අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය - 2010 අගෝස්තු

General Certificate of Education (Adv. Level) Examination – August 2010

සංයුක්ත ගණිතය I / පැ තුනයි

Combined Mathematics I / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

01. (a) α සහ β යනු $f(x) \equiv x^2 + px + q = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල වේ ; මෙහි p හා q තාත්ත්වික වන අතර $2p^2 + q \neq 0$ වේ. $y(p - x) = p + x$ නම්, x සඳහා $f(x) = 0$ හි ආදේශ කිරීමෙන් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $g(y) \equiv (2p^2 + q)y^2 + 2(q - p^2)y + q = 0$ බව පෙන්වන්න ; මෙහි $y \neq -1$ වේ.
ඒ නයින්, $g(y) = 0$ සමීකරණයේ මූල α හා β ඇසුරෙන් සොයන්න.

p හා q ඇසුරෙන් $\left(\dfrac{\alpha}{2\beta + \alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\beta}{2\alpha + \beta}\right)^2$ ප්‍රකාශ කරන්න.

(b) a, b, c හා m යනු $a + b + c = 0$ හා $ab + bc + ca + 3m = 0$ වන ආකාරයේ නියත නම්,
$(y + ax)(y + bx)(y + cx) = y(y^2 - 3mx^2) + abcx^3$ බව සාධනය කරන්න.
$y = x^2 + m$ නම්, $(x^2 + ax + m)(x^2 + bx + m)(x^2 + cx + m) = x^6 + abcx^3 + m^3$ බව පෙන්වන්න.
$g(x) = x^6 + 16x^3 + 64$ ට $(x^2 - 2x + m)(x^2 + ax + m)$ හා $(x^2 + bx + m)$ යන සාධක තිබේ නම්, m, a හා b හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, (i) සියලු x සඳහා $g(x)$ සෘණ නොවන බව පෙන්වන්න.
(ii) $g(x) = 0$ සමීකරණයේ මූල සොයන්න.

02. (a) 1, 2, 4, 5, 6, 8 හා 9 සංඛ්‍යාංක හතෙන් ඕනෑම සංඛ්‍යාංකයක්
(i) පුනරාවර්තනය සහිතව,
(ii) පුනරාවර්තනය රහිතව
තෝරා ගෙන, **සංඛ්‍යාංක හතරේ** වෙනස් සංඛ්‍යා කොපමණ ගණනක් සෑදිය හැකි දැයි සොයන්න.

(i) **අවස්ථාවේ දී,** සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යා කොපමණ ගණනක, ඕනෑම සංඛ්‍යාංකයක් වාර දෙකකට වඩා වැඩියෙන් නොතිබේ දැයි සොයන්න.
(ii) **අවස්ථාවේ දී,** සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යා කොපමණ ගණනක, ඔත්තේ සංඛ්‍යාංක දෙකක් හා ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාංක දෙකක් තිබේ දැයි, සොයන්න.
ඒවායින් කොපමණ ගණනක් ඉරට්ටේ වේ දැයි සොයන්න.

(b) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා, සුපුරුදු අංකනයෙන්,
$(1 + x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + \ldots + {}^nC_rx^r + \ldots + {}^nC_nx^n$ යැයි ගනිමු ; මෙහි n යනු ධන නිඛිලයක් වේ.
$(1 + x)^{n-1}$ හා $(1 + x)$ හි ගුණිතය සැලකීමෙන් $r = 1, 2, \ldots, n - 1$ සඳහා ${}^nC_r = {}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_r$ බව පෙන්වන්න.
${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \ldots + (-1)^{n-1}\,{}^nC_{n-1} + (-1)^n\,{}^nC_n = 0$ බව අපෝහනය කරන්න.
වෙනත් ක්‍රමයක් මගින් ඉහත ප්‍රතිඵලය සත්‍යාපනය කරන්න.
n යනු ඉරට්ටේ නිඛිලයක් නම් ${}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \ldots + {}^nC_n = 2^{n-1}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

03. ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා, **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** මගින්, $4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 = n^4 - (n - 1)^4$ බව සාධනය කරන්න.

ඒ නයින්, $r = 1, 2, \ldots$ සඳහා $u_r - u_{r-1} = 4r^3 - 6r^2 + 4r - 1$ වන ආකාරයට u_r ලියා දක්වන්න.

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

[ඔබට $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ බව උපකල්පනය කළ හැකි ය.]

$$1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + \ldots$$

ශ්‍රේණියේ r වෙනි පදය v_r ලියා දක්වන්න.

$$\sum_{r=1}^{n} v_r = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$$ බව පෙන්වන්න.

මෙම ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

$$\frac{3}{1^2} + \frac{5}{1^2 + 2^2} + \frac{7}{1^2 + 2^2 + 3^2} + \frac{9}{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} + \ldots$$

ශ්‍රේණියේ r වෙනි පදය w_r යැයි ගනිමු.

