අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය - 2014 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)

General Certificate of Education (Adv. Level) Examination – August 2014 (New Syllabus)

සංයුක්ත ගණිතය I / පැය තුනයි

Combined Mathematics I / Three hours

උපදෙස් :
- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ; **A කොටස** (ප්‍රශ්න 01 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
- **A කොටස:**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
- **B කොටස:**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි, B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය, උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

A කොටස

01. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} r(3r-1) = n^2(n+1)$ බව සාධනය කරන්න.

02. ප්‍රස්තාරික ක්‍රමයක් භාවිතයෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $|x+1| > 3x+7$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

03. එක ම ආගන්ඩ් සටහනක

(i) $\operatorname{Arg}(z+1) = \frac{\pi}{3}$,

(ii) $\operatorname{Arg}(z-1) = \frac{5\pi}{6}$

සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා මගින් නිරූපණය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යයන්හි පථවල දළ සටහන් ඇඳ, ඒවායේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

04. $n \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු. $\left(2+\frac{3}{x}\right)(1+x)^n$ හි ප්‍රසාරණයේ x^{n-2} හි සංගුණකය 120 වේ. n හි අගය සොයන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

05. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan^2 2x}{x\left(1 - \sqrt{1+x}\right)} = -8$ බව පෙන්වන්න.

06. $y = 2x$ සරල රේඛාවෙන් හා $y = x^2$ වක්‍රයෙන් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

07. $x = e^t + e^{-t}$, $y = e^t - e^{-t}$ මගින් දෙනු ලබන වක්‍රය C යැයි ගනිමු; මෙහි t යනු තාත්ත්වික පරාමිතියකි. t ඇසුරෙන් $\dfrac{dy}{dx}$ සොයා, $t = \ln 2$ ට අනුරූප ව C මත වූ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී ස්පර්ශ රේඛාවේ සමීකරණය $5x - 3y - 8 = 0$ බව පෙන්වන්න.

08. $\lambda \in \mathbb{R}$ හා $\lambda \neq \pm 1$ යැයි ගනිමු. ඛණ්ඩාංක අක්ෂ හා $(1+\lambda)x - 2(1-\lambda)y - 2(1-\lambda) = 0$ සරල රේඛාව මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය වර්ග ඒකක 4 ක් වේ. λ හි අගයන් සොයන්න.

09. (0.3) ලක්ෂ්‍යයෙහි දී y - අක්ෂය ස්පර්ශ කරන්නා වූ ද $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$ වෘත්තය ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය කරන්නා වූ ද වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

10. $\tan\alpha = -1$ හා $\text{Sin}\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ යැයි ගනිමු. මෙහි $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ හා $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ වේ. $\text{Cos}(\alpha + \beta)$ හි අගය සොයන්න.

*** ***

B කොටස

11. (*a*) $a \in \mathbb{R}$ යැයි ද $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + ax - 1$ යැයි ද ගනිමු. $(3x - 1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බව දී ඇත. a හි අගය සොයන්න.
$f(x)$ යන්න $(3x - 1)(x+k)^2$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි k යනු නියතයකි.
ඉහත ප්‍රකාශනයෙහි $3x - 1$ යන්න b හා c නියත වන $b(x+1)+c$ ආකාරයට ලිවීමෙන්, $f(x)$ යන්න $(x+1)^3$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(*b*) $a,b,c \in \mathbb{R}$ හා $ac \neq 0$ යැයි ගනිමු. ශූන්‍යය, $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයෙහි මූලයක් **නොවන** බව පෙන්වන්න.
මෙම සමීකරණයේ මූල α හා β යැයි ද $\lambda = \dfrac{\alpha}{\beta}$ යැයි ද ගනිමු. $ac(\lambda+1)^2 = b^2\lambda$ බව පෙන්වන්න.
$P, q, r \in \mathbb{R}$ හා $pr \neq 0$ යැයි ගනිමු. තව ද $px^2 + qx + r = 0$ සමීකරණයෙහි මූල γ හා δ යැයි ද $\mu = \dfrac{\gamma}{\delta}$ යැයි ද ගනිමු. $\lambda = \mu$ හෝ $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$ වන්නේ $acq^2 = prb^2$ ම නම් පමණක් බව පෙන්වන්න.
$kx^2 - 3x + 2 = 0$ හා $8x^2 + 6kx + 1 = 0$ සමීකරණවල මූල එක ම අනුපාතයට වන බව දී ඇත; මෙහි $k \in \mathbb{R}$ වේ. k හි අගය සොයන්න.

12. (*a*) පාසල් හයක් තරුණ ක්‍රීඩා සමුළුවකට සහභාගි වන අතර, ක්‍රිකට් ක්‍රීඩකයකුගෙන්, පාපන්දු ක්‍රීඩකයකුගෙන් හා හොකී ක්‍රීඩකයකුගෙන් සමන්විත ක්‍රීඩකයින් තුන්දෙනකුගෙන් එක් එක් පාසල නියෝජනය කරනු ලබයි. මෙම ක්‍රීඩකයින් අතුරෙන් සාමාජිකයින් හයදෙනෙකුගෙන් යුත් කමිටුවක් තෝරා ගැනීමට අවශ්‍ය ව ඇත.

(i) එක් එක් ක්‍රීඩාවෙන් ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනෙකු බැගින් ඇතුළත් කළ යුතු නම්,

(ii) පාසල් හය ම නියෝජනය වන පරිදි, එක් එක් ක්‍රීඩාවෙන් ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනකු බැගින් ඇතුළත් කළ යුතු නම්,

(iii) පාසල් දෙකකින් එක් එක් පාසලෙන් ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනකු බැගින් ද ඉතිරි පාසල් දෙකකින් එක් එක් පාසලෙන් එක ක්‍රීඩකයකු බැගින් ද ඇතුළත් කළ යුතු නම්,

මෙම කමිටුව සෑදිය හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{r^2 - r - 5}{r(r+1)(r+4)(r+5)}$ යැයි ගනිමු.

$n = 0, 1, 2, 3$ සඳහා r^n හි සංගුණක සැසඳීමෙන්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $r^2 - r - 5 = A(r^2-1)(r+5) - Br^2(r+4)$ වන පරිදි A හා B නියත පවතින බව පෙන්වන්න.
$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = f(r) - f(r+1)$ වන පරිදි $f(r)$ සොයන්න.

$n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = -\frac{n}{(n+1)(n+5)}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අනන්ත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන බව තවදුරටත් පෙන්වා, එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\sum_{r=3}^{\infty} 3U_r$ සොයන්න.

13. (*a*) $a,b \in \mathbb{R}$ යැයි ද $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ද ගනිමු. $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{B}$ වන පරිදි a හා b හි අගයන් සොයන්න;

මෙහි $\mathbf{A}^T$ මගින් **A** න්‍යාසයෙහි පෙරළුම දැක්වේ.

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} u \\ u+1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $u \in \mathbb{R}$ වේ. $\mathbf{CX} = \lambda\mathbf{BX}$ යැයි ද ගනිමු; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ. λ හි අගය හා u හි අගය සොයන්න.

λ හි මෙම අගය සඳහා $\mathbf{C} - \lambda\mathbf{B}$ න්‍යාසය සොයා, එහි ප්‍රතිලෝමය **නොපවතින** බව පෙන්වන්න.

(*b*) $z \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු.

(i) $|1-z|^2 = 1 - 2\,\mathrm{Re}\, z + |z|^2$ බව හා

(ii) $z \neq 1$ සඳහා $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1-\mathrm{Re}\, z}{|1-z|^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1}{2}$ වන්නේ $|z| = 1$ හා $z \neq 1$ ම නම් පමණක් බව **අපෝහනය** කරන්න.

S යනු, $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1}{2}$ හා $-\dfrac{\pi}{3} < \mathrm{Arg}\ z < \dfrac{\pi}{3}$ යන අවශ්‍යතා දෙක ම සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවලින් සමන්විත කුලකය යැයි ගනිමු. S හි සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ආගන්ඩ් සටහනක අඳින්න.

z යන්න S තුළ වේ නම් හා $\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ නම්, $z = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ බව පෙන්වන්න.

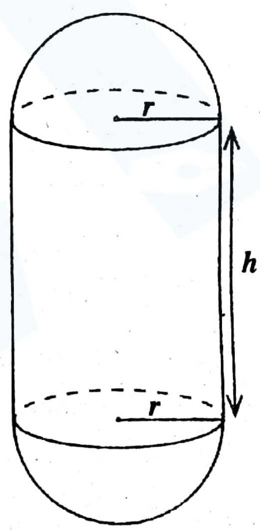
14. (*a*) $x \neq -1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{8x}{(x+1)(x^2+3)}$ යැයි ගනිමු.

$x \neq -1$ සඳහා $f'(x) = \dfrac{8(1-x)(2x^2+3x+3)}{(x+1)^2(x^2+3)^2}$ බව පෙන්වන්න.

හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන් $(x+1)(x^2+3) = 16x$ සමීකරණයේ විසඳුම් **ගණන** සොයන්න.

(*b*) අරය මීටර r වූ කුහර අර්ධ ගෝල දෙකක්, එම අරය ම සහිත උස මීටර h වූ ඍජු වෘත්ත කුහර සිලින්ඩරයකට රූපයේ දැක්වෙන පරිදි දෘඪ ලෙස සම්බන්ධ කිරීමෙන් කුහර සංයුක්ත වස්තුවක් සෑදිය යුතු වේ. සංයුක්ත වස්තුවේ මුළු පරිමාව $36\pi \mathrm{m}^3$ වේ. $h = \dfrac{108 - 4r^3}{3r^2}$ බව පෙන්වන්න.



ද්‍රව්‍ය සඳහා යන වියදම සිලින්ඩරාකාර පෘෂ්ඨය සඳහා වර්ග මීටරයකට රුපියල් 300 ක් ද අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨ සඳහා වර්ග මීටරයකට රුපියල් 1 000 ක් ද වේ. මෙම සංයුක්ත වස්තුව සෑදීමට අවශ්‍ය ද්‍රව්‍ය සඳහා යන මුළු වියදම රුපියල් C යන්න $0 < r < 3$ සඳහා $C = 800\pi\left(4r^2 + \dfrac{27}{r}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

C අවම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න.

15. (*a*) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$ සොයන්න.

(*b*) **කොටස් වශයෙන් අනුකලනය** භාවිතයෙන් $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(e^\pi + 1)$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$ සූත්‍රය පිහිටුවන්න; මෙහි a යනු නියතයකි.

$p(x) = (x-\pi)(2x+\pi)$ යැයි ද $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{p(x)}\,\mathrm{d}x$ යැයි ද ගනිමු.

ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{p(x)}\,\mathrm{d}x$ බව පෙන්වන්න.

I සඳහා වූ ඉහත අනුකල දෙක භාවිතයෙන් $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{p(x)}\,\mathrm{d}x$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

ඒ නයින්, $I = \dfrac{1}{6\pi}\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$ බව පෙන්වන්න.

16. l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙළින් $2x + y = 5$ හා $x + 2y = 4$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා යැයි ගනිමු. l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණය $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ බව පෙන්වා, මෙම කෝණයේ සමච්ඡේදකයේ සමීකරණය සොයන්න.

l_1 හා l_2 හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය A යැයි ද $R = \left\{(x,y) : x + 2y \leq 4 \text{ හා } 2x + y \geq 5\right\}$ යැයි ද ගනිමු. A ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයා, R පෙදෙස xy- තලයෙහි අඳුරු කරන්න.

l_1 හා l_2 රේඛා දෙක ම ස්පර්ශ කරමින් R පෙදෙසෙහි පිහිටන අරය $\sqrt{5}$ ක් වූ S වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2 + y^2 - 14x + 8y + 60 = 0$ බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශ ජ්‍යාය සඳහා සුපුරුදු සූත්‍රය භාවිතයෙන්, A ලක්ෂ්‍යයේ සිට S වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය $x - y = 10$ බව පෙන්වන්න.

A ලක්ෂ්‍යය ද l_1 හා l_2 සමඟ S හි ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය ද ඔස්සේ යන වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

17. (*a*) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $f(x) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan^2 x}$, යැයි ගනිමු. $f(x)$ යන්න $A\cos(2x + \alpha) + B$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $A\ (>0)$, B හා $\alpha\ \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

ඒ නයින්, $f(x) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$ යන සමීකරණය විසඳන්න.

$f(x)$ සඳහා දෙන ලද මුල් ප්‍රකාශනය යොදා ගනිමින් $f(x) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$ යන්න $2\tan^2 x + 4k\tan x - k^2 = 0$ ආකාරයට ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $k = 2 - \sqrt{2}$ වේ.

$\tan\frac{\pi}{24} = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

තව ද $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $y = 2f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කරන්න.

ABC යනු ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන් $a:b:c = 1:\lambda:\mu$ බව දී ඇත; මෙහි λ හා μ යනු නියත වේ.

$\mu^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4\lambda \sin^3 C$ බව පෙන්වන්න.

*** ***

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය - 2014 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)

General Certificate of Education (Adv. Level) Examination – August 2014 (New Syllabus)

සංයුක්ත ගණිතය II / පැය තුනයි

Combined Mathematics II / Three hours

උපදෙස් :

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
- **A කොටස** (ප්‍රශ්න 01 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
- **A කොටස:**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
- **B කොටස:**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි පිළිතුරු පත්‍රය, B කොටසෙහි පිළිතුරු පත්‍රයට** උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාගශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.
- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි g මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.

A කොටස

01. තිරස් බිමක් මත වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට u වේගයෙන් තිරස සමඟ $\frac{\pi}{4}$ කෝණයක් සාදන දිශාවකින්, උස a වූ ද O සිට $2a$ තිරස් දුරකින් වූ ද සිරස් තාප්පයක් දෙසට අංශුවක් ගුරුත්වය යටතේ ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ.

$u > 2\sqrt{ga}$ නම්, අංශුව තාප්පයට ඉහළින් යන බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

02. ස්කන්ධය M kg වූ වාහනයක්, සැහැල්ලු අවිතන්‍ය කේබලයක් මගින් එම ස්කන්ධය ම සහිත ට්‍රේලරයක් සෘජු තිරස් පාරක් දිගේ ඇදගෙන යයි. වාහනයේ චලිතයට හා ට්‍රේලරයේ චලිතයට ප්‍රතිරෝධ පිළිවෙළින් නිව්ටන R හා $2R$ වේ. වාහනයේ එන්ජිම P kW ජවයකින් ක්‍රියා කරමින් වාහනය V m s^{-1} වේගයෙන් චලනය වෙමින් තිබෙන මොහොතේ දී කේබලයේ ආතතිය නිව්ටන $\frac{1}{2}\left(R + \frac{1000P}{V}\right)$ බව පෙන්වන්න.

....

....

....

....

....

03. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත, u වේගයෙන් සිරස් බිත්තියක් දෙසට, බිත්තියට ලම්බ සරල රේඛාවක චලනය වේ. බිත්තිය සමඟ ගැටීමට පෙර P අංශුව, එහි පෙතෙහි නිශ්චලව ඇති එම ස්කන්ධය ම සහිත තවත් Q අංශුවක් සමඟ සරල ලෙස ගැටෙන අතර, Q අංශුව ඉන්පසුව බිත්තියේ ගැටී පොලා ගනී. ගැටුම් දෙක ම සඳහා ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e $(0 < e < 1)$ වේ. Q අංශුව මත බිත්තියෙන් ඇති කරන ආවේගය $\frac{1}{2}(1+e)^2\, mu$ බව පෙන්වන්න.

