අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය - 2017 අගෝස්තු

General Certificate of Education (Adv. Level) Examination – August 2017

සංයුක්ත ගණිතය I / පැය තුනයි

Combined Mathematics I / Three hours

උපදෙස් :

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
  A කොටස (ප්‍රශ්න 01 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
- **A කොටස:**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
- **B කොටස:**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය, **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.

A කොටස

01. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} r(3r+1) = n(n+1)^2$ බව සාධනය කරන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

02. $x^2 - 1 \geq |x+1|$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

03. ආගන්ඩ් සටහනක, $\mathrm{Arg}(z - 2i) = \dfrac{\pi}{3}$ යන්න සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථය වන l හි දළ සටහනක් අඳින්න.

P හා Q යනු ඉහත ආගන්ඩ් සටහනෙහි පිළිවෙළින් $2i$ හා $\sqrt{3} + 5i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය යැයි ගනිමු. PQ දුර සොයා Q ලක්ෂ්‍යය l මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

04. INFINITY යන වචනයෙහි අකුරු අට, වෙනස් ආකාර කීයකට පේළියක පිළියෙල කළ හැකි ද?

මෙම පිළියෙල කිරීම්වලින් කොපමණක

(i) I අකුරු තුන ම එක ළඟ තිබේ ද?

(ii) හරියටම එක I අකුරක් හා N අකුරු දෙක ම මුල් අකුරු තුන ලෙස තිබේ ද?

05. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු. $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{x^3 - \alpha^3}{\tan x - \tan \alpha} = 3\alpha^2 \cos^2 \alpha$ බව පෙන්වන්න.

06. $0 < a < b$ යැයි ගනිමු. $\dfrac{d}{dx} \sin^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{b-a}{b}} \cos x\right) = -\dfrac{\sqrt{b-a}\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}}\, dx$ සොයන්න.

07. C වක්‍රයක්, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $x = 3\cos\theta - \cos^3\theta$, $y = 3\sin\theta - \sin^3\theta$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලැබේ.

$\frac{dy}{dx} = -\cot^3\theta$ බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශ රේඛාවේ අනුක්‍රමණය -1 වන පරිදි C වක්‍රය මත වූ P ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

08. l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙළින් $3x - 4y = 2$ හා $4x - 3y = 1$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා යැයි ගනිමු.

(i) l_1 හා l_2 අතර කෝණවල සමච්ඡේදකයන්හි සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

(ii) l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණයේ සමච්ඡේදකයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

09. S යනු $x^2 + y^2 - 4 = 0$ මගින් දෙනු ලබන වෘත්තය යැයි ද l යනු $y = x + 1$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛාව යැයි ද ගනිමු. S හා l හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන්නා වූ ද S වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන්නා වූ ද වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

10. $-\pi < \theta \leq \pi$ සඳහා $\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = 1 + \sin\theta$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්, $\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ බව පෙන්වා $\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}$ හි අගය ද සොයන්න. $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$ බව අපෝහනය කරන්න.

*** ***

B කොටස

★ ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (*a*) $f(x) = 3x^2 + 2ax + b$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.

$f(x) = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් තිබෙන බව දී ඇත. $a^2 > 3b$ බව පෙන්වන්න.

$f(x) = 0$ හි මූල α හා β යැයි ගනිමු. a ඇසුරෙන් $\alpha + \beta$ ද b ඇසුරෙන් $\alpha\beta$ ද ලියා දක්වන්න.

$|\alpha - \beta| = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b)}$ බව පෙන්වන්න.

$|\alpha + \beta|$ හා $|\alpha - \beta|$ ස්වකීය මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය

$9x^2 - 6\,(|a| + \sqrt{a^2 - 3b})\,x + 4\sqrt{a^4 - 3a^2b} = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(*b*) $g(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p, q \in \mathbb{R}$ වේ. $(x - 1)(x + 2)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $3x + 2$ වේ. $(x - 1)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය 5 බව හා $(x + 2)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය -4 බව පෙන්වන්න.

p හා q හි අගයන් සොයා $(x + 1)$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

12. (*a*) x හි ආරෝහණ බල වලින් $(5 + 2x)^{14}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය ලියා දක්වන්න.

$r = 0, 1, 2, \ldots, 14$ සඳහා ඉහත ප්‍රසාරණයේ x^r අඩංගු පදය T_r යැයි ගනිමු.

$x \neq 0$ සඳහා $\dfrac{T_{r+1}}{T_r} = \dfrac{2(14 - r)}{5\,(r + 1)}\;x$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $x = \dfrac{4}{3}$ වන විට, ඉහත ප්‍රසාරණයෙහි විශාලතම පදය ලබාදෙන r හි අගය සොයන්න.

(*b*) $c \geq 0$ යැයි ගනිමු. $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\dfrac{2}{(r+c)(r+c+2)} = \dfrac{1}{(r+c)} - \dfrac{1}{(r+c+2)}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{2}{(r+c)\,(r+c+2)} = \frac{(3+2c)}{(1+c)\,(2+c)} - \frac{1}{(n+c+1)} - \frac{1}{(n+c+2)}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{(r+c)\,(r+c+2)}$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

c සඳහා සුදුසු අගයන් සහිත ව මෙම ඓක්‍යය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r\,(r+2)} = \frac{1}{3} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r+1)\,(r+3)}$ බව පෙන්වන්න.

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ -1 & b & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{AB}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}$ බව දී ඇත; මෙහි $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ මගින් $\mathbf{B}$ න්‍යාසයෙහි පෙරළුම දැක්වේ. $a = 1$ හා $b = -1$ බව පෙන්වා, a හා b සඳහා මෙම අගයන් සහිත ව $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ සොයන්න.

$\mathbf{P}^{-1}$ ලියා දක්වා, එය භාවිතයෙන්, $\mathbf{PQ} = \mathbf{P}^2 + 2\mathbf{I}$ වන පරිදි $\mathbf{Q}$ න්‍යාසය සොයන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වූ ඒකක න්‍යාසයයි.

(*b*) ආගන්ඩ් සටහනක, $|z| = 1$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයන්හි පථය වූ C හි දළ සටහනක් අඳින්න. $z_0 = a\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a > 0$ හා $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ වේ. $\dfrac{1}{z_0}$ හා z_0^2 යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා එක එකක මාපාංකය a ඇසුරෙන් ද ප්‍රධාන විස්තාරය θ ඇසුරෙන් ද සොයන්න.

P, Q, R හා S යනු පිළිවෙළින් $z_0, \frac{1}{z_0}, z_0 + \frac{1}{z_0}$ හා z_0^2 යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ඉහත ආගන්ඩ් සටහනෙහි නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය යැයි ගනිමු.

P ලක්ෂ්‍යය ඉහත C මත පිහිටන විට

(i) Q හා S ලක්ෂ්‍ය ද C මත පිහිටන බවත්

(ii) R ලක්ෂ්‍යය තාත්ත්වික අක්ෂය මත 0 හා 2 අතර පිහිටන බවත් පෙන්වන්න.

14. (*a*) $x \neq 1, 2$ සඳහා $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)}$ යැයි ගනිමු.

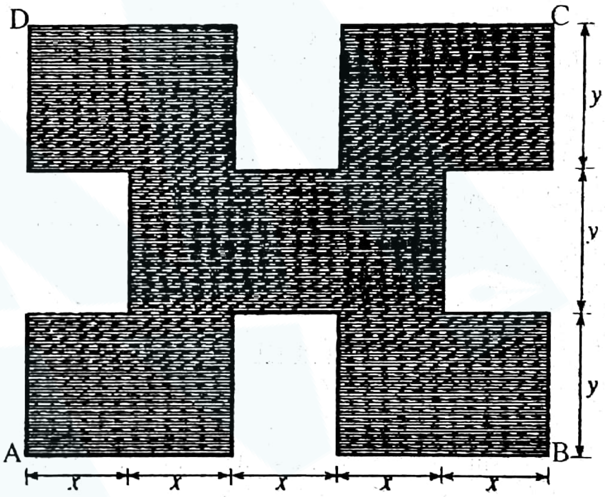
$x \neq 1, 2$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $f'(x) = \frac{x(4-3x)}{(x-1)^2(x-2)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන් $\frac{x^2}{(x-1)(x-2)} \leq 0$ අසමානතාව විසඳන්න.

(*b*) යාබද රූපයේ පෙන්වා ඇති අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය $385\ \text{m}^2$ වේ. මෙම පෙදෙස ලබාගෙන ඇත්තේ දිග මීටර $5x$ ද පළල මීටර $3y$ ද වූ $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයකින්, දිග මීටර y ද පළල මීටර x ද වූ සර්වසම සෘජුකෝණාස්‍ර හතරක් ඉවත් කිරීමෙනි. $y = \frac{35}{x}$ බව පෙන්වා, අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි මීටරවලින් මනින ලද පරිමිතිය P යන්න $x > 0$ සඳහා $P = 14x + \frac{350}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

P අවම වන පරිදි x හි අගය සොයන්න.



15. (*a*) (i) $\frac{1}{x(x+1)^2}$ භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර, **ඒ නයින්,** $\int \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx$ සොයන්න.

(ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int xe^{-x}\,dx$ සොයා, **ඒ නයින්,** $y = xe^{-x}$ වක්‍රයෙන් ද $x = 1$, $x = 2$ හා $y = 0$ සරල රේඛාවලින් ද ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

(*b*) $c > 0$ හා $I = \int_0^c \frac{\ln(c+x)}{c^2+x^2}\,dx$ යැයි ගනිමු. $x = c\tan\theta$ ආදේශය භාවිතයෙන්,

$I = \frac{\pi}{4c}\ln c + \frac{1}{c}J$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan\theta)\,d\theta$ වේ.

a නියතයක් වන $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්, $J = \frac{\pi}{8}\ln 2$ බව පෙන්වන්න.

$I = \frac{\pi}{8c}\ln(2c^2)$ බව අපෝහනය කරන්න.

16. $m \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $P \equiv (0,1)$ ලක්ෂ්‍යය $y = mx$ මගින් දෙනු ලබන l සරල රේඛාව මත නොපිහිටන බව පෙන්වන්න. l ට ලම්බව P හරහා වූ සරල රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(-mt, t + 1)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි t යනු පරාමිතියකි.

ඒ නයින්, P සිට l ට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය වූ Q ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක $\left(\dfrac{m}{1+m^2}, \dfrac{m^2}{1+m^2}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

m විචලනය වන විට, Q ලක්ෂ්‍යය $x^2 + y^2 - y = 0$ මගින් දෙනු ලබන S වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වා, Q හි පථයේ දළ සටහනක් xy-තලයෙහි අඳින්න.

තව ද $R \equiv \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$ ලක්ෂ්‍යය S මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

R ලක්ෂ්‍යයේ දී S බාහිරව ස්පර්ශ කරන හා x- අක්ෂය මත කේන්ද්‍රය පිහිටන S' වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

S' හි කේන්ද්‍රයම කේන්ද්‍රය ලෙස ඇතිව S අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ කරන වෘත්තයේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

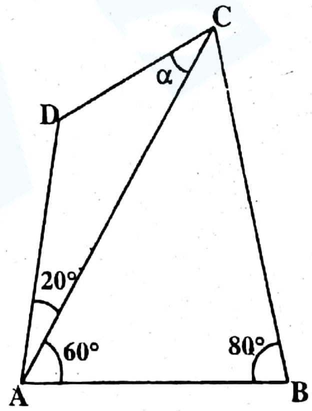
17. (*a*) (i) $0° < \theta < 90°$ සඳහා $\dfrac{2\cos(60° - \theta) - \cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) රූපයේ පෙන්වා ඇති $ABCD$ චතුරස්‍රයෙහි $AB = AD$, $A\hat{B}C = 80°$, $C\hat{A}D = 20°$ හා $B\hat{A}C = 60°$ වේ.

$A\hat{C}D = \alpha$ යැයි ගනිමු. ABC ත්‍රිකෝණය සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $\dfrac{AC}{AB} = 2\cos 40°$ බව පෙන්වන්න.

මීළඟට ADC ත්‍රිකෝණය සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්,

$\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{\sin(20° + \alpha)}{\sin\alpha}$ බව පෙන්වන්න.



$\sin(20° + \alpha) = 2\cos 40° \sin\alpha$ බව අපෝහනය කරන්න.

ඒ නයින්, $\cot\alpha = \dfrac{2\cos 40° - \cos 20°}{\sin 20°}$ බව පෙන්වන්න.

දැන්, ඉහත (i) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්, $\alpha = 30°$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $\cos 4x + \sin 4x = \cos 2x + \sin 2x$ සමීකරණය විසඳන්න.

*** ***

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය - 2017 අගෝස්තු

General Certificate of Education (Adv. Level) Examination – August 2017

සංයුක්ත ගණිතය II / පැය තුනයි

Combined Mathematics II / Three hours

උපදෙස් :

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
  A කොටස (ප්‍රශ්න 01 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
- **A කොටස:**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
- **B කොටස:**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය, **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.
- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **g** මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.

A කොටස

01. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් හා ස්කන්ධය λm වූ Q අංශුවක් පිළිවෙළින් u හා v වේගවලින් එකිනෙක දෙසට, සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත වූ එක ම සරල රේඛාවක් දිගේ චලනය වේ. ඒවායේ ගැටුමෙන් පසු, P අංශුව v වේගයෙන් හා Q අංශුව u වේගයෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවලට චලනය වේ. $\lambda = 1$ බව පෙන්වා, P හා Q අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

02. කුඩා ඒකාකාර බෝලයක් රැගත් බැලූනයක් කාලය $t=0$ දී පොළොව මත ලක්ෂ්‍යයකින් නිශ්චලතාවයෙන් ආරම්භ කර ඒකාකාර f ත්වරණයකින් සිරස් ව ඉහළට චලනය වේ; මෙහි $f < g$ වේ. කාලය $t = T$ හි දී බෝලය, බැලූනයෙන් සීරුවෙන් ඉවත් වී ගුරුත්වය යටතේ චලනය වේ. $t=0$ සිට බෝලය එහි උපරිම උස කරා ළඟා වන තෙක් බෝලයේ උඩු අත් චලිතය සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න. T, f හා g ඇසුරෙන්, බෝලය ළඟා වූ උපරිම උස සොයන්න.

....

....

....

....

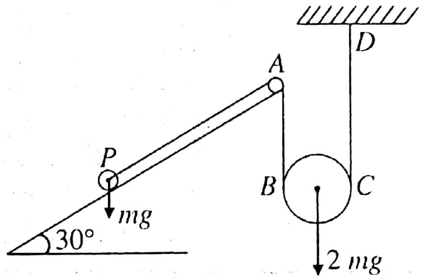
....

....

....

....