$w_r = f(r) - f(r+1)$ වන ආකාරයට $f(r)$ සොයන්න.

ඒ නයින්, $S_n = \sum_{r=1}^{n} w_r$ සොයන්න.

මෙම ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

04. (a) $|z - a| = |z + a|$ සපුරාලනු ලබන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ පථය නිර්ණය කරන්න ; මෙහි a යනු ශුන්‍ය නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවකි.

(b) z_1 හා $z_2 \ (\neq 0)$ යනු $|z_1 - 2z_2| = |z_1 + 2z_2|$ වන ආකාරයේ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් යැයි ගනිමු.

(a) කොටස උපයෝගී කර ගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $\dfrac{iz_1}{z_2} = k$ බව සාධනය කරන්න ; මෙහි k තාත්ත්වික වේ.

(i) $|arg(z_1) - arg(z_2)| = \dfrac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) ආර්ගන් සටහනෙහි P_1 හා P_2 ලක්ෂ්‍ය දෙක පිළිවෙළින් $z_1 + 2z_2$ හා $z_1 - 2z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි.

OP_1 රේඛාව OP_2 රේඛාවට ලම්බ නොවේ නම්, $P_1\hat{O}P_2 = \tan^{-1}\left(\dfrac{4|k|}{k^2 - 4}\right)$ බව පෙන්වන්න ; මෙහි O යනු ආර්ගන් තලයේ මූල ලක්ෂ්‍යය වේ.

OP_1 රේඛාව OP_2 රේඛාවට ලම්බ නම්, k හි විය හැකි අගය දෙක නිර්ණය කරන්න.

05. (a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 4x + x \sin 3x}{x^2}$ අගයන්න.

(b) (i) $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}\right)$ හා $z = \tan^{-1} x$ යැයි ගනිමු. $\dfrac{dy}{dz}$ සොයන්න.

(ii) $y = e^{m\sin^{-1} x}$ යැයි ගනිමු ; මෙහි m යනු නියතයකි. $(1 - x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} - m^2 y = 0$ බව පෙන්වන්න.

$x = 0$ හි දී, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ හි අගය සොයන්න.

(c) දෙන ලද l දිගින් යුත් කම්බියක් කොටස් දෙකකට කපා ඇත. එක කොටසක් වෘත්තයක හැඩයට නවා ඇති අතර අනෙක් කොටස සමචතුරස්‍රයක හැඩයට නවා ඇත. වෘත්තයේ හා සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලවල ඓක්‍යය වන

$A(x)$ යන්න $A(x) = \dfrac{x^2}{4\pi} + \dfrac{(l - x)^2}{16}$ වර්ග ඒකක, මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි x, $(0 \leq x \leq l)$ යනු වෘත්තයේ හැඩයට නවා ඇති කම්බි කොටසේ දිග වේ.

ඒ නයින්, සමචතුරස්‍රයේ පාදයක්, වෘත්තයේ විෂ්කම්භයට සමාන වන විට, $A(x)$ වර්ගඵලය අවම වන බව පෙන්වන්න.

06. (a) **භින්න භාග** උපයෝගි කර ගනිමින් $\int \frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2}\, dx$ සොයන්න.

(b) $I = \int e^{ax} \cos bx\, dx$ හා $J = \int e^{ax} \sin bx\, dx$ යැයි ගනිමු ; මෙහි a හා b යනු ශුන්‍ය නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ.

(i) $bI + aJ = e^{ax} \sin bx,$

(ii) $aI - bJ = e^{ax} \cos bx$

බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, I හා J සොයන්න.

(c) $x^3 t + 1 = 0$ ආදේශය උපයෝගී කර ගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $\int_{-1}^{\frac{-1}{2}} \frac{dx}{x(x^3 - 1)} = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{9}{2}\right)$

බව පෙන්වන්න.

07. (a) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ හා $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ සරල රේඛා අතර කෝණයේ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$ බව පෙන්වන්න.

(b) (x_0, y_0) ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන සරල රේඛාවක සමීකරණය $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = t$ ලෙස පරාමිතික ආකාරයෙන් දී ඇත ;

මෙහි $a^2 + b^2 = 1$ හා t පරාමිතියක් වේ. $|t|$ යනු (x_0, y_0) ලක්ෂ්‍යයේ සිට (x, y) ලක්ෂ්‍යයට රේඛාව දිගේ මනින ලද දිග බව පෙන්වන්න.

