 - \sqrt{89}}{80}(x - 27) \text{ වේ.}$$

09. ABC ත්‍රිකෝණයක සම්මත අංකනයෙන්

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \text{ වේ.}$$

<u>සාධනය :-</u>

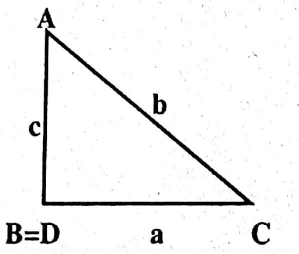
(i) ABC සුළුකෝණී ත්‍රිකෝණයක් විට



$$\begin{aligned}
AD &= AB \sin B \\
&= AC \sin C
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

(ii)



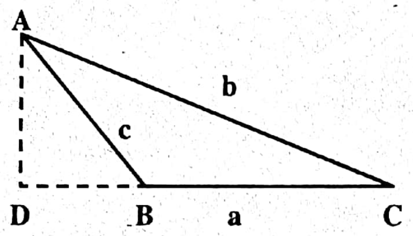
ABC සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක් විට

$AD = AB = AC \sin C$

$AB \sin B = AC \sin C \; (\because B = 90^0)$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

(iii)



ABC මහකෝණී ත්‍රිකෝණයක් විට

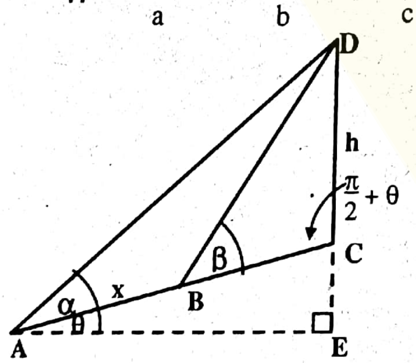
$AD = AB \sin(\pi - B)$

$= AC \sin C$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

මෙසේම, $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin C}{c}$

$$\therefore \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \; //$$



ACD ත්‍රිකෝණයට සයින් සූත්‍රය යෙදීමෙන්,

$$\frac{AD}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{h}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow h = \frac{AD \sin\alpha}{\cos\theta}$$

ABD ත්‍රිකෝණයට සයින් සූත්‍රය යෙදීමෙන්

$$\frac{AD}{\sin(\pi - \beta)} = \frac{x}{\sin(\beta - \alpha)} \Rightarrow AD = \frac{x \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$

$$\therefore \; h = \frac{x \sin\beta \sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)\cos\theta}$$

(ii) $d = DE = AD \sin(\alpha + \theta)$ හා

$AD = \dfrac{x \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$ බැවින්

$$d = \frac{x \sin\beta \sin(\alpha + \theta)}{\sin(\beta - \alpha)}$$

(b) (i) $\sin\theta - \cos\theta = 1$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta\cos\frac{\pi}{4} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$

මෙහි සාධාරණ විසඳුම,

$$\theta - \frac{\pi}{4} = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4} \; ; \; n \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = n\pi + (1 + (-1)^n)\frac{\pi}{4}$$

$n = 0$ විට $0 = \dfrac{\pi}{2}$ හා $n = 1$ විට $\theta = \pi$

(ii) $\tan^{-1}\dfrac{1}{2} - \tan^{-1}\dfrac{1}{3} = \sin x$

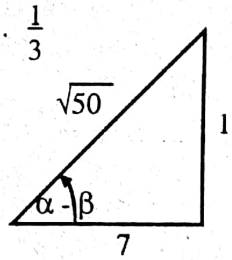
$\alpha = \tan^{-1}\dfrac{1}{2}$, $\beta = \tan^{-1}\dfrac{1}{3}$ නම්

$\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$ හා $\tan\beta = \dfrac{1}{3}$ වේ.

එවිට, $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{7}$$



$$\text{Sin}(\alpha - \beta) = \frac{1}{\sqrt{50}}$$

එවිට $\alpha - \beta = \sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{50}}$

නමුත් $\alpha - \beta = \sin^{-1} x$

$$\sin^{-1} x = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{50}}$$

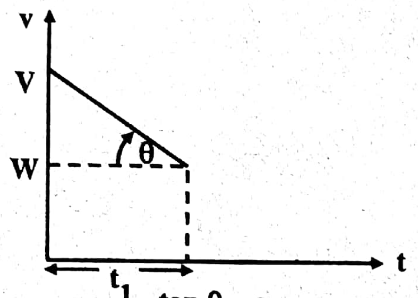
$$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{5\sqrt{2}}{50} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

*** ***

01. (a) (i) $0 \le t \le t_1$ ප්‍රාන්තරය තුළ,

(බැ ප E) $= \uparrow U$; (බැ ත් E) $= 0$
(P ප බැ) $= \uparrow V$; (P ත් E) $= \downarrow g$

$\tan\theta = \dfrac{V - W}{t_1} \rightarrow t_1 = \dfrac{V - W}{g} \therefore W = V - gt_1$



$\tan\theta = g$

(ii) $t_1 \le t \le t_2$ ප්‍රාන්තරය තුළ,

(P ත් E) $= \downarrow g$ (Q ත් E) $= \downarrow g$

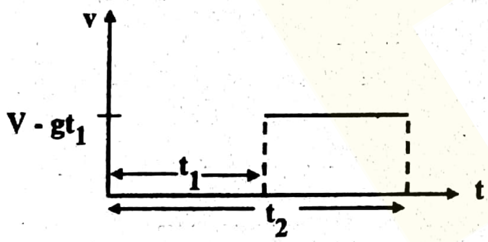
(Q ත් P) = (Q ත් E) + (E ත් P)

$= \downarrow g + \uparrow g = 0$

$\therefore$ (Q ප P) නියතයක් වේ. (Q ප P) $= \uparrow (V - gt_1)$

$t = t_1$ වන විට,
(P වි Q) = (P වි E) $= \frac{1}{2}[V + W]\, t_1$

$= \frac{1}{2}[V + V - gt_1]\, t_1$



$t = t_1$ වන විට,

(Q ප P) = (Q ප බැ) + (බැ ප P)
$= \uparrow V + \downarrow W$
$= \uparrow V - W = \uparrow V - (V - gt_1)$

$= \uparrow gt_1$

$t_2 - t_1$ කාලයේ දී විස්ථාපනය $= g t_1 (t_2 - t_1)$

$t = t_2$ විට P හා Q එකිනෙක හමුවෙයි නම්,

එවිට (Q වි P) = 0 විය යුතු ය.