03. රූපයේ $PABCD$ යනු තිරසට 30° කින් ආනත අචල සුමට තලයක් මත තබා ඇති ස්කන්ධය m වූ අංශුවකට ඇඳා ඇති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකි. තන්තුව, A හි වූ අචල කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් ද ස්කන්ධය $2m$ වූ සුමට කප්පියක් යටින් ද යයි. D ලක්ෂ්‍යය අචල වේ. PA, උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් දිගේ වන අතර AB හා CD සිරස් වේ. තන්තුව තදව ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ. අංශුවේ ත්වරණයෙහි විශාලත්වය සචල කප්පියේ ත්වරණයෙහි විශාලත්වය මෙන් දෙගුණයක් බව පෙන්වා, තන්තුවේ ආතතිය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

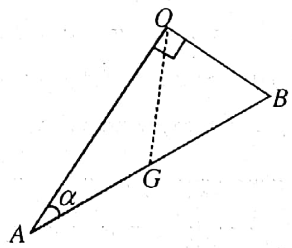


04. ස්කන්ධය M kg වූ ට්‍රක් රථයක් ස්කන්ධය m kg වූ කාරයක් සෘජු තිරස් පාරක් දිගේ ඇදගෙන යනු ලබන්නේ ට්‍රක් රථයේ හා කාරයේ චලිත දිශාවට සමාන්තර වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය කේබලයක් ආධාරයෙනි. ට්‍රක් රථයේ හා කාරයේ චලිතයට ප්‍රතිරෝධ පිළිවෙළින් නිව්ටන λM හා නිව්ටන λm වේ; මෙහි $\lambda\ (>0)$ නියතයකි. එක්තරා මොහොතක දී ට්‍රක් රථයේ එන්ජිමෙන් ජනනය කරනු ලබන ජවය P kW වන අතර ට්‍රක් රථයෙහි හා කාරයෙහි වේගය v $\mathrm{ms^{-1}}$ වේ. එම මොහොතේ දී කේබලයේ ආතතිය නිව්ටන $\dfrac{1000mP}{(M+m)v}$ බව පෙන්වන්න.

05. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ හා $2\alpha\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}$ යනු පිළිවෙළින් O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික යැයි ගනිමු; මෙහි $a\ (>0)$ නියතයකි. අදිශ ගුණිතය භාවිතයෙන්, $A\hat{O}B = \dfrac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

C යනු $OACB$ සෘජුකෝණාස්‍රයක් වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OC}$ දෛශිකය y-අක්ෂය දිගේ පිහිටයි නම්, α හි අගය සොයන්න.

06. OA හා OB සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු දෙකක් මගින් O අචල ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලන ලද දිග $2a$ හා බර W වූ AB ඒකාකාර දණ්ඩක් රූපයේ දක්වෙන පරිදි සමතුලිතතාවයේ පවතී. G යනු AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ. $A\hat{O}B = \dfrac{\pi}{2}$ හා $O\hat{A}B = \alpha$ බව දී ඇත. $A\hat{O}G = \alpha$ බව පෙන්වා, තන්තු දෙකෙහි ආතති සොයන්න.



07. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, $P(A' \cup B') = \frac{5}{6}$ හා $P(B \mid A) = \frac{1}{4}$ බව දී ඇත. $P(A)$ හා $P(B)$ සොයන්න.

08. මල්ලක, කාඩ් නවයක් අඩංගු වේ. ඒවායින් හතරක 1 සංඛ්‍යාංකය මුද්‍රණය කර ඇති අතර ඉතිරි ඒවායේ 2 සංඛ්‍යාංකය මුද්‍රණය කර ඇත. ප්‍රතිස්ථාපන රහිත ව වරකට එක බැගින් සසම්භාවීව මල්ලෙන් කාඩ් ඉවතට ගනු ලැබේ.

(i) ඉවතට ගත් පළමු කාඩ් දෙකෙහි සංඛ්‍යාංකයන්හි එකතුව හතර වීමේ,

(ii) ඉවතට ගත් පළමු කාඩ් තුනෙහි සංඛ්‍යාංකයන්හි එකතුව තුන වීමේ,

සම්භාවිතාව සොයන්න.

09. නිරීක්ෂණ හයක අගයන් a, a, b, b, x හා y වේ; මෙහි a, b, x හා y යනු ප්‍රභින්න ධන නිඛිල වන අතර $a < b$ වේ. මෙම නිරීක්ෂණ හයෙහි මාතයන් මොනවා ද?

මෙම මාතයන්හි ඓක්‍යය හා ගුණිතය පිළිවෙළින් x හා y බව දී ඇත. නිරීක්ෂණ හයෙහි මධ්‍යන්‍යය $\frac{7}{2}$ වේ නම්, a හා b සොයන්න.

10. $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{10}$ යන සංඛ්‍යා දහයෙහි මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව පිළිවෙළින් 10 හා 9 වේ. x_{10} සංඛ්‍යාව ඉවත් කිරීමෙන් පසු ඉතිරි වන සංඛ්‍යා නවයෙහි ද මධ්‍යන්‍යය 10 බව දී ඇත. මෙම සංඛ්‍යා නවයෙහි විචලතාව සොයන්න.

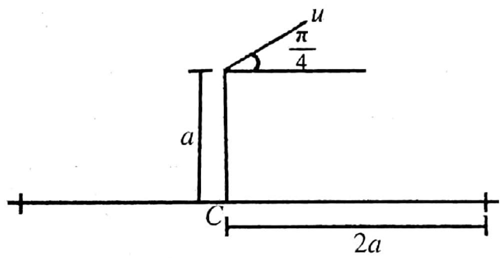
*** ***

B කොටස

* ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

(මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි g මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.)

11. (a) උස a වූ සිරස් කුළුණක පාදය, තිරස් පොළොව මත වූ අරය $2a$ වන වෘත්තාකාර පොකුණක C කේන්ද්‍රයෙහි ඇත. කුළුණ මුදුනේ සිට තිරසෙන් ඉහළට $\frac{\pi}{4}$ කෝණයකින් u වේගයක් සහිත ව කුඩා ගලක් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. (රූපය බලන්න.) ගල, ගුරුත්වය යටතේ නිදහසේ චලනය වී C සිට R දුරකින් C හරහා වූ තිරස් තලයෙහි වදියි. $gR^2 - u^2R - u^2a = 0$ සමීකරණය මගින් R දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.



u, a හා g ඇසුරෙන් R සොයා, $u^2 > \frac{4}{3}ga$ නම්, ගල පොකුණ තුළට නොවැටෙන බව අපෝහනය කරන්න.

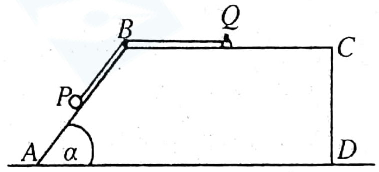
(b) S නැවක් පොළොවට සාපේක්ෂව u km h^{-1} ඒකාකාර වේගයෙන් නැගෙනහිර දිශාවට යාත්‍රා කරයි. B බෝට්ටුවක සිට බටහිරින් දකුණට θ කෝණයකින් l km දුරක නැව තිබෙන මොහොතේ දී බෝට්ටුව, නැව හමුවන අපේක්ෂාවෙන්, පොළොවට සාපේක්ෂව v km h^{-1} ඒකාකාර වේගයෙන් සරල රේඛීය පෙතක ගමන් කරයි; මෙහි $u\sin\theta < v < u$ වේ. නැව හා බෝට්ටුව ඒවායේ වේග හා පෙත් නොවෙනස්ව පවත්වා ගන්නේ යැයි උපකල්පනය කරමින්, පොළොවට සාපේක්ෂව බෝට්ටුවට ගත හැකි පෙත් දෙක නිර්ණය කිරීම සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණවල දළ සටහන් එක ම රූපයක අඳින්න.

පොළොවට සාපේක්ෂව බෝට්ටුවට ගත හැකි චලිත දිශා දෙක අතර කෝණය $\pi - 2a$ බව පෙන්වන්න;
මෙහි $a = \sin^{-1}\left(\frac{u\sin\theta}{v}\right)$ වේ.

මෙම පෙත් දෙක දිගේ නැව හමුවීම සඳහා බෝට්ටුව ගනු ලබන කාල, පැය t_1 හා පැය t_2 යැයි ගනිමු.

$t_1 + t_2 = \frac{2lu\cos\theta}{u^2 - v^2}$ බව පෙන්වන්න.

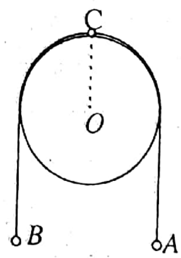
12. (a) රූපයෙහි දැක්වෙන $ABCD$ ත්‍රපීසියම, ස්කන්ධය $2m$ වූ සුමට ඒකාකාර කුට්ටියක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය ඔස්සේ යන සිරස් හරස්කඩකි. AD හා BC රේඛා සමාන්තර වන අතර AB රේඛාව එය අඩංගු මුහුණතෙහි උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් වේ. තව ද $AB = 2a$ ද $B\hat{A}D = \alpha$ ද වේ; මෙහි $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ හා $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ වේ. AD අයත් මුහුණත සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත ඇතිව කුට්ටිය තබනු ලබයි. දිග $l\ (> 2a)$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් B හි පිහිටි කුඩා සුමට කප්පියක් උඩින් යන අතර එහි එක් කෙළවරකට ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් ද අනෙක් කෙළවරට එම m ස්කන්ධය ම සහිත වෙනත් Q අංශුවක් ද ඈඳා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි P අංශුව AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ ද Q අංශුව BC මත ද තබා තන්තුව තදව ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ.



ගෙබිමට සාපේක්ෂව කුට්ටියේ ත්වරණය $\frac{4}{17}g$ බව පෙන්වා, කුට්ටියට සාපේක්ෂව P හි ත්වරණය සොයන්න.

තව ද P අංශුව A කරා ළඟා වීමට ගන්නා කාලය $\sqrt{\frac{17a}{5g}}$ බව පෙන්වන්න.

(b) එක එකක ස්කන්ධය m වූ A හා B අංශු දෙකක් දිග $l\ (> 2\pi a)$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඈඳනු ලැබේ. ස්කන්ධය $2m$ වූ C අංශුවක් තන්තුවේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයට ඈඳනු ලැබේ. කේන්ද්‍රය O හා අරය a වූ අචල සුමට ගෝලයක උච්චතම ලක්ෂ්‍යයෙහි C අංශුව ඇතිව ද A හා B අංශු O තුළින් වූ සිරස් තලයක නිදහසේ එල්ලෙමින් ද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි තන්තුව ගෝලය මතින් තබා ඇත. සරල රේඛීය පෙතක A අංශුව පහළට චලනය වන පරිදි C අංශුවට ගෝලය මත එම සිරස් තලයේ ම කුඩා විස්ථාපනයක් දෙනු ලැබේ. C අංශුව ගෝලය සමග ස්පර්ශව ඇතිතාක් $\dot{\theta}^2 = \frac{g}{a}(1 - \cos\theta)$ බව පෙන්වන්න; මෙහි θ යනු OC හැරී තිබෙන කෝණය වේ.



$\theta = \frac{\pi}{3}$ වන විට C අංශුව, ගෝලය අතහැර යන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

13. ස්වාභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය mg වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් සුමට තිරස් ගෙබිමකට $3a$ උසක් ඉහළින් වූ O අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ අංශුවකට ඈඳා ඇත. අංශුව O අසලින් තබා, $\sqrt{ga}$ වේගයකින් සිරස් ව පහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. තන්තුවේ දිග x යන්න, $a \le x < 3a$ සඳහා $\ddot{x} + \frac{g}{a}(x - 2a) = 0$ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වා මෙම සරල අනුවර්තී චලිතයෙහි කේන්ද්‍රය සොයන්න.

ගෙබිම සමග පළමු ගැටුම තෙක් අංශුවේ පහළට චලිතය සඳහා ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන් $a \le x < 3a$ සඳහා $\dot{x}^2 = \frac{g}{a}(4ax - x^2)$ බව පෙන්වන්න.

$X = x - 2a$ යැයි ගනිමින් අවසාන සමීකරණය $-a \le X < a$ සඳහා $\dot{X}^2 = \frac{g}{a}(A^2 - X^2)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි A යනු නිර්ණය කළ යුතු විස්තාරය වේ.

ගෙබිම සමග පළමු ගැටුමට මොහොතකට පෙර අංශුවේ ප්‍රවේගය කුමක් ද?

අංශුව හා ගෙබිම අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{\sqrt{3}}$ වේ. පළමු ගැටුමෙන් පසු තන්තුව බුරුල් වන තෙක් අංශුවේ උඩු අත් චලිතයට $-a \le X < a$ සඳහා $\dot{X}^2 = \frac{g}{a}(B^2 - X^2)$ බව දී ඇත; මෙහි B යනු මෙම නව සරල අනුවර්තී චලිතයේ නිර්ණය කළ යුතු විස්තාරය වේ.

ඉහතින් විස්තර කරන ලද යටි අත් හා උඩු අත් සරල අනුවර්තී චලිතවල අංශුව යෙදෙන මුළු කාලය $\frac{5\pi}{6}\sqrt{\frac{a}{g}}$ බව පෙන්වන්න.

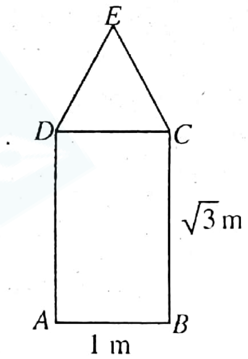
14. (*a*) A හා B සමග **ඒක රේඛීය නොවන** O අචල මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A හා B ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ වේ. O අනුබද්ධයෙන් C ලක්ෂ්‍යයක පිහිටුම් දෛශිකය $\mathbf{c} = (1 - \lambda)\,\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $0 < \lambda < 1$ වේ.

$\overrightarrow{AC}$ හා $\overrightarrow{CB}$ දෛශික $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ හා λ ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

ඒ නයින්, C ලක්ෂ්‍යය AB රේඛා ඛණ්ඩය මත පිහිටන බවත් $AC : CB = \lambda : (1 - \lambda)$ බවත් පෙන්වන්න.

දැන්, OC රේඛාව AOB කෝණය සමච්ඡේදනය කරන්නේ යැයි සිතමු. $|\mathbf{b}|(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) = |\mathbf{a}|(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ බව පෙන්වා **ඒ නයින්,** λ සොයන්න.

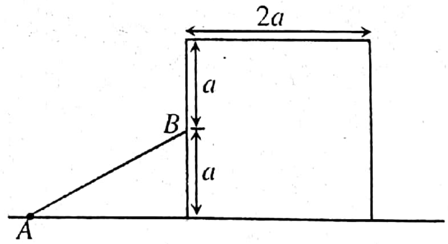
(*b*) රූපයෙහි $ABCD$ යනු $AB = 1$ m හා $BC = \sqrt{3}$ m වූ සෘජුකෝණාස්‍රයක් වන අතර CDE යනු සමපාද ත්‍රිකෝණයකි. විශාලත්වය නිව්ටන $5, 2\sqrt{3}, 3, 4\sqrt{3}, P$ හා Q වූ බල පිළිවෙළින් BA, DA, DC, CB, CE හා DE දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියාකරයි. මෙම බල පද්ධතිය යුග්මයකට ඌනනය වේ.