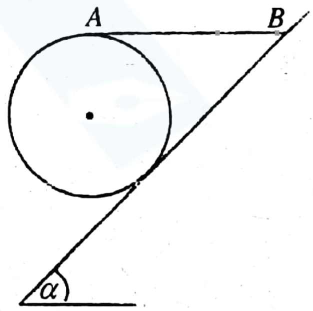
04. ස්වාභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $4mg$ වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක කෙළවරක් අවල O ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගසා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ අංශුවකට සම්බන්ධ කර ඇත. O හි නිශ්චලතාවයේ සිට අංශුව ගුරුත්වය යටතේ මුදා හරිනු ලැබේ. ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්, පසුව සිදු වන චලිතයේ දී තන්තුවේ උපරිම දිග සොයන්න.

05. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ හා $3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ යනු O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් පිළිවෙළින් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික යැයි ගනිමු. C යනු $OABC$ සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු.

$\overrightarrow{OC} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ බව පෙන්වන්න.

$A\hat{O}C = \theta$ යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ සැලකීමෙන් $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ බව පෙන්වන්න.

06. බර W වූ ඒකාකාර ඝන ගෝලයක් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි තිරසට α කෝණයකින් ආනත වූ රළු තලයක් මත නිශ්චලව ඇත්තේ, ගෝලයේ උච්චතම ලක්ෂ්‍යය වූ A ට හා ආනත තලයේ B ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කරනු ලැබූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක ආධාරයෙනි. AB තන්තුව තිරස් ව පවතින විට ගෝලය සීමාකාරී සමතුලිතතාවේ තිබේ. ඝර්ෂණ කෝණය $\dfrac{\alpha}{2}$ බව පෙන්වා, තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.



07. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්

$P(A \cup B) \cap (A' \cup B') = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$ බව පෙන්වන්න.

08. මල්ලක, ප්‍රමාණයෙන් සමාන වූ රතු බෝල 6 ක් ද සුදු බෝල 4 ක් ද අඩංගු වේ. බෝල තුනක්, වරකට එක බැගින්, ප්‍රතිස්ථාපනයකින් තොරව, සසම්භාවී ලෙස මල්ලෙන් ඉවතට ගනු ලැබේ. දෙවැනි බෝලය සුදු එකක් බව දී ඇති විට, තුන්වැනි බෝලය රතු එකක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

09. නිරීක්ෂණ පහක මධ්‍යන්‍යය හා මධ්‍යස්ථය පිළිවෙළින් 7 හා 9 වේ. නිරීක්ෂණවල එක ම මාතය 11 වේ. නිරීක්ෂණ සියල්ල ධන නිඛිල වේ යැයි උපකල්පනය කරමින්, වැඩිතම නිරීක්ෂණය හා අඩුතම නිරීක්ෂණය සොයන්න.

10. පහත දක්වෙන නිරීක්ෂණ 100 ක සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය 31.8 වේ.

5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55
16	x	30	y	20

x හා y හි අගයන් සොයා, ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය නිමානය කරන්න.

*** ***

B කොටස

11\. (a) තිරසට $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් ආනත අචල සුමට තලයක වූ O ලක්ෂ්‍යයක P හා Q අංශු දෙකක් තබා ඇත. O හරහා වූ උපරිම බෑවුම් රේඛාව දිගේ උඩු අතට P අංශුවට u ප්‍රවේගයක් දෙනු ලබන අතර, එම මොහොතේ ම, Q අංශුව නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. අංශු දෙක ආනත තලය හැර නොයන බව උපකල්පනය කරමින්, P හා Q හි චලිත සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් එක ම රූපයක අඳින්න.

මෙම ප්‍රස්තාර භාවිතයෙන්, P අංශුව O ලක්ෂ්‍යයට නැවත පැමිණෙන මොහොතේ දී Q අංශුව O සිට $\dfrac{2u^2}{g\sin\alpha}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

(b) ඍජු සමාන්තර ඉවුරු සහිත ගඟක් $\mathbf{u}$ ඒකාකාර ප්‍රවේගයකින් ගලා බසී. A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙක එකක් එක් ඉවුරක ද අනෙක අනෙක් ඉවුරේ ද පිහිටා ඇත්තේ $\overrightarrow{AB}$ යන්න $\mathbf{u}$ සමඟ α සුළු කෝණයක් සාදන පරිදි ය. පිරිමි ළමයෙක් A වලින් ආරම්භ කර, ජලයට සාපේක්ෂ ව අචල දිශාවකට විශාලත්වය $2u$ වූ නියත ප්‍රවේගයකින් පිහිනමින්, B වෙත ළඟා වෙයි; මෙහි $u=|\mathbf{u}|$ වේ. ඔහු ඉන්පසු, B වලින් ආරම්භ කර A වෙත ආපසු පැමිණෙන පරිදි ජලයට සාපේක්ෂ ව අචල දිශාවකට එම $2u$ විශාලත්වය ම සහිත ප්‍රවේගයකින් පිහිනයි. A සිට B දක්වා චලිතය සඳහා ද B සිට A දක්වා චලිතය සඳහා ද ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණවල දළ සටහන් එක ම රූපයක අඳින්න.

ඒ නයින්, A සිට B දක්වා චලිතය සඳහා ද B සිට A දක්වා චලිතය සඳහා ද ජලයට සාපේක්ෂ ව ඔහුගේ ප්‍රවේගය පිළිවෙළින් $\overrightarrow{AB}$ හා $\overrightarrow{BA}$ සමඟ එක ම θ කෝණයක් සෑදිය යුතු බව පෙන්වන්න;

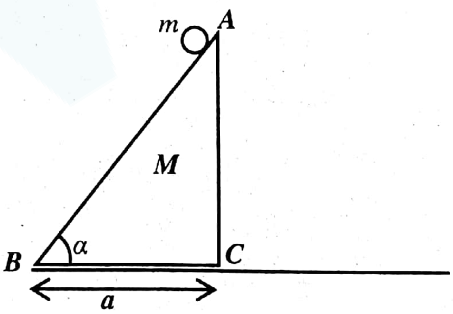
මෙහි $\sin\theta=\dfrac{1}{2}\sin\alpha$ වේ.

B සිට A දක්වා පිහිනීමට ගත් කාලය, A සිට B දක්වා පිහිනීමට ගත් කාලය මෙන් $k\ (1<k<3)$ ගුණයක් නම්,

$\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k+1}{k-1}\right)\cos\alpha$ බව පෙන්වන්න.

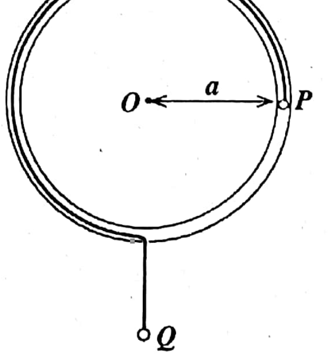
$\sin\theta$ හා $\cos\theta$ සඳහා වූ ඉහත ප්‍රකාශන භාවිතයෙන් $\cos\alpha=\dfrac{(k-1)}{2}\sqrt{\dfrac{3}{k}}$ බව ද පෙන්වන්න.

12\. (a) දී ඇති රූප සටහනෙහි ABC ත්‍රිකෝණය, ස්කන්ධය M වූ ඒකාකාර සුමට කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා යන සිරස් හරස්කඩක් නිරූපණය කරයි. AB රේඛාව එය අයත් මුහුණතෙහි උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් වන අතර $A\hat{B}C=\alpha$, $A\hat{C}B=\dfrac{\pi}{2}$ හා $BC=a$ වේ. සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත BC අයත් මුහුණත ඇතිව කුඤ්ඤය තබා ඇත. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් AB රේඛාව මත A ලක්ෂ්‍යයෙහි සීරුවෙන් තබා නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. අංශුව කුඤ්ඤය හැර යන තෙක්, කුඤ්ඤයේ ත්වරණය $\dfrac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$ බව පෙන්වා, කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂ ව අංශුවේ ත්වරණය සොයන්න.



දැන්, $a=\dfrac{\pi}{4}$ හා $M=\dfrac{5m}{2}$ යැයි සිතමු. අංශුව කුඤ්ඤය හැර යන මොහොතේ දී කුඤ්ඤයේ වේගය $\sqrt{\dfrac{2ag}{21}}$ බව පෙන්වන්න.

(b) අරය a සහ කේන්ද්‍රය O වූ සිහින් සුමට වෘත්තාකාර නළයක් සිරස් තලයක සවිකර ඇත. දිග $\dfrac{3\pi a}{2}$ ට වඩා වැඩි සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක්, OP තිරස් ව ඇතිව නළය තුළ අල්වා තැබූ, ස්කන්ධය m වන P අංශුවකට ඈඳා ඇත. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි තන්තුව නළය තුළින් ද නළයේ පහළ ම ලක්ෂ්‍යයේ ඇති කුඩා සුමට සිදුරක් තුළින් ද යමින් අනෙක් කෙළවරෙහි ස්කන්ධය $2m$ වූ Q අංශුවක් දරා සිටියි. තන්තුව තදව ඇතිව ඉහත පිහිටීමෙන් P අංශුව නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්



$\theta \left(0 < \theta < \dfrac{3\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් OP හැරී ඇති විට P අංශුවේ වේගය υ යන්න $\upsilon^2 = \dfrac{2ga}{3}(2\theta - \sin\theta)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වා, P අංශුව මත නළයෙන් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

13. ස්වාභාවික දිග $4a$ හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $8mg$ වූ සිහිල් සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ දුන්නක්, එහි පහළ කෙළවර O අචල වන සේ සිරස් ව සිටුවා ඇත. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් එහි ඉහළ කෙළවරට ඈඳා තිබේ. P අංශුව O ට සිරස් ව ඉහළින් වූ A ලක්ෂ්‍යයක සමතුලිත ව ඇත. $OA = \dfrac{7a}{2}$ බව පෙන්වන්න.
දැන්, එම m ස්කන්ධය ම සහිත තවත් Q අංශුවක් P.ට සීරුවෙන් ඈඳනු ලබන අතර සංයුක්ත අංශුව A හි නිශ්චලතාවයේ සිට චලිතය ආරම්භ කරයි. සංයුක්ත අංශුවේ චලිත සමීකරණය $\ddot{x} = -\dfrac{g}{a}x$ බව පෙන්වන්න;
මෙහි x යනු $OB = 3a$ වන පරිදි O ට සිරස් ව ඉහළින් පිහිටි B ලක්ෂ්‍යයේ සිට සංයුක්ත අංශුවේ විස්ථාපනය වේ.
සංයුක්ත අංශුව ළඟා වන පහළ ම ලක්ෂ්‍යය C යැයි ගනිමු. OC දිග ද A සිට C දක්වා චලනය වීමට සංයුක්ත අංශුව ගන්නා කාලය ද සොයන්න.

සංයුක්ත අංශුව C හි ඇති මොහොතේ දී Q අංශුව සීරුවෙන් ඉවත් කරනු ලැබේ. පසුව සිදුවන P අංශුවේ චලිතය සඳහා චලිත සමීකරණය $\ddot{y} = -\dfrac{2g}{a}y$ බව පෙන්වන්න; මෙහි y යනු A ලක්ෂ්‍යයේ සිට P අංශුවේ විස්ථාපනය වේ.
මෙම සමීකරණයට $y = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ ආකාරයේ විසඳුමක් උපකල්පනය කරමින් α, β හා ω නියතවල අගයන් සොයන්න.

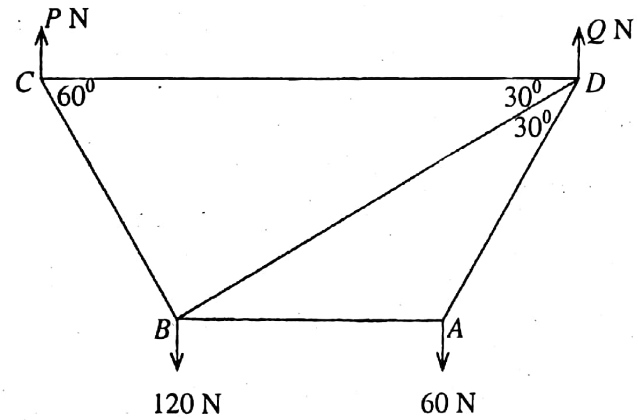
ඒ නයින්, C සිට D දක්වා චලනය වීමට P අංශුව ගන්නා කාලය $\dfrac{\pi}{3}\sqrt{\dfrac{2a}{g}}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි D යනු $OD = 4a$ වන පරිදි O ට සිරස් ව ඉහළින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යය වේ. D වෙත ළඟා වන විට P අංශුවේ වේගය ද සොයන්න.

14. (a) $ABCD$ යනු $\overrightarrow{DC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ වන පරිදි වූ ත්‍රපීසියමක් යැයි ගනිමු. තව ද $\overrightarrow{AB} = \mathbf{p}$ හා $\overrightarrow{AD} = \mathbf{q}$ යැයි ද ගනිමු. $\overrightarrow{BE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ වන පරිදි BC මත E ලක්ෂ්‍යය පිහිටයි. AE හා BD වල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වන F මගින් $\overrightarrow{BF} = \lambda\overrightarrow{BD}$ යන්න සපුරාලයි; මෙහි λ $(0 < \lambda < 1)$ නියතයකි. $\overrightarrow{AE} = \dfrac{5}{6}\mathbf{p} + \dfrac{1}{3}\mathbf{q}$ බව හා $\overrightarrow{AF} = (1-\lambda)\mathbf{p} + \lambda\mathbf{q}$ බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින්, λ හි අගය සොයන්න.

(b) $ABCD$ යනු පැත්තක දිග මීටර a වූ සමචතුරස්‍රයක් යැයි ගනිමු. විශාලත්ව නිව්ටන 4, $6\sqrt{2}$, 8, 10, X හා Y වූ බල පිළිවෙළින් AD, CD, AC, BD, AB හා CB දිගේ, අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරයි. පද්ධතිය $\overrightarrow{OE}$ දිගේ ක්‍රියාකරන තනි සම්ප්‍රයුක්තයකට ඌනනය වේ; මෙහි O හා E යනු පිළිවෙළින් AC හා CD වල මධ්‍ය 'ලක්ෂ්‍ය' වේ. X හා Y හි අගයන් සොයා, සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය නිව්ටන $4K$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $K = 2 - \sqrt{2}$ වේ.
F යනු $OAFD$ සමචතුරස්‍රයක් වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. ඉහත බල පද්ධතියට තුල්‍ය වන, එකක් $\overrightarrow{AD}$ දිගේ ද අනෙක F ලක්ෂ්‍යය හරහා ද වන, **බල දෙක** සොයන්න.
බල පිහිටන තලයේ $ABCD$ අතට ක්‍රියාකරන ඝූර්ණය නිව්ටන මීටර $6Ka$ වන බල යුග්මයක් මුල් පද්ධතියට එකතු කරනු ලැබේ. නව පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තයෙහි ක්‍රියා රේඛාව සොයන්න.

15. (a) ඒකක දිගක බර w බැගින් වූ ද $AB = AD = l\sqrt{3}$ හා $BC = DC = l$ වූ ද AB, BC, CD හා DA ඒකාකාර දඬු හතරක් $ABCD$ රාමු සැකිල්ලක් සාදන පරිදි, ඒවායේ කෙළවරවලින් සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. දිග $2l$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් A හා C සන්ධි සම්බන්ධ කර ඇත. රාමු සැකිල්ල A සන්ධියෙන් එල්ලනු ලැබ සිරස් තලයක සමතුලිත ව එල්ලෙයි. තන්තුවේ ආතතිය $\dfrac{wl}{4}\left(5 + \sqrt{3}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(*b*)



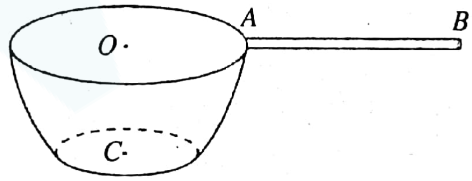
අන්තවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කරන ලද AB, AD, BC, BD හා CD සැහැල්ලු දඬු පහක රාමු සැකිල්ලක් දී ඇති රූපයෙන් නිරූපණය වේ. A හා B හි දී පිළිවෙළින් 60 N හා 120 N භාර දරන අතර AB හා CD දඬු තිරස් ව ඇතිව රාමු සැකිල්ල සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ පිළිවෙළින් C හා D හි දී යෙදූ P N හා Q N සිරස් බල දෙකක් මගිනි. බෝ අංකනය යෙදීමෙන්, ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින්, දඬු පහේ ම ප්‍රත්‍යාබල, ඒවා ආතති හෝ තෙරපුම් වශයෙන් ප්‍රකාශ කරමින්, සොයන්න.