(c) $ABCD$ රොම්බසය පූර්ණ ලෙස පළමු පාදකය තුළ *පිහිටයි.* AB හා AD හි සමීකරණ පිළිවෙළින් $x - 2y + 5 = 0$ හා $2x - y + 1 = 0$ වේ. BAD කෝණය සුළු කෝණයක් වන අතර $AC = 2\sqrt{2}$ වේ. (a) හා (b) කොටස් උපයෝගී කර ගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, AC හි හා රොම්බසයේ අනෙක් පාද දෙකෙහි සමීකරණ සොයන්න. E යනු රොම්බසයේ විකර්ණවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය නම් DE හි දිග සොයා, **ඒ නයින්,** රොම්බසයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

08. $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ හා $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ වෘත්ත දෙක අභ්‍යන්තර ලෙස හෝ බාහිර ලෙස හෝ එකිනෙක ස්පර්ශවීම සඳහා අවශ්‍යතා ප්‍රකාශ කරන්න.

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ යනු වෘත්තයක් යැයි ද, $P_1(x_1, y_1)$ යනු $S = 0$ වෘත්තයෙන් පිටත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ද ගනිමු. P_1 ලක්ෂ්‍යයේ සිට $S = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයක දිග $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$ හා $S_2 \equiv x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$ වෘත්ත දෙක බාහිර ලෙස එකිනෙක ස්පර්ශවන බව සාධනය කරන්න.

$S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ වෘත්ත දෙකෙහි ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය වන A හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

P යනු, P ලක්ෂ්‍යයේ සිට $S_1 = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයක දිග, k වරක් P ලක්ෂ්‍යයේ සිට $S_2 = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයක දිගට සමාන වන ආකාරයට පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු.

P ලක්ෂ්‍යයේ පථය,

(i) $k = 1$ නම්, $S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ වෘත්ත දෙකෙහි කේන්ද්‍ර යා කරන රේඛාවට ලම්බව A ලක්ෂ්‍යය හරහා යන සරල රේඛාවක් බව,

(ii) $k \neq 1$ නම්, A ලක්ෂ්‍යය හරහා යන වෘත්තයක් බව,

සාධනය කරන්න.

$k = \frac{1}{2}$ විට P ලක්ෂ්‍යයේ පථයේ සමීකරණය ලියා දක්වා, එය ... ලක්ෂ්‍යයේ දී $S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ වෘත්ත දෙකෙන් එකක් බාහිර ලෙස ද, අනෙක අභ්‍යන්තර ලෙස ද ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න.

09. (a) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්; **කෝසයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.
ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්,

(i) $2\left(\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}\right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$ බව,

(ii) $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ නම් එවිට C කෝණය $\frac{\pi}{3}$ බව, පෙන්වන්න.

(b) $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta$ යන්න $R\cos(\theta - \alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න ; මෙහි R හා α තාත්ත්වික වේ.

ඒ නයින්, $\sqrt{3}\cos^2\theta + (1 - \sqrt{3})\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta - \cos\theta + \sin\theta = 0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(c) $-1 \leq x \leq 1$ සඳහා $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$ බව පෙන්වන්න.

*** ***

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
(මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි g මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.)

01. (a) ස්කන්ධය M වූ P නම් අංශුවක්, පොළොව මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක සිට, $t = 0$ කාලයේ දී u ප්‍රවේගයෙන් සිරස්ව ඉහළට ගුරුත්වය යටතේ ප්‍රක්ෂේප කෙරෙයි. එක එකක ස්කන්ධය ඉතා කුඩා $m\,(<< M)$ වූ P_1, P_2 හා P_3 නම් අංශු තුනක් පිළිවෙළින් $t = \frac{u}{2g}$, $t = \frac{u}{g}$, හා $t = \frac{3u}{2g}$ කාලවලදී P අංශුවට සාපේක්ෂව තිරස් ලෙස එකම අභිදිශාවට $2v$, $3v$ හා $6v$ ප්‍රවේගවලින් P අංශුවේ සිට ප්‍රක්ෂේප කෙරෙයි.

P අංශුවේ ප්‍රවේගය සඳහා ප්‍රවේග- කාල ප්‍රස්තාරය අඳින්න. P_1, P_2 හා P_3 අංශුවල ප්‍රවේගයන්ගේ සිරස් සංරචක එක එකක් සඳහා ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාර, P අංශුවේ ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාරයේ කොටස් සමග සමපාත වන බව පෙන්වා, එම කොටස් හඳුනාදෙන්න.
P_1, P_2 හා P_3 අංශුවල ප්‍රවේගයන්ගේ තිරස් සංරචක එක එකක් සඳහා ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාර, වෙනම රූප සටහනක අඳින්න.
ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාර යොදා ගනිමින්,

(i) අංශු හතර $t = \frac{2u}{g}$ එකම කාලයේ දී පොළොවට ළඟාවන බව.