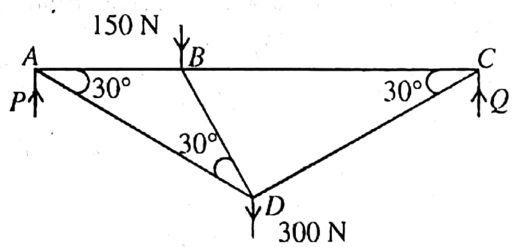
$P = 4$ හා $Q = 8$ බව පෙන්වා, මෙම යුග්මයේ ඝූර්ණය සොයන්න. දැන්, BA හා DA දිගේ ක්‍රියාකරන බලවල විශාලත්ව එලෙසම තිබිය දී ඒවායේ දිශා ප්‍රතිවර්තනය කරනු ලැබේ. නව පද්ධතිය විශාලත්වය නිව්ටන $2\sqrt{37}$ සහිත තනි සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට ඌනනය වන බව පෙන්වන්න.

මෙම සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ක්‍රියාරේඛාව දික් කළ BA හමුවන ලක්ෂ්‍යයට A සිට ඇති දුර $\frac{7}{4}$ m බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

15. (*a*) බර W හා පැත්තක දිග $2a$ වන ඒකාකාර ඝනකාකාර කුට්ටියක් රළු තිරස් ගෙබිමක් මත තබා ඇත. බර $2W$ හා දිග $2a$ වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක A කෙළවර තිරස් ගෙබිමෙහි ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර ඇති අතර B කෙළවර ඝනකයේ සුමට සිරස් මුහුණතකට එරෙහිව එහි කේන්ද්‍රයේ තබා ඇත. දණ්ඩ ඔස්සේ යන සිරස් තලය කුට්ටියේ එම සිරස් මුහුණතට ලම්බ වන අතර පද්ධතිය සමතුලිතතාවයේ පවතී. (අදාළ සිරස් හරස්කඩ සඳහා රූපය බලන්න.) ඝනකාකාර කුට්ටිය හා රළු තිරස් ගෙබිම අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වේ. $\mu \ge \sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න.



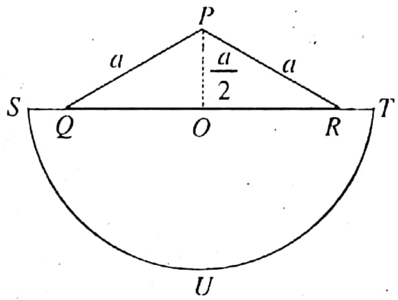
(*b*) කෙළවරවලින් නිදහසේ සන්ධි කරන ලද AB, BC, AD, BD හා CD සැහැල්លු දඬු පහකින් සමන්විත රාමු සැකිල්ලක් රූපයේ පෙන්වයි. AB = මීටර a හා BC = මීටර $2a$ වන අතර $B\hat{A}D = B\hat{D}A = B\hat{C}D = 30°$ වේ. රාමු සැකිල්ලට B හි දී 150 N හා D හි දී 300 N භාර යොදා ඇත. එය AB හා BC තිරස් වන පරිදි පිළිවෙළින් A හා C හි දී යොදන ලද P හා Q සිරස් බල දෙකකින් ආධාර කරනු ලැබ සිරස් තලයක සමතුලිතව ඇත. $P = 250$ N බව පෙන්වන්න.



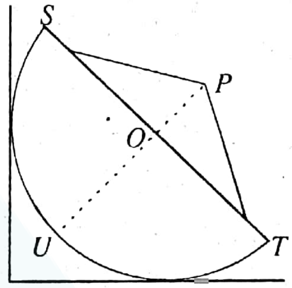
බෝ අංකනය භාවිතයෙන් ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් ඇඳ ඒ නයින්, සියලු ම දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල සොයා ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරන්න.

16. කේන්ද්‍රය C හා අරය a වූ අර්ධ වෘත්තාකාර චාපයක හැඩයෙන් යුත් තුනී ඒකාකාර කම්බියක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය C සිට $\frac{2a}{\pi}$ දුරකින් ඇති බව පෙන්වන්න.

යාබද රූපයෙහි PQ, PR හා ST යනු, ඒකක දිගක ස්කන්ධය ρ වූ තුනී ඒකාකාර කම්බියකින් කපා ගත් සරල රේඛීය කැබලි තුනකි. PQ හා PR කැබලි දෙක P ලක්ෂ්‍යයෙහි දී එකිනෙකට පාස්සා ඉන් පසු Q හා R ලක්ෂ්‍යවල දී ST ට පාස්සා ඇත. $PQ = PR = a$, $ST = 2a$ හා $PO = \frac{a}{2}$ බව දී ඇත; මෙහි O යනු QR හා ST යන දෙකෙහි ම මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ. තව ද SUT යනු ඒකක දිගක ස්කන්ධය $k\rho$ වූ තුනී ඒකාකාර කම්බියකින් සාදා ගත් කේන්ද්‍රය O හා අරය a වූ අර්ධ වෘත්තාකාර චාපයකි; මෙහි $k\ (>0)$ නියතයක් වේ. SUT අර්ධ වෘත්තාකාර කම්බිය PQR තලයේ S හා T ලක්ෂ්‍යවල දී ST කම්බියට පාස්සා රූපයේ දැක්වෙන L දෘඪ තල කම්බි රාමුව සාදා ඇත. L හි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය P සිට $\left[\frac{\pi k + 4k + 3}{\pi k + 4}\right]\frac{a}{2}$ දුරකින් ඇති බව පෙන්වන්න.



යාබද රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි L කම්බි රාමුව, එහි වෘත්තාකාර කොටස සුමට සිරස් බිත්තියක හා ලිස්සා යාම වැළැක්වීමට ප්‍රමාණවත් තරම් රළු තිරස් ගෙබිමක ස්පර්ශ වෙමින්, එහි තලය බිත්තියට ලම්බව සමතුලිතව ඇත. L මත ක්‍රියාකරන බල ලකුණු කර $k > \frac{1}{4}$ බව පෙන්වන්න.



දැන් $k = 1$ යැයි ගනිමු. P ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්කන්ධය m වන අංශුවක් L ට සම්බන්ධ කළ පසු ද ඉහත පිහිටීමේ ම සමතුලිතතාව පවත්වාගෙන යයි. $m < 3\rho a$ බව පෙන්වන්න.

17. (a) A, B හා C යන මලු එක එකක, පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින්ම සර්වසම, සුදු බෝල හා කළු බෝල පමණක් අඩංගු වේ. A මල්ලෙහි සුදු බෝල 4 ක් හා කළු බෝල 2 ක් ද B මල්ලෙහි සුදු බෝල 2 ක් හා කළු බෝල 4 ක් ද C මල්ලෙහි සුදු බෝල m හා කළු බෝල $(m+1)$ ක් ද අඩංගු වේ. මල්ලක් සසම්භාවීව තෝරා ගෙන එකකට පසු ව අනෙක ලෙස ප්‍රතිස්ථාපනයෙන් තොරව සසම්භාවීව බෝල දෙකක් එම මල්ලෙන් ඉවතට ගනු ලැබේ. ඉවතට ගත් පළමු බෝලය සුදු හා ඉවතට ගත් දෙවන බෝලය කළු වීමේ සම්භාවිතාව $\frac{5}{18}$ වේ. m හි අගය සොයන්න.

තව ද ඉවතට ගත් පළමු බෝලය සුදු හා ඉවතට ගත් දෙවන බෝලය කළු බව දී ඇති විට, C මල්ල තෝරා ගෙන තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(b) ශිෂ්‍යයන් 100ක කණ්ඩායමක්, සංඛ්‍යාන ප්‍රශ්නයකට ඔවුන්ගේ පිළිතුරු සඳහා ලබා ගත් ලකුණුවල ව්‍යාප්තිය පහත වගුවෙහි දැක්වේ.

ලකුණු පරාසය	ශිෂ්‍ය සංඛ්‍යාව
0 - 2	15
2 - 4	25
4 - 6	40
6 - 8	15
8 - 10	5

මෙම ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය μ හා සම්මත අපගමනය σ නිමානය කරන්න.

$k = \frac{3(\mu - M)}{\sigma}$ මගින් අර්ථ දැක්වෙන කුටිකතා සංගුණකය k ද නිමානය කරන්න; මෙහි M යනු ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය වේ.

*** ***

A - කොටස

01. n = 1 විට ව. පැ. $=\sum_{r=1}^{1} r(3r+1) = 1\,(3.1+1) = 4$

ද. පැ. $= 1\,(1+1)^2 = 2^2 = 4$

∴ ප්‍රතිඵලය n = 1 සඳහා සත්‍ය වේ.
ඕනෑම n = p සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කිරීම.

මෙහි $p \in \mathbb{Z}^+$ වේ.

එවිට, $\sum_{r=1}^{p} r\,(3r+1) = p\,(p+1)^2$ වේ.

දැන් n = p + 1 සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව පෙන්වමු.

$$\sum_{r=1}^{p+1} r\,(3r+1) = \sum_{r=1}^{p} r(3r+1) + (p+1)\,[3(p+1)+1]$$

(p + 1 වන පදය)

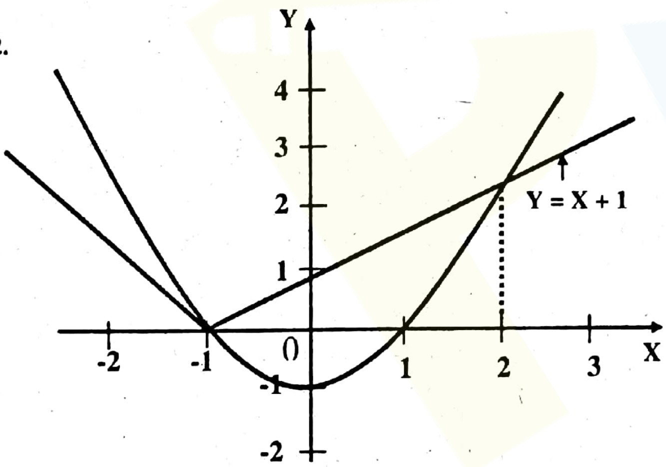
$$= p\,(p+1)^2 + (p+1)\,(3p+4)$$

(ඉහත උපකල්පනයෙන්)

$$= (p+1)\,[p(p+1) + 3p + 4]$$
$$= (p+1)\,[p^2 + p + 3p + 4]$$
$$= (p+1)\,[p^2 + 4p + 4]$$
$$= (p+1)\,(p+2)^2$$

එනයින් n = p ට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම් n = p + 1 සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. n = 1 සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව පෙන්වමු. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

02.



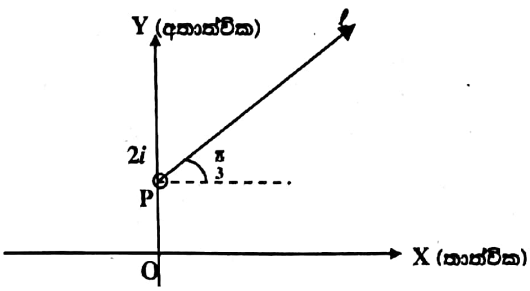
ප්‍රස්තාර දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍යවල දී $x \geq -1$

සහ $x^2 - 1 = x + 1$ වේ.

එමනිසා $x = -1$ හා $x = 2$ වේ.

$x \leq -1$ හෝ $x \geq 2$ වන x තාප්ත වන අගයන් විසඳුම් වේ.

03.



(0,2) ලක්ෂ්‍යයේ සිට විහිදෙන එම ලක්ෂ්‍යය අයත් නැති, තාත්වික අංශයේ ධන දිශාව සමඟ $\frac{\pi}{3}$ කෝණයක් සාදන රේඛාව මත z පිහිටයි.

$$(\sqrt{3} + 5i) - 2i = \sqrt{3} + 3i$$
$$= 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)$$
$$= 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\,i\right)$$

$\therefore PQ = 2\sqrt{3}$

තව ද $\text{Arg}\left[(\sqrt{3} + 5i) - 2i\right] = \frac{\pi}{3}$ වේ.

∴ Q, ℓ මත පිහිටයි.

04.

I	N	F	T	Y
3	2	1	1	1

පුනරාවර්තවලට අවකාශ නොමැති විට
කළ හැකි පිළියෙල කිරීම් ගණන $= \frac{8!}{3!\,2!}$
(අකුරු අට ම යොදා)

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{2}$$
$$= 3360$$

(i) I අකුරු තුන එක ළඟ ඇති විට මුළු අකුරු ගණන 6කි. (I අකුරු 3 එක අකුරක් හා ඉතිරි අකුරු 5)

∴ කළ හැකි පිළියෙල කිරීම් ගණන $= \frac{6!}{2!} = 360$

(N අකුරු 2ක් ඇති බැවින් 2! න් බෙදිය යුතු ය.)

(2!)

(ii)

I	F	T	Y
2	1	1	1

N	N	I					
N	I	N					
I	N	N					

$$\frac{5!}{2!} \times 3 = 5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$$

05.

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{x^3 - \alpha^3}{\tan x - \tan \alpha}$$

$$= \lim_{x \to \alpha} \frac{(x - \alpha)\,(x^2 + \alpha x + \alpha^2)}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}$$

$$= \lim_{x \to \alpha} \frac{(x - \alpha)\,(x^2 + \alpha x + x^2)}{\frac{\sin x \cos \alpha - \cos x \sin \alpha}{\cos x \cos \alpha}}$$

$$= \lim_{x \to \alpha} \frac{(x - \alpha)\,(x^2 + \alpha x + \alpha^2)\cos x \cos \alpha}{\sin\,(x - \alpha)}$$

$$= \lim_{x \to \alpha} \frac{x - \alpha}{\sin(x - \alpha)} \cos x \cos \alpha (x^2 + \alpha x + \alpha^2)$$

$$= 1. \cos \alpha \cos \alpha (\alpha^2 + \alpha. \alpha + \alpha^2)$$

$$= \cos^2 \alpha [\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2]$$

$$= \underline{\underline{3\alpha^2 \cos^2 \alpha}}$$

06. $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{b-a}{b}} \cos x\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b-a}{b} \cos^2 x}} \times \sqrt{\frac{b-a}{b}} (-\sin x)$$

$$= \frac{-\sin x \sqrt{\frac{b-a}{b}}}{\sqrt{\frac{b - (b-a)\cos^2 x}{b}}}$$

$$= \frac{-\sin x \sqrt{b-a}}{\sqrt{a \cos^2 x - b \cos^2 x + b}}$$

$$= \frac{-\sqrt{b-a} \sin x}{\sqrt{a \cos^2 x + b (1 - \cos^2 x)}}$$

$$= \frac{-\sqrt{b-a} \sin x}{\sqrt{a \cos^2 x + b \sin^2 x}}$$

අනුකලනයේ අර්ථ දැක්වීමට අනුව,

$$\therefore \int \frac{-\sqrt{b-a} \sin x}{\sqrt{a \cos^2 x + b \sin^2 x}} dx = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}} \cos x\right) + c$$

C අභිමත නියතයකි.

$$-\sqrt{b-a} \int \frac{\sin x}{\sqrt{a \cos^2 x + b \sin^2 x}} dx = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}} \cos x\right) + c$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{a \cos^2 x + b \sin^2 x}} dx = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{b-a}{b}} \cos x\right) + c'$$

c' අභිමත නියතයකි.