16. අරය a හා පෘෂ්ඨික ඝනත්වය σ වූ ඒකාකාර කුහර අර්ධගෝලීය කබොලක් එහි වෘත්තාකාර ගැටියෙහි තලයට සමාන්තර වූ ද O කේන්ද්‍රයේ සිට $a\cos\alpha$ දුරකින් වූ ද තලයකින් කැපූ විට ලැබෙන ඡින්නකයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටන බව අනුකලනයෙන් පෙන්වන්න; මෙහි C යනු කුඩා වෘත්තාකාර ගැටියෙහි කේන්ද්‍රය වේ.

එම σ පෘෂ්ඨීක ඝනත්වය ම සහිත අරය $a\sin\alpha$ වූ තුනී ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියක දාරය ඉහත ඡින්නකයේ කුඩා වෘත්තාකාර ගැටියට දෘඪ ලෙස සවිකර භාජනයක් සාදා ඇත. මෙම භාජනයෙහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, OC මත O සිට $\left(\dfrac{1+\cos\alpha-\cos^2\alpha}{1+2\cos\alpha-\cos^2\alpha}\right)$ $a\cos\alpha$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ යැයි ද භාජනයෙහි බර W යැයි ද ගනිමු. දිග b හා බර $\dfrac{W}{4}$ වූ සිහින් ඒකාකාර AB දණ්ඩක් මිටක් ලෙස, O, A හා B ලක්ෂ්‍ය ඒක රේඛීය වන පරිදි, රූපයේ දක්වෙන අයුරින් භාජනයේ ගැටියට දෘඪ ලෙස සවිකර සාස්පානක් සාදා ඇත. සාස්පානෙහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න.



සාස්පාන, මිටෙහි B කෙළවරෙන් නිදහසේ එල්ලා ඇති අතර, මිට යටි අත් සිරස සමඟ $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{7}\right)$ කෝණයක් සාදමින් සමතුලිතතාවයේ එල්ලෙයි. $3b=4a$ බව පෙන්වන්න.

17. (*a*) A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශය $P(B)>0$ වන සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. B දී ඇතිවිට A හි අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව වූ $P(A|B)$ අර්ථ දක්වන්න.

$P(A)=P(B)\,P(A|B)+P(B')\,P(A|B')$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $0<P(B)<1$ වන අතර B' මගින් B හි අනුපූරක සිද්ධිය දක්වේ.

විශාල සමාගමක සේවා නියුක්තිකයන්ගෙන් 80% ක් පිරිමි වන අතර 20% ක් ගැහැණු වේ. සේවා නියුක්තිකයන්ගෙන් 57% කගේ ඉහළ ම අධ්‍යාපන සුදුසුකම අ.පො.ස. (සා.පෙළ) වන අතර 32% කගේ එම සුදුසුකම අ.පො.ස. (උ.පෙළ) වේ. අනික් සියලු ම සේවා නියුක්තිකයෝ උපාධිධාරීහු වෙති. මෙම සමාගමේ ගැහැණු සේවා නියුක්තිකයන්ගෙන් 40% කගේ ඉහළ ම අධ්‍යාපන සුදුසුකම අ.පො.ස. (සා.පෙළ) වන අතර 45% කගේ එම සුදුසුකම අ.පො.ස. (උ.පෙළ) වේ. සමාගමේ සේවා නියුක්තිකයන්ගෙන් එක් අයකු සසම්භාවී ලෙස තෝරා ගනු ලැබේ. එසේ තෝරා ගනු ලැබූ සේවා නියුක්තිකයා,

(i) ඉහළ ම අධ්‍යාපන සුදුසුකම අ.පො.ස. (සා.පෙළ) වූ ගැහැණු කෙනෙකු වීම,

(ii) ඉහළ ම අධ්‍යාපන සුදුසුකම අ.පො.ස. (සා.පෙළ) වූ පිරිමි කෙනකු වීම,

(iii) පිරිමි කෙනකු බව දී ඇති විට, එම සේවා නියුක්තිකයා උපාධිධාරියකු වීම,

(iv) උපාධිධාරියකු නොවන බව දී ඇති විට එම සේවා නියුක්තිකයා ගැහැණු කෙනෙකු වීම,

යන සිද්ධීන් එක එකෙහි සම්භාවිතාව සොයන්න.

(b) $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ යන දත්ත කුලකයෙහි මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව පිළිවෙළින් $\bar{x}$ හා σ_x^2 යැයි ගනිමු.

(i) $\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$ බව පෙන්වන්න.

(ii) α හා β තාත්ත්වික නියත යැයි ගනිමු. $\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta)^2 = n\alpha^2 \sigma_x^2 + n(\alpha\bar{x} + \beta)^2$ බව පෙන්වන්න.

$i = 1, 2, \ldots, n$ සඳහා $y_i = \alpha x_i + \beta$ යැයි ගනිමු. $\bar{y} = \alpha\bar{x} + \beta$ බව පෙන්වා, ඉහත (i) හා (ii) භාවිතයෙන් $\sigma_y^2 = \alpha^2\sigma_x^2$ බව **අපෝහනය** කරන්න; මෙහි $\bar{y}$ හා σ_y^2 යනු පිළිවෙළින් $\{y_1, y_2, \ldots, c\, y_n\}$ කුලකයෙහි මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව වේ.

එක්තරා විභාගයක දී අපේක්ෂකයින් ලබා ගත් ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය 45 ක් වේ. මෙම ලකුණු, මධ්‍යන්‍යය 50 ක් හා සම්මත අපගමනය 15 ක් වන පරිදි ඒකජ ලෙස පරිමාණගත කළ යුතුව ඇත. පරිමාණගත ලකුණ වන 68 යන්නට අනුරූප මුල් ලකුණ 60 බව දී ඇත. මුල් ලකුණුවල සම්මත අපගමනය ගණනය කරන්න.

අපේක්ෂකයකු ලබා ගත් මුල් ලකුණ වූ m, ඉහත පරිමාණගත කිරීමෙන් අඩු නොවන බව තවදුරටත් දී ඇත. $m \geq 20$ බව පෙන්වන්න.

*** ***

A - කොටස

01. $n = 1$ විට, $L.H.S = \sum_{r=1}^{1} r\ (3r-1) = 1\,(3.1-1) = 2$

$R.H.S = 1^2\,(1+1) = 2$

එනයින් $n = 1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.
ඕනෑම $n = p$ වන විට ප්‍රතිඵලය සත්‍යයයි උපකල්පනය කරමු.
මෙහි $p \in \mathbb{Z}^+$ වේ.

එවිට, $\sum_{r=1}^{p} r\,(3r-1) = p^2\,(P+1)$ වේ.

දැන්, $\sum_{r=1}^{p+1} r\,(3r-1) = \sum_{r=1}^{p} r\,(3r-1) + (p+1)\ [3(P+1)-1]$

$= P^2\,(P+1) + 3\,(P+1)^2 - (P+1)$ (ඉහත උපකල්පනය)

$= (P+1)\left[P^2 + 3\,(P+1) - 1\right]$

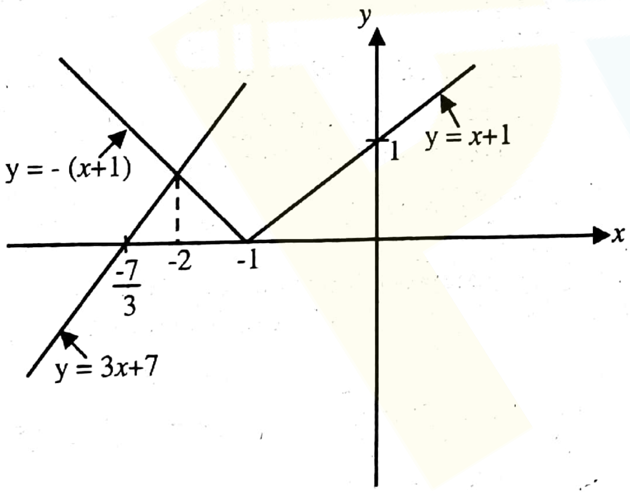
$= (P+1)\ (P^2+3P+2)$

$= (P+1)^2\,(P+2)$

$= (P+1)^2\ \left[\overline{P+1}+1\right]$

එනයින් $n = p$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ නම් $n = p+1$ විට ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ම ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

02.



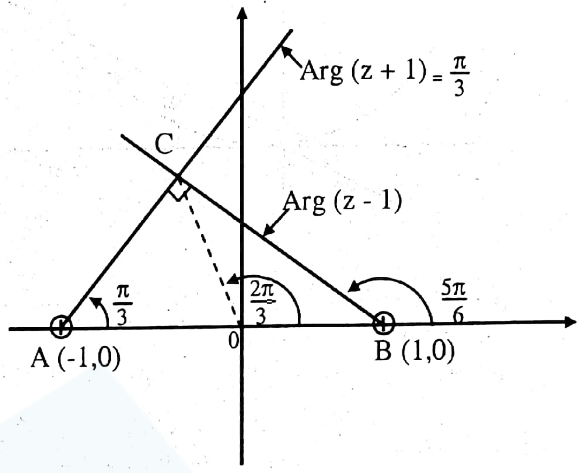
ප්‍රස්තාර අනුව $x < -1$ වූ එක් ලක්ෂයක දී පමණක් $y = |x+1|$ හා $y = 3x+7$ ඡේදනය වේ.
එහිදී, $-(x+1) = 3x + 7$ විය යුතු ය.
එබැවින් දී ඇති අසමානතාව සපුරාලන x හි අගය කුලකය $\{x \in \mathbb{R}\ ,\ x < -2\}$ වේ.

වෙනත් ක්‍රමයක්

(i) අවස්ථාව, $x < -1$ විට $|x+1| > 3x+7$
$\Leftrightarrow -(x+1) > 3x+7 \Leftrightarrow -4x > 8 \Leftrightarrow x < -2$
එබැවින් $x < -2$ විසඳුම් කුලකයට අයත් වේ.

(ii) අවස්ථාව $x \geq -1$ විට $|x+1| > 3x+7 \Leftrightarrow x+1 > 3x+7$
$\Leftrightarrow -2x > 6 \Leftrightarrow x < -3$
මෙය විසංවාදයකි. එබැවින් $x \geq -1$ වූ විසඳුම් කිසිවක් අසමානතාවයට නැත. එබැවින් අසමානතාව සපුරාලන විසඳුම් කුලකය $\{x \in \mathbb{R},\ x < -2\}$ වේ.

03.



අවශ්‍ය ලක්ෂ්‍යය C
යයි ද එහි සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව Z_c යයි ද ගනිමු.
$A\hat{C}B = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ බැවින් A, C, B ලක්ෂ්‍ය අරය ඒකක 1 ක් වූ O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටයි.
එවිට $B\hat{O}C = \frac{2\pi}{3}$
එනිසා $Z_c = 1\,(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$
$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ වේ.

04. $(2 + \frac{3}{x})\,(1+x)^n \equiv (2 + \frac{3}{x})\sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\,x^r$
ප්‍රසාරණයේ x^{n-2} හි සංගුණකය 120 බව දී ඇති නිසා
$2\,{}^nC_{n-2} + 3\,{}^nC_{n-1} = 120$
එනම් $2.\frac{n!}{(n-2)!2!} + 3.\frac{n!}{(n-1)!\ 1!} = 120$

$\Leftrightarrow \frac{\cancel{2}(n)\,(n-1)}{\cancel{2}} + 3n = 120$
$\Leftrightarrow n^2 + 2n - 120 = 0$
$\Leftrightarrow (n+12)\,(n-10) = 0$
$\Leftrightarrow n = 10 \quad (\because n \in \mathbb{Z}^+)$

05. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x}{x\,(1-\sqrt{1+x})} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x\ (1+\sqrt{1+x})}{x\,(1-\sqrt{1+x})\,(1+\sqrt{1+x})}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}\cdot\frac{(1+\sqrt{1+x})}{(-x^2)}$

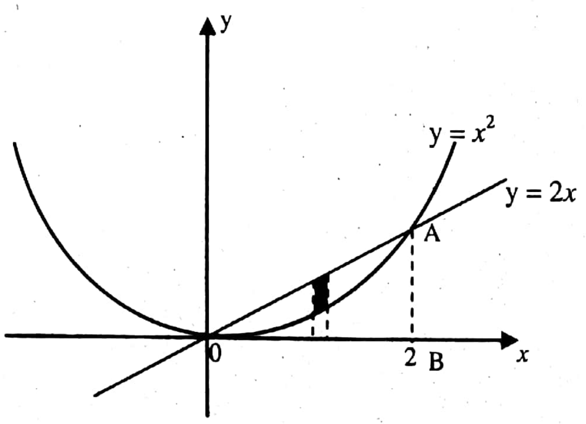
$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\left(\frac{-4}{\cos^2 2x}\right)(1+\sqrt{1+x})$

$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 \lim_{x\to 0}\left(\frac{-4}{\cos^2 2x}\right)\cdot \lim_{x\to 0}(1+\sqrt{1+x})$

$= 1.(-4).2$

$= \underline{-8}$

06.



ඡේදන ලක්ෂවල දී $x^2 = 2x$ විය යුතු ය. එවිට $x = 0$ හෝ $x = 2$ හෝ වේ.

අවශ්‍ය වර්ගඵලය $= \int_0^2 (2x - x^2)\,dx$

$= \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3}$

$= \frac{4}{3}$ වර්ග ඒකක

07. $x = e^t + e^{-t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t + e^{-t}$

$y = e^t - e^{-t} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = e^t + e^{-t}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}$

C වක්‍රය මත $t = \ln 2$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යය A නම්,

$A \equiv (2 + \frac{1}{2}, 2 - \frac{1}{2}) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ වේ.

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}$

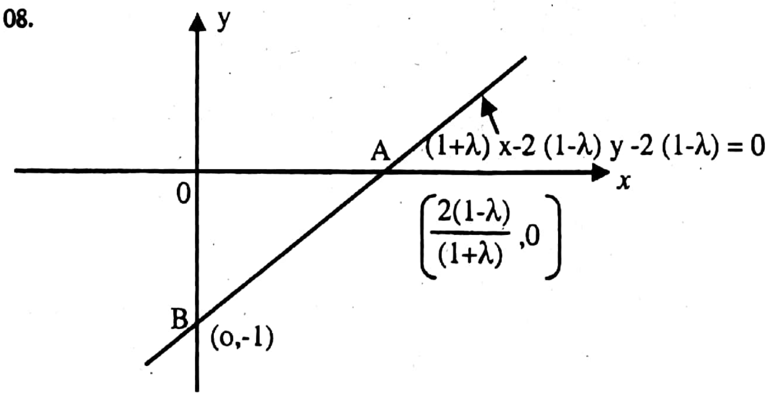
අවශ්‍ය ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

$y - \frac{3}{2} = \frac{5}{3}\left(x - \frac{5}{2}\right)$ වේ.

එනම්, $3y - 5x + 8 = 0$

$5x - 3y - 8 = 0$

08.



දී ඇති රේඛාවෙන් x - අක්ෂය A හි දී ද y - අක්ෂය B හි දී ද ඡේදනය වේ නම් $A \equiv \left(\frac{2(1-\lambda)}{(1+\lambda)}, 0\right)$ හා $B \equiv (0,-1)$ වේ.