$g t_1 (t_2 - t_1) - \frac{1}{2}(2V - 2g t_1)\, t_1 = 0$

$g t_1 (t_2 - t_1) = \frac{t_1}{2}(2V - g t_1)$

$t_2 - t_1 = \frac{1}{2g}(2V - g t_1)$ ($t_2 > t_1$ බැවින්)

$t_2 = \frac{V}{g} - \frac{t_1}{2} + t_1$

$= \frac{V}{g} + \frac{t_1}{2}$

$t = t_2$ විට,

(Q ප E) $= U + V - g(t_2 - t_1)$

$= U + V - g\left(\frac{V}{g} + \frac{t_1}{2} - t_1\right)$

$= U + \frac{gt_1}{2}$

(P ප E) = (P ප Q) + (Q ප E)

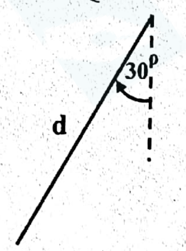
$= -g t_1 + U + \frac{gt_1}{2}$

$= U - \frac{gt_1}{2}$

(b) (ස E) = U (නැ E) $= \uparrow V$

(ස නැ) = (ස E) + (E නැ)

$= u + \downarrow v$
$= \downarrow v + u$
$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$
$= \overrightarrow{PR}$



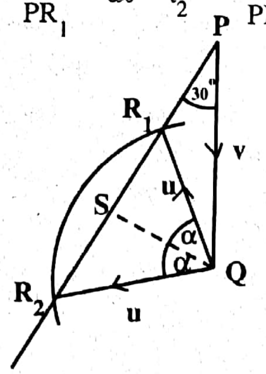
Q කේන්ද්‍රය වූ ද අරය u වූ ද ($u < v < 2u$) වෘත්තය P හරහා වූ රේඛාව R_1 හා R_2 ලක්ෂ්‍යවල දී ඡේදනය කරයි. මේ අනුව සබ්මැරීනයට $\overrightarrow{QR_1}$ හා $\overrightarrow{QR_2}$ යනුවෙන් දිශා දෙකක් පවතී.

එම දිශා දෙක අතර කෝණය $R_1\hat{Q}R_2 = 2\alpha$ වේ.

මෙහි $\cos\alpha = \dfrac{V\sin 30}{u} = \dfrac{V}{2u}$ වේ.

නැව ඇල්ලීම සඳහා ගතවන කාලයන් t_1 හා t_2 නම්,

$t_1 = \dfrac{d}{PR_1}$ හා $t_2 = \dfrac{d}{PR_2}$ වේ.



කාල ප්‍රාන්තරය $t_1 - t_2 = \dfrac{d}{PR_1} - \dfrac{d}{PR_2}$

$$= d\left[\frac{PR_2 - PR_1}{PR_1 \, . \, PR_2}\right]$$

$$= d\,\frac{[PS + SR_2 - (PS - SR_1)]}{(PS - SR_1)\;(PS + SR_2)}$$

$$= \frac{d \, . \, 2SR_1}{PS^2 - SR_1^2}$$

($\because SR_1 = SR_2$ බැවින්)

$$t_1 - t_2 = \frac{2d\sqrt{u^2 - (v/2)^2}}{(v\sqrt{3}/2)^2 - [u^2 - (v/2)^2]}$$

$$= \frac{2d\,\tfrac{1}{2}\sqrt{4u^2 - v^2}}{\tfrac{1}{4}(3v^2 - 4u^2 + v^2)}$$

$$= \frac{d\sqrt{4u^2 - v^2}}{v^2 - u^2}$$

02. (a)

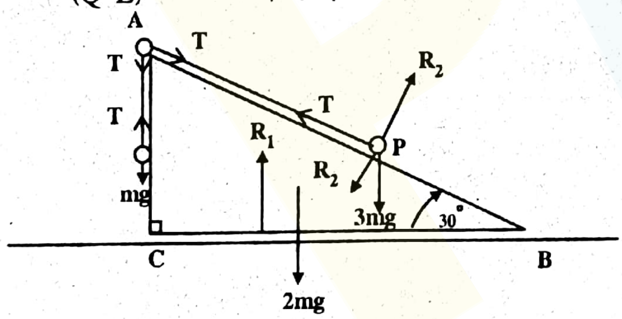
(P කු) $= \overset{30^\circ}{\searrow} a_1$

(Q කු) $= \uparrow a_1$

(කු E) $= \overset{a_2}{\longleftarrow}$

(P E) $= \overset{30^\circ}{\searrow} a_1 + \overset{a_2}{\longleftarrow}$

(Q E) $= \uparrow a_1 + \overset{a_2}{\longleftarrow}$



$\underline{F} = m\underline{a}$ යොදමු.

$\uparrow$ Q ; $\quad T - mg = ma_1 \longrightarrow$ ①

$\overset{30^\circ}{\searrow}$ P ; $3\,mg \sin 30^\circ - T = 3m\,(a_1 - a_2 \cos 30^\circ)$ ——— ②

$\longleftarrow$ පද්ධතිය ; $0 = 2ma_2 + m.a_2 + 3m(a_2 - a_1 \cos 30)$ ——— ③

① + ② $\quad \dfrac{\cancel{m}g}{2} = 4\cancel{m}a_1 - 3\cancel{m}a_2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ——— ④

③ න්, $\quad 0 = 6\cancel{m}a_2 - 3\cancel{m}a_1\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ——— ⑤

⑤ න් $a_1 = \dfrac{4a_2}{\sqrt{3}}$

④ න් $\quad \dfrac{g}{2} = 4 \times \dfrac{4a_2}{\sqrt{3}} - \dfrac{3\sqrt{3}a_2}{2}$

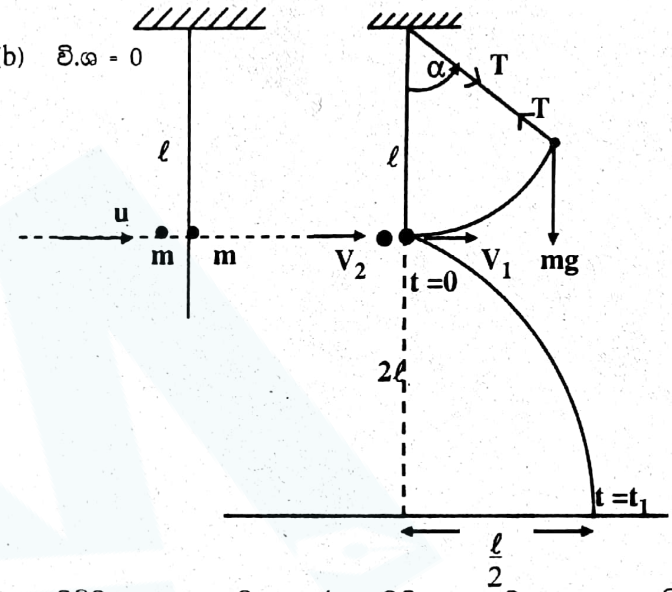
$$\sqrt{3}g = 32\,a_2 - 9\,a_2$$

$$a_2 = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}g}{23}}}$$

$$\therefore \quad a_1 = \frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}g}{23} = \frac{4g}{23}$$

$$T = mg + \frac{4mg}{23} = \underline{\underline{\frac{27mg}{23}}}$$

(b) වි.ශ = 0



බට්ටා හා අංගුව අතර ගැටුම සලකමු. ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය *e* නම් ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමයෙන්,