07. $x = 3 \cos \theta - \cos^3 \theta \quad y = 3 \sin \theta - \sin^3 \theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = -3 \sin\theta + 3 \cos^2\theta \sin \theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = 3 \cos\theta - 3 \sin^2\theta \cos\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -3 \sin \theta (1 - \cos^2\theta) \qquad \frac{dy}{d\theta} = 3\cos \theta (1 - \sin^2 \theta)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

$$= \frac{3\cos \theta (1 - \sin^2 \theta)}{-3 \sin \theta (1 - \cos^2 \theta)} = \frac{\cos \theta \cos^2 \theta}{-\sin \theta \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\cos^3 \theta}{\sin^3 \theta} = -\cot^3 \theta$$

ස්පර්ශ රේඛාවේ අනුක්‍රමණය -1 වේ නම් එවිට

$\frac{dy}{dx} = -1$ වේ.

$$\cot \theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$P \equiv \left(3 \cos \frac{\pi}{4} - \cos^3 \frac{\pi}{4}, 3 \sin \frac{\pi}{4} - \sin^3 \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\equiv \left(3 \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}, 3 \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$\equiv \left(\frac{6-1}{2\sqrt{2}}, \frac{6-1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$\equiv \underline{\underline{\left(\frac{5}{2\sqrt{2}}, \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)}}$$

08. ℓ_1 හා ℓ_2 සරල රේඛා අතර කෝණවල සමච්ඡේදකයන්හි සමීකරණ

$$\frac{3x - 4y - 2}{5} = \pm\left(\frac{4x - 3y - 1}{5}\right) \text{ වේ.}$$

$+$ විට $\frac{3x - 4y - 2}{5} = \frac{4x - 3y - 1}{5}$

$$3x - 4y - 2 = 4x - 3y - 1$$

$$x + y + 1 = 0$$

$-$ විට $3x - 4y - 2 = -(4x - 3y - 1)$

$$7x - 7y - 3 = 0$$

ℓ_1 හා $x + y + 1 = 0$ අතර සුළු කෝණය α ලෙස ගනිමු.

$$\tan \alpha = \left|\frac{\frac{3}{4} + 1}{1 - \frac{3}{4}}\right| = 7 > 1 \quad \therefore \alpha > \frac{\pi}{4}$$

$\therefore 7x - 7y - 3 = 0$ යනු ℓ_1 හා ℓ_2 අතර සුළුකෝණයේ සමච්ඡේදකයේ සමීකරණය වේ.

09. S හා ℓ හරහා යන ඕනෑම වෘත්තයක්
$(x^2 + y^2 - 4) + \lambda (y - x - 1) = 0$ ආකාරයේ වේ.
මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$
$x^2 + y^2 - 4 + \lambda y - \lambda x - \lambda = 0$
$x^2 + y^2 + \lambda y - \lambda x - 4 - \lambda = 0$
මෙම වෘත්තය S ට ප්‍රලම්බ නම්
$g = 0, f = 0, c = -4$

$g' = \frac{-\lambda}{2}$, $f' = \frac{\lambda}{2}$, $c' = -\lambda - 4$ වේ.

එය $2gg' + 2ff' = c + c'$ තෘප්ත කළ යුතු ය.

$$0 + 0 = -4 - \lambda - 4$$
$$0 = -8 - \lambda$$
$$\therefore \lambda = -8$$

∴ වෘත්තයේ සමීකරණය

$\therefore\ x^2 + y^2 + 8y - 8y + 4 = 0$ වේ.

10. $-\pi < \theta \le \pi$ සඳහා

$$\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = \cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= 1 + \sin\theta$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\left(\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\right)^2 = 1 + \sin\frac{\pi}{6}$

$$= 1 + \frac{1}{2}$$

$$\left(\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

$\therefore\ \sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ වේ. $\longrightarrow$ ①

$$\left(\because \sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12} > 0\right)$$

$\theta = -\frac{\pi}{6}$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\left[\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right]^2 = 1 + \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

$$\left[\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\right]^2 = 1 - \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\left(\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\left(\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\left(\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow ②$$

① - ②න්

$$2\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

*** ***

B - කොටස

11. (a) $f(x) = 3x^2 + 2ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$

$f(x) = 0$ ට තාත්වික ප්‍රභින්න මූල පවතී නම්,

$\Delta_x > 0$ වේ.

$\Delta_x = (2a)^2 - 4(3)b$

$= 4a^2 - 12b$

$= 4(a^2 - 3b) > 0$ විය යුතු ය.

$a^2 - 3b > 0$

$a^2 > 3b$

$f(x) = 0$ හි මූල α හා β නම්

$\alpha + \beta = \dfrac{-2a}{3}$

$\alpha\beta = \dfrac{b}{3}$

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ වේ.

$= \left(\dfrac{-2a}{3}\right)^2 - \dfrac{4b}{3}$

$= \dfrac{4a^2}{9} - \dfrac{4b}{3}$

$= \dfrac{4}{9}(a^2 - 3b)$

$\therefore |\alpha - \beta| = \dfrac{2}{3}\sqrt{(a^2 - 3b)}$ වේ.

$\alpha^1 = |\alpha + \beta|$ හා $\beta^1 = |\alpha - \beta|$ යැයි ගනිමු.

එවිට

$\alpha' = \dfrac{2}{3}|a|$ හා $\beta' = \dfrac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b}$ වේ.

α^1 හා β^1 මූල වේ නම් $x = \alpha^1$ හා $x = \beta^1$ වේ.

$\therefore$ අවශ්‍ය සමීකරණය

$(x - \alpha^1)(x - \beta^1) = 0$ වේ.

$x^2 - (\alpha^1 + \beta^1)x + \alpha^1\beta^1 = 0$

$x^2 - \left(\dfrac{2}{3}|a| + \dfrac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b}\right)x + \dfrac{4}{9}|a|\sqrt{a^2 - 3b} = 0$

$x^2 - \dfrac{2}{3}\left(|a| + \sqrt{a^2 - 3b}\right)x + \dfrac{4}{9}|a|\sqrt{a^2 - 3b}) = 0$

$9x^2 - 6[\,|a| + \sqrt{a^2 - 3b}\,]x + 4\sqrt{a^2(a^2 - 3b)} = 0$

$9x^2 - 6(|a| + \sqrt{a^2 - 3b})x + 4\sqrt{a^4 - 3a^2b} = 0$

(b) $g(x)$ යන්න $(x - 1)(x + 2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $3x + 2$ වන නිසා

ශේෂ ප්‍රමේයයට අනුව

$g(x) = h(x)(x - 1)(x + 2) + 3x + 2$ වේ.

මෙහි $h(x)$ යනු මාත්‍රය 1 වන බහු පදයකි.

$x = 1$ විට

$g(1) = 0 + 3.1 + 2$

$g(1) = 3 + 2 = 5$

ශේෂ ප්‍රමේයයට අනුව $g(x)$ යන්න $(x - 1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $g(1)$ වේ.

$\therefore g(1) = 5$

ශේෂ ප්‍රමේයයට අනුව $g(x)$ යන්න $(x + 2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $g(-2)$ වේ.

$x = -2$ විට

$g(-2) = h(x).0 + 3(-2) + 2$

$= -6 + 2$

$g(-2) = -4$

$g(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$ බැවින්

$x = 1$ විට

$g(1) = 1 + p.1 + q.1 + 1 = 5$ වේ.

$p + q = 3 \quad \text{—— ①}$

$x = -2$ විට

$g(-2) = -8 + 4p - 2q + 1 = -4$

$4p - 2q = 3 \quad \text{—— ②}$

①×② $\quad 2p + 2q = 6 \quad \text{—— ③}$

② + ③ න්

$6p = 9$

$p = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$

$q = 3 - p$

$= 3 - \dfrac{3}{2}$

$= \dfrac{6 - 3}{2} = \dfrac{3}{2}$

$\therefore g(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}x + 1$

$(x + 1)$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් නම්,

$g(-1) = 0$ විය යුතු ය.

$x = -1$ විට

$g(-1) = (-1)^3 + \dfrac{3}{2}(-1)^2 + \dfrac{3}{2}(-1) + 1$

$g(-1) = -1 + \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2} + 1$

$= 0$ වේ.

$\therefore$ සාධක ප්‍රමේයය මගින්, $(x + 1)$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් වේ.

12. (a) $(5 + 2x)^{14} = \displaystyle\sum_{r=0}^{14} {}^{14}C_r\, 5^{14-r}(2x)^r$

$= \displaystyle\sum_{r=0}^{14} {}^{14}C_r\, 5^{14-r}\, 2^r x^r$

මෙහි $r = 0, 1, \ldots\ldots 14,$

සඳහා ${}^{14}C_r = \dfrac{14!}{r!(14-r)!}$

$r = 0, 1, \ldots\ldots 14$ සඳහා $T_r = {}^{14}C_r\, 5^{14-r}\, 2^r\, x^r$

යැයි ගනිමු.

එවිට $\dfrac{T_{r+1}}{T_r} = \dfrac{{}^{14}C_{r+1}\, 5^{14-(r+1)}\, 2^{r+1}\, x^{r+1}}{{}^{14}C_r\, 5^{14-r}\, 2^r\, x^r}$

$$= \frac{\dfrac{14\,!}{(r+1)\,!\,(13-r)\,!}\; 5^{13-r}\, 2^{r+1}\, x^{r+1}}{\dfrac{14\,!}{r!\,(14-r)\,!}\; 5^{14-r}\, 2^r\, x^r}$$

$$= \frac{14-r}{r+1}\, 5^{13-r-14+r}\, 2^{r+1-r}\, x^{r+1-r}$$

$$= \frac{14-r}{r+1}\, 5^{-1}\, 2^1\, x^1$$

$$= \frac{2(14-r)}{5\,(r+1)}\, x$$

$$x = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{2}{5}\, \frac{(14-r)}{(r+1)}\, \frac{4}{3}$$

$\dfrac{8}{15}\, \dfrac{(14-r)}{(r+1)} \gtrless 1$ වන විට $\dfrac{T_{r+1}}{T_r} \gtrless 1$ ලෙස වේ.

එවිට $112 - 8r \gtrless 15\,r + 15$

$$97 \gtrless 23\,r$$

$$r \lessgtr \frac{97}{23} = 4\,\frac{5}{23}$$

$T_0 < T_1 < T_2 < T_3 < T_4 < T_5 > T_6 \ldots\ldots > T_{14}$

එමනිසා $r = 5$ විට විශාල ම පදය ලබා දේ.

(*b*) $C \geq 0$ හා $r \in \mathbb{Z}^+$

$$\frac{1}{(r+c)} - \frac{1}{(r+c+2)} = \frac{r+c+2-(r+c)}{(r+c)\,(r+c+2)}$$

$$= \frac{r+c+2-r-c}{(r+c)\,(r+c+2)}$$

$$= \frac{2}{(r+c)\,(r+c+2)}$$

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$U_r = \dfrac{2}{(r+c)\,(r+c+2)}$ යැයි ගනිමු.

එවිට $r = 1$ විට $U_1 = \dfrac{1}{1+c} - \dfrac{1}{3+c}$

$r = 2$ විට $U_2 = \dfrac{1}{2+c} - \dfrac{1}{4+c}$

$r = 3$ විට $U_3 = \dfrac{1}{3+c} - \dfrac{1}{5+c}$

$r = n-2$ විට $U_{n-2} = \dfrac{1}{n-2+c} - \dfrac{1}{n+c}$

$r = n-1$ විට $U_{n-1} = \dfrac{1}{n-1+c} - \dfrac{1}{n+c+1}$

$r = n$ විට $U_n = \dfrac{1}{n+c} - \dfrac{1}{n+c+2}$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{1+c} + \frac{1}{2+c} - \frac{1}{n+c+1} - \frac{1}{n+c+2}$$

$$= \frac{1+c+2+c}{(2+c)\,(1+c)} - \frac{1}{n+c+1} - \frac{1}{n+c+2}$$

$\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{3+2c}{(2+c)\,(1+c)} - \frac{1}{n+c+1} - \frac{1}{n+c+2}$ වේ.

$\lim\limits_{x\to\infty}$ වන විට ඉහත සමීකරණයේ

ද. අ. පැ. $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3+2c}{(2+c)\,(1+c)} - \dfrac{1}{n+c+1} - \dfrac{1}{n+c+2}$

$$= \frac{3+2c}{(2+c)\,(1+c)} + 0 + 0$$

$= \dfrac{3+2c}{(2+c)\,(1+c)}$ වේ. එය පරිමිත වේ.

ඉහත සීමාව පරිමිත බැවින්

$\therefore \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී වේ. හා

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} U_r = \frac{3+2c}{(2+c)\,(1+c)}$ වේ.