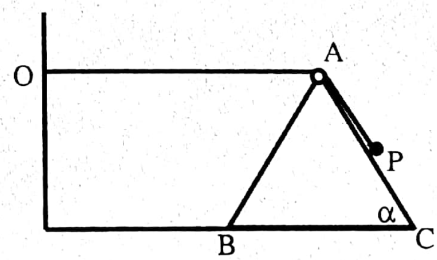
(ii) P_1, P_2 හා P_3 අංශු තුන එකම ස්ථානයක දී පොළොවට වැටෙන බව,
පෙන්වන්න.

(b) මිනිසකුට නිශ්චල ජලයේ u වේගයෙන් පිහිනිය හැකි ය. d පළලින් යුත් ගඟක් පොළොවට සාපේක්ෂව $v\,(< u)$ වේගයෙන් ගලා බසී. ගඟෙහි එක් ඉවුරක් මත පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයක මිනිසා සිටින අතර, ඔහු ගඟෙහි අනෙක් ඉවුර මත, ගඟ ගලන දිශාවට විරුද්ධ දිශාවෙහි පිහිටි Q ලක්ෂ්‍යයකට පිහිනා ආපසු P ලක්ෂ්‍යය වෙත පිහිනීමට බලාපොරොත්තු වෙයි. ඉවුරු ඍජු හා එකිනෙකට සමාන්තර ද, PQ ගඟ ගලන දිශාවට විරුද්ධ දිශාව සමඟ $\alpha, (0 < \alpha \le \frac{\pi}{2})$ කෝණයක් සාදයි ද නම්, සාපේක්ෂ ප්‍රවේගවල ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ, එකම රූප සටහනක ඇඳීමෙන් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් හෝ, Q ලක්ෂ්‍යයට පිහිනා ආපසු P ලක්ෂ්‍යයට පිහිනීමට මිනිසාට ගතවන කාලය $\frac{2d\sqrt{u^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha - v^2}}{u^2 - v^2}$ බව පෙන්වන්න.

(i) Q ලක්ෂ්‍යය P ලක්ෂ්‍යයේ සිට ගඟ ගලන දිශාවේ ද, PQ ගඟ ගලන දිශාව සමඟ $\alpha, (0 < \alpha \le \frac{\pi}{2})$ කෝණයක් සාදයි ද නම්, ගන්නා ලද මුළු කාලයෙහි වෙනසක් වෙනසක් සිදු නොවන බව,

(ii) මුළු කාලය අවම වන්නේ, P ලක්ෂ්‍යයට ඍජු ලෙස ඉදිරිපසින් අනෙක් ඉවුර මත Q ලක්ෂ්‍යය පිහිටන විට බව,
අපෝහනය කරන්න.

02. සිරස් බිත්තියක් මත O ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇති දිග l වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක්, BC ඔස්සේ යන මුහුණත, තිරස් අවල සුමට බිමක් මත පිහිටි ස්කන්ධය M වූ සුමට කුඤ්ඤයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය ඔස්සේ යන ABC ත්‍රිකෝණාකර සිරස් හරස්කඩෙහි A ශීර්ෂයේ වූ අවල සුමට කප්පියක් මතින් යයි. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් තන්තුවෙහි අනෙක් කෙළවරට සම්බන්ධ කර ඇති අතර රූප සටහනෙහි පෙන්වා ඇති ආකාරයට OA තිරස් වන පරිදි තන්තුව නොබුරුල්ව තබා ඇත. F යනු බිමට සාපේක්ෂව කුඤ්ඤයේ ත්වරණයේ විශාලත්වය ද, f යනු කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව P අංශුවේ ත්වරණයේ විශාලත්වය ද නම්, $f = F$ බව පෙන්වන්න.



AC තිරසට α කෝණයකින් ආනත නම්, P අංශුව සඳහා AC ඔස්සේ ද, පද්ධතිය සඳහා තිරසට ද, චලිත සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $\frac{mg \sin \alpha}{M + 2m(1 - \cos \alpha)}$ ත්වරණයකින් කුඤ්ඤය බිත්තිය දෙසට චලනය වන බව පෙන්වන්න.

ආරම්භයේ දී, සිරස් බිත්තියේ සිට තිරස් d දුරකින් B පිහිටන පරිදි පද්ධතිය නිශ්චලතාවේ පවතී. d ට වඩා PC විශාල නම්,

$\sqrt{\dfrac{2d\{M + 2m(1 - \cos\alpha)\}}{mg\sin\alpha}}$ කාලයකට පසු $\sqrt{\dfrac{2dmg\sin\alpha}{M + 2m(1 - \cos\alpha)}}$ වේගයෙන් B, බිත්තියෙහි ගැටෙන බව පෙන්වන්න.

බිත්තියෙහි B ගැටීමට මොහොතකට පෙර, බිමට සාපේක්ෂව P අංශුවේ වේගය $2\sqrt{\dfrac{dmg\sin\alpha(1 - \cos\alpha)}{M + 2m(1 - \cos\alpha)}}$ බවත් පෙන්වන්න.