$\cancel{m}u = \cancel{m}v_1 + \cancel{m}v_2 \longrightarrow$ ①

නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමයෙන්,

$e\,u = v_1 - v_2 \longrightarrow$ ②

① හා ② විසඳීමෙන්

$v_1 = \dfrac{u}{2}(1 + e)$ හා $v_2 = \dfrac{u}{2}(1 - e)$

අංගුවේ චලිතය සලකා $S = ut + \dfrac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්

$\rightarrow \dfrac{\ell}{2} = v_2 t_1$ ——— ③

$\downarrow 2\ell = \dfrac{1}{2}g\,t_1^2$ ——— ④

t_1 ඉවත් කිරීමෙන් $16\,v_2^2 = g\,\ell$ ——— ⑤

බට්ටා සලකා ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්

$$\frac{1}{2}m\,v_1^2 - mg\,\ell = 0 - mg\,\ell\,\cos\alpha$$

$v_1^2 = 2g\,\ell\,(1 - \cos\alpha)$ ——— ⑥

$\dfrac{⑥}{⑤}$ න් $\dfrac{v_1^2}{16v_2^2} = \dfrac{2g\,\ell\,(1 - \cos\alpha)}{g\,\ell}$

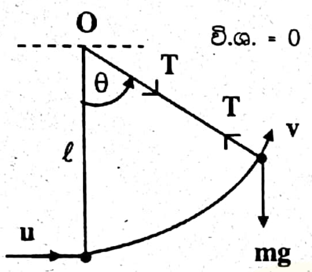
$$\Rightarrow \quad \frac{v_1^2}{v_2^2} = 32 \times 2 \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1+e}{1-e} \text{ බැවින් } \frac{(1+e)^2}{(1-e)^2} = 64 \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1+e}{1-e} = 8 \sin\frac{\alpha}{2} \quad (\because 0 < e < 1 \text{ නිසා})$$

$$\therefore e = \underline{\underline{\frac{8 \sin\frac{\alpha}{2} - 1}{8 \sin\frac{\alpha}{2} + 1}}}$$

03. අංශුවේ චලිතය සලකා ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්,



$$\frac{1}{2} mu^2 - mg\ell = \frac{1}{2} mv^2 - mg\ell\cos\theta$$

$$v^2 = u^2 - 2g\ell(1 - \cos\theta) \text{ ——① }$$

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්,

$$T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{\ell} \text{ —— ② }$$

ආදේශයෙන්,

(i) $T = mg\cos\theta + \frac{m}{\ell}[u^2 - 2g\ell + 2g\ell\cos\theta]$

$$= \frac{m}{\ell}[u^2 - 2g\ell + 3g\ell\cos\theta]$$

$$T = \underline{\underline{m\left[3g\cos\theta - 2g + \frac{u^2}{\ell}\right]}}$$

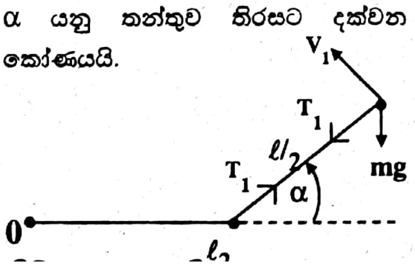
(ii) අංශුව යන්තමින් 0 හි මට්ටමට එළඹෙයි නම්,

$\theta = \frac{\pi}{2}$ විට $v \geq 0$ විය යුතු ය.

① න් $u^2 - 2g\ell \geq 0 \Rightarrow u^2 \geq 2g\ell$

$\therefore$ අවම $u = \sqrt{2g\ell}$

(iii) α යනු තන්තුව තිරසට දක්වන ආරෝහණ කෝණයයි.



අංශුවේ චලිතය සලකා, ශ. සං. නි. යෙදීමෙන්,

$$\frac{1}{2} m(u^2 - 2g\ell) + 0 = \frac{1}{2} mv_1^2 + mg\frac{\ell}{2}\sin\alpha$$

$$u^2 - 2g\ell = v_1^2 + g\ell\sin\alpha$$

$$v_1^2 = u^2 - 2g\ell - g\ell\sin\alpha$$

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්,

$$T_1 + mg\sin\alpha = \frac{m v_1^2}{\ell/2}$$

$$T_1 = \frac{2m}{\ell}(u^2 - 2g\ell - g\ell\sin\alpha) - mg\sin\alpha$$

තන්තුව බුරුල් වෙයි නම් $T_1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{2m}{\ell}(u^2 - 2g\ell - g\ell\sin\alpha) - mg\ell\sin\alpha = 0$$

$$2u^2 - 4g\ell - 2g\ell\sin\alpha - g\ell\sin\alpha = 0$$

$$\text{Sin } \alpha = \frac{2u^2 - 4g\ell}{3g\ell} \text{ වේ.}$$

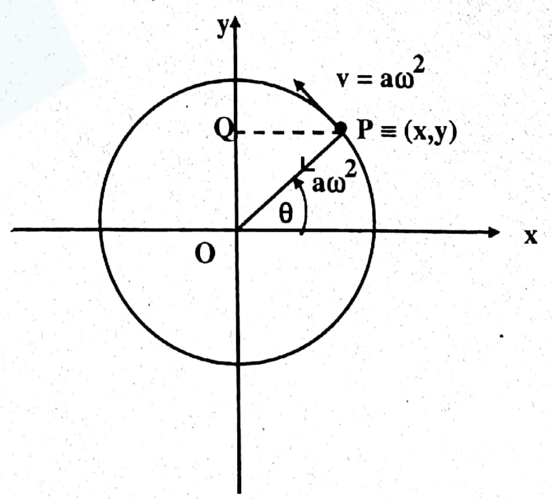
$0 < \sin\alpha < 1$ නිසා

$$0 < \frac{2u^2 - 4g\ell}{3g\ell} < 1 \Rightarrow 2g\ell < u^2 < \frac{7g\ell}{2}$$