$c = 0$ දැමීමෙන් $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{r\,(r+2)} = \frac{3+0}{(2+0)\,(1+0)}$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r\,(r+2)} = \frac{3}{2\times 2}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r\,(r+2)} = \frac{3}{4} \quad \text{———} \ ①$$

$c = 1$ දැමීමෙන් $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{(r+1)\,(r+3)} = \frac{3+2}{(2+1)\,(1+1)}$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{(r+1)\,(r+3)} = \frac{5}{6}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r+1)(r+3)} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r+1)(r+3)} = \frac{1}{3} + \frac{5}{12} = \frac{3}{4} \text{ — ②}$$

දැන් ① හා ② න් $\Rightarrow$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(r+2)} = \frac{1}{3} + \underline{\underline{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r+1)(r+3)}}} \text{ වේ.}$$

13. (*a*) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB^T = \begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ -1 & b & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 - a + 3a & 2 + ab \\ -1 - b + 2a & -1 + b^2 \end{pmatrix}$$

$$AB^T = P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 - a + 3a & 2 + ab \\ -1 - b + 2a & -1 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 + 2a = 4, \quad 2 + ab = 1$$
$$-1 - b + 2a = 2 \quad -1 + b^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad a = 1, \quad b = -1$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

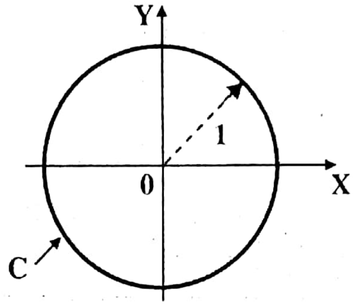
තව ද

$$PQ = P^2 + 2I \Leftrightarrow P^{-1}(PQ) = P^{-1}(P^2 + 2I)$$
$$\Leftrightarrow P^{-1} PQ = P^{-1} PP + 2P^{-1} I$$
$$\Leftrightarrow Q = P + 2P^{-1}$$
$$\Leftrightarrow Q = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 2 \times \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

(*b*)



$$Z_0 = a(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{a(\cos\theta + i\sin\theta)}$$
$$= \frac{1}{a(\cos\theta + i\sin\theta)} \times \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)}{(\cos\theta - i\sin\theta)}$$
$$= \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{a(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}$$
$$= \frac{1}{a}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

එනයින් $\left|\frac{1}{Z_0}\right| = \frac{1}{a}$ සහ $\text{Arg}\ \frac{1}{Z_0} = (-\theta)$ වේ.

$$Z_0^2 = a^2(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta)$$
$$= a^2[\cos^2 2\theta + i\sin 2\theta]$$

එනයින් $|Z_0^2| = a^2$ සහ $\text{Arg}(Z_0^2) = 2\theta$ වේ.

P, C මත පිහිටයි නම්,

එවිට $a = 1$

$\therefore \left|\frac{1}{Z_0}\right| = 1$ හා Q යන්න C මත පිහිටයි.

තව ද $|Z_0^2| = 1$ හා එනයින් S යන්න C මත පිහිටයි.

$$Z_0 + \frac{1}{Z_0} = (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta - i\sin\theta)$$
$$= 2\cos\theta$$

R මගින් නිරූපණය වන ලක්ෂ්‍යය $Z_0 + \frac{1}{Z_0} = 2\cos\theta$ වේ.

$$\left.\begin{aligned} \left(Z_0 + \frac{1}{Z_0}\right)_{\text{උපරිම}} &= 2[\cos\theta]_{\text{උපරිම}} \\ &= 2.1 = 2 \\ \left(Z_0 + \frac{1}{Z_0}\right)_{\text{අවම}} &= 2[\cos\theta]_{\text{අවම}} \end{aligned}\right\} \therefore 0 < \theta < \frac{1}{2}\pi \text{ නිසා}$$

$$= 2.0 = 0$$

$\therefore 0 < Z_0 + \frac{1}{Z_0} < 2$ වේ.

$\therefore Z_0 + \frac{1}{Z_0}$ මගින් නිරූපණය වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව තාත්වික වන අතර, එය තාත්වික අක්ෂය මත 0 හා 2 අතර පිහිටයි.

14. (*a*) $x \neq 1, 2$ සඳහා $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$ නම්,

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)\,2x - x^2[2x-3]}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x(x^2-3x+2) - 2x^3 + 3x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 6x^2 + 4x - 2x^3 + 3x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 4x + 3x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

$$= \frac{x(4-3x)}{(x-1)^2(x-2)^2} \quad (x \neq 1, 2 \text{ සඳහා})$$

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$ එනයින්

එය $y = 1$ වේ.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \infty$ හා $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ හා $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \infty$

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ $x = 1, 2$

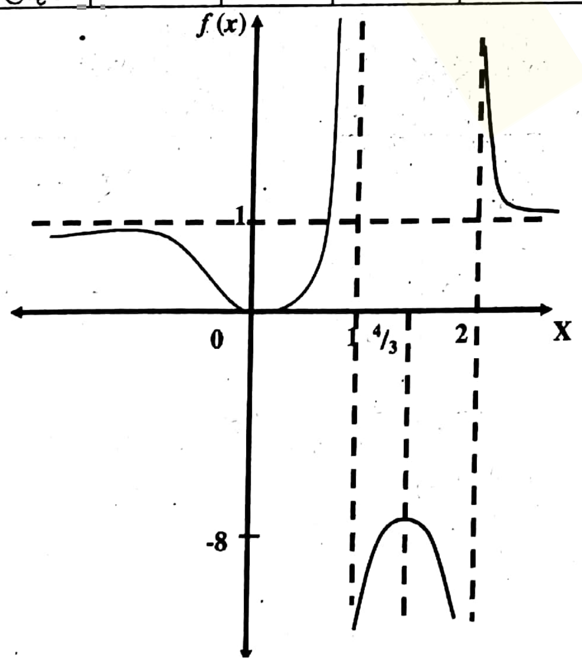
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ හෝ $x = \dfrac{4}{3}$ විට

$x = 0$ විට $y = 0$ වේ.

$x = \dfrac{4}{3}$ විට $y = -8$ වේ.

$(0, 0)$ අවමයක් වන අතර $(\frac{4}{3}, -8)$ උපරිමයක් වේ.

	$-\infty<x<0$	$0<x<1$	$1<x<\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}<x<2$	$2<x<+\infty$
$f'(x)$ ලකුණ	(-)	(+)	(+)	(-)	(-)



$$\frac{x^2}{(x-1)(x-2)} \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 0$$

$f(x) = 0$ වන්නේ $x = 0$ විට ය. $f(x) < 0$ වන්නේ $1 < x < 2$ විට ය.

(*b*) අඳුරු කළ වර්ගඵලය $= (5x)(3y) - 4(xy)$

$= 15xy - 4xy = 11xy$

$11xy = 385$

$xy = 35$

$y = \dfrac{35}{x}$

පරිමිතිය $P = 2(5x + 3y) + 4x + 4y$

$= 14x + 10y$

$= 14x + 10 \times \dfrac{35}{x}$

$= 14x + \dfrac{350}{x}$

$$\frac{dp}{dx} = 14 - \frac{350}{x^2}$$

$$\frac{d\rho}{dx} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{350}{14} = 25$$

$\therefore x = 5 \quad 5 > x > 0$ සඳහා

$\dfrac{d\rho}{dx} < 0$ හා $5 < x$ සඳහා $\dfrac{d\rho}{dx} > 0$ වේ.

$\therefore x = 5$ වන විට P අවමයක් වේ.

15. (*a*) (i) $\dfrac{1}{x(x+1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{(x+1)} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$

$1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$

$1 = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A$

සංගුණක සමාන කිරීමෙන්,

$x^0 : \quad A = 1$

$x^1 : \quad 0 = 2A + B + C$

$x^2 : \quad 0 = A + B$

$A = 1, \quad B = -1$ සහ $C = -1$

$$\frac{x-1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{(x+1)}\,dx - \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \ell n\,|x| - \ell n\,|x+1| + \frac{1}{x+1} + C'$$

C' යනු අභිමත නියතයකි.

(ii) $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx = \int x\frac{d}{dx}(-e^{-x})\,dx$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}\frac{dx}{dx}\,.\,dx$$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx$$
$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C'$$

C' අභිමත නියතයකි.

$$\text{අවශ්‍ය වර්ගඵලය} = \int^{2} xe^{-x}\, dx$$
$$= \left[-e^{-x}(x+1) \right]^{2}$$
$$= (-e^{-2}(3)) - (-e^{-1}(2))$$
$$= 2e^{-1} - 3e^{-2}$$

(*b*) $x = c\tan\theta$ යැයි ගනිමු.

$dx = c\sec^2\theta\, d\theta$

$x = 0$ විට $\theta = 0$ වන අතර, $x = c$ වන විට $\theta = \frac{\pi}{4}$ වේ.

එවිට

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\ell n(C + C\tan\theta)}{C^2 + C^2\tan^2\theta} C\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\ell nC(1+\tan\theta)}{C^2(1+\tan^2\theta)} C\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\ell nC(1+\tan\theta)}{C^2\sec^2\theta} C\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{C}\int_0^{\pi/4} \ell nC(1+\tan\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{C}\int_0^{\pi/4} \ell nC + \ell n(1+\tan\theta)\, d\theta$$

$$I = \frac{1}{C}\ell nC\int_0^{\pi/4} 1\, d\theta + \frac{1}{C}\int_0^{\pi/4} \ell n(1+\tan\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{C}\ell nC\,[\theta]_0^{\pi/4} + \frac{1}{C}\, J$$

$$= \frac{1}{C}\ell nC\,\frac{\pi}{4} + \frac{1}{C} J$$

$$= \frac{\pi}{4C}\ell nC + \frac{1}{C} J$$

$$J = \int_0^{\pi/4} \ell n\left[1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \ell n\left(1 + \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\theta}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \ell n\left(1 + \frac{1 - \tan\theta}{1+\tan\theta}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \ell n\left(\frac{1+\tan\theta + 1 - \tan\theta}{1+\tan\theta}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \ell n\left(\frac{2}{1+\tan\theta}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} [\ell n\,2 - \ell n(1+\tan\theta)]\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \ell n\,2.\, d\theta - \int_0^{\pi/4} \ell n(1+\tan\theta)\, d\theta$$

$$J = \ell n2 \int_0^{\pi/4} 1\, d\theta - J$$

$$2J = \ell n2\ [\theta]_0^{\pi/4}$$

$$2J = \frac{\pi}{4}\ell n\,2$$

$$\therefore\ J = \frac{\pi}{8}\ell n\,2$$

J හි අගය ආදේශයෙන්,

$$\therefore\ I = \frac{\pi}{4C}\ell nC + \frac{1}{C}\left(\frac{\pi}{8}\ell n2\right)$$

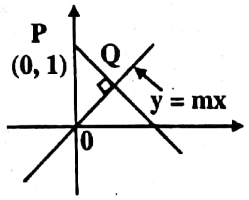
$$= \frac{\pi}{8C}\,[2\,\ell nC + \ell n2]$$

$$I = \frac{\pi}{8C}\ell n\,2C^2$$

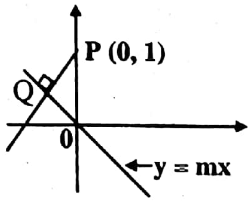
16. $m \in \mathbb{R}$ $P \equiv (0, 1)$ ලක්ෂ්‍යය $y = mx$ මත වේ නම් $1 = m \times 0$ ලෙස විය යුතු ය. මෙය විසංවාදයකි.

$\therefore$ $(0, 1)$ යන්න ℓ මත නොපිහිටයි.

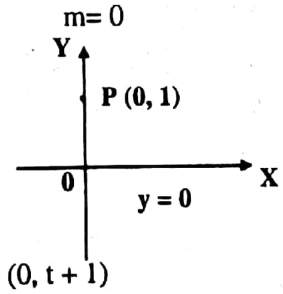
$m > 0$



$m < 0$



$m = 0$



අවස්ථාව: $m \neq 0$ විට,

මෙම අවස්ථාවේ දී, P හරහා යන lට ලම්බ රේඛාවේ සමීකරණය

$$\frac{y-1}{x-0} = \frac{-1}{m} \text{ ආකාරයේ වේ.}$$

$$(y-1) = \frac{-1}{m}(x-0) = t \text{ ලෙස ගනිමු.}$$

එවිට $y - 1 = t$ හා $x = -mt$

$y = t + 1$ හා $x = -mt$ වේ. මෙහි t පරාමිතියකි.

එනයින්, ℓ ට ලම්බ P හරහා යන රේඛාව මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක බණ්ඩාංක $(-mt, t+1)$ ආකාර ගනියි. මෙහි t පරාමිතියකි.

අවස්ථාව $m = 0$

මෙම අවස්ථාවේ දී, P හරහා යන ℓට ලම්බ රේඛාවේ සමීකරණය Y - අක්ෂය වන අතර එනයින් එය මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක බණ්ඩාංක $(0, t+1)$ ආකාර ගනියි. මෙහි t පරාමිතියක් වේ.

$\therefore$ සියලු m අගයන් සඳහා මෙම ආකාරය සත්‍ය වේ.

t_0 යනු Qට අනුරූප t අගය ලෙස ගනිමු.

Q යන්න ℓ මත පිහිටන බැවින්,

$$t_0 + 1 = m(-mt_0)$$

$$t_0 + 1 = -m^2 t_0$$

$$t_0(1 + m^2) = -1$$

$$t_0 = \frac{-1}{1+m^2} \text{ වේ.}$$

$$\therefore Q \equiv \left(-m\left(\frac{-1}{1+m^2}\right), \frac{-1}{1+m^2} + 1\right)$$

$$\equiv \left(\frac{m}{1+m^2}, \frac{m^2}{1+m^2}\right)$$

$x = \frac{m}{1+m^2}$, $y = \frac{m^2}{1+m^2}$ යන්න $x^2 + y^2 - y$ හි

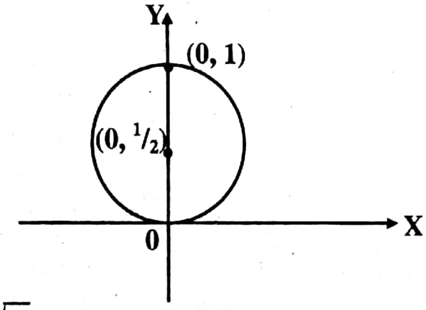
ආදේශයෙන්

$$x^2 + y^2 - y = \frac{m^2}{(1+m^2)} + \frac{m^4}{(1+m^2)^2} - \frac{m^2}{1+m^2}$$

$$= \frac{m^2 + m^4 - m^2(1+m^2)}{(1+m^2)^2}$$

$$= \frac{0}{(1+m^2)} = 0 \text{ වේ.}$$

$\therefore$ Q ලක්ෂ්‍යය S මත පිහිටයි.

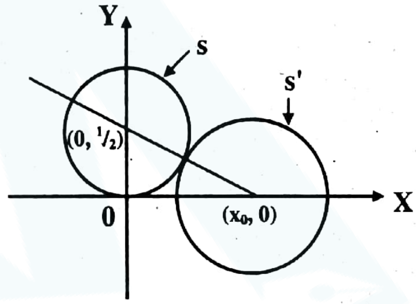


$x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ හා $y = \frac{1}{4}$ යන්න $x^2 + y^2 - y$ හි ආදේශයෙන්,

$$x^2 + y^2 - y = \frac{3}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{4}{16} - \frac{1}{4} = 0$$

$\therefore$ S මත $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$ පිහිටයි.