03. P නම් සුමට අංශුවක් තිරසට α, $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ කෝණයකින් ආනතව u ප්‍රවේගයෙන් ගුරුත්වය යටතේ ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබෙයි. තිරස් ලෙස P අංශුව චලනය වන මොහොතේ දී, එය, දිග l වූ අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරකින් එල්ලෙමින් නිශ්චලතාවේ ඇති සමාන ස්කන්ධයෙන් යුත් Q නම් තවත් සුමට අංශුවක් සමග ගැටේ. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර තිරස් පිල්ලක් මත O ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇත. P අංශුවේ පෙත හා OQ අඩංගු සිරස් තලයට පිල්ල ලම්බ වේ. ආරම්භයේ දී, P හා Q අංශු දෙක අතර තිරස් දුර $\dfrac{u^2\sin 2\alpha}{2g}$ බව පෙන්වන්න.

අංශු දෙක අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e නම්, ගැටුමට මොහොතකට පසුව P හා Q අංශු දෙක පිළිවෙළින් $\dfrac{(1 - e)u\cos\alpha}{2}$ හා $\dfrac{(1 + e)u\cos\alpha}{2}$ ප්‍රවේගවලින් තිරස් ලෙස චලනය වීමට පටන් ගන්නා බව පෙන්වන්න.

OQ යටිඅත් සිරස සමග θ කෝණයක් සාදන විට, Q අංශුවේ චලිත සමීකරණයේ OQ දිගේ සංරචකය ද, Q අංශුව සඳහා යාන්ත්‍රික ශක්ති සංස්ථිති සමීකරණය ද, ලියා දක්වන්න.

$u\cos\alpha \geq \dfrac{2\sqrt{5gl}}{1 + e}$ නම්, Q අංශුව වෘත්ත චලිතය සම්පූර්ණ කරන බව අපෝහනය කරන්න.

P අංශුව ගමන් කර ලද තිරස් දුර $\dfrac{(3 - e)u^2\sin 2\alpha}{4g}$ බව පෙන්වන්න.

$e = 3$ නම්, P අංශුව ප්‍රක්ෂේප ලක්ෂ්‍යය වෙත ආපසු පැමිණෙන බව අපෝහනය කරන්න.

04. ස්කන්ධය m වූ P නම් අංශුවක් ස්වාභාවික දිග l වූ ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරකට සම්බන්ධ කර ඇති අතර තන්තුවෙහි අනෙක් කෙළවර සීලිමක O අචල ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර ඇත. λ යනු තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය නම්, P අංශුව සමතුලිතතාවෙන් එල්ලෙන විට, තන්තුවේ a විතතිය $a = \dfrac{mgl}{\lambda}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

OP සිරස්වන ලෙස ද, එහි දිග $l + a + b$ ට සමාන වන ලෙස ද, තන්තුව වැඩි දුරටත් $b\ (> a)$ දිගකින් අදිනු ලැබ, P අංශුව නිශ්චලතාවෙන් මුදා හැරෙයි. තන්තුවේ දිග $l + a + x$ වන විට, P අංශුවේ චලිත සමීකරණය ලියා දක්වා, සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\ddot{x} + \dfrac{g}{a}x = 0$ බව පෙන්වන්න ; මෙහි $-a \leq x \leq b$ වේ.

ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම $x = A\cos\sqrt{\dfrac{g}{a}}\,t + B\sin\sqrt{\dfrac{g}{a}}\,t$ ආකාරයේ යැයි උපකල්පනය කරමින් A හා B සොයන්න.

$\alpha = \sin^{-1}\left(\dfrac{a}{b}\right)$ වන $\sqrt{\dfrac{a}{g}}\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$ කාලයක් සඳහා P අංශුව සරල අනුවර්තී චලිතයේ යෙදෙන බව ද, සරල අනුවර්තී චලිතයෙන් P අංශුව ඉවත්වන මොහොතේ දී, එහි ප්‍රවේගය උඩුඅතට $\sqrt{\dfrac{g}{a}(b^2 - a^2)}$ බව ද පෙන්වන්න.

අනතුරුව P අංශුව ගුරුත්වය යටතේ චලනය වන බව ද, $b > a\sqrt{1 + \dfrac{2\lambda}{mg}}$ නම්, එය නිශ්ශුන්‍ය ප්‍රවේගයකින් සීලිමේ ගැටෙන බව ද පෙන්වන්න.