04. $OQ = a\sin\theta$

$\therefore y = a\sin\theta$ ——①

t විෂයයෙන් අවකලනයෙන්,



$$\dot{y} = a\cos\dot{\theta} = a\omega\cos\theta \quad \left(\because \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega\right)$$

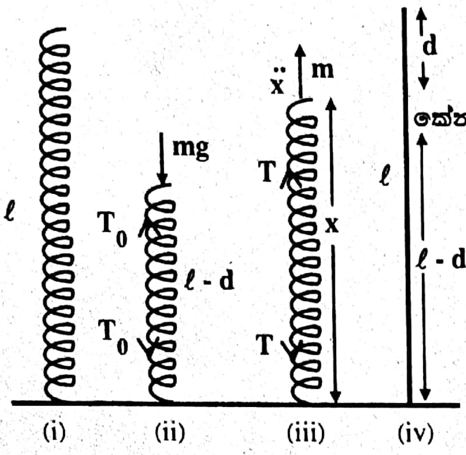
$$\therefore \ddot{y} = -a\omega^2\sin\theta$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 y \quad (\text{① න්})$$

මෙහි $-a \leq y \leq a$ වේ.

$\therefore$ P හි y අක්ෂය මත ප්‍රක්ෂේපණය වන Q , සරල අනුවර්ති චලිතයේ යෙදෙයි.

$\therefore$ කාලාවර්තය $= \frac{2\pi}{\omega}$ වේ.



(ii) වන රූපයට අනුව සමතුලිත පිහිටීමේ දී,

$$T_o = mg \quad \text{①}$$

නමුත්, $T_o = \frac{\lambda d}{\ell}$ ②

(ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය λ නම්)

$$\therefore \quad mg = \frac{\lambda d}{\ell} \Rightarrow \frac{\lambda}{\ell} = \frac{mg}{d}$$

(iii) වන රූපයට අනුව,

$$T = \frac{\lambda(\ell - x)}{\ell} = \frac{mg}{d}(\ell - x)$$

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්, $\uparrow T - mg = m\ddot{x}$

$$\frac{\cancel{m}g}{d}(\ell - x) - \cancel{m}g = \cancel{m}\ddot{x}$$

$$-\frac{g}{d}(x - \ell + d) = \ddot{x}$$

ස.අ.ච. කේන්ද්‍රය $\ddot{x} = 0$ වන $x = \ell - d$ විට ය. එනම් m අංශුව දුන්න මත ඇතිව සමතුලිත පිහිටීමේ ය.

විස්තාරය සෙවීම.

විස්තාරය a ද, කේන්ද්‍රයේ සිට අංශුවට t කාලයේ දී විස්ථාපනය y ද නම්,

$$v^2 = \omega^2(a^2 - y^2)$$

අංශුව ගුරුත්වය යටතේ h දුරක් වැටීමේ දී ලබා ගන්නා ප්‍රවේගය v_1 නම්, $v_1^2 = 2gh$ බැවින්

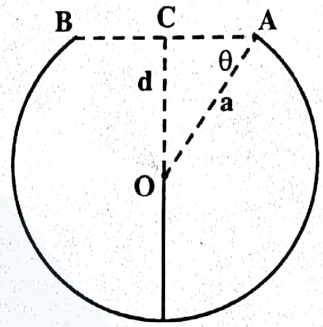
$y = d$ විට, $v = v_1$ නිසා

$$2gh = \frac{g}{d}(a^2 - d^2) \Rightarrow a^2 = 2dh + d^2$$

$\therefore$ අංශුව, විස්තාරය $a = \sqrt{2dh + d^2}$ වන සරල අනුවර්ති චලිතයක යෙදේ.

මෙම චලිතයේ දී, $\ell - d \geq a$ විය යුතු ය.
(iv රූපයට අනුව)

$\ell \geq a + d$ විය යුතු ය.



දුන්න සම්පීඩනව ඇති විට, අංශුව අනිවාර්යයෙන් ම දුන්න මත ඇත.

$O\hat{A}C = \theta$ නම්

$$\tan\theta = \frac{d}{\sqrt{a^2 - d^2}}$$

දුන්න සම්පීඩනය වන කාලය T නම්,

$$T = 2\left(\frac{\pi/2 + \theta}{\omega}\right)$$

$$= 2\sqrt{\frac{d}{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\frac{d}{\sqrt{a^2 - d^2}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{d}{g}}\left(\pi + 2\tan^{-1}\frac{d}{\sqrt{2dh + d^2 - d^2}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{d}{g}}\left(\pi + 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{d}{2h}}\right)$$

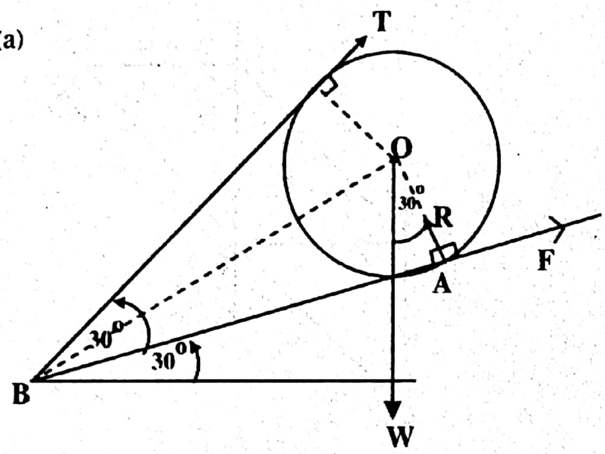
අංශුව අඩු තරමින් දුන්න මත $\frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{d}{g}}$ කාල ප්‍රාන්තරයක් රඳන හෙයින් ,

$$\sqrt{\frac{d}{g}}\left(\pi + 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{d}{2h}}\right) \geq \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{d}{g}} \Rightarrow \tan^{-1}\sqrt{\frac{d}{2h}} \geq \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{d}{2h}} \geq 1 \Rightarrow \frac{h}{d} \leq \frac{1}{2}$$

$\therefore$ උපරිම $\frac{h}{d} = \frac{1}{2}$

05. (a)



වළල්ලේ අරය a නම්, වළල්ලේ සමතුලිතතාවය සලකා O වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$\circlearrowleft \quad F \times a = T \times a \text{ ——— ①}$$

A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$$\circlearrowleft \quad W \times a \cancel{\sin} 30 = T \times \cancel{a} \tan 75 \times \cancel{\sin} 30$$

$$W = T\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\right)$$

$$W = T\frac{(4+2\sqrt{3})}{2}$$

$$T = \frac{W}{2+\sqrt{3}}$$

$$T = W(2-\sqrt{3}) = F \text{ [① ට අනුව]}$$

$$\circlearrowleft B \quad R \times \cancel{a} \tan 75 = W \times \cancel{a} \sec 75^{\circ} \times \cos 45^{\circ}$$

$$R\frac{\sin 75}{\cancel{\cos 75}} = W \cdot \frac{1}{\cancel{\cos 75}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$R = \frac{W}{\sqrt{2}\sin 75} = \frac{W}{\sqrt{2}\cos 15}$$

වළල්ල නොලිස්සා පැවතීමට නම් $\frac{F}{R} \le \mu$ විය යුතු යි.