$(x_0, 0)$, s^1 වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය ලෙස ගනිමු.

$$\text{කේන්ද්‍ර අතර දුර} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{4}}$$

$$\text{S වෘත්තයේ අරය} + \text{S' වෘත්තයේ අරය} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - x_0\right)^2 + \frac{1}{16}}$$

කේන්ද්‍ර අතර දුර = අරයන් දෙකෙහි එකතුව

$$\sqrt{x_0^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - x_0\right)^2 + \frac{1}{16}}$$

$$x_0^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - x_0\right)^2 + \frac{1}{16}} + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - x_0\right)^2 + \frac{1}{16}$$

$$x_0^2 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - x_0\right)^2 + \frac{1}{16}} + \frac{3}{16} - \frac{\sqrt{3}}{2}x_0 + x_0^2 + \frac{1}{16}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x_0 = \frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - x_0\right)^2 + \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_0 - \frac{1}{4}\right)^2 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - x_0\right)^2 + \frac{1}{16}}$$

$$\frac{3}{4}x_0^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}x_0 + \frac{1}{16} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - x_0\right)^2 + \frac{1}{16}$$

$$\frac{3}{4}x_0^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}x_0 = \frac{3}{16} - \frac{\sqrt{3}}{2}x_0 + x_0^2$$

$$\frac{-3}{16} = \frac{1}{4}x_0^2 - \frac{2\sqrt{3}}{4}x_0 + \frac{\sqrt{3}}{4}x_0$$

$$\frac{-3}{16} = \frac{1}{4}x_0^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x_0$$

$$x_0^2 - \sqrt{3}x_0 = \frac{-3}{4}$$

$$4x_0^2 - 4\sqrt{3}x_0 + 3 = 0$$

$$(2x_0 - \sqrt{3})^2 = 0$$

$$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

එනයින් s' හි සමීකරණය

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{3}{16} + \frac{1}{16}$$

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{16}$$

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

S අභ්‍යන්තර ව ස්පර්ශ කරන අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \text{ වේ.}$$

17. (*a*) (i) $0 < \theta < 90°$ සඳහා

$$\frac{2\cos(60° - \theta) - \cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{2[\cos 60° \cos\theta + \sin 60° \sin\theta] - \cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) - \cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\sin\theta} = \sqrt{3}$$

(ii) sin නීතිය භාවිතයෙන්,

$$\frac{AC}{\sin 80°} = \frac{AB}{\sin 40°}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{\sin 80°}{\sin 40°} = \frac{2\sin 40° \cos 40°}{\sin 40°}$$

$$= 2\cos 40°$$

නැවතත් සයින් නීතිය භාවිතයෙන්,

$$\frac{AC}{\sin(\alpha + 20°)} = \frac{AD}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{\sin(\alpha + 20°)}{\sin\alpha}$$

AB = AD බැවින් $\Rightarrow \dfrac{\sin(20° + \alpha)}{\sin\alpha} = 2\cos 40°$

$$\therefore \sin(20° + \alpha) = 2\sin\alpha\cos 40°$$

$$\Rightarrow \sin 20°\cos\alpha + \cos 20°\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos 40°$$

$$\sin 20°\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos 40° - \sin\alpha\cos 20°$$

$$\cos\alpha = \frac{\sin\alpha\,(2\cos 40° - \cos 20°)}{\sin 20°}$$

$$\cot\alpha = \frac{2\cos 40° - \cos 20°}{\sin 20°}$$

$\theta = 20°$ සමඟින් (i) $\Rightarrow \dfrac{2\cos 40° - \cos 20°}{\sin 20°} = \sqrt{3}$

$$\therefore \cot\alpha = \sqrt{3}$$

$\Rightarrow \alpha = 30°$ ($0° < \alpha < 90°$ නිසා)

(*b*) $\cos 4x + \sin 4x = \cos 2x + \sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin 4x - \sin 2x = \cos 2x - \cos 4x$

$\Leftrightarrow 2\cos 3x \sin x = 2\sin 3x \sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin x[\cos 3x - \sin 3x] = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ හෝ $\sin 3x = \cos 3x$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ හෝ $\tan 3x = 1$ ($\therefore \cos 3x \neq 0$)

$x = n\pi$ හෝ $3x = m\pi + \dfrac{\pi}{4}$

$n \in \mathbb{Z}$ $\quad m \in \mathbb{Z}$

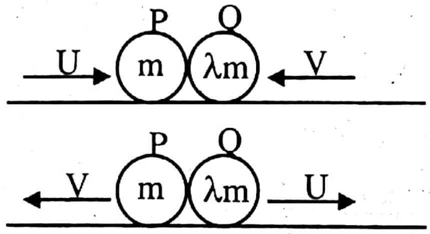
$\Leftrightarrow x\ \pi\ \mathbb{Z}$ හෝ $x = \dfrac{m\pi}{3} + \dfrac{\pi}{12}$

$n \in \mathbb{Z}$ $\quad m \in \mathbb{Z}$

*** ***

A - කොටස

01.



පද්ධතියට $\underline{I} = \Delta (M\, \underline{v}) \longrightarrow$ යෙදීමෙන්,

$\Rightarrow 0 = (\lambda mu - mv) - (mu - \lambda mv)$

$\Rightarrow 0 = (\lambda - 1)\, u + (\lambda - 1)\, V$

$\Rightarrow 0 = (\lambda - 1)(u + v)$

$\lambda - 1 = 0$ වේ.

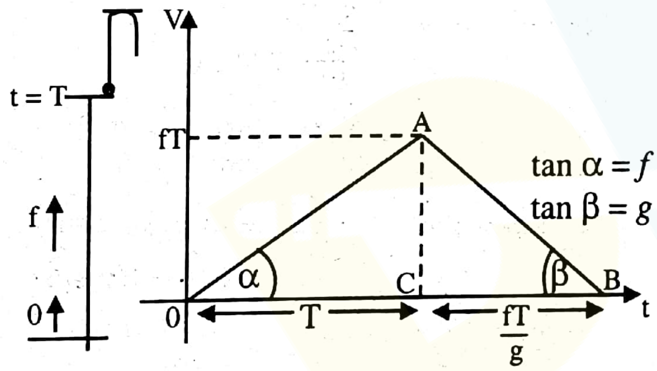
$\lambda = 1$

e යනු P හා Q අතර ප්‍රත්‍යා ගති සංගුණකය යැයි ගනිමු.
නිව්ටන් ප්‍රත්‍යා ගති නියමය යෙදීමෙන්,

$(u + v) = e\,(u + v)$ $\quad \overrightarrow{u} \quad \overrightarrow{-v}$

$\therefore e = 1$ $\quad \overrightarrow{-v} \quad \overrightarrow{u}$

02.



$f = \dfrac{AC}{T}$ සහ $g = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow BC = \dfrac{f}{g}T$

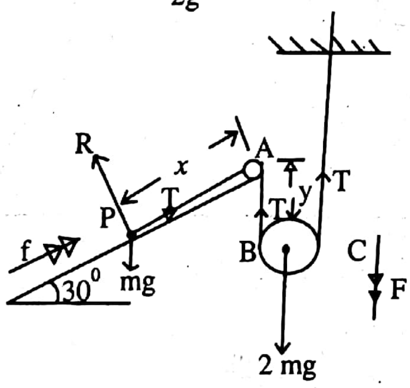
උපරිම උස = OAB ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය

$= \dfrac{1}{2} \times OB \times AC$

$= \dfrac{1}{2}\left[T + \dfrac{fT}{g}\right] fT$

$= \dfrac{fT^2}{2g}\,(f + g)$

03.



x + 2y = නියතයක් $\Rightarrow \ddot{x} + 2\ddot{y} = 0$

$\Rightarrow 2\ddot{y} = -\ddot{x}$

රූපයේ පරිදි f හා F සමඟින් f = 2F වේ.

$\nearrow$ $\underline{F} = m\underline{a}$, P සඳහා යෙදීමෙන්,

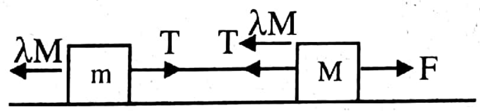
$T - mg \sin 30^0 = mf$

$\downarrow$ $F = m\underline{a}$, 2 mg සඳහා යෙදීමෙන්,

$2\,mg - 2T = 2mF$

04. $\twoheadrightarrow$ $f\ ms^{-2}$

$\longrightarrow$ $v\ ms^{-1}$



ප්‍රකර්ශන බලය $F = \dfrac{1\,000\,P}{v}\,N$ —①

$\overrightarrow{\underline{F}} = m\underline{a}$, M සඳහා යෙදීමෙන්,

$F - \lambda M - T = Mf$ —②

$\overrightarrow{\underline{F}} = m\underline{a}$, m සඳහා යෙදීමෙන්,

$T - \lambda M = mf$ —③

①,② හා ③ න් $\Rightarrow \dfrac{1\,000\,P}{V} - \lambda M - T = Mf$

$\Rightarrow \dfrac{1\,000\,P}{V} - \lambda M - T = \dfrac{M}{m}(T - \lambda m)$

$\Rightarrow \dfrac{1\,000\,mP}{V} - \lambda Mm - Tm = MT - mM\lambda$

$\dfrac{1\,000\,mP}{V} = (m + M)\,T$

$T = \dfrac{1\,000\,mP}{(M + m)V}\,N$

05. අදිශ ගුණිතය භාවිතයෙන්,

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (-\underline{i} + 2\,\underline{j}) \cdot (2\,\alpha\,\underline{i} + \alpha \underline{j})$

$= -2\alpha + 2\alpha = 0$

$\therefore A\hat{O}B = \dfrac{\pi}{2}$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$

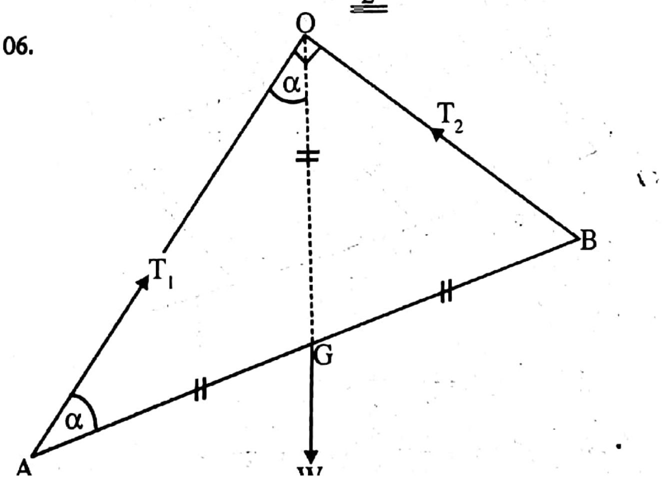
$= (-1 + 2\alpha)\,\underline{i} + (2 + \alpha)\,\underline{j}$

$\overrightarrow{OC}$, y - අක්ෂය මත පිහිටන නිසා

$\Rightarrow 1 - 2\alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}$

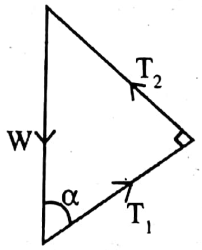
06.



$A\hat{O}B = \frac{\pi}{2}$ බැවින්, A, O, සහ B හරහා යන විෂ්කම්භය AB වන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය G වේ.

$\therefore\ AG = OG = GB$ (අරය)

$\Rightarrow A\hat{O}G = O\hat{A}G = \alpha$



$\overrightarrow{AO}$ හා $\overrightarrow{BO}$ දිගේ විභේදනයෙන්,

$T_1 = W\cos\alpha$

$T_2 = W\sin\alpha$

07. $A' \cup B' = (A\cap B)'$ නිසා

$$P(A'\cup B') = P(A\cap B)' = 1 - P(A\cap B)$$
$$= 1 - \frac{5}{6}$$
$$= \frac{1}{6}$$

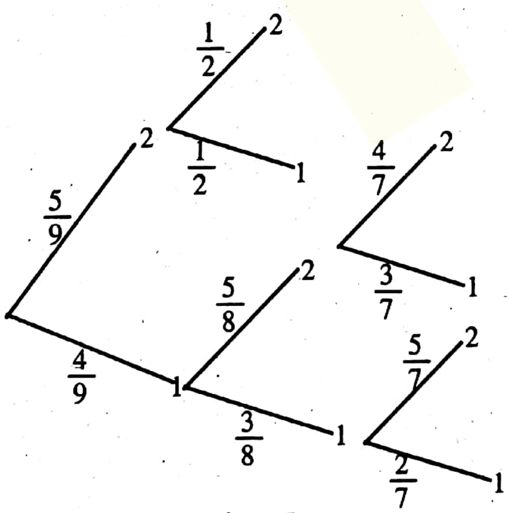
දැන් $P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(A) = \frac{P(B\cap A)}{P\left(\frac{B}{A}\right)}$

$$P(A) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}$$
$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

තව ද $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$$\frac{4}{5} = \frac{2}{3} + P(B) - \frac{1}{6}$$
$$P(B) = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$$
$$P(B) = \frac{24 - 20 + 5}{30} = \frac{9}{30}$$
$$\Rightarrow P(B) = \frac{3}{10}$$

08.



(i) පිළිතුර $= \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$

(ii) පිළිතුර $= \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{21}$

09. මාතයන් a සහ b වේ.

මාතයන්ගේ එකතුව සහ ගුණිතය x හා y නම්,

$a + b = x$

$ab = y$ වේ.

මධ්‍යන්‍යය $\frac{7}{2}$ නිසා

$\frac{2a + 2b + x + y}{6} = \frac{7}{2}$ වේ.

$\frac{2a + 2b + a + b + ab}{6} = \frac{7}{2}$ වේ.

$3a + 3b + ab = \frac{7}{2} \times 6$

$3a + 3b + ab = 21 \longrightarrow ①$

①ට අනුව ab ද 3න් බෙදෙන අතර,

$ab \geq 3$ වේ.

තව ද ① $\Rightarrow a + b \leq 6$ වේ.

$1 < a < b$ නිසා

$a = 2, b = 3$ වේ.

10. මධ්‍යන්‍යය $= 10 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = 10$

විචලතාව $= 9 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10} - 10^2 = 9$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = (100 + 9) \times 10$
$= 1090$

පළමු සංඛ්‍යා 9හි මධ්‍යන්‍යය $= 10 \Rightarrow x_{10} = 10$

$\therefore x_{10}^2 = 100$ බැවින්

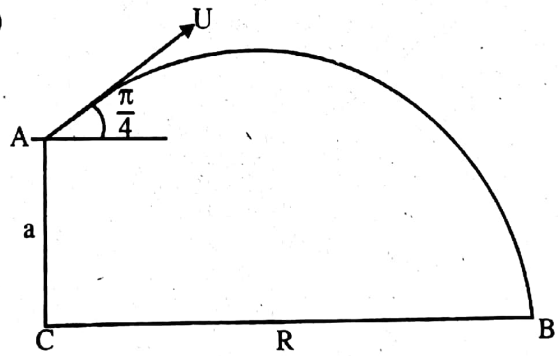
$\therefore \sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 990$

$\therefore$ පළමු සංඛ්‍යා 9හි විචලතාව $= \frac{990}{9} - 10^2 = 10$

*** ***

B - කොටස

11. (a)



$S = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්,

$\longrightarrow$ A සිට B දක්වා

$R = u\cos\frac{\pi}{4}t = \frac{ut}{\sqrt{2}}$

$t = \frac{\sqrt{2}R}{u}$

↑ A සිට B දක්වා

$-a = u\sin\frac{\pi}{4}t - \frac{1}{2}gt^2$

$-a = \frac{ut}{\sqrt{2}} - \frac{gt^2}{2}$

$-a = R - g\frac{R^2}{u^2}$

$-u^2a = u^2R - gR^2$

$\Rightarrow$

$gR^2 - u^2a - u^2R = 0$

$gR^2 - u^2R - u^2a = 0$

$\therefore R = \dfrac{u^2 \pm \sqrt{u^4 + 4u^2ag}}{2g}$

$R > 0$ බැවින්,

$R = \dfrac{u^2 + \sqrt{u^2 + 4u^2ag}}{2g}$

$u^2 > \frac{4}{3}ag$ ලෙස ගනිමු.