05. (a) පැත්තක දිග මීටර $2a$ වන $ABCDEF$ සවිධි ෂඩස්‍රයක AB, BC, CD, ED, EF හා AF පාද දිගේ, විශාලත්ව පිළිවෙළින් නිව්ටන $2P$, P, $2P$, $3P$, $2P$ හා P වූ බල, අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දක්වෙන දිශාඅතට ක්‍රියා කරයි. පද්ධතිය, විශාලත්වය නිව්ටන මීටර $\sqrt{3}\,Pa$ වූ බලයුග්මයක් සමග AC ඔස්සේ ක්‍රියා කරන නිව්ටන $2\sqrt{3}\,P$ වූ සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට තුල්‍ය බව සාධනය කරන්න.

පද්ධතිය තනි සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට තුල්‍ය නම්, මෙම සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ක්‍රියා රේඛාවේ හා (අවශ්‍ය නම් දික්කරන ලද) FA හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.

ඒ නයින්, පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ පවත්වා ගැනීම සඳහා, පද්ධතියට එක්කළ යුතු තනි බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

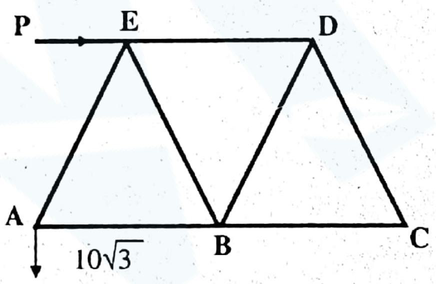
(b) සමාන දිගින් හා, බර පිළිවෙළින් W හා w $(W > w)$ වූ AB හා BC ඒකාකාර දඬු දෙකක් B හිදී නිදහස් ලෙස සන්ධි කර ඇත. $A\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$ වන සේ හා, රළු තිරස් පොළොවක් මත A හා C දෙකෙළවර පිහිටන සේ, දඬු සිරස් තලයක සමතුලිතතාවේ පවතී. μ යනු දඬු හා පොළොව අතර, ඝර්ෂණ සංගුණකය නම්, සමතුලිතතාව ආරක්ෂා කර ගැනීම සඳහා μ ට තිබිය හැකි

අඩුතම අගය $\frac{W + w}{W + 3w}$ බව පෙන්වන්න.

$\mu = \frac{W + w}{W + 3w}$ නම්, ලිස්සීම A හිදී නොව C හිදී සිදුවීමට ආසන්න බව සාධනය කරන්න.

06. (a) එක එකක දිග $2a$ වූ AB, BC, CD හා DE ඒකාකාර දඬු හතරක් B, C හා D හි දී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. AB හා DE දඬු එක එකක බර $2W$ ද, BC හා CD දඬු එක එකක බර W ද වේ. එකම තිරස් මට්ටමක පිහිටි A හා E ලක්ෂ්‍යවලින් දඬු සිරස් තලයක එල්ලා ඇති අතර AB හා BC දඬු සිරස සමග පිළිවෙළින් α හා β කෝණ සාදන සේ පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ පවතී. $\tan\beta = 4\tan\alpha$ බව පෙන්වන්න.

(b) සමාන දිගින් යුත් AB, BC, CD, DE, EA, EB හා BD සැහැල්ලු දඬු හතක්, රූපයේ දක්වෙන පරිදි රාමුකට්ටුවක් සෑදෙන ආකාරයට, ඒවායේ කෙළවරවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. රාමු කට්ටුව C හිදී සුමට ලෙස අසවු කර ඇති අතර A හිදී නිව්ටන $10\sqrt{3}$ ක බරක් දරයි. E හිදී P තිරස් බලයක් මගින්, AC තිරස් වන ලෙස රාමු කට්ටුව සිරස් තලයක තබා ඇත.



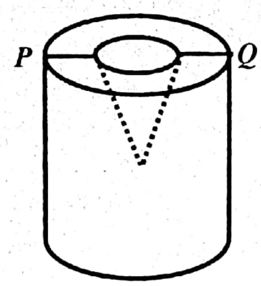
(i) E හි P බලයේ විශාලත්වය අගයන්න.

(ii) C හි ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

(iii) බෝ අංකනය යෙදීමෙන්, ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් ඇඳ, ආතති හා තෙරපුම් වෙන්කොට දක්වමින් දඬු සියල්ලෙහි ම ප්‍රත්‍යාබල සොයන්න.

07. උස h වූ ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, එහි අක්ෂය මත, ආධාරකයේ සිට $\frac{1}{4}h$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

ආධාරකයේ අරය r හා උස h වූ සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක් සඳහා අච්චුවක්, අරය $R(> r)$ හා උස H $(> h)$ වූ ඒකාකාර සෘජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරාකාර කොටයක් තුළ කේතු කුහරයක් තැනීමෙන්, නිපදවා ඇත. කේතු කුහරයේ තැනීමෙන්, නිපදවා ඇත. කේතු කුහරයේ සමමිතික අක්ෂය සිලින්ඩරාකාර කොටයේ සමමිතික අක්ෂය සමග සමපාත වේ. තනාගන්නා ලද අච්චුව රූපයේ පෙන්වා ඇති අයුරින් වේ. PQ විෂ්කම්භයේ සිට අච්චුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට ඇති දුර සොයන්න.