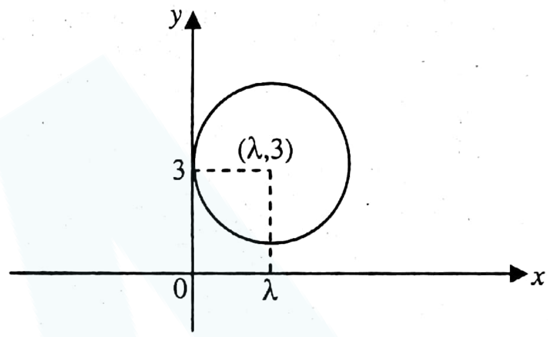
$\therefore$ Δ OAB හි වර්ගඵලය $= \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \left|\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right| = 4$

$\Leftrightarrow \left|\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right| = 4 \Leftrightarrow \frac{1-\lambda}{1+\lambda} = \pm 4$

$\Leftrightarrow 1 - \lambda = 4(1+\lambda)$ හෝ $1 - \lambda = -4(1+\lambda)$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{5}$ හෝ $\lambda = \frac{-5}{3}$

09.



අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය $(x - \lambda)^2 + (y - 3)^2 = \lambda^2$ ලෙස ලිවිය හැක.

එනම්, $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 6y + 9 = 0$ ලෙස වේ.

මෙම වෘත්තය $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$ වෘත්තය ප්‍රලම්බ ව ඡේදනය කරන බැවින්

$2(-\lambda)(-4) + 2(-3)(2) = 9 + (-5)$

$\Leftrightarrow 8\lambda - 12 = 4$

$\Leftrightarrow \lambda = 2$

එනයින් අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය

$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ වේ.

10. $\tan \propto = -1$ හා $\frac{3\pi}{2} < \propto < 2\pi \Rightarrow \propto = \frac{7\pi}{4}$ හා $\cos \propto = \frac{1}{\sqrt{2}}$

හා $\sin \propto = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ හා $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi \Rightarrow \cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\sqrt{1 - \frac{1}{5}}$

$= -\frac{2}{\sqrt{5}}$

දැන් $\cos(\propto + \beta) = \cos \propto \cos \beta - \sin \propto \sin \beta$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$= -\frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}}$

$= -\frac{1}{\sqrt{10}}$

11. (*a*) $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + ax - 1$

$(3x-1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බැවින්

සාධක ප්‍රමේය අනුව $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ වේ.

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{3}\right)^2 + a\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{9} + \frac{5}{9} + \frac{a}{3} - 1 = 0$

$\Rightarrow 6 + 3a - 9 = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{a = 1}}$

දැන් $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + x - 1$

$= (3x-1)(x^2 + 2x + 1)$

$= (3x-1)(x+1)^2$

මෙය $k = 1$ වූ $f(x) = (3x-1)(x+k)^2$ ආකාර වේ.

$3x - 1 = 3(x+1) - 4$ ලෙස ලිවිය හැක.

මෙය $b = 3$ හා $c = -4$ වූ $b(x+1)+c$ ආකාරයට

$3x - 1$ ප්‍රකාශය ලිවිය හැකි ආකාරයයි.

$\therefore f(x) = [3(x+1) - 4](x+1)^2$

$= 3(x+1)^3 - 4(x+1)^2$

$\therefore f(x)$ යන්න $(x+1)^3$ බෙදූ විට ශේෂය $= \underline{\underline{-4(x+1)^2}}$

(*b*) ශුන්‍යය, $ax^2 + bx + c = o, a,b,c \in \mathbb{R}$ හා $ac \neq 0$ හි මූලයන් ලෙස ගනිමු.

එවිට, $x = 0$ ආදේශයෙන් $c = 0$ වේ. එවිට, $ac = 0$ විය යුතු ය. මෙය විසංවාදයකි.

එබැවින් ශුන්‍යය, $ax^2+bx+c = 0$, $ac \neq 0$ හි මූලයන් නොවේ.

$\propto, \beta$ ඉහත සමීකරණයේ මූලනම්

$\propto \neq 0$ හා $\beta \neq 0$

තව ද $\propto + \beta = -\frac{b}{a}$, $\propto\beta = \frac{c}{a}$

දැන් $\lambda = \frac{\propto}{\beta}$ බැවින්

$$\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda} = \frac{\left(1+\frac{\propto}{\beta}\right)^2}{\frac{\propto}{\beta}} = \frac{(\propto+\beta)^2}{\propto\beta} = \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c}{a}} = \frac{b^2}{ac}$$

$\therefore ac(\lambda+1)^2 = \underline{b^2\lambda}$

ඉහත පරිදි ම $\gamma \neq 0$ හා $\delta \neq 0$, ද

$pr(\mu+1)^2 = q^2\mu$ වේ.

$\therefore \frac{ac(\lambda+1)^2}{pr(\mu+1)^2} = \frac{b^2\lambda}{q^2\mu}$

$\Rightarrow acq^2\mu(\lambda+1)^2 = prb^2\lambda(\mu+1)^2$

$\therefore acq^2 = prb^2 \Leftrightarrow \mu(\lambda+1)^2 = \lambda(\mu+1)^2$

$\Leftrightarrow \lambda^2\mu + 2\lambda\mu + \mu = \lambda\mu^2 + 2\lambda\mu + \lambda$

$\Leftrightarrow \lambda\mu(\lambda-\mu) - (\lambda-\mu) = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda-\mu)(\lambda\mu-1) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = \mu$ හෝ $\lambda = \frac{1}{\mu}$

සමීකරණ දෙකේ මූල එක ම අනුපාතයට වන්නේ,

$\Leftrightarrow \lambda = \mu$ හෝ $\lambda = \frac{1}{\mu}$ වේ.

$\therefore acq^2 = prb^2$ විය යුතුයි.

$kx^2 - 3x + 2 = 0$ හා $8x^2 + 6kx + 1 = 0$

සමීකරණවල මූල එක ම අනුපාතයට වන විට

$2k(6k)^2 = 8 \times 9$

$\Rightarrow k^3 = 1$

$\Rightarrow k = 1 \quad \because \underline{\underline{k \in \mathbb{R}}}$

12. (*a*) (i) අවශ්‍ය ක්‍රම ගණන $= {}^6C_2 \times {}^6C_2 \times {}^6C_2 = \left[{}^6C_2\right]^3$

$= \left(\frac{6!}{2!\,4!}\right)^3 = \left(\frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!}\right)^3 = 15^3$

$= \underline{3\,375}$

[එක් එක් ක්‍රීඩාවට ක්‍රීඩකයන් 6 දෙනෙකු බැගින් සිටිනා බැවිනි.]

(ii) මෙම තේරීම කළහැකි ක්‍රම ගණන $= {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2$

$= \left(\frac{6!}{2!\,4!}\right) \times \left(\frac{4!}{2!\,2!}\right) \times 1$

$= 15 \times 6 = \underline{\underline{90}}$

[සටහන : පළමු ව එක් ක්‍රීඩාවකින් දෙදෙනෙකු තෝරාගත් විට ඔවුන් පාසල් දෙකක් නියෝජනය කරයි. එම පාසල් දෙක ඉවත් කර තවත් ක්‍රීඩාවකින් දෙදෙනෙක් තෝරා ගත් විට එම පාසල් දෙක ද ඉවත් කර ඉතිරි පාසල් දෙක නියෝජනය කරන ඉතිරි ක්‍රීඩාව කරන දෙදෙනා තෝරාගත හැක.]

(iii) පාසල් දෙකකින් එක් එක් පාසලෙන් ක්‍රීඩකයන් දෙදෙනෙකු බැගින් තේරිය හැකි වෙනස් ක්‍රම ගණන $= {}^6C_2 \times {}^3C_2 \times {}^3C_2$ ඉතිරි පාසල් දෙකකින්

එක් එක් ක්‍රීඩකයකු බැගින් තේරිය හැකි වෙනස් ක්‍රම ගණන $= {}^4C_2 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1$

අවශ්‍ය තේරීම කළ හැකි ක්‍රම ගණන

$= {}^6C_2 \times {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times {}^4C_2 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1$

$= 15 \times 3 \times 3 \times 6 \times 3 \times 3$

$= 81 \times 90 = \underline{\underline{7\,290}}$

(*b*) $U_r = \frac{r^2 - r - 5}{r(r+1)(r+4)(r+5)}$

$r^2 - r - 5 = A(r^2-1)(r+5) - Br^2(r+4)$

$= (A-B)r^3 + (5A-4B)r^2 - Ar - 5A$

දෙපසෙහි අනුරූප සංගුණක සංසන්දනයෙන්

$r^3: \quad 0 = A - B$ ——— ①

$r^2: \quad 1 = 5A - 4B$ ——— ②

$r^1: \quad -1 = -A$ ——— ③

$r^0: \quad -5 = 5A$ ——— ④

① හා ③ න් $A = 1$ හා $B = 1$ ලැබේ.

A හා B හි මෙම අගයන් ② හා ④ සමීකරණ තෘප්ත කරයි.

එබැවින් දී ඇති අවශ්‍යතාව තෘප්ත කරන පරිදි A හා B නියත අගයක් පවතී. ඒවා A = 1 හා B = 1 වේ.

දැන් $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$$U_r = \frac{r^2 - r - 5}{r(r+1)(r+4)(r+5)} = \frac{(r^2-1)(r+5) - r^2(r+4)}{r(r+1)(r+4)(r+5)}$$

$$= \frac{r-1}{r(r+4)} - \frac{r}{(r+1)((r+5)}$$

$$= f(r) - f(r+1)$$

මෙහි $f(r) = \dfrac{r-1}{r(r+4)}$ වේ.

එවිට,

$r = 1: U_1 = f(1) - \cancel{f(2)}$

$r = 2: U_2 = \cancel{f(2)} - \cancel{f(3)}$

$r = 3: U_3 = \cancel{f(3)} - \cancel{f(4)}$

....

....

$r = n - 1;\ U_{n-1} = \cancel{f(n-1)} - \cancel{f(n)}$

$r = n:\ U_n = \cancel{f(n)} - f(n+1)$

$$\therefore \quad = \sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) - f(n+1)$$

$$= -\frac{n}{(n+1)(n+5)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n\to\infty} -\frac{n}{(n+1)(n+5)} = 0$$

එබැවින් $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී වේ.

$$\sum_{r=1}^{\infty} U_r = \underline{\underline{0}}$$

$$\sum_{r=3}^{\infty} 3U_r = 3\left\{\sum_{r=1}^{\infty} U_r - U_1 - U_2\right\}$$

$$= 3(0 - f(1) + f(3))$$

$$= 3\left[0 - 0 + \frac{2}{3\times 7}\right]$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{7}}}$$

13. (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ බැවින් $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ වේ.

එනයින් $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a^2+1 \end{pmatrix}$

දැන් $A^T A = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 2 = b$ හා $a^2 + 1 = 1$

$\Leftrightarrow b = 2$ හා $\underline{\underline{a = 0}}$

$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ හා $X = \begin{pmatrix} u \\ u+1 \end{pmatrix}$ බැවින්

$$CX = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ u+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12u+5 \\ 8u+3 \end{pmatrix}$$

$$BX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ u+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u+1 \\ 2u+1 \end{pmatrix}$$

එනයින්, $CX = \lambda BX \Leftrightarrow$ $12u + 5 = \lambda(3u+1)$ හා $8u + 3 = \lambda(2u+1)$

$$\therefore \frac{12u+5}{3u+1} = \frac{8u+3}{2u+1} \therefore 24u^2 + 22u + 5 = 24u^2 + 17u + 3$$

$$\Rightarrow 5u = -2 \Rightarrow u = -\frac{2}{5}$$

එවිට $-\dfrac{16}{5} + 3 = \lambda\left(\dfrac{-4}{5} + 1\right)$

$\therefore \lambda = -1$

දැන් $C - \lambda B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0$ බැවින්

$C - \lambda B$ ප්‍රතිලෝමය නොපවතී.

(b) (i) $|1 - Z|^2 = (1-Z)\overline{(1-Z)}$ $(\because |Z|^2 = Z\overline{Z})$

$= (1-Z)(1-\overline{Z})$ $(\because \overline{Z_1 - Z_2} = \overline{Z_1} - \overline{Z_2})$

$= 1 - (Z + \overline{Z}) + Z\overline{Z}$

$= 1 - 2\,\mathrm{Re}\,Z + |Z|^2$

(ii) $Z \neq 1$ සඳහා $\dfrac{1}{1-Z} = \dfrac{1}{(1-Z)} \times \dfrac{\overline{(1-Z)}}{\overline{(1-Z)}} = \dfrac{(1-\overline{Z})}{|1-Z|^2}$

$$\therefore \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-Z}\right) = \frac{1 - \mathrm{Re}\,\overline{Z}}{|1-Z|^2} = \frac{1 - \mathrm{Re}\,Z}{|1-Z|^2}$$

(සටහන : $x, y \in \mathbb{R}$ වූ $Z = x + iy$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සැලකීමෙන් ද මෙම ප්‍රතිඵල ලබාගත හැක.)

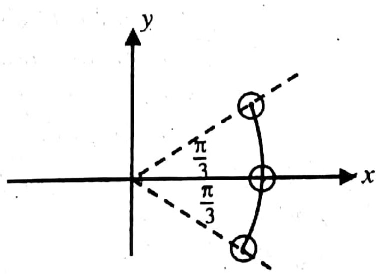
$Z \neq 1$ සඳහා $\mathrm{Re}\,\dfrac{1}{1-Z} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1 - \mathrm{Re}\,Z}{|1-Z|^2} = \dfrac{1}{2}$

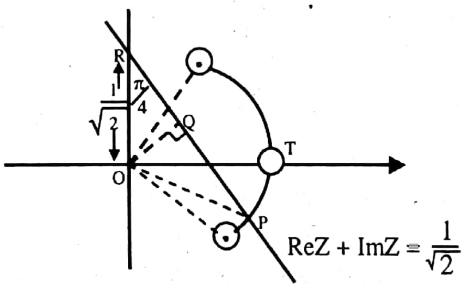
$\Leftrightarrow 2(1 - \mathrm{Re}\,Z) = |1-Z|^2$

$\Leftrightarrow 2(1 - \mathrm{Re}\,Z) = 1 - 2\,\mathrm{Re}\,Z + |Z|^2$

$\Leftrightarrow |Z|^2 = 1$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{|Z| = 1}}$





අදාළ ලක්ෂ්‍යය P හා එහි සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව Z නම්,

OP = 1 හා

$OQ = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Sin} \frac{\pi}{4}$

$= \frac{1}{2}$ නිසා

$Q\hat{O}P = \frac{\pi}{3}$

$T\hat{O}P = Q\hat{O}P - Q\hat{O}T$

$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

$\therefore Z = \cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12})$

$Z = \cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}$

14. (a) $x f(x) = \frac{8x}{(x+1)(x^2+3)}$; $x \neq -1$ ලෙස ගනිමු.

$x \neq -1$ සඳහා $f'(x)$

$$= \frac{(x+1)(x^2+3).8 - 8x\left[(x^2+3) + (x+1).2x\right]}{(x+1)^2(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{8x(x^2+3) + 8(x^2+3) - 8x(x^2+3) - 16x^2(x+1)}{(x+1)^2(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{8\left(3 - x^2 - 2x^3\right)}{(x+1)^2(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{8(1-x)(2x^2+3x+3)}{(x+1)^2(x^2+3)^2}$$

හැරුම් ලක්ෂ්‍යවල දී

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \because (2x^2+3x+3 \neq 0)$

සියලු x සඳහා $2x^2+3x+3 > 0$ බැවින්

$x \neq \pm 1$ සඳහා $\frac{(2x^2+3x+3)}{(x+1)^2(x^2+3)^2} > 0$ වේ.