එවිට

$R > \dfrac{\frac{4}{3}ag + \sqrt{\frac{16}{9}a^2g^2 + \frac{16}{3}g^2a^2}}{2g}$

$R > \dfrac{\frac{4}{3}ag + \sqrt{\frac{64a^2g^2}{9}}}{2g}$

$R > \dfrac{\frac{4}{3}ag + \frac{8}{3}ag}{2g}$

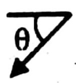
$R > \dfrac{12ag}{6g}$

$R > 2a$

$\therefore$ ගල පොකුණට නොවැටේ.

(*b*) $\underline{V}(S, E) = \overrightarrow{u}$

$\underline{V}(B, E) = v;\ u\sin\theta < V < u$

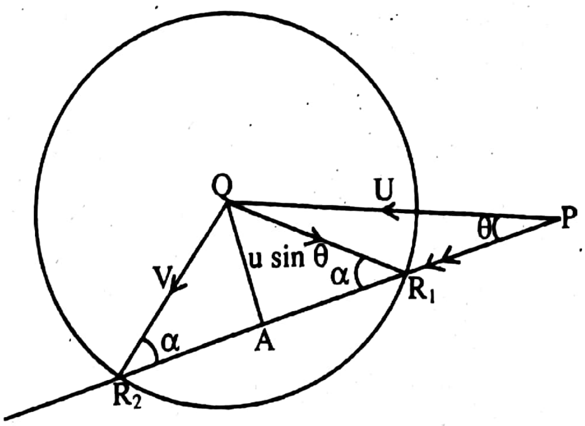
$\underline{V}(B, S) =$ 

$\underline{V}(B, S) = \underline{V}(B, E) + \underline{V}(E, S)$

$= \underline{V}(E, S) + \underline{V}(B, E)$

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

$= \overrightarrow{PR}$



අවශ්‍ය කෝණය $= R_1\hat{Q}R_2$

$= \pi - 2\alpha$

මෙහි $= Q\hat{R}_2R_1 = \alpha$

$\text{Sin}\,\alpha = \dfrac{QA}{QR_2} = \dfrac{u\sin\theta}{V}$

$\therefore \alpha = \sin^{-1}\left(\dfrac{u\sin\theta}{V}\right)$

$t_1 + t_2 = \dfrac{\ell}{PR_1} + \dfrac{\ell}{PR_2} = \dfrac{\ell(PR_1 + PR_2)}{PR_1.PR_2}$

$PR_1 = PA - AR_1$

$= u\cos\theta - \sqrt{V^2 - u^2\sin^2\theta}$

$PR_2 = PA + AR_2$

$= u\cos\theta + \sqrt{V^2 - u^2\sin^2\theta}$

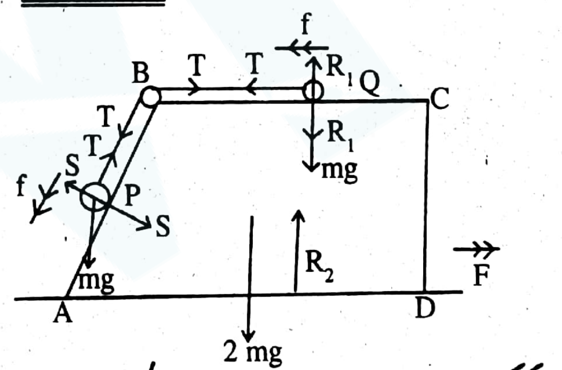
$\therefore t_1 + t_2 = \dfrac{\ell\, 2u\cos\theta}{(u\cos\theta - \sqrt{V^2 - u^2\sin^2\theta})(u\cos\theta + \sqrt{v^2 - u^2\sin^2\theta})}$

$= \dfrac{2u\ell\cos\theta}{u^2\cos^2\theta - (V^2 - u^2\sin^2 Q)}$

$= \dfrac{2u\ell\cos\theta}{u^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - V^2}$

$= \dfrac{2u\ell\cos\theta}{u^2 - V^2}$

12. (*a*)



$\underline{a}(P, \text{Block}) = f \swarrow$ යැයි ගනිමු. එවිට $\underline{a}(Q, \text{Block}) = f \leftleftarrows$

තව ද $\underline{f}(\text{Block}, E) = F \rightrightarrows$

$\underline{F} = m\underline{a}$: යෙදීමෙන්,

පද්ධතියට $\rightarrow$

$0 = 2mF + m(F - f) + m(F - f\cos\alpha)$

$\rightarrow 0 = 2mF + mf - mF + mF - mf\cos\alpha$

$0 = 4mF + mf - mf\frac{3}{5}$

$\Rightarrow 0 = 4F - f - \frac{3}{5}f$

$\frac{8}{5}f = 4F$

$f = \frac{10F}{4}$

$f = \frac{5F}{2} \rightarrow$ ①

P අංශුවට $\swarrow$

$mg\sin\alpha - T = m(f - F\cos\alpha) \rightarrow$ ②

Q අංශුවට

$T = m(f - F) \rightarrow$ ③

② + ③ $mg\sin\alpha = mf - mF \times \frac{3}{5} + mf - mF$

$mg\frac{4}{5} = 2mf - \frac{8}{5}mF$

$\frac{4}{5}g = 2f - \frac{8}{5}F \leftarrow (\because \cos\alpha = \frac{3}{5}$ නම් $\sin\alpha = \frac{4}{5})$

$\Rightarrow 4g = 10f - 8F$

දන් ① න් $\Rightarrow$ $4g = 10\left(\frac{5}{2}F\right) - 8F$

$4g = (25 - 8)F$

$4g = 17F$

$\Rightarrow F = \frac{4}{17}g$

① න් $\Rightarrow f = \frac{5}{2} \times \frac{4}{17}g = \frac{10}{17}g$

$S = ut + \frac{1}{2}at^2$ $\swarrow$ යෙදීමෙන්,

(P, B) චලිතය සඳහා:

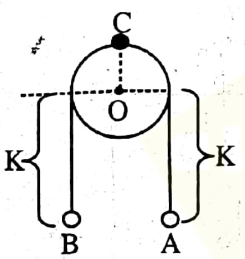
$a = 0 + \frac{1}{2}ft^2$

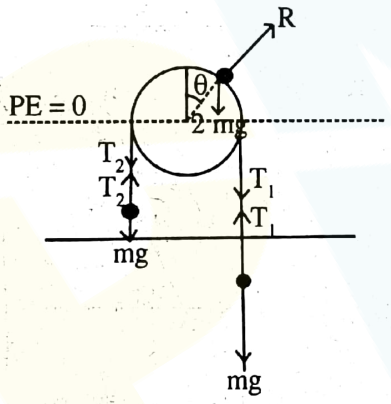
$t^2 = \frac{2a}{f}$

$t^2 = \frac{2a}{\frac{10}{17}g}$

$t = \sqrt{\frac{17a}{5g}}$

(b)





ශක්ති සංස්ථිති නියමයෙන්,

$\frac{1}{2} \times 2m \times (a\dot{\theta})^2 + 2 \times \frac{1}{2} \times m(a\dot{\theta})^2 + 2mga\cos\theta$

$- mg(k - a\theta) - mg(k + a\theta) = -2mg\,k + 2mg\,a$

$ma^2\dot{\theta}^2 + m(a\dot{\theta})^2 + 2mga\cos\theta$

$-mgk + mga\theta - mgk - mga\theta = 2\,mk + 2mga$

$2a\dot{\theta}^2 + 2g\cos\theta = 2g$

$\underline{F} = m\underline{a}$

c සඳහා $\nearrow$ $R - 2mg\cos a = -2ma\,\dot{\theta}^2$

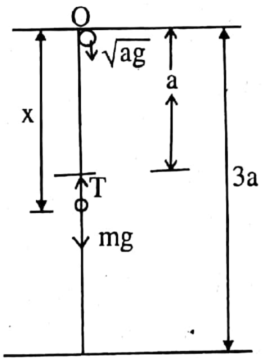
$\Rightarrow R = 2\,mg\cos\theta - 2\,mg(1 - \cos\theta)$

$= 2mg(2\cos\theta - 1)$

$\Rightarrow$ θ වැඩි වන විට R අඩු වන අතර, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ වන විට $R = 0$ වේ.

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$ වන විට C ගෝලය හැර යයි.

13.



$a \le x < 3a$ සඳහා

$T = \frac{mg}{a}(x - a)$

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්,

m සඳහා $\downarrow$ $mg - T = m\ddot{x}$

$\Rightarrow mg - \frac{mg}{a}(x - a) = m\ddot{x}$

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{g}{a}(x - 2a) = 0$

$\ddot{x} = 0$ මගින් කේන්ද්‍රය දෙනු ලැබේ.

i.e. $x = 2a$

එමනිසා C, හි කේන්ද්‍රය පවතී.

මෙහි C යනු $OC = 2a$ වූ Oට සිරස් පහළින් පිහිටන ලක්ෂ්‍යයයි.

ශක්ති සංස්ථිතියෙන්,

$\frac{1}{2}m(ga) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx + \frac{1}{2}mg\frac{(x - a)^2}{a}$

$ga = \dot{x}^2 - 2gx + \frac{g}{a}(x^2 - 2ax + a^2)$

$\dot{x}^2 = 2gx - \frac{g}{a}x^2 + 2gx$

$\dot{x}^2 = \frac{g}{a}(4ax - x^2)$ වේ. $a \le x < 3a$ සඳහා

$X = x - 2a$ නම් $\dot{X} = \dot{x}$

තව ද $a \le x < 3a \Leftrightarrow -a \le X < a$

$x = X + 2a$ බැවින්

$\dot{X}^2 = \frac{g}{a}\left\{4a(X + 2a) - (X + 2a)^2\right\}$

$= \frac{g}{a}\left\{4aX + 8a^2 - (X^2 + 4aX + 4a)^2\right\}$

$= \frac{g}{a}\left\{4a^2 - X^2\right\}$, $-a \le X \le a$

$\therefore A = 2a$

$\downarrow$V යනු ගැටුමට පෙර ප්‍රවේගය ලෙස ගන්න.

එවිට $V^2 = \frac{g}{a}(4a^2 - a^2) = \frac{3a^2g}{a} = 3ag$

$\therefore V = \sqrt{3ag}$

නිව්ටන්ගේ ප්‍රත්‍යා ගති නියමයෙන් ගැටුමට පසු

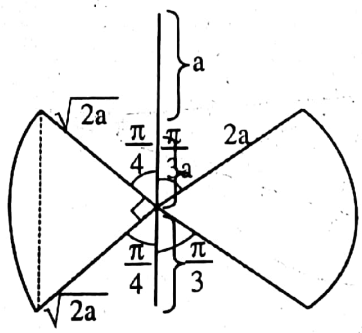
ප්‍රවේගය $\uparrow = \sqrt{ag}$ $(\therefore e = \frac{1}{\sqrt{3}})$

$\dot{X}^2 = \frac{g}{a}(B^2 - X^2)$

$x = a$ වන විට $\dot{X} = \sqrt{ga}$ වේ.

$ga = \frac{g}{a}(B^2 - a^2)$

$\Rightarrow B = \sqrt{2}a$



$\sqrt{\frac{g}{a}}t_1 = \frac{\pi}{3}$ නිසා

$t_1 = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{a}{g}}$ වේ.

$\sqrt{\frac{g}{a}}t_2 = \frac{\pi}{2}$ නිසා

$t_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$ වේ.

$\therefore t_1 + t_2 = \frac{5\pi}{6}\sqrt{\frac{a}{g}}$ වේ.

14. (*a*) $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ සහ $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$

$= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

$= \underline{c} - \underline{a}$

$= (1-\lambda)\,\underline{a} + \lambda\underline{b} - \underline{a}$ ($\because c = (1-\lambda)\,\underline{a} + \lambda\underline{b}$) බැවින්

$= \lambda(\underline{b} - \underline{a})$

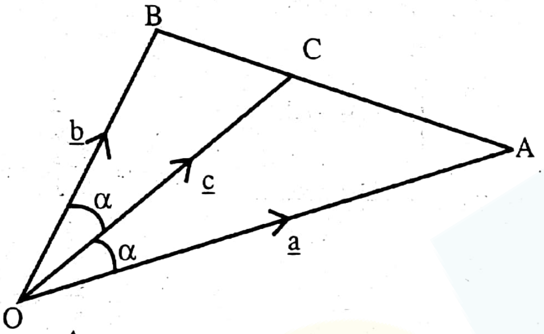
$\overrightarrow{CB} = \underline{b} - c = \underline{b} - (1-\lambda)\,\underline{a} - \lambda\underline{b}$

$= (1-\lambda)(\underline{b} - \underline{a})$

$\overrightarrow{AC} = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}\,\overrightarrow{CB}$

$\therefore$ C යන්න AB මත පිහිටන අතර, $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$

ie、 $AC : CB = \lambda : (1-\lambda)$



$B\hat{O}C = A\hat{O}C$

$\underline{a}\cdot\underline{c} = |\underline{a}||\underline{c}|\cos\alpha$

$\underline{b}\cdot\underline{c} = |\underline{b}||\underline{c}|\cos\alpha$

$\Rightarrow \dfrac{\underline{a}\cdot\underline{c}}{|\underline{a}|} = \dfrac{\underline{b}\cdot\underline{c}}{|\underline{b}|}$

$\Rightarrow |\underline{b}|(\underline{a}\cdot\underline{c}) = |\underline{a}|\underline{\underline{(\underline{b}\cdot\underline{c})}}$

$\Rightarrow |\underline{b}|\left\{(1-\lambda)|\underline{a}|^2 + \lambda(\underline{a}\cdot\underline{b})\right\} = |\underline{a}|\left\{(1-\lambda)\,\underline{a}\cdot\underline{b} + \lambda|\underline{b}|^2\right\}$

$|\underline{b}||\underline{a}|^2(1-\lambda) + |\underline{b}|\lambda(\underline{a}\cdot\underline{b}) = |a|(1-\lambda)\,\underline{a}\cdot\underline{b} + \lambda|\underline{a}||\underline{b}|^2$

$(1-\lambda)|\underline{a}|\left\{|\underline{a}||\underline{b}| - \underline{a}\cdot\underline{b}\right\} = \lambda|\underline{b}|\left\{|\underline{a}||\underline{b}| - \underline{a}\cdot\underline{b}\right\}$

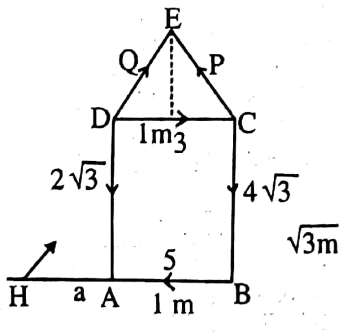
$(1-\lambda)|\underline{a}| = \lambda|\underline{b}|$

$|\underline{a}| = \lambda(|\underline{a}| + |\underline{b}|)$

$\lambda = \dfrac{|\underline{a}|}{|\underline{a}| + |\underline{b}|}$

($\because$ $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ ප්‍රභින්න හා ඒකරේඛීය නොවේ.)