$R = 2r$ හා, අච්චුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය කේතු කුහරයේ ශීර්ෂයේ පිහිටයි නම්,
$h = 2(4 - \sqrt{14})H$ බව අපෝහනය කරන්න.
$R = 2r$ වනසේ වූ අච්චුව P ලක්ෂ්‍යයෙන් එල්ලා තබා ඇති අතර එය නිදහස් ලෙස සමතුලිතතාවේ එල්ලෙමින් ඇත.
තවද, $H = 3r$ නම්, යටිඅත් සිරස සමග PQ හි ආනතිය සොයන්න.

08. A හා B යනු ඕනෑම සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. A' හා B' යනු පිළිවෙළින් A හා B හි අනුපූරක සිද්ධි යැයි ගනිමු.
$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$ බව සාධනය කරන්න.
ඒ නයින්, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ බව පෙන්වන්න.

A හා B යනු ස්වායත්ත සිද්ධි නම්,

(i) A හා B' (ii) A' හා B'

ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න.

ජාත්‍යන්තර එක් දින තරගාවලියකට පෙර ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායමේ X නම් නිත්‍ය පිතිකරුවා හෝ Y නම් නිත්‍ය පන්දුයවන්නා ආබාධයකට ලක්වීමට ඉඩප්‍රස්ථාවක් ඇති බව අතීත තොරතුරුවලින් හෙළිදරවු වෙයි. X එවැනි ආබාධයකට ලක්වීමේ සම්භාවිතාව 0.2 ක් වන අතර, එය Y සඳහා 0.1 ක් වේ. ආබාධවලට ලක්වීම එකිනෙකින් ස්වායත්ත ලෙස සිදුවේ. N, A, B හා AB සිද්ධි පහත දැක්වෙන ආකාරයට අර්ථ දක්වා ඇත :

N : X හෝ Y යන දෙදෙනාගෙන් කිසිවකුත් ආබාධයකට ලක් නොවීම.

A : X පමණක් ආබාධයකට ලක්වීම,

B : Y පමණක් ආබාධයකට ලක්වීම,

AB : X සහ Y දෙදෙනාම ආබාධයකට ලක්වීම.

$P(N) = 0.72$, $P(A) = 0.18$, $P(B) = 0.08$ හා $P(AB) = 0.02$ බව පෙන්වන්න.

දෙන ලද N, A, B හෝ AB සිද්ධියක් සඳහා ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායම තරගාවලියක් ජය ගැනීමේ, පරාජයවීමේ හෝ ජය පරාජයෙන් තොරව අවසන් කිරීමේ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතා වගුවේ පෙන්වා ඇත ; මෙහි (U, V) කෝෂය, U දී ඇති විට V හි අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව වන $P(V \mid U)$ නිරූපණය කරයි.

සිද්ධිය (U)	තරගාවලියක ප්‍රතිඵලය (V)		
	ජයගැනීම	පරාජයවීම	ජය පරාජයෙන් තොරව අවසන්වීම
N	0.9	0.08	0.02
A	0.5	0.4	0.1
B	0.7	0.2	0.1
AB	0.3	0.6	0.1

(i) සුදුසු රුක් සටහනක් ඇඳීමෙන් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් හෝ, ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායම ළඟ එන තරගාවලිය ජයග්‍රහණය කිරීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(ii) ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායම තරගාවලියක් පරාජය වී ඇති බව දී ඇති විට, එම තරගාවලියට පෙර Y ආබාධයකට ලක්ව තිබීමේ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව සොයන්න.

09. (a) $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ යනු එක්තරා අධ්‍යයනයකින් ලබාගන්නා ලද නිරීක්ෂණ n වල කුලකයක් යැයි ගනිමු.

මෙම දත්ත කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය විචලතාව අර්ථ දක්වන්න.

එක්තරා පෙති වර්ගයක ඇති ක්‍රියාකාරී ද්‍රව්‍ය කොටස් ප්‍රමාණය මිලිග්‍රෑම් 52 හා මිලිග්‍රෑම් 67 අතර වේ යැයි සැලකෙයි. අඩංගු ක්‍රියාකාරී ද්‍රව්‍ය කොටස් ප්‍රමාණය සඳහා පරීක්ෂා කරන ලද පෙති 40 කින් යුත් සසම්භාවී නියැදියක මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව පිළිවෙළින් මිලිග්‍රෑම් 58 හා (මිලිග්‍රෑම්)^2 3.2 වේ. දත්ත නැවත පරීක්ෂා කර බැලීමේදී මිලිග්‍රෑම් 63 හා මිලිග්‍රෑම් 55 අගය දෙක සාවද්‍යව මිලිග්‍රෑම් 65 හා මිලිග්‍රෑම් 53 ලෙස ගෙන ඇති බව සොයාගන්නා ලදී.