එබැවින් $x \neq \pm 1$ සඳහා $f'(x)$ හි ලකුණ $(1-x)$ හි ලකුණම වේ.

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(+)	(+)	(-)
$f(x)$	වැඩි වේ.	වැඩි වේ.	අඩු වේ.

($x = -1$ and $x = 1$ marked above the column boundaries)

$x = -1$ විට $f'(x)$ අර්ථ නො දැක්වේ.

එනයින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයට ඇත්තේ එක ම එක හැරුම් ලක්ෂ්‍යයක් පමණි. එය සාපේක්ෂ උපරිමයකි. එය (1,1) ලක්ෂ්‍යය වේ.

$x = -1$ දී $f(x)$ අර්ථ නොදැක්වේ.

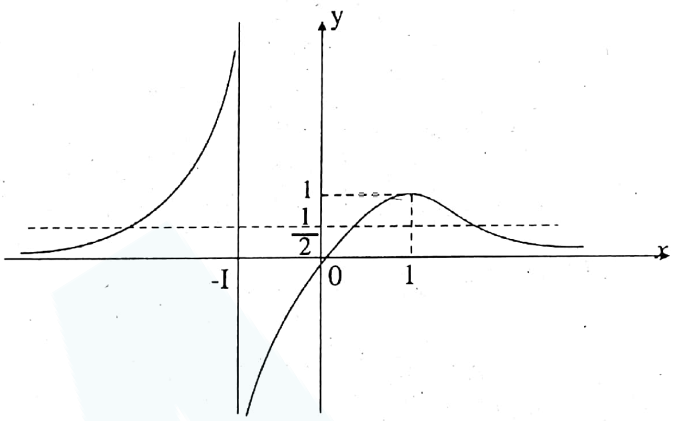
තව ද, $x = -1^-$ විට $f(x) \longrightarrow \infty$

$x = -1^+$ විට $f(x) \longrightarrow -\infty$

$\therefore x = -1$ විට y අක්ෂයට සමාන්තර ස්පර්ශෝන්මුඛයක් වේ.

$x \longrightarrow \pm\infty$ විට $f(x) \longrightarrow 0$

$y = 0$ තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛයක් වේ.

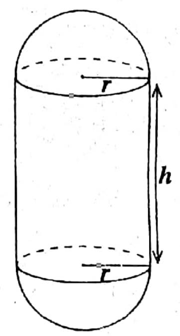


$(x+1)(x^2+3) = 16x \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{8x}{(x+1)(x^2+3)}$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}$

අවශ්‍ය විසඳුම් සංඛ්‍යාව වන්නේ $y = f(x)$ හා $y = \frac{1}{2}$ ප්‍රස්තාරවල ඡේදන ලක්ෂ්‍ය ගණන වේ. ප්‍රස්තාර සටහනට අනුව තාත්ත්වික ලක්ෂ 3 ක දී ඒවා ඡේදනය වන බැවින් දී ඇති සමීකරණයට තාත්ත්වික විසඳුම් තුනක් ඇත.

(b)



සංයුක්ත වස්තුවේ මුළු පරිමාව $= \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$

එය 36π බව දී ඇති බැවින්

$\frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = 36\pi$

$\Rightarrow \quad 4r^3 + 3r^2h = 108$

සංයුක්ත වස්තුව පැවතීමට $h > 0$ විය යුතු ය.

දැන් $h > 0 \Rightarrow \frac{108 - 4r^3}{3r^2} > 0$

$\Rightarrow \quad 4r^3 - 108 < 0$

$\Rightarrow \quad r^3 < 27 \Rightarrow r < 3$

$\therefore 0 < r < 3$ විය යුතු ය.

එවිට ද්‍රව්‍ය සඳහා මුළු වියදම C

$$C = 300 \times 2\pi rh + 1\,000 \times 4\pi r^2$$

$$= 200\,\pi\left[3r\left(\frac{108 - 4r^3}{3r^2}\right) + 20r^2\right]$$

$$= 800\,\pi\left[\frac{27}{r} - r^2 + 5r^2\right]$$

$$= 800\,\pi\left[4r^2 + \frac{27}{r}\right];\ 0 < r < 3$$

$$\frac{dc}{dr} = 800\,\pi\left[8r - \frac{27}{r^2}\right]$$

$$\frac{dc}{dr} = 0 \Leftrightarrow 8r - \frac{27}{r^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow r3 = \frac{27}{8} \Leftrightarrow r = 3/2$$

$0 < r < 3/2$ සඳහා $\frac{dc}{dr} < 0$ හා

$3/2 < r < 3$ සඳහා $\frac{dc}{dr} > 0$

එනයින් $r = \frac{3}{2}$ විට C අවම වේ.

15. (*a*) $$\int \frac{3x+2}{x^2 + 2x+5}\,dx = \int \frac{3(x+1)-1}{x^2 + 2x+5}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2 + 2x+5}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

මෙහි C අභිමත නියතයකි.

(*b*) $$I = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)\,dx = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)\frac{dx}{dx}\,dx$$

$$= x\cos(\ln x)\Big|_1^{e^\pi} + \int_1^{e^\pi} x\sin(\ln x)\,\frac{1}{x}\,dx$$

$$= e^\pi\cos(\ln e^\pi) - \cos(\ln x) + \int_1^{e^\pi} \sin(\ln x)\frac{dx}{dx}.dx$$

$$= e^\pi\cos\pi - \cos 0 + x\sin(\ln x)\Big|_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} x\cos(\ln)\frac{1}{x}\,dx$$

$$= -e^\pi - 1 + e^\pi\sin(\ln e^\pi) - \sin(\ln 1) - I$$

$$= -e^\pi - 1 + e^\pi\underset{0}{\underset{\Downarrow}{\sin\pi}} - \underset{0}{\underset{\Downarrow}{\sin o}} - I$$

$$2I = -e^\pi - 1$$

$$\therefore I = -\frac{1}{2}(e^\pi + 1)$$

(*c*) $u = a - x$ යයි ගනිමු.

එවිට $x = a-u$ $\quad \frac{du}{dx} = -1 \;\Rightarrow\; dx = -du$ වේ.

$x = a$ විට $u = 0$ හා $x = 0$ විට $u = a$ ද වේ.

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_a^0 f(a-u)(-du)$$

$$= \int_0^a f(a-u)\,du$$

$$= \int_0^a f(a-x)\,dx$$

(∵ නිශ්චිත අනුකල විචල්‍යයෙන් ස්වායත්ත බැවින්)

$P(x) = (x - \pi)(2x + \pi)$ හා

$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{p(x)}\,dx$ යයි ගත්විට

$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{p\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\,dx$ (ඉහත ප්‍රතිඵලයෙන්)

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\,dx}{\left(\frac{\pi}{2} - x - \pi\right)\left(2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \pi\right)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\,dx}{\frac{(2x+\pi)(-2(x-\pi))}{2}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\,dx}{(x-\pi)(2x+\pi)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{P(x)}\,dx$$

එබැවින් $$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{p(x)}\,dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{p(x)}\,dx$$

$$\therefore I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{p(x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{p(x)}\,dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(x-\pi)(2x+\pi)}\,dx$$

$$\frac{1}{(x-\pi)(2x+\pi)} = \frac{A}{(x-\pi)} + \frac{B}{(2x-\pi)}$$

$$1 = A(2x+\pi) + B(x-\pi)$$

$$A = \frac{1}{3\pi},\ B = \frac{-2}{3\pi}$$

$$\therefore I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\frac{1}{3\pi}}{(x-\pi)} - \frac{\frac{2}{3\pi}}{(2x+\pi)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3\pi}\ln|x-\pi| - \frac{2}{3\pi}\times\frac{1}{2}\ln|2x+\pi|\right\}\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{6\pi}\left\{\ln\left|\frac{x-\pi}{2x+\pi}\right|\right\}\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{6\pi}\left\{\ln\left|-\frac{1}{4}\right| - n|-1|\right\} = \frac{1}{6\pi}\ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

16. m_1 හා m_2 යනු පිළිවෙළින් ℓ_1 හා ℓ_2 රේඛාවල බෑවුම් යයි ගනිමු.

එවිට $m_1 = -2$ හා $m_2 = -\frac{1}{2}$ වේ.

ℓ_1 හා ℓ_2 අතර සුළු කෝණය θ යයි ගනිමු.

$$\text{එවිට } \tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{-2 + \frac{1}{2}}{1 + (-2)(-\frac{1}{2})}\right|$$

$$= \left|\frac{-\frac{3}{2}}{2}\right| = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

රේඛා දෙක අතර කෝණ සමච්ඡේදක

$$\frac{|2x + y - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{|x + 2y - 4|}{\sqrt{5}}$$ මගින් ලැබේ.

එනම් $2x + y - 5 = \pm(x + 2y - 4)$

$x - y - 1 = 0$ හෝ $3x + 3y - 9 = 0$

එනම් $x - y - 1 = 0$ හෝ $x + y - 3 = 0$

ℓ_1 හා $x - y - 1 = 0$ අතර සුළු කෝණය $\propto$ යයි ගනිමු.

$$\text{එවිට, } \tan\propto = \left|\frac{-2 - 1}{1 + (-2)(1)}\right| = 3 > 1$$

$\therefore \propto > \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ $x - y - 1 = 0$ අවශ්‍ය කෝණ සමච්ඡේදකය නොවේ.

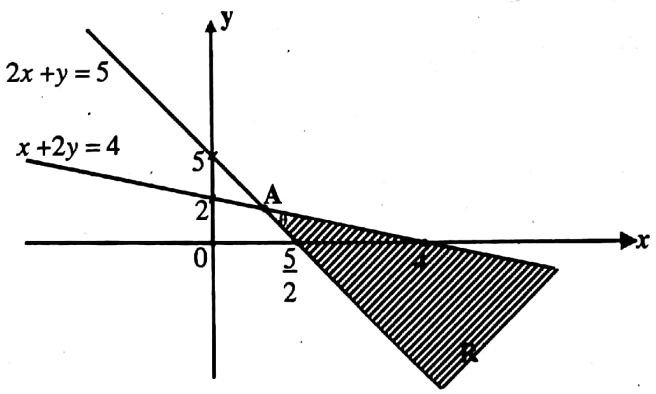
$\therefore$ $x + y - 3 = 0$ අවශ්‍ය කෝණ සමච්ඡේදකය වේ.

$2x + y = 5$ —①

$x + 2y = 4$ —②

① හා ② න් $x = 2, y = 1$

$\therefore$ $A \equiv (2,1)$ වේ.



S හි කේන්ද්‍රය $x + y - 3 = 0$ මත පිහිටිය යුතුය S හි කේන්ද්‍රය C නම්,

$C \equiv (t, 3 - t)$ ආකාර වේ.

S හි අරය $\sqrt{5}$ බැවින්

$$\frac{|2t + (3 - t) - 5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$|t - 2| = 5$

එවිට $t - 2 = \pm 5$

$\Rightarrow t = 7$ හෝ $t = -3$

එවිට $C = (7, -4)$ හෝ $(-3, 6)$

$(-3, 6)$ R පෙදෙස තුළ නොපිහිටන බැවින්

$C = (7, -4)$

එවිට S හි සමීකරණය

$(x - 7)^2 + (y + 4)^2 = 5$

$\Rightarrow x^2 - 14x + 49 + y^2 + 8y + 16 = 5$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 14x + 8y + 60 = 0$

(x_0, y_0) ලක්ෂ්‍යයක සිට

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + C = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යාය

$x x_0 + y y_0 + g(x + x_0) + f(y + y_0) + C = 0$ වේ.

වෘත්තය S ද (x_0, y_0), A ද වන විට

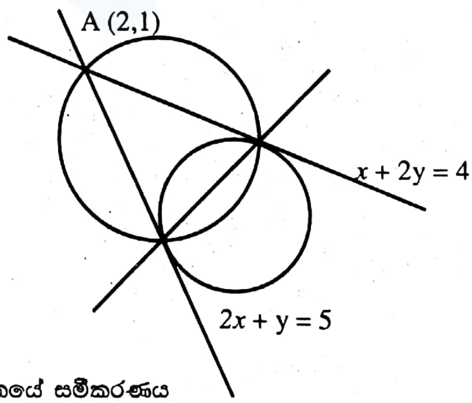
$x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $g = -7$, $f = 4$, $C = 60$ බැවින් අවශ්‍ය ස්පර්ශ ජ්‍යාය

$2x + y - 7(x + 2) + 4(y + 1) + 60 = 0$

$\Rightarrow -5x + 5y + 50 = 0$

$\Rightarrow x - y - 10 = 0$

එනම් $x - y = 10$



අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය

$x^2 + y^2 - 14x + 8y + 60 + \lambda(x - y - 10) = 0$ ආකාරයට ලිවිය හැක.

$A \equiv (2, 1)$ මෙම වෘත්තය මත බැවින්

$4 + 1 - 28 + 8 + 60 + \lambda(2 - 1 - 10) = 0$

$\Rightarrow 45 - 9\lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda = 5$

එම නිසා අවශ්‍ය වෘත්තය

$x^2 + y^2 - 9x + 3y + 10 = 0$ වේ.

17. (a) $f(x) = \dfrac{1-\tan x}{1+\tan^2 x}; -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

$$= \frac{\left(1 - \frac{\sin x}{\cos x}\right)}{\sec^2 x}$$

$$= \cos^2 x \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \cos^2 x - \sin x \cos x$$

$$= \frac{1}{2}(1+\cos 2x) - \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x\right) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{4}\sin 2x\right) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}$$

$A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \propto = \dfrac{\pi}{4}$ $B = \dfrac{1}{2}$

$f(x) = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ විට

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore 2x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$$

$$2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

$x = n\pi + \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{8}$ හෝ $x = n\pi - \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{8}$

එනම් $x = n\pi + \dfrac{\pi}{24}$ හෝ $x = n\pi - \dfrac{7\pi}{24}$

$\dfrac{-\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ බැවින්

$x = \dfrac{\pi}{24}$ හෝ $\dfrac{-7\pi}{24}$ වේ.

$$\frac{1-\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow 4 - 4\tan x = 2+\sqrt{2} + (2+\sqrt{2})\tan^2 x$$

$$(2+\sqrt{2})\tan^2 x + 4\tan x - (2-\sqrt{2}) = 0 \text{ --- ①}$$

$$① \times (2-\sqrt{2}) \Rightarrow 2\tan^2 x + 4(2-\sqrt{2})\tan x - (2-\sqrt{2})^2 = 0$$

$$2\tan^2 x + 4k\tan x - k^2 = 0,$$

මෙහි $K = (2-\sqrt{2})$ වේ.

$$\tan x = \frac{-4k \pm \sqrt{16k^2 + 8k^2}}{4} = \frac{-2k \pm \sqrt{6}k}{2}$$

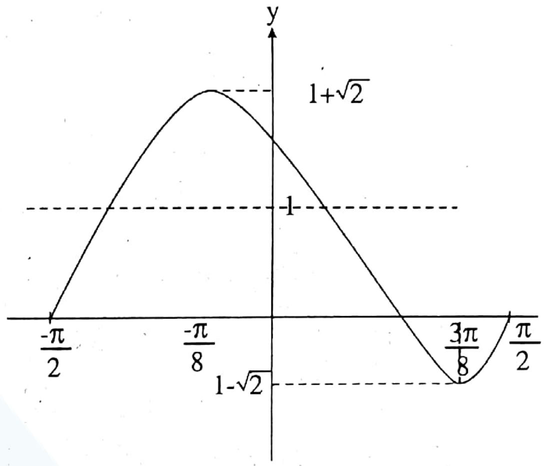
$$\tan\frac{\pi}{24} = -(2-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{6}}{2}(2-\sqrt{2}); (\because \tan\frac{\pi}{24} > 0)$$

$$= -2 + \sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$$

$y = 2f(x)$

$$= \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1; \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$



(b) සුපුරුදු අංකනයෙන් ABC ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් සඳහා

$$\frac{\text{Sin A}}{a} = \frac{\text{Sin B}}{b} = \frac{\text{Sin C}}{c} \text{ වේ.}$$

Sin2A + Sin2B + Sin2C

= 2Sin(A+B) cos(A-B) + 2SinCcosC

= 2SinCcos(A-B) - 2SinCcos(A+B)

= 2SinC[cos(A-B) - cos(A+B)]

= 4SinCsinA SinB

$= 4\text{SinC}\ \dfrac{\text{Sin A}}{a} \cdot \dfrac{\text{Sin B}}{b} \cdot ab$

$= 4\text{SinC}\ \dfrac{\text{Sin C}}{c} \cdot \dfrac{\text{Sin C}}{c} \cdot ab$

$c^2(\text{Sin2A+Sin2B+Sin2C}) = 4ab\text{Sin}^3\text{C}$

$\mu^2 a^2(\text{Sin2A + Sin2B + Sin2C})$

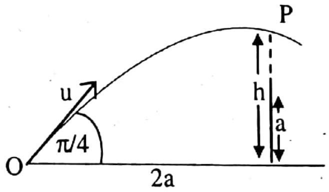
$= 4a\lambda a\text{Sin}^3\text{C}(\because a:b:c = 1:\lambda:\mu)$

$\mu^2(\text{Sin2A + Sin2B + Sin2C}) = 4\lambda\text{Sin}^3\text{C}$

*** ***

A - කොටස

01. $O \to P$ චලිතය සලකන්න.