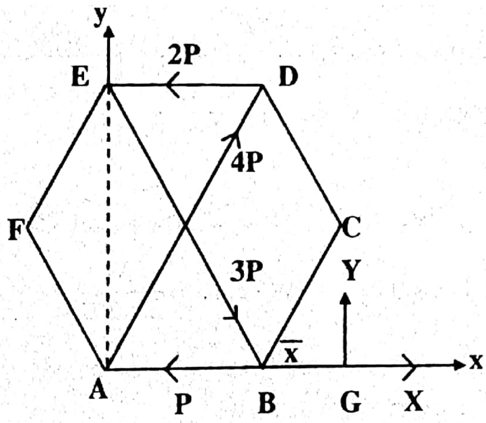
$$\frac{W(2-\sqrt{3})}{\frac{W}{\sqrt{2}\cos 15}} = \sqrt{2}(2-\sqrt{3})\cos 15 \le \mu \text{ විය යුතු ය.}$$

(μ යනු ඝර්ෂණ සංගුණකය යි.)

(b) පද්ධතිය x හා y අක්ෂ ඔස්සේ විභේදනය කළ විට,

$$\rightarrow X = -P - 2P + 3P\cos 60 + 4P\cos 60$$

$$= \frac{P}{2}$$



$$\uparrow Y = 4P\cos 30 - 3P\cos 30$$

$$= \frac{P\sqrt{3}}{2}$$

$$R = \sqrt{X^2+Y^2} = P$$

R සම්ප්‍රයුක්ත බලය x අක්ෂය සමඟ θ කෝණයක් සාදයි නම්,

$$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60^{\circ}$$

සම්ප්‍රයුක්ත බලය දික්කළ AB පාදය G හි දී ඡේදනය කරයි නම්, A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්, (BG = $\bar{x}$ ලෙස ගනිමු.)

$$\circlearrowleft \quad 2P \times 2a\cos 30 - 3P \times a\sin 60 = \frac{P\sqrt{3}}{2}(a+\bar{x})$$

$\bar{x} = 0$ බව ලැබේ.

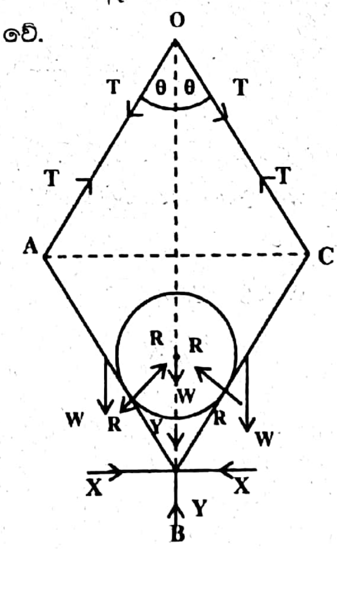
∴ පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්ත බලය වන P, BC ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි.

CB දිශාවට P බලයක් ද, FE දිශාවට P බලයක් FE ඔස්සේ ද වශයෙන් පද්ධතියට යුග්මයක් එක් කරමු. එවිට BC රේඛාවේ ක්‍රියා කරන යුග්මයේ බල සංරචකය, P සම්ප්‍රයුක්තය සමඟ සමතුලිත වන අතර, දැන් පද්ධතිය FE දිගේ ක්‍රියා කරන P බලයකට තුල්‍ය වේ.

මේ සඳහා යෙදිය යුතු යුග්මය, AFEDCB දිශාවට වන අතර එහි විශාලත්වය $P \times 2a\cos 30 = Pa\sqrt{3}$ වේ.

06. (a) පද්ධතිය O හරහා ඇති සිරස් රේඛාව වටා සමමිතික වේ.

∴ $Y = 0$



ගෝලයේ සමතුලිතතාවය සලකා $\uparrow$ විභේදනයෙන්,

$$2R\sin\theta = W \Rightarrow R = \frac{W}{2\sin\theta}$$

පද්ධතියේ සමතුලිතතාව සලකා $\uparrow$ විභේදනයෙන්,

$$2T\cos\theta = 3W \Rightarrow T = \frac{3W}{2\cos\theta}$$

AB දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සලකා, B වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$R\times\frac{a}{3}\cot\theta + W\times a\sin\theta = (T\cos\theta\times 2a\sin\theta) + (T\sin\theta\times 2a\cos\theta)$$

$$\frac{\cancel{W}}{2\sin\theta}\;\frac{\cancel{a}}{3}\;\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + W\times\cancel{a}\sin\cancel{\theta} = 2\times\frac{3\cancel{W}}{\cancel{2\cos\theta}}\times 2\cancel{a}\sin\theta\,\cancel{\cos}\theta$$

$$\cos\theta + 6\sin^3\theta = 36\sin^3\theta$$

$$\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} = 30\,\frac{\sin^3\theta}{\sin^3\theta}$$

$$\cot\theta\,\text{cosec}^2\theta = 30$$

$$\cot\theta\,(1+\cot^2\theta) = 30$$

$$\cot^3\theta + \cot\theta - 30 = 0$$

$$(\cot\theta - 3)(\cot^2\theta + 3\cot\theta + 10) = 0$$

$\cot\theta = 3$ හෝ $\cot^2\theta + 3\cot\theta + 10 = 0$

මෙහි විවේචකය $\Delta = 9 - 40 < 0$

$\therefore$ θ සඳහා ඇත්තේ $\cot^{-1} 3$ අගය පමණි.