(*b*)



පද්ධතිය යුග්මයකට ඌනනය වන නිසා R = 0 විය යුතු ය.

$\rightarrow$ $3 - 5 + Q\cos 60 - P\cos 60 = 0$

$-2 + \dfrac{Q}{2} - \dfrac{P}{2} = 0$

$\Rightarrow$

$Q - P = 4$ සහ $\rightarrow$ ①

$\uparrow$ $-2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + Q\sin 60 + P\sin 60 = 0$

$-b\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}Q + \dfrac{\sqrt{3}}{2}P = 0$

$Q + P = 12 \rightarrow$ ②

① + ②

$2Q = 16$

$Q = 8$

$\therefore P = 4$

E↻ යුග්මයේ ඝූර්ණය $= 5\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\right) + 2\sqrt{3}\;\dfrac{-2\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{15\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}$

$= \dfrac{12\sqrt{3}}{2} + \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{14\sqrt{3}}{2}$

$= \underline{\underline{7\sqrt{3}\,\text{Nm}}}$

$\overrightarrow{X} = 5 + 3 + 8\cos 60^0 - 4\cos 60^0$

$= 8 + \dfrac{8}{2} - \dfrac{4}{2}$

$= 8 + 4 - 2 = 10$

$\uparrow Y = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 8\sin 60^0 + 4\sin 60^0$

$= -2\sqrt{3} + 8\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 4\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= -2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

$= 4\sqrt{3}$

$R = \sqrt{10^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{100 + 48}$

$= \sqrt{4 + 37} = \underline{\underline{2\sqrt{37}}}$

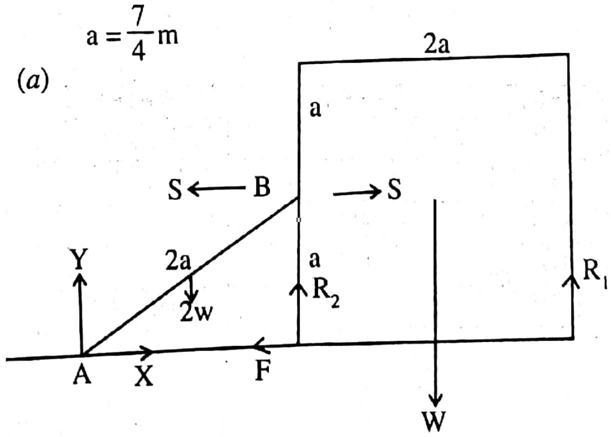
H යනු දික් කළ BA, සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව හමුවන ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. AH = a නම්

H↻ $-6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}(1+a) + \sqrt{3}(3+4-2) = 0$

$-6a + 2 + 2a + 5 = 0$

$a = \dfrac{7}{4}\,\text{m}$

15. (*a*)



කුට්ටිය සඳහා $\uparrow R_1 + R_2 = W$

$\longrightarrow$ කුට්ටිය සඳහා $F = S$

AB සඳහා A ↶

$$S \times a - 2W\,\frac{\sqrt{3}a}{2} = 0$$
$$S = \sqrt{3}\,W$$

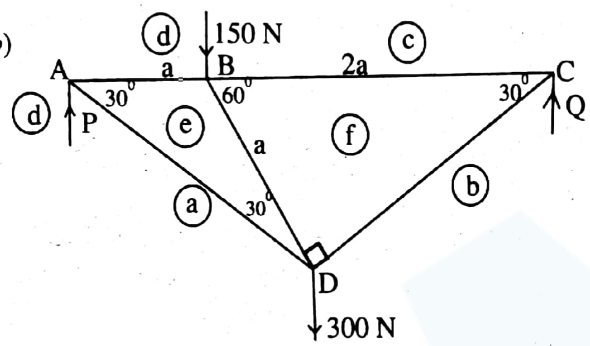
නොලිස්සීම සඳහා

$$\mu \geq \frac{|F|}{R_1 + R_2}$$

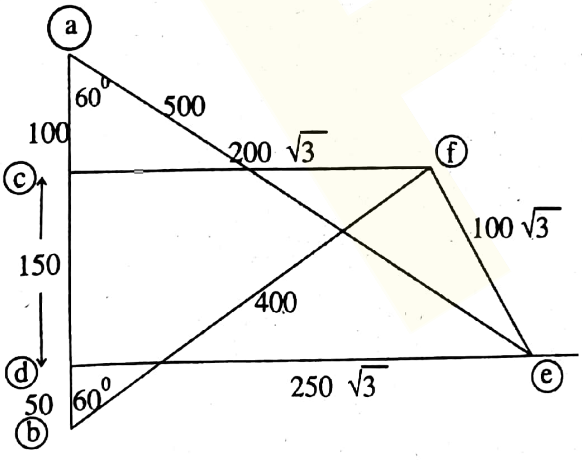
$$\mu \geq \frac{\sqrt{3}\,W}{W}$$

$$\mu \geq \sqrt{3}$$

(*b*)

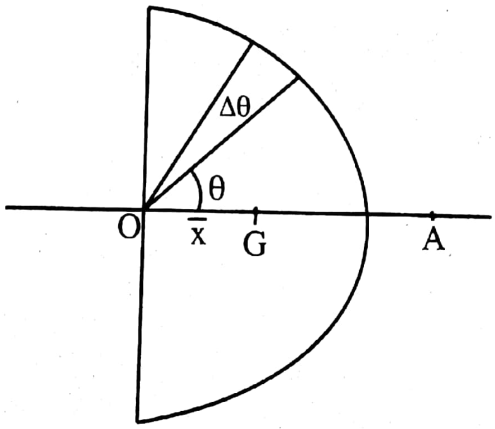


$$↶C \quad 150 \times 2a + 300\left(2a - \frac{a}{2}\right) - P.3a = 0$$
$$3P = 300 + 300\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$3P = 750\text{ N}$$
$$P = 250\text{ N}$$



දණ්ඩ	ආතතිය	තෙරපුම
AB		$250\sqrt{3}$ N
BC		$200\sqrt{3}$ N
CD	400 N	
DA	500 N	
DB		$100\sqrt{3}$ N

16.



සමමිතියෙන්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G, CA මත පිහිටයි.

සහ $OG = \bar{x}$

ρ යනු ඒකක දිගක ස්කන්ධය යැයි ගනිමු.

එවිට $\Delta m = a(\Delta\theta)\,\rho$.

සහ

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\rho a\cos\theta\, d\theta}{\pi a\rho} = \frac{a}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta - \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{a}{\pi}\left[\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{a}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{a}{\pi}\,2 = \frac{2a}{\pi}$$

∴ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය C සිට $\frac{2a}{\pi}$ දුරකින් පවතී.

වස්තුව	ස්කන්ධය	සිරස් දුර සිට ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට
PR	$a\rho$	$\frac{a}{4}$
PQ	$a\rho$	$\frac{a}{4}$
ST	$2a\rho$	$\frac{a}{2}$
SUT	$\pi ak\rho$	$\frac{a}{2} + \frac{2a}{\pi}$
සංයුක්ත වස්තුව	$(4 + \pi k)\,a\rho$	$\bar{x}_1$

සමමිතියෙන් L හි ස්කන්ධය කේන්ද්‍රය P හා O යා කරන රේඛාව මත පිහිටයි.

ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයේ අර්ථ දැක්වීමෙන්,

$$(4a\rho + \pi ak\rho)\,\bar{x}_1 = 2a\rho \times \frac{a}{4} + 2a\rho \times \frac{a}{2} + \pi ak\rho\left(\frac{a}{2} + \frac{2a}{\pi}\right)$$

$$\Rightarrow (4 + \pi k)\,\bar{x}_1 = \frac{a}{2} + a + \frac{\pi ak}{2} + 2ak$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{a}{2}\left(\frac{\pi k + 4k + 3}{\pi k + 4}\right)$$

L රාමුව සමතුලිතතාවයෙන් දෙන ලද පිහිටුමේ තිබීමට

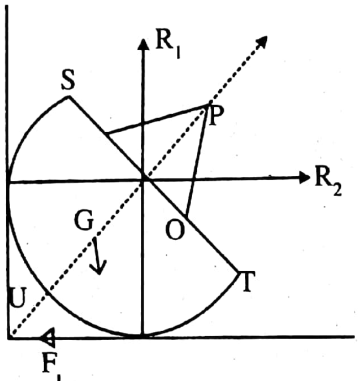
$\overline{x}_1 > \frac{a}{2}$ විය යුතු ය.

i.e. $\left(\frac{\pi k + 4k + 3}{\pi k + 4}\right)\frac{a}{2} > \frac{a}{2}$

$\Leftrightarrow \pi k + 4k + 3 > \pi k + 4$

$\Leftrightarrow 4k > 1$

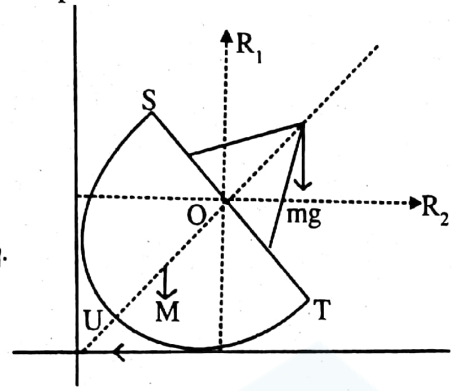
$\Leftrightarrow K > \frac{1}{4}$



K = 1 යයි ගනිමු.

එවිට $\overline{x}_1 = \left(\frac{\pi + 7}{\pi + 4}\right)\frac{a}{2}$

$\overline{x}_2$ යනු P සිට අලුත් ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට ඇති දුර ලෙස ගනිමු.



එවිට $[(4a\rho + \pi a\rho) + m]\,\overline{x}_2 = (4a\rho + \pi a\rho)\,\overline{x}_1$

$\Leftrightarrow [4a\rho + \pi a\rho + m]\,\overline{x}_2 = (4a\rho + \pi a\rho)\left(\frac{\pi + 7}{\pi + 4}\right)\frac{a}{2}$

$\Leftrightarrow [4a\rho + \pi a\rho + m]\,\overline{x}_2 = a\rho\,(4 + \pi)\left(\frac{\pi + 7}{\pi + 4}\right)\frac{a}{2}$

$\Leftrightarrow [(4a\rho + \pi a\rho) + m]\,\overline{x}_2 = a\rho\,(\pi + 7)\frac{a}{2}$

$\Leftrightarrow \overline{x}_2 = \frac{a\rho\,(\pi + 7)}{[4a\rho + \pi a\rho) + m]}\,\frac{a}{2}$

ඉහත පිහිටුමේ සමතුලිත ව පිහිටීමට $\overline{x}_2 > \frac{a}{2}$ විය යුතු ය.

i.e. $\frac{a\rho\,(\pi + 7)}{[(4a\rho + \pi a\rho) + m]}\,\frac{a}{2} > \frac{a}{2}$

$\Leftrightarrow a\rho\,(\pi + 7) > 4a\rho + \pi a\rho + m$

$\Leftrightarrow \begin{matrix} a\rho\,\pi + 7a\rho \\ (-4a\rho + \pi a\rho) \end{matrix} > m$

$\Leftrightarrow m < 3a\rho$

17. (*a*) X යනු පළමු බෝලය සුදු සහ දෙවන බෝලය කළු යැයි ගනිමු.

මුළු සම්භාවිතා නියමයෙන්,

$P(X) = P\left[\frac{X}{A}\right]P(A) + P\left[\frac{X}{B}\right]P(B) + P\left[\frac{X}{C}\right]P(C) \rightarrow ①$

$P\left[\frac{X}{A}\right] = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$

$P\left[\frac{X}{B}\right] = \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$

$P\left[\frac{X}{C}\right] = \frac{m}{(2m+1)}\,\frac{(m+1)}{2m} = \frac{(m+1)}{2\,(2m+1)}$

තව ද $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$

$P(X) = \frac{5}{18}$ නිසා

① න්

$\Rightarrow \frac{5}{18} = \frac{4}{15} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{15} \times \frac{1}{3} + \frac{m+1}{2\,(2m+1)} \times \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{5}{6} - \frac{8}{15} = \frac{m+1}{(2m+1)}$

$\Rightarrow \frac{25 - 16}{30} = \frac{m+1}{(2m+1)}$

$\Rightarrow \frac{9}{30} = \frac{m+1}{2\,(2m+1)}$

$\Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{m+1}{(2m+1)}$

$\Rightarrow 3\,(2m+1) = 5\,(m+1)$

$\Rightarrow 6m + 3 = 5m + 5$

$\Rightarrow m = 2$

$m = 2 \Rightarrow P\left(\frac{X}{C}\right) = \frac{3}{10}$

බේයි ප්‍රමේයයෙන්,

$$P(C \mid X) = \frac{P(X \mid C)\,P(C)}{P(X)}$$

$$= \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{3}}{\frac{5}{18}}$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{18}{5} = \frac{9}{25}$$

(*b*)

ලකුණු පරාසය	f	මධ්‍ය අගය	x^2	fx	fx^2
0 - 2	15	1	1	15	15
2 - 4	25	3	9	75	225
4 - 6	40	5	25	200	1 000
6 - 8	15	7	49	105	735
8 - 10	5	9	81	45	405
	$\Sigma f = 100$			$\Sigma fx = 440$	$\Sigma fx^2 = 2\,380$

$\mu = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{440}{100} = 4.4$

$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - \mu^2}$

$= \sqrt{\frac{2\,380}{100} - \left(\frac{44}{10}\right)^2}$

$= \sqrt{23.8 - 19.36}$

$= \sqrt{4.44}$

≈ 2.11

$M = 4 + \frac{10}{40} \times 2$

$= 4 + \frac{1}{2}$

$= 4.5$

$K = \frac{3\,(4.4 - 45)}{2.11}$

$= \frac{-0.3}{2.11}$

$\approx \underline{\underline{-0.14}}$

*** ***