$\to S = ut + \frac{1}{2}at^2$

$2a = u \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times t_1$

$t_1 = \frac{2\sqrt{2}a}{u}$ —— ①

t_1 කාලයේ දී සිරස් විස්ථාපනය h නම්,

$h = u \times \frac{1}{\sqrt{2}} t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$ —— ②

① හා ② න් $h = \frac{u}{\sqrt{2}} \times \frac{2\sqrt{2}a}{u} - \frac{1}{2}g\frac{8a^2}{u^2}$

$h = 2a - \frac{4ga^2}{u^2}$

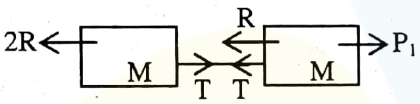
$u > 2\sqrt{ga}$ එනම් $u^2 > 4ga$ නම්,

$h > 2a - \frac{4ga^2}{4ga}$

$h > a$

$\therefore$ අංශුව බිත්තිය උඩින් යයි.

02. $\to V$, ත්වරණය $= a_1$



එන්ජිමේ ප්‍රකර්ෂණ බලය P_1 ද, ඒ මොහොතේ ත්වරණය a_1 ද නම්,

$P_1 = \frac{P \times 1000}{V}$ N

$\underline{F} = m\underline{a}$ පද්ධතියට යෙදීමෙන්,

$P_1 - R - 2R = 2Ma_1$

$P_1 - 3R = 2Ma_1$ —— ①

ට්‍රේලරයට යෙදීමෙන්,

$T - 2R = M \times a_1$

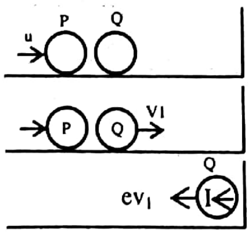
$T = 2R + M\frac{(P_1 - 3R)}{2M}$

$= 2R + \frac{P_1}{2} - \frac{3R}{2}$

$= \frac{R}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1000P}{V}$

$= \frac{1}{2}\left[R + \frac{1000P}{V}\right]$

03.



පළමු ගැටුමට, (P හා Q අතර) ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්,

$\to mu = mv_1 + mv_2$ —— ①

නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමය යෙදීමෙන්,

$eu = v_1 - v_2$ —— ②

① + ② $v_1 = \frac{u}{2}(1 + e)$

Q බිත්තිය හා ගැටුණු විට වේගය $= ev_1$

එම ගැටුම සලකා $\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන්,

$\leftarrow I = mev_1 - m(-v_1)$

$= mv_1(1 + e)$

$= m.\frac{u}{2}(1 + e)^2$

04. අංශුව ක්ෂණික ව නිසල වන මොහොතේ තන්තුවේ විතතිය b නම්,

ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්,

$0 + 0 + 0 = 0 - mg(a + b) + \frac{1}{2} \times 4mg \times \frac{b^2}{a}$

$mg(a + b) = 2mg\frac{b^2}{a}$

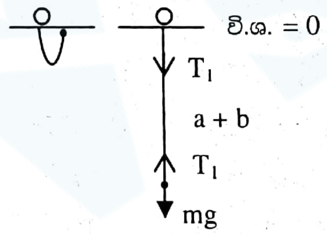
$a^2 + ab = 2b^{2c}$

$a^2 + ab - 2b^2 = 0 \Rightarrow (a + 2b)(a - b) = 0$

$b > 0$ නිසා $b = \frac{-a}{2}$ විය නොහැක.

$\therefore b = a$

$\therefore$ තන්තුවේ උපරිම දිග $= \underline{2a}$



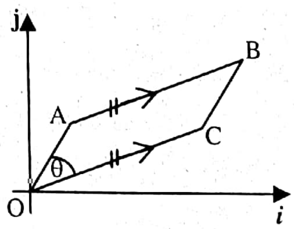
05. $\overrightarrow{OA} = i + 2j$

$\overrightarrow{OB} = 3i + 3j$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$= -i - 2j + 3i + 3j$

$= 2i + j$



AB = OC හා AB // OC නිසා $\overrightarrow{OC} = 2i + j$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OC}| \cos\theta$ (අදිශ ගුණිතය අර්ථ දැක්වීමෙන්)

$= |i + 2j|\,|2i + j| \cos\theta$

$= \sqrt{5}\sqrt{5}\cos\theta = 5\cos\theta$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = (i + 2j).(2i + j)$

$= 2i.i + 2j.j$

$= 4$ ($\because i.i = j.j = 1$ හා $i.j = j.i = 0$ නිසා

$\therefore \cos\theta = \frac{4}{5}$

06. සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ ඇති බැවින්,

F හා R හි S සම්ප්‍රයුක්තය R සමඟ

සාදන කෝණය ඝර්ෂණ කෝණයයි.

එනම්, $O\hat{C}A$ කෝණයයි.

OC = OA නිසා $O\hat{C}A = \frac{\alpha}{2}$

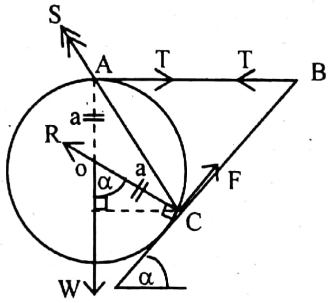
ගෝලයේ අරය a නම්,

එහි සමතුලිතතාව සලකා C වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$W \times a\sin\alpha = T(a + a\cos\alpha)$

$$T = \frac{W\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$T = \frac{2W\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \underline{\underline{W\tan\frac{\alpha}{2}}}$$



07. $P[(A\cup B)\cap(A'\cup B')]$

$= P[(A\cup B)\cap(A\cap B)']$ ($\because A'\cup B' = (A\cap B)'$ නිසා)

$= P(A\cup B) - P[(A\cup B)\cap(A\cap B)]$

($\because P(X\cap Y') = P(X) - P(X\cap Y)$ නිසා

$= P(A\cup B) - P(A\cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A\cap B) - P(A\cap B)$

$= P(A) + P(B) - 2P(A\cap B)$

08. රතු - 6 , සුදු - 4

X; තුන්වන බෝලය රතු බෝලයක් වීම.

A; පළමු බෝලය රතු, දෙවැන්න සුදු, තුන්වැන්න රතු

B; පළමු බෝලය සුදු, දෙවැන්න සුදු, තුන්වැන්න රතු

ආකාරවලට සිදුවේ.

$P(A) = \frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{8} \quad P(B) = \frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}$

$\quad = \frac{1}{6} \qquad\qquad\qquad = \frac{1}{10}$

$P(X) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{8}{30}$

දෙවන බෝලය සුදු එකක් වීම Y, පහත සඳහන් ආකාර වලට සිදුවේ.

පළමුවැන්න රතු දෙවැන්න සුදු $= \frac{6}{10}\times\frac{4}{9} = \frac{24}{90}$

පළමුවැන්න සුදු දෙවැන්න සුදු $= \frac{4}{10}\times\frac{3}{9} = \frac{12}{90}$

එවිට $P(Y) = \frac{36}{90}$

X; තුන්වැනි බෝලය රතු වීම.

Y; දෙවන බෝලය සුදු වීම.

අවශ්‍ය සම්භාවිතාව $P(X|Y) = \frac{P(X\cap Y)}{PCY}$

$P(X\cap Y) = P(A) + P(B)$

$= \frac{8}{30}$

$\therefore P(X|Y) = \frac{\frac{8}{30}}{\frac{36}{90}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

09. නිරීක්ෂණ පහ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 යයි ගනිමු.

මධ්‍යන්‍යය 7 නිසා $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5} = 7$

$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 35$

මධ්‍යස්ථය 9 නිසා $x_3 = 9$

එක ම මාතය 11 බැවින් $x_4 = x_5 = 11$ වේ.

$x_{.1} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1 + x_2 + 9 + 11 + 11 = 35$

$x_1 + x_2 = 4$ මෙහි $x_1 \neq x_2$ විය යුතුයි.

නිරීක්ෂණ ධන නිඛිල බැවින් හා මාතය 11 බැවින් $x_1 = 1$ හා $x_2 = 3$ විය යුතු ය.

$\therefore$ කුඩා ම සංඛ්‍යාව $= 1$

විශාලතම සංඛ්‍යාව $= 11$

10.

පන්ති ප්‍රාන්තර	සංඛ්‍යාතය f	ප්‍රාන්තර මධ්‍ය අගය x	$f \times x$
5 - 15	16	10	160s
15 - 25	x	20	$20x$
25 - 35	30	30	900
35 - 45	y	40	$40y$
45 - 55	20	50	1000
	100		$2060 + 20x + 40y$

$16 + x + 30 + y + 20 = 100 \Rightarrow x + y = 34$ —— ①

$\frac{160 + 20x + 900 + 40y + 1000}{100} = 31.8 \Rightarrow$

$20x + 40y = 1120$ —— ②

① හා ② විසඳීමෙන් $x = 12$ හා $y = 22$ ලැබේ.

මධ්‍යස්ථය $= 25 + \frac{\left[\frac{100}{2} - 28\right]10}{30}$

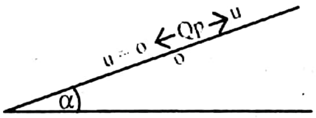
$= 25 + \frac{22\times 10}{30}$

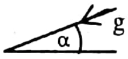
$= 25 + 7.33$

මධ්‍යස්ථය $= \underline{\underline{32.33}}$

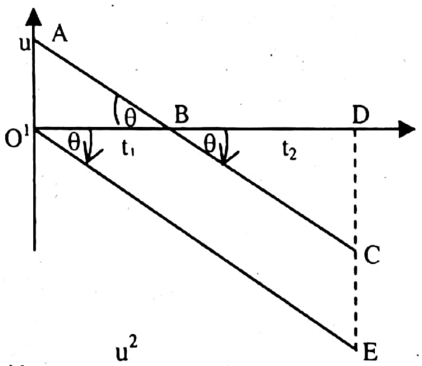
B - කොටස

11. *(a)*



එක් එක් අංශුවේ ත්වරණය 

$\tan\theta = g\sin\alpha$



$O'AB\ \Delta$ න්

$\tan\theta = \dfrac{AO'}{O'B}$

$g\sin\alpha = \dfrac{u}{t_1}$

$t_1 = \dfrac{u}{g\sin\alpha}$

$O'AB\ \Delta = \dfrac{1}{2} \times t_1 \times u = \dfrac{u^2}{2\,g\sin\alpha}$

P අංශුව නැවත O වෙත ළඟාවන නිසා $O'AB\ \Delta = BCD\ \Delta$ වේ.

$\dfrac{1}{2} \times t_2 \times DC = \dfrac{u^2}{2\,g\sin\alpha};\ g\sin\alpha = \dfrac{DC}{BD} \Rightarrow$

$DC = g\sin\alpha\, t_2$

$\therefore \dfrac{1}{2} \times t_2 \times g\sin\alpha\, t_2 = \dfrac{u_2}{2\,g\sin\alpha} \Rightarrow t^2 = \dfrac{u_2}{g^2\sin^2\alpha}$

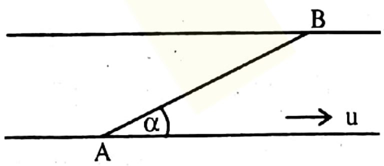
$t_2 = \dfrac{u}{g\sin\alpha} = t_1$ වේ. $\therefore\ O'D = \dfrac{2u}{g\sin\alpha}$

$t_1 + t_2$ කාලය අවසානයේ දී Q අංශුවට O සිට ඇති දුර = $O'DE\ \Delta$

$\tan\theta = \dfrac{DE}{O'D} \Rightarrow g\sin\alpha = \dfrac{DE}{\frac{2u}{g\sin\alpha}} \Rightarrow DE = g\sin\alpha \times \dfrac{2u}{g\sin\alpha} = 2u$

$\therefore O'DE\ \Delta = \dfrac{1}{2} \times O'D \times DE = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2u}{g\sin\alpha} \times 2u = \dfrac{2u^2}{g\sin\alpha}$

(b) $|\overrightarrow{AB}| = a$ යයි ගනිමු.



$(ජ\ E) = \rightarrow u;\ (ළ\ ජ) = 2u$

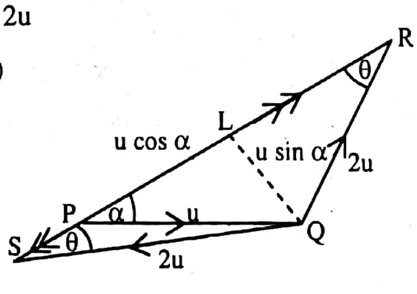
$(ළ\ E) = (ළ\ ජ) + (ජ\ E)$

 $= 2u + \rightarrow u$

$= \rightarrow u + 2u$

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

$= \overrightarrow{PR}$



B → A දක්වා පැමිණීම.

 $= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS}$ $\quad LQ = u\sin\alpha = 2u\sin\theta$

$= \overrightarrow{PS}$ $\quad \sin\alpha = 2\sin\theta$ වේ.

$QSR\Delta$ යේ $QS = QR = 2u$ නිසා $Q\hat{R}P = Q\hat{S}P$ වේ.
එම කෝණයත් θ යයි ගනිමු.

∴ A සිට B ට හා B සිට A ට ආපසු පැමිණීමේ දී ගමන් සමඟ එක ම කෝණය සාදයි.

A → B දක්වා යාමට ගන්නා කාලය $t_1 = \dfrac{a}{LR + PL}$

B → A දක්වා යාමට ගන්නා කාලය $t_2 = \dfrac{a}{LR - LP}$

$(\because LR = LS)$

$t_2 = kt_1$ බව දී ඇත.