AB සඳහා තිරස් විභේදනයෙන්,

$$T\sin\theta + X = R\cos\theta$$

$$\frac{3W}{2\cos\theta}\sin\theta + X = \frac{W}{2\sin\theta}\times\cos\theta$$

$$X = \frac{W}{2}\cot\theta - \frac{3W}{2}\tan\theta$$

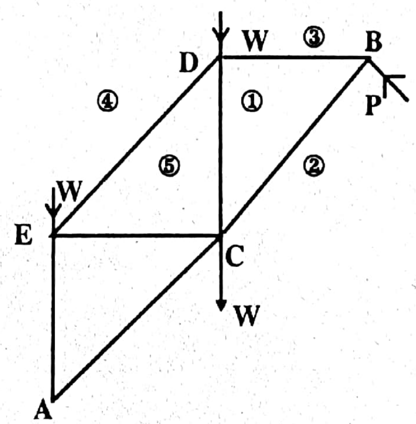
$$= \frac{W}{2}\times 3 - \frac{\cancel{3}W}{2}\times\frac{1}{\cancel{3}} = W$$

(b) සමාන දණ්ඩක දිග a යැයි සිතමු.
රාමු සැකිල්ලේ සමතුලිතතාව සලකා A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$W\times\cancel{a} + W\times\cancel{a} = P\times 2\cancel{a}\sec 45^\circ$$

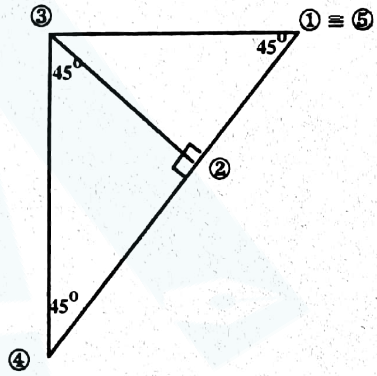
$$\cancel{2}W = \cancel{2}P\sqrt{2}$$

$$P = \frac{W}{\sqrt{2}}$$

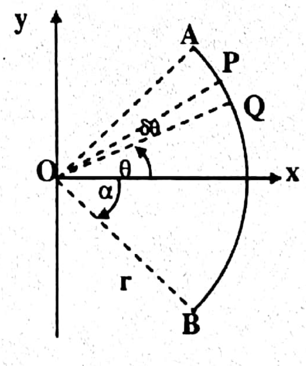


ප්‍රත්‍යා බල සටහන.

දණ්ඩ	ප්‍රත්‍යා බලය	විශාලත්වය
BD	තෙරපුම	W
BC	ආතතිය	$W/\sqrt{2}$
DE	තෙරපුම	$\sqrt{2}\,W$



07. සමමිතිකත්වයෙන් චාපයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G, x- අක්ෂය මත පිහිටයි.



$P\hat{O}Q = \delta\theta$ වන පරිදි අංශු මාත්‍රයක් තෝරා ගනිමු.

PQ චාප දිග = $r\,\delta\theta$

ρ_1 යනු ඒකක දිගක ස්කන්ධය නම්,

PQ චාපයේ ස්කන්ධය = $r\,\delta\theta\,\rho_1$

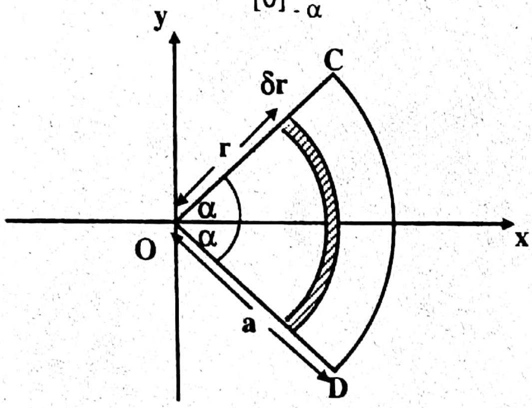
PQ චාප කොටසේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට

y අක්ෂයේ සිට ඇති දුර = $r\cos\theta$

ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයේ අර්ථ දැක්වීමට අනුව,

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} r^2 \cos\theta \, . \, d\theta \, . \, \rho_1}{\int_{-\alpha}^{\alpha} r d\theta \, \rho_1}$$

$$= \frac{r\,[\sin\theta]_{-\alpha}^{\alpha}}{[\theta]_{-\alpha}^{\alpha}} = \frac{r \sin\alpha}{\alpha}$$



අරය r හා ඝනකම δ r වන තුනී චාපයක් සලකමු.

එහි ස්කන්ධය $= r . 2\,\alpha . \delta\, r . \rho_2$

මෙහි ρ_2 යනු ආස්තරයේ ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය යි.

මෙම තුනී චාපයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට y අක්ෂයේ සිට

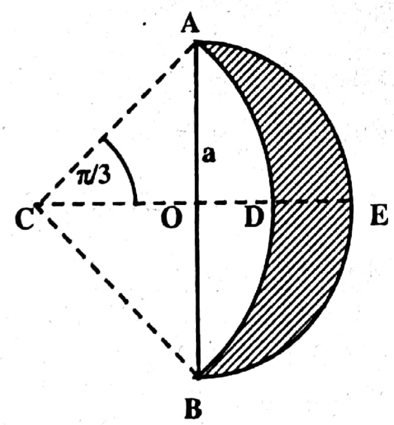
ඇති දුර $= \frac{r \sin\alpha}{\alpha}$

∴ ආස්තරයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට y අක්ෂයේ සිට ඇති දුර

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a r . \, 2\alpha \, dr \, \rho_2 \times \frac{r \sin\alpha}{\alpha}}{\int_0^a r . \, 2\alpha dr \, \rho_2}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\alpha} \left\{ \frac{\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a}{\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^a} \right\} = \frac{2}{3} \; \frac{a \sin\alpha}{\alpha}$$

07.



$$OA = a$$

$$OC = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$AC = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$ABE \; D = \frac{\pi a^2}{2}$$

$$ABC \; \Delta = \frac{1}{2} \times 2a \times \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$ACBD \; = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 \times \frac{2\pi}{3}$$

වස්තුව	ස්කන්ධය	ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට C සිට දුර
ABE අර්ධ වෘත්තාකාර ආස්තරය	$\frac{\pi a^2 \rho}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{4a}{3\pi}$
ABC ත්‍රිකෝණාකාර ආස්තරය	$\frac{a^2 \rho}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{3} : \frac{a}{\sqrt{3}}$
OADB කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩය	$\frac{4\pi a^2}{9} \rho$	$\frac{2a}{\pi}$
ADBE ළසඳ	$a^2 \rho \left(\frac{\pi}{18} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\bar{\bar{x}}$

C වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

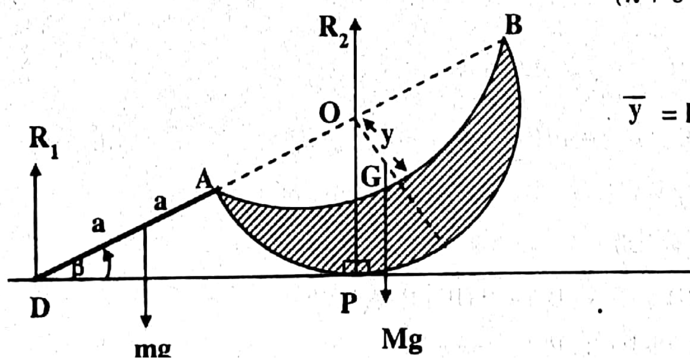
$$\frac{\pi \cancel{a^2} \cancel{\rho}}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{4a}{3\pi}\right) + \frac{a^2\rho}{\sqrt{3}} \times \frac{2a}{3\sqrt{3}} - \frac{4\pi \cancel{a^2} \cancel{\rho}}{9} \times \frac{2a}{\pi}$$

$$= a^2 \cancel{\rho} \left(\frac{\pi}{18} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \bar{\bar{x}}$$