$\dfrac{a}{LR - LP} = k\dfrac{a}{LR + PL} \Rightarrow LR + PL = k\,(LR - LP)$

$2u\cos\theta + u\cos\alpha = k\,[2u\cos\theta - u\cos\alpha]$

$\cos\alpha(k+1) = 2\cos\theta(k-1)$

$\dfrac{(k+1)\cos\alpha}{2(k-1)} = \cos\theta$

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}\sin\alpha$

$\sin^2\theta = \dfrac{1}{4}\sin^2\alpha$

$1 - \cos^2\theta = \dfrac{1}{4}(1 - \cos^2\alpha)$

$4 - 4\cos^2\theta = 1 - \cos^2\alpha$

$3 - 4\dfrac{(k+1)^2\cos^2\alpha}{4(k-1)^2} = -\cos^2\alpha$

$3 = \dfrac{(k+1)^2\cos^2\alpha}{(k-1)^2} - \cos^2\alpha$

$3(k-1)^2 = \cos^2\alpha\,[(k+1)^2 - (k-1)^2]$

$= \cos^2\alpha\,(k^2 + 2k + 1 - k^2 + 2k - 1)$

$\dfrac{3(k-1)^2}{4k} = \cos^2\alpha$

$\therefore \cos\alpha = \dfrac{(k-1)}{2}\sqrt{\dfrac{3}{k}}$

$\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ බැවින් $0 < \cos\alpha < 1$ වේ.

$0 < \dfrac{(k-1)}{2}\sqrt{\dfrac{3}{k}} < 1$

$0 < \dfrac{k-1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{k}} \Rightarrow 1 < k\ ;\ \dfrac{3(k-1)^2}{4k} < 1$

$;\ 3k^2 - 6k + 3 < 4k$

$3k^2 - 10k + 3 < 0$

$(3k-1)(k-3) < 0$

$\dfrac{1}{3} < k < 3$

$\therefore 1 < k < 3$

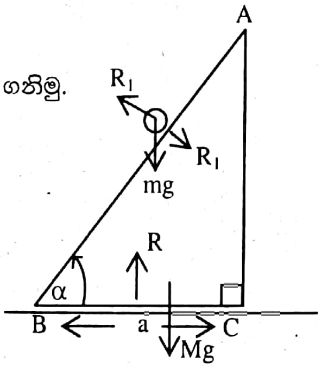
12. *(a)* (කු E) = $\longrightarrow a_1$

(අං කු) = $\underline{\swarrow_{\alpha}}\ a_2$ යැයි ගනිමු.

(අං E) = (අං කු) + (කු E)

$= \underline{\swarrow_{\alpha}}\ a_2 + \rightarrow a_1$

$= \underset{a_1}{\underline{\swarrow_{\alpha}}}\ a_2$



$\underline{F} = m\underline{a}$ යොදමු.

අංශුවට ; $\swarrow$ $mg \sin\alpha = m(a_2 - a_1\cos\alpha)$ —①

පද්ධතියට ; $\rightarrow$ $0 = Ma_1 + m(a_1 - a_2\cos\alpha)$ —②

① න් $mg\sin\alpha = -ma_1\cos\alpha + ma_2$ —③

② න් $0 = (M+m)a_1 - ma_2\cos\alpha$ —④

③ × $\cos\alpha$;

$mg\sin\alpha\cos\alpha = -ma_1\cos^2\alpha + ma_2\cos\alpha$ —③^1

④ + ③^1 $mg\sin\alpha\cos\alpha = a_1[M + m - m\cos^2\alpha]$

$$\underline{\underline{\frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}}} = a_1$$

④ න් $a_2 = \dfrac{(M+m)\,a_1}{m\cos\alpha}$

$$a_2 = \frac{(M+m)}{m\cos\alpha}\ \frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{(M + m\sin^2\alpha)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{(M+m)\,g\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}}}$$

$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ හා $M = \dfrac{5m}{2}$ නම්,

$$a_1 = \left(mg \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right) / \left(\frac{5m}{2} + m\,\frac{1}{2}\right) = \frac{mg}{6m} = \frac{g}{6}$$

$$a_2 = \frac{\left[\frac{5m}{2} + m\right] g \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{5m}{2} + m \times \frac{1}{2}} = \frac{7m}{2\sqrt{2}}\, g \times \frac{1}{3m} = \frac{7g}{6\sqrt{2}}$$

$s = ut + \dfrac{1}{2}at^2$ යොදමු.

අංශුවට $\swarrow$ $a\sec\alpha = 0 + \dfrac{1}{2}a_2 t_1^2$ —⑥

කූඤ්ඤයට $\rightarrow$ $v = u + at$ යොදමු.

$v_1 = 0 + a_1t_1$ —⑦

⑥ න් $a\sqrt{2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{7g}{6\sqrt{2}} \times t_1^2$

$\dfrac{24a}{7g} = t_1^2$

⑦ න් $v_1^2 = a_1^2\ t_1^2$

$= \dfrac{g}{36} \times \dfrac{24a}{7g} = \dfrac{2ag}{21}$

$\therefore v_1 = \underline{\underline{\sqrt{\dfrac{2ag}{21}}}}$

(b) OP, θ කෝණයකින් හැරී ඇති විට

AB චාප දිග = $a\theta$

∴ Q අංශුව මුල් පිහිටීමේ සිට $a\theta$ දුරක් සිරස් ව පහළට බැස ඇත. Q හි මුල් පිහිටීම, C සිට b දුරකින් යයි ගනිමු.

ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්,

$$0 + 0 + 0 - 2mg\,(a + b) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}.2m.v^2 + mga\sin\theta - 2mg\,(a + b + a\theta)$$

$$-2mga - 2mgb = \frac{3}{2}mv^2 + mga\sin\theta - 2mga - 2mgb - 2mga\theta$$

$$2ga\theta - ga\sin\theta = \frac{3}{2}v^2$$

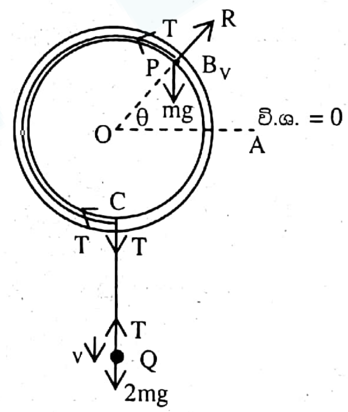
$$\frac{2}{3}ga\,(2\theta - \sin\theta) = v^2$$

$\underline{F} = m\underline{a}$, P ට $\underline{\swarrow_{\theta}}$ යෙදීමෙන්,

$mg\sin\theta - R = \dfrac{mv^2}{a} \Rightarrow$

$R = mg\sin\theta - m\,\dfrac{2g}{3}\,(2\theta - \sin\theta)$

$R = \dfrac{mg}{3}\,(3\sin\theta - 4\theta + 2\sin\theta) = \dfrac{mg}{3}\,(5\sin\theta\ 40)$



13. OA = x_0 යයි ගනිමු.

එවිට $T_1 = \dfrac{8mg \times (4a - x_0)}{4a}$

$T_1 = mg$ (සමතුලිත පිහිටීම නිසා)

$\dfrac{8^2mg(4a - xo)}{4a} = mg \Rightarrow 8a - 2x_0 = a$

$x_0 = \dfrac{7a}{2}$

$\therefore OA = \underline{\underline{\dfrac{7a}{2}}}$

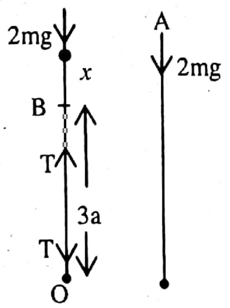
$T = \frac{8mg\,(4a - 3a - x)}{4a}$

$\underline{F} = m\underline{a}$ ↑ යෙදීමෙන්,

$\frac{8mg}{4a}(a - x) - 2mg = 2m\ddot{x}$

$2g - 2g\frac{x}{a} - 2g \;\; = 2\ddot{x}$

$$\underline{\underline{\ddot{x} \;=\; \frac{-g}{a}x}}$$



මෙහි කේන්ද්‍රය $\ddot{x} = 0$ වන $x = 0$, එනම් B වේ.

∴ විස්තාරය AB වන අතර, $AB = \frac{a}{2}$ වේ.

එවිට $BC = \frac{a}{2}$ බැවින් $OC = 3a - \frac{a}{2} = \frac{5a}{2}$ වේ.

A සිට C තෙක් චලනය වීමට අංශුව ගන්නා කාලය $= \frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{a}}}$

$$\underline{\underline{= \pi\sqrt{\frac{a}{g}}}}$$

අංශුව C හි ඇති විට Q අංශුව ඉවත් වේ. එම අවස්ථාව ක්ෂණික නිශ්චලතාවක් වේ.

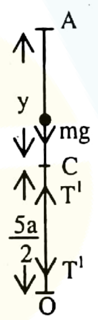
AP = y වන අවස්ථාවේ දුන්නේ

දිග $= 4a - (y + \frac{a}{2})$

∴ දුන්නේ විතතිය $= 4a - \{4a - (y + \frac{a}{2})\}$

$= y + \frac{a}{2}$

$\therefore T^1 \;\; = \;\; \frac{8mg}{4a}\;(y + \frac{a}{2})$



දැන් අංශුවේ චලිතය සලකා $\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්,

$mg - T^1 = m\ddot{y}$

$mg - \frac{8mg}{4a}\,(y + \frac{a}{2}) = m\ddot{y}$

$g - \frac{2g}{a}\,y - g = \ddot{y}$

$$\underline{\underline{\ddot{y} = -\frac{2g}{a}\,y}}$$

$y = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ විසඳුමක් යයි සිතමු.

t විෂයෙන් අවකලනයෙන්

$\dot{y} = -\alpha\omega\sin\omega t + \beta\omega\cos\omega t$ —①

නැවතත් අවකලනයෙන්

$\ddot{y} = -\alpha\omega^2\cos\omega t - \beta\omega^2\sin\omega t$

$= -\omega^2(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)$

$\ddot{y} = -\omega^2 y$

$\ddot{y} = -\frac{2g}{a}\,y$ බැවින් $\omega^2 = \frac{2g}{a}$

t = 0 විට C හි දී චලිතය අරඹන නිසා

$y = \frac{7a}{2} - \frac{5a}{2} = a$ හා $\dot{y} = 0$ වේ.

$a = \alpha$ හා ① න් $0 = \beta$

<u>C සිට D දක්වා චලිතය</u>

y මනිනු ලබන්නේ A සිට බැවින්, අංශුව D දක්වා ගිය විට $y = \frac{-a}{2}$ වේ. කාලය $t = t_1$ නම් ඉහත විසඳුම

$y = a\cos\omega t$ බැවින්,

$-\frac{a}{2} = a\cos\omega t_1 \Rightarrow \cos\omega t_1 = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\cos\left[\sqrt{\frac{2g}{a}} \times t_1\right] = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{2g}{a}}\,t_1 = \frac{2\pi}{3}$

$t_1 = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{a}{2g}} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{2a}{g}}$

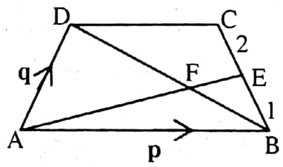
D වෙත ළඟාවන විට වේගය සෙවීම.

$\dot{y} = -a\omega\sin\omega t_1$ ($\because \alpha = \alpha$ නිසා)

$= -a\omega\sin\frac{2\pi}{3} = -a\sqrt{\frac{2g}{a}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{\frac{3ag}{2}}$

∴ අංශුවේ වේගය $= \sqrt{\frac{3ag}{g}}$ (දිශාව නොසැලකූ විට)

14. (a) $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ නිසා



$DC = \frac{1}{2}AB$ වේ.

$\overrightarrow{BF} = \lambda\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ (Δ නියමය)

$= \mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{p}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$= -\mathbf{p} + (\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{p}) = \mathbf{q} - \frac{1}{2}\mathbf{p}$

$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{3}(\mathbf{q} - \frac{1}{2}\mathbf{p})$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$

$= \mathbf{p} + \frac{1}{3}\mathbf{q} - \frac{1}{6}\mathbf{p} = \underline{\underline{\frac{5}{6}\mathbf{p} + \frac{1}{3}\mathbf{q}}}$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$

$= \mathbf{p} + \lambda\overrightarrow{BD}$ (දී ඇත.)

$= \mathbf{p} + \lambda(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$

$= \mathbf{p} + \lambda(-\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \underline{\underline{(1 - \lambda)\,\mathbf{p} + \lambda\,\mathbf{q}}}$

$\overrightarrow{AF} = \mu \overrightarrow{AE}$ (∵ A, F, E ඒකරේඛීය නිසා)

$\mathbf{p} + \lambda(-\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \mu(\frac{5}{6}\ \mathbf{p} + \frac{1}{3}\ \mathbf{q})$

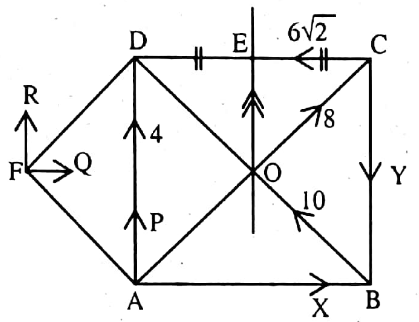
$(1 - \lambda) - \frac{5\mu}{6})\ \mathbf{p} + (\lambda - \frac{\mu}{3})\ \mathbf{q} = 0$

$\mathbf{p} \not\parallel \mathbf{q}$ නිසා $1 - \lambda - \frac{5\mu}{6} = 0$ —①

$\lambda - \frac{\mu}{3} = 0$ —②

① හා ② විසඳීමෙන් $\lambda = \frac{2}{7}$ බව ලැබේ.

(b)



පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්ත බලය $\overrightarrow{OE}$ ඔස්සේ ක්‍රියා කරන බැවින් O වටා පද්ධතියේ ඝූර්ණය ශූන්‍ය වේ.

$O; 6\sqrt{2} \times \frac{a}{2} - 4 \times \frac{a}{2} - Y \times \frac{a}{2} + X \times \frac{a}{2} = O$

$X - Y = 4 - 6\sqrt{2}$

OE ට ලම්බ දිශාවකට විභින්න කොටස්වල ඵෙක්‍යයන් ශූන්‍ය වේ.

$\rightarrow X - 6\sqrt{2} + 8 \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 10 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

$X = \underline{\underline{7\sqrt{2}\ N}}$

$\therefore Y = 7\sqrt{2} - 4 + 6\sqrt{2}$

$= \underline{\underline{(13\sqrt{2} - 4)\ N}}$

පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තය $\uparrow = 4 - Y + 10 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 8 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= 4 - 13\sqrt{2} + 4 + 9\sqrt{2}$

$= 8 - 4\sqrt{2}$

$= 4(2 - \sqrt{2})$

$= \underline{\underline{4K\,N}}$; මෙහි $K = 2 - \sqrt{2}$

$\overrightarrow{AD}$ දිගේ ක්‍රියා කරන P හා F හරහා වූ → Q හා ↑ R යනු තුල්‍ය පද්ධතිය යැයි ගනිමු. එවිට

↑ $P + R = 4K$ —①

→ $Q = 0$ —②

F $P \times \frac{a}{\sqrt{2}} = 4K \times \sqrt{2}\,a$ —③

$P = 8K$

$\therefore R = -4K$

$\underline{\underline{Q = 0}}$

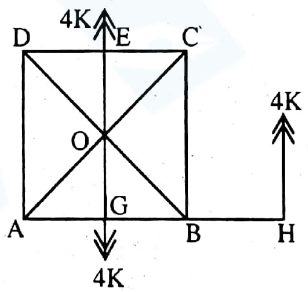
මුල් පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තය 4K වන අතර එය OE ↑ ක්‍රියා කරයි.

∴ ABCD අතට වන යුග්මය 4K, 4K බල දෙකකින් ප්‍රතිස්ථාපනය කරමු.

එවිට $4K \times GH = 6Ka$

$GH = \frac{3a}{2}$

∴ O හරහා වූ 4K, 4K බල දෙක සමතුලිත වන බැවින් නව පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තය දික් කළ AB රේඛාව BH = a වන පරිදි වූ H හරහා ක්‍රියා කරයි. එය OE ට සමාන්තර ද වේ.



15. *(a)* පද්ධතිය A හරහා ඇති සිරස් රේඛාව වටා සමමිතික ය.

$W_1 = l\sqrt{3}\,W$; $W_2 = lW$

$AB = 2a = l\sqrt{3}$; $BC = 2b = l$

ලෙස තෝරා ගනිමු.

$AB^2 + BC^2 = 3l^2 + l^2 = 4l^2$

$= AC^2$

$\therefore A\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$ හා $B\hat{A}C = \frac{\pi}{6}$ වේ.

AB දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සලකා A වටා

$W_1 \times a \sin\frac{\pi}{6} + Y \times 2a \sin\frac{\pi}{6} - X \times 2a \cos\frac{\pi}{6}$

$= 0$

$W_1 \times \frac{1}{2} + 2Y \times \frac{1}{2} - X \times \frac{2\sqrt{3}}{2} = 0$

$W_1 = 2\sqrt{3}\,X - 2Y$ —①

CB දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සලකා B වටා

$$W_2 \times b \sin\frac{\pi}{3} - Y \times 2b \sin\frac{\pi}{3} - X \times 2b \cos\frac{\pi}{3} = 0$$

$$W_2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2Y \times \frac{\sqrt{3}}{2} - X\, 2\,\frac{1}{2} = 0$$

$$\sqrt{3}\, W_2 = 2X + 2\sqrt{3}\, Y \text{ ——②}$$

$$② \times \sqrt{3} \text{ ——①}$$

$$3W_2 - W_1 = 8Y$$

$$Y = \frac{3W_2 - W_1}{8}$$

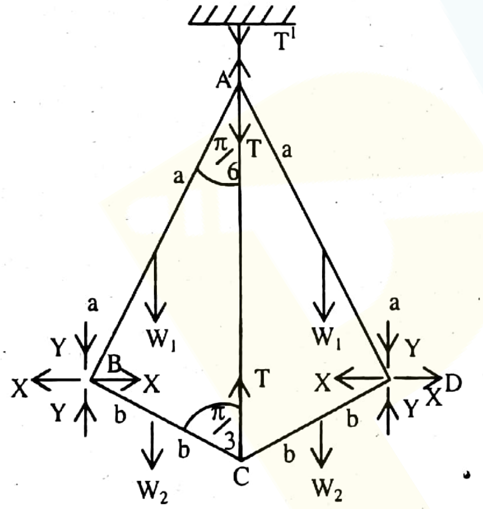
BCD කොටසේ සමතුලිතතාව සලකා සිරස් විභේදනයෙන්,

$$2Y + T = 2W_2$$

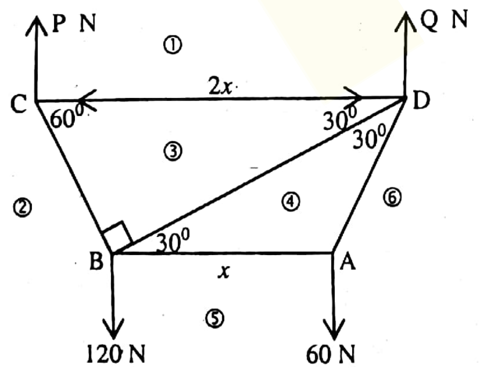
$$T = 2W_2 - \frac{2(3W_2 - W_1)}{8}$$

$$T = \frac{8W_2 - 3W + W_1}{4} = \frac{5W_2 + W_1}{4}$$

$$T = \frac{5lW + l\sqrt{3}W}{4} = \frac{lW\,(5 + \sqrt{3})}{4}$$



(b)

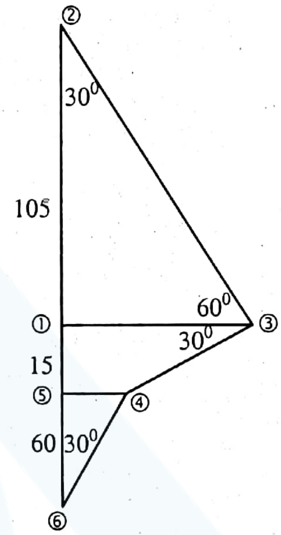


රාමු සැකිල්ලේ සමතුලිතතාවය සලකා D වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$P \times 2x = 120 \times \frac{3x}{2} + 60 \times \frac{x}{2}$$

$$P = 105 \text{ N}$$

දණ්ඩ	ප්‍රත්‍යාබලය	විශාලත්වය
CD	තෙරපුම	$35\sqrt{3}$ N
BC	ආතතිය	$70\sqrt{3}$ N
BD	ආතතිය	30 N
AB	ආතතිය	$20\sqrt{3}$ N
AD	ආතතිය	$40\sqrt{3}$ N

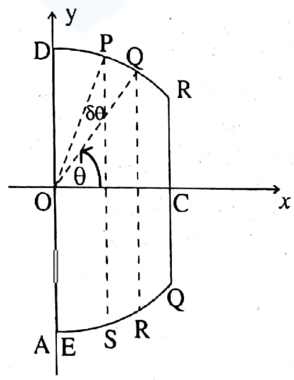


16. සමමිතිකත්වයෙන් ජින්නකයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය x - අක්ෂය මත පිහිටයි.

එය G නම් $G \equiv (\bar{x}, 0)$ ආකාරය ගනී.

$P\hat{O}Q = \delta\theta$ ද, $Q\hat{O}x = \theta$ ද වන සිහින් වළල්ලක් ගනිමු.

එහි අරය $= a \sin\theta$



වළල්ලේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $= 2\pi a \sin\theta \times a\,\delta\theta$

ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ අර්ථ දක්වීමට අනුව

$$\bar{x} = \frac{\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi a \sin\theta . a d\theta\sigma \times a\cos\theta}{\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \pi a \sin\theta . a d\theta\sigma}$$

$$\bar{x} = \frac{2\pi a^3\sigma \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta}{2\pi a^2\sigma \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta}$$

$$= \frac{2\pi a^3\sigma\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}}{2\pi a^2\sigma\,[-\cos\theta]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}}$$

$$= \frac{\pi a^3\sigma\,[1 - \sin^2\alpha]}{2\pi a^2\sigma\,[0 - \cos\alpha]}$$

$$= \frac{\pi a^3\sigma\cos^2\alpha}{2\pi a^2\sigma\cos\alpha} = \frac{a\cos\alpha}{2}$$

ජින්නකයේ බර $= 2\pi a^2\sigma\cos\alpha$ හා එහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OC හි මධ්‍ය ලක්ෂයේ පිහිටයි. ($\because OC = a\cos\alpha$)

සමමිතිකත්වයට අනුව සාස්පානේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ x අක්ෂය මත වේ.

වස්තුව	බර	ගු.කේ.ට y අක්ෂයේ සිට දුර
ජින්නකය	$2\pi a^2\sigma\cos\alpha$	$\frac{a\cos\alpha}{2}$
පතුල	$\pi a^2\sigma\sin^2\alpha$	$a\cos\alpha$
සාස්පාන	$\pi a^2\sigma(2\cos\alpha + \sin^2\alpha)$	x_1

y අක්ෂය වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$2\pi a^2\sigma\cos\alpha \times \frac{a\cos\alpha}{2} + \pi a^2\sigma\sin^2\alpha \times a\cos\alpha$$

$$= \pi a^2\sigma(2\cos\alpha + \sin^2\alpha)x_1$$

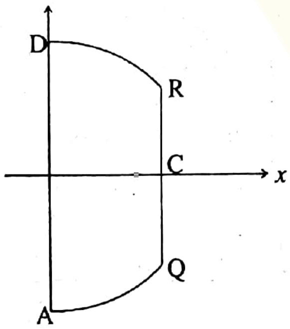
$$\pi a^3\sigma(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\alpha) = \pi a^2\sigma(2\cos\alpha + \sin^2\alpha)\,x_1$$

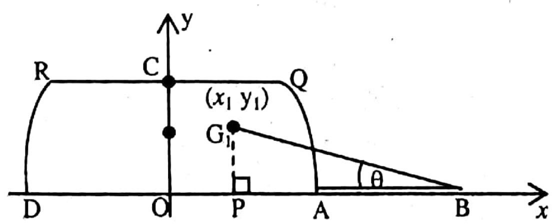
$$a\cos\alpha\,(\cos\alpha + 1 - \cos^2\alpha) = (2\cos\alpha + 1 - \cos^2\alpha)\,x_1$$

$$x_1 = \frac{a\cos\alpha\,(1 + \cos\alpha - \cos^2\alpha)s}{(1 + 2\cos\alpha - \cos^2\alpha)}$$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ විට $x_1 = \frac{a}{2}\left[\frac{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{1 + 2\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}\right] = \frac{a}{2}\left[\frac{\frac{5}{4}}{\frac{7}{4}}\right]$

$$x_1 = \frac{5a}{14}$$





වස්තුව	බර	ගු.කේ.ට x අක්ෂයේ සිට දුර	ගු.කේ.ට y අක්ෂයේ සිට දුර
සාස්පාන	w	$\frac{5a}{14}$	0
මිට	$\frac{w}{4}$	0	$a + \frac{b}{2}$
මිට සහිත සාස්පාන	$\frac{5w}{4}$	y_1	x_1

ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$w \times \frac{5a}{14} + \frac{w}{4} \times 0 = \frac{5w}{4} \times y_1 \Rightarrow y_1 = \frac{2a}{7}$$

$$w \times 0 + \frac{w}{4}\left(a + \frac{b}{2}\right) = \frac{5w}{4} \times x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{(2a + b)}{10}$$

B ලක්ෂයෙන් නිදහසේ එල්ලූ විට

$$\tan\theta = \frac{G_1P}{PB}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{y_1}{a + b - x_1}$$

$$a + b - \frac{(2a + b)}{10} = 7 \cdot \frac{2a}{7}$$

$$\frac{10a + 10b - 2a - b}{10} = 2a$$

$$8a + 9b = 20a$$

$$9b = 12a$$

$$3b = 4a$$

17. (a) $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ යනු B දී ඇතිවිට A හි අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාවයි.

$(A\cap B)\cup(A\cap B') = A\cap(B\cup B') = A\cap\Omega = A$ නිසා

$$P(A) = P[(A\cap B) \cup (A\cap B')]$$

$= P(A\cap B) + P(A\cap B')$ [$\because$ $A\cap B$ හා $A\cap B'$ අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර නිසා

$$= \frac{P(A\cap B)\,P(B)}{P(B)} + \frac{P(B')\,P(A\cap B')}{P(B')}$$

$$P(A) = P(B)\,P(A|B) + P(B')\,P(A|B')$$

M ; තෝරාගත් තැනැත්තා පිරිමියෙකු වීම.

F ; තෝරාගත් තැනැත්තා ගැහැණියක වීම.

OL ; තෝරාගත් තැනැත්තා සාමාන්‍ය පෙළ සමත් වීම.

AL ; තෝරාගත් තැනැත්තා උසස් පෙළ සමත් වීම.

G ; තෝරාගත් තැනැත්තා උපාධිධාරියකු වීම.

$\therefore\ P(M) = \frac{80}{100} \qquad P(F) = \frac{20}{100}$

$P(OL) = \frac{57}{100} \quad P(AL) = \frac{32}{100} \quad P(G) = \frac{11}{100}$

$P(OL|F) = \frac{40}{100} \quad P(AL|F) = \frac{45}{100} \Rightarrow$

$P(G|F) = \frac{15}{100}$ වේ.

(i) $P(OL|F) = \frac{P(OL \cap F)}{P(F)}$ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව අ.දූ. අනුව

$$\frac{40}{100} = \frac{P(OL \cap F)}{\frac{20}{100}} \Rightarrow P(OL \cap F)$$

$$= \frac{40}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{8}{100}$$

(ii) $P(OL) = P(OL \cap M) + P(OL \cap F)$

$$\frac{57}{100} = P(OL \cap M) + \frac{8}{100}$$

$$\therefore P(OL \cap M) = \frac{57}{100} - \frac{8}{100} = \frac{49}{100}$$

(iii) $P(G) = P(M)\,P(G|M) + P(F)\,P(G|F)$

$$\frac{11}{100} = \frac{80}{100} P(G|M) + \frac{20}{100} \times \frac{15}{100}$$

$$11 - \frac{300}{100} = 80\,P(G|M)$$

$$\left[\frac{1100 - 300}{100}\right] \frac{1}{80} = P(G|M)$$

$$P(G|M) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

(iv) $P(F|G^1) = \frac{P(F \cap G^1)}{P(G^1)}$ ——①

$P(G^1|F) = \frac{P(G^1 \cap F)}{P(F)}$ ——②

① හා ② න්

$$P(F|G^1)\,P(G^1) = P(G^1|F)\,P(F)$$

$P(G|F) = \frac{15}{100}$ නිසා $P(G^1|F) = \frac{85}{100}$ වේ.

$$P(F|G^1) \times \left(1 - \frac{11}{100}\right) = \frac{85}{100} \times \frac{20}{100}$$

$$P(F|G^1) \times \frac{89}{100} = \frac{85}{100} \times \frac{20}{100} \Rightarrow P(F|G^1) = \frac{17}{89}$$

(b) (i) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ දත්තවල මධ්‍යන්‍යය $\bar{x}$ විට

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}.\bar{x} + \frac{1}{n}\,n\bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 \quad \left(\because \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}\right)$$

(ii) $\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta)^2$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\alpha^2 x_i^2 + 2\alpha\beta x_i + \beta^2)$$

$$= \alpha^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\alpha\beta\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}\beta^2$$

$$= \alpha^2[n\sigma_x^2 + n\bar{x}^2] + 2\alpha\beta.\,n\bar{x} + n\beta^2$$

$$= n\alpha^2\sigma_x^2 + n[\sigma^2\bar{x}^2 + 2\alpha\beta\bar{x} + \beta^2]$$

$$= n\alpha^2\sigma_2^2 + n(\sigma\bar{x} + \beta)^2$$

[$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$ නිසා

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n\sigma_2^2 + n\bar{x}^2$ ලෙස ගෙන ඇත.]

$$y_i = \alpha x_i + \beta$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta$$

$$\bar{y} = \alpha\bar{x} + \beta$$

$\sum_{i=1}^{n}(ax_i + \beta)^2 = n\,\alpha^2\sigma_x^2 + n(\sigma\bar{x} + \beta)^2$ හි ආදේශයෙන්

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = n\sigma_x^2\,\alpha^2 + n\bar{y}^2$$

n මගින් බෙදීමෙන්,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sigma_x^2\alpha^2 + \bar{y}^2$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{y}^2 = \sigma_x^2\alpha^2$$

$$\sigma_y^2 = \alpha^2\sigma_x^2$$

විභාග ලකුණු $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ යයි සිතමු.

එවිට $\bar{x} = 45$ බව දී ඇත.

ඒකජ පරිමාණය $y_i = \alpha x_i + \beta$ නම්,

$$\bar{y} = \alpha\bar{x} + \beta$$

$\bar{y} = 50$ හා $\sigma_y^2 = 225$ බව දී ඇත.

$x_i = 60$ විට $y_i = 68$ බැවින්

$$68 = 60\alpha + \beta \text{ ——① හා}$$

$$50 = 45\alpha + \beta \text{ ——② බැවින්}$$

① - ② $18 = 15\alpha$

$$\alpha = \frac{6}{5}$$

① හි ආදේශයෙන්,

$$68 = 60 \times \frac{6}{5} + \beta$$

$$\beta = -4$$

$\sigma_y^2 = \alpha^2\sigma_x^2$ නිසා

$$225 = \frac{36}{25}\sigma_x^2$$

$$\sigma_x = \frac{15 \times 5}{6} = \frac{25}{2} = \underline{\underline{12.5}}$$

මුල් ලකුණ m නම් පරිමාණගත ලකුණ $\geq$ m වේ.

එනම් $x_i = m$ නම් $y_i \geq m$

පරිමාණය ; $y_i = \frac{6}{5}x_i - 4 \Rightarrow y_i = \frac{6m}{5} - 4 \geq m$ වේ.

$$6m - 20 \geq 5m$$

$m \geq 20$ වේ.

*** ***