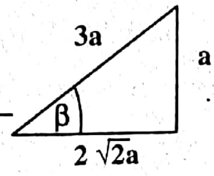
$$\frac{\pi a}{2\sqrt{3}} + \frac{2\cancel{a}}{\cancel{3}} + \frac{2\cancel{a}}{\cancel{9}} - \frac{8\cancel{a}}{\cancel{9}} = \left(\frac{\pi + 6\sqrt{3}}{18}\right) \bar{\bar{x}}$$

$$\frac{\pi a}{2\sqrt{3}} \times \frac{18}{(\pi + 6\sqrt{3})} = \bar{\bar{x}}$$

$$\therefore \; \bar{\bar{x}} = \frac{3\sqrt{3}\,\pi \; a}{(\pi + 6\sqrt{3})} = ka$$



$$\bar{y} = ka - \frac{a}{\sqrt{3}}$$



සංයුක්ත වස්තුවේ සමතුලිතතාවය සලකා P වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$R_1 \times 3a\cos\beta + Mg\left(ka - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)\sin\beta - mg \cdot 2a\cos\beta = 0$$

මෙහි R_1 යනු D කෙළවර මත බිමෙහි ප්‍රතික්‍රියාවයි. D කෙළවර තිරස් තලය මත වෙමින් සමතුලිතව පැවතීමට නම්, $R_1 > 0$ විය යුතු ය.

මේ සඳහා, $m\cancel{g} \cdot 2\cancel{a}\cos\beta > M\cancel{g}\left(k\cancel{a} - \frac{\cancel{a}}{\sqrt{3}}\right)\sin\beta$

$$2m > M\frac{(\sqrt{3}k - 1)}{\sqrt{3}} \tan\beta$$

$$2m > M\frac{(\sqrt{3}k - 1)}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$4\sqrt{6}m > M(\sqrt{3}k - 1)$$

08. B සිද්ධිය සිදුව ඇතැයි දී ඇති විට A සිද්ධිය සිදුවීමේ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව

$P(B|A) = P\frac{(A\cap B)}{P(A)}$ මෙහි $P(A) > 0$ වේ.

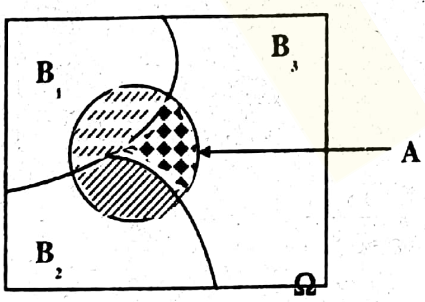
ඉහත අර්ථ දැක්වීමට අනුව,

$P(C|A\cap B) = \frac{P(C\cap A\cap B)}{P(A\cap B)}$ වේ.

$$\therefore P(A) \cdot P(B|A)\, P(C|A\cap B) = P(A) \cdot \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \cdot \frac{P(C\cap A\cap B)}{P(A\cap B)}$$

$$= P(A\cap B\cap C)$$

(මෙය සම්භාවිතාව පිළිබඳ ගුණන නීතිය යි.)



$$A = (B_1\cap A)\cup(B_2\cap A)\cup(B_3\cap A)$$

$$P(A) = P[(B_1\cap A)\cup(B_2\cap A)\cup(B_3\cap A)]$$

$$= P(B_1\cap A) + P(B_2\cap A) + P(B_3\cap A)$$

(∵ මෙහි $B_1\cap A$, $B_2\cap A$, $B_3\cap A$ සිද්ධීන් අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර බැවින්)

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) \quad \text{①}$$

(අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව අර්ථ දැක්වීමෙන්)

$P(B_i|A) = \frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}$ $i = 1, 2, 3$ සඳහා

$$= \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)}$$

X_i ; i වන වාහනය ($i = 1, 2, 3$) වමට හැරවීම.

Y_i ; i වන වාහනය ($i = 1, 2, 3$) දකුණට හැරවීම.

Z_i ; i වන වාහනය ($i = 1, 2, 3$) සෘජුව ඉදිරියට යාම.

$P(X_i) = \frac{50}{100} = 0.5$; $P(Y_i) = \frac{20}{100} = 0.2$;

$P(Z_i) = \frac{30}{100} = 0.3$

(i) වාහන තුනම සෘජුව ඉදිරියට ධාවනය කිරීම

$= Z_1\cap Z_2\cap Z_3$

වාහන තුනම සෘජුව ඉදිරියට ධාවනය කිරීමේ සම්භාවිතාව $= P(Z_1\cap Z_2\cap Z_3)$

$= P(Z_1)P(Z_2)P(Z_3)$

(∵ Z_1, Z_2, Z_3 ස්වායත්ත බැවින්)

$= 0.3\times 0.3\times 0.3 = 0.027$

(ii) වාහන තුනම එකම දිශාවට ධාවනය කිරීම

$= (X_1\cap X_2\cap X_3)\cup(Y_1\cap Y_2\cap Y_3)\cup(Z_1\cap Z_2\cap Z_3)$

අදාළ සම්භාවිතාව

$= P[(X_1\cap X_2\cap X_3)\cup(Y_1\cap Y_2\cap Y_3) \cup (Z_1\cap Z_2\cap Z_3)]$

$= P(X_1\cap X_2\cap X_3) + P(Y_1\cap Y_2\cap Y_3) + P(Z_1\cap Z_2\cap Z_3)$

(∵ අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර නිසා)

$= P(X_1)P(X_2)P(X_3) + P(Y_1)P(Y_2)P(Y_3) + P(Z_1)P(Z_2)P(Z_3)$

(∵ ස්වායත්ත සිද්ධීන් බැවින්)

$(0.5)^3 + (0.2)^3 + (0.3)^3 = 0.125 + 0.008 + 0.027$

$0.160 = \underline{\underline{0.16}}$

(iii) දෙකක් දකුණට හා එකක් වමට හැරවීම

$= (X_1\cap Y_2\cap Y_3)\cup(Y_1\cap X_2\cap Y_3) \cup (Y_1\cap Y_2\cap X_3)$

අදාළ සම්භාවිතාව

$= P(X_1\cap Y_2\cap Y_3) + P(Y_1\cap X_2\cap Y_3) + P(Y_1\cap Y_2\cap X_3)$

(අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර බැවින්)

$$= P(X_1)P(Y_2)P(Y_3) + P(Y_1)P(X_2)P(Y_3) + P(Y_1)P(Y_2)P(X_3)$$

$$= 0.5 \times 0.2 \times 0.2 + 0.2 \times 0.5 \times 0.2 + 0.2 \times 0.2 \times 0.5$$

$$= 3 \times 0.5 \times 0.2 \times 0.2$$

$$= 0.060$$

(iv) සියල්ල වෙනස් දිශා වලට ධාවනය වීම ;

$$(X_1 \cap Y_2 \cap Z_3) \cup (Y_1 \cap Z_2 \cap X_3) \cup (Z_1 \cap X_2 \cap Y_3)$$

අදාළ සම්භාවිතාව $= (0.5 \times 0.2 \times 0.3) + (0.2 \times 0.3 \times (0.5) + (0.3 \times 0.5 \times 0.2)$

$$= 3 \times 0.5 \times 0.2 \times 0.3$$

$$= \underline{\underline{0.090}}$$

A ; අනුයාත වාහන තුනම එකම දිශාවට ධාවනය වීම.

(a) වාහන තුනම එකම දිශාවට ධාවනය වූ බව දී ඇති විටෙක ඒවා සියල්ල වමට හැරවීමේ අසම්භාව්‍ය

සම්භාවිතාව $= P[(X_1 \cap X_2 \cap X_3) \mid A]$

$$= \frac{P(X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(X_1 \cap X_2 \cap X_3)}{P(A)}$$

[$\because X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap A = X_1 \cap X_2 \cap X_3$ නිසා]

$$= \frac{0.125}{0.16} = \frac{125}{160}$$

$$= \frac{25}{32} = 0.78125$$

(b) එසේම දකුණට හැරවීමේ සම්භාවිතාව

$$= \frac{0.008}{0.16} = \frac{1}{20}$$

$$= 0.05$$

(c) එසේම සෘජුව ඉදිරියට යාමේ සම්භාවිතාව

$$= \frac{0.027}{0.16} = \frac{27}{160}$$

$$= 0.16875$$

මේ අනුව වාහන තුනම එකම දිශාවට ධාවනය කෙරෙයි නම්, ඒවා සියල්ලම වමට හැරවීමේ සම්භාවිතාව වැඩි අගයක් ගනී.

09. (a) $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2\bar{x}\, x_i + \bar{x}^2)$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x} \cdot n\bar{x} + n\bar{x}^2$$

$$(\because \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$$

මුල් පිටු 200

දෝෂ ගණන x_i නම් $\sum x_i = 920$

$$\sum x_i^2 = 5032$$

$n = 200$ බැවින්

මධ්‍යනය $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$$= \frac{1}{200} \times 920$$

$$= \underline{\underline{4.6}}$$

විචලතාව $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{200} x_i^2 - \bar{x}^2$

$$= \frac{1}{200} \times 5032 - (4.6)^2$$

$$= 25.16 - 21.16 = 4$$

$\therefore$ සම්මත අපගමනය $= \underline{\underline{2}}$

අවසන් පිටු 50

දෝෂ ගණන y_i නම් $\bar{y} = 4.4$

හා සම්මත අපගමනය $= 2.2$

$\therefore$ විචලතාව $= 4.84$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = n\bar{y}$$

$$= 50 \times 4.4$$

$$= 220$$

සහ $4.84 = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} y_i^2 - \bar{y}^2$

$$= \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} y_i^2 - (4.4)^2$$

$$4.84 \times 50 = \sum_{i=1}^{50} y_i^2 - 19.36 \times 50$$

$$\sum_{i=1}^{50} y_i^2 = 24.2 \times 50$$
$$= 1210$$

පිටු 250 සැලකූ විට, දෝෂ ගණන z_i නම්,

$$\sum_{i=1}^{250} z_i = 920 + 220$$
$$= 1140$$
$$\therefore \bar{z} = \frac{1140}{250}$$
$$= \underline{\underline{4.56}}$$

$$\text{විචල } z = \frac{1}{250} \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \bar{z}^2$$
$$= \frac{1}{250}[5032 + 1210] - (4.56)^2$$
$$= 24.968 - 20.7936 = 4.1744$$

$\therefore$ සම්මත අපගමනය $= \sqrt{4.1744} \simeq \underline{\underline{2.04}}$

(b) මුල් ලකුණ x ද, පරිවර්තිත ලකුණ y ද යැයි ගනිමු.
a හා b නියත විට, රේඛීය පරිමාණය,

$y = a + bx$ —— ① යැයි සිතමු.

එවිට, $\bar{y} = a + b\bar{x}$ —— ② වේ.

$\bar{x} = 45$ ද, $\bar{y} = 50$ ද, $x = 70$ ද $y = 80$
ද බව දී ඇත.

② න් $50 = a + 45b$ —— ③
① න් $80 = a + 70b$ —— ④
③ හා ④ විසඳීමෙන් $a = -4$ හා $b = 1.2$ බව ලැබේ.

(i) $\therefore$ රේඛීය පරිමාණය $y = -4 + 1.2x$ වේ.

(ii) විචලතාවයේ අර්ථ දැක්වීමට අනුව,

$$\text{Var } x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \text{ නිසා}$$
$$\text{Var } y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [a + bx_i - (a + b\bar{x}]^2$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} b^2(x_i - \bar{x})^2$$
$$= b^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

$\therefore$ සම්මත අපගමන $y = bx$ (සම්මත අපගමන x)

සම්මත අපගමනය $y = 15$ බැවින් හා $b = 1.2$ බැවින්,

$$15 = 1.2 \times (\text{ස.අ.x})$$

$\therefore$ මුළු ලකුණුවල (x) සම්මත අපගමනය

$$= \frac{15}{1.2} = 12.5$$

(iii) පරිමාංකනය මගින් ලකුණ වෙනස් නොවේ නම් $x = y$ විය යුතු ය.

$\therefore$ ① න්
$$x = a + bx$$
$$x = -4 + 1.2x$$
$$4 = 0.2x$$
$$\underline{\underline{x = 20}}$$

පරිමාංකනය කරන ලද අඩුතම ලකුණ 2 නම් ① න්

$$2 = -4 + 1.2x_{min} \Rightarrow x_{min} = 5$$

වැඩිතම ලකුණ 92 නම්,

$$92 = -4 + 1.2_{max} \Rightarrow x_{max} = 80$$

*** ***