(i) මෙම වරද නිසා මධ්‍යන්‍යයට බලපෑමක් නොමැති බව,

(ii) නිවැරදි කිරීම නිසා විචලතාව අඩුවන බව

පෙන්වන්න.

(b) එක්තරා නගරයකදී, කැලණි ගඟ හරහා මගීන් ප්‍රවාහනය කිරීමේ බලාපොරොත්තුවෙන්, ආසන්න ලෙස කිලෝග්‍රෑම් 1 500 ක උපරිම භාරබරක් සහිත පාලම් පාරුවක් නිර්මාණය කෙරෙයි. මෙම බර සීමාව ඉක්මවා යෑම ආරක්ෂාකාරී නොවන බැවින්, ප්‍රදේශයේ පළාත් පාලන අධිකාරියට, මෙම පාරු සේවය ප්‍රයෝජනයට ගැනීමට බලාපොරොත්තුවන මගීන්ගේ බරෙහි ව්‍යාප්තිය සොයාගැනීමට සමීක්ෂණයක් පැවැත්වීමට වුවමනා වේ. මෙම මගී සංගහනයෙන්, මගීන් 200 කින් යුත් සසම්භාවී නියැදියක් ගන්නා ලදී. මෙම මගීන් 200 දෙනාගේ බර සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ දී ඇත.

පන්ති ප්‍රාන්තරය (බර කිලෝග්‍රෑම්වලින්)	සංඛ්‍යාතය
0 - 10	10
10 - 20	27
20 - 30	33
30 - 40	35
40 - 50	38
50 - 60	30
60 - 70	19
70 - 80	8

(i) බරෙහි ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය, මධ්‍යස්ථය හා මාතය සොයන්න.

වරකට ආරක්ෂිතව ප්‍රවාහනය කළ හැකි උපරිම මගීන් ගණන ඇසුරෙන්, පාරුවෙහි බර සීමාව ප්‍රකාශ කිරීමට පළාත් පාලන අධිකාරිය බලාපොරොත්තු වේ. ඉහත තොරතුරු පදනම් කර ගෙන වරකට ආරක්ෂිතව ප්‍රවාහනය කළ හැකි උපරිම මගීන් ගණන සොයන්න.

(ii) ව්‍යාප්තියේ සම්මත අපගමනය හා කුටිකතා සංගුණකය සොයා, ව්‍යාප්තියේ හැඩය ලබාගන්න.

*** ***

01. (a) $y(p-x) = p + x \Rightarrow yp - yx = P + x$

$yp - p = yx + x$

$$x = \frac{p(y-1)}{(y+1)} \quad \text{මෙහි } y \neq -1$$

x සඳහා $f(x) = 0$ හි ආදේශ කිරීමෙන්

$$f(x) = x^2 + px + q = \left\{\frac{p(y-1)}{y+1}\right\}^2 + p\left\{\frac{p(y-1)}{y+1}\right\} + q = 0$$

එනම් $p^2(y-1)^2 + p^2(y^2-1) + q(y+1)^2 = 0$

$g(y) = (2p^2+q)y^2 + 2(q-p^2)y + q = 0$

මෙහි $y \neq -1$

α හා β යනු $f(x) \equiv x^2 + px + q = 0$ හි මූල බැවින්

$\alpha + \beta = -p$ හා $\alpha\beta = q$ වේ.

$$x = \alpha \text{ විට } y = \frac{p+\alpha}{p-\alpha} = \frac{-\alpha-\beta+\alpha}{-\alpha-\beta-\alpha} = \frac{-\beta}{-2\alpha-\beta} = \frac{\beta}{2\alpha+\beta}$$

තවද, α යනු $f(x) = 0$ සමීකරණය සපුරාලන බැවින්

$y = \dfrac{\beta}{2\alpha+\beta}$, $g(y) = 0$ සමීකරණය සපුරාලයි.

එබැවින් $\dfrac{\beta}{2\alpha+\beta}$, $g(y) = 0$ හි මූලයක් වේ.

එලෙසම $x = \beta$ විට, $y = \dfrac{\alpha}{2\beta+\alpha}$ වන අතර

$\dfrac{\alpha}{2\beta+\alpha}$ ද $g(y) = 0$ හි මූලයන් වේ.

$g(y) = 0$ වර්ගජ සමීකරණයක් බැවින් $g(y) = 0$ හි මූල

$\dfrac{\alpha}{2\beta+\alpha}$ හා $\dfrac{\beta}{2\alpha+\beta}$ වෙයි.

$$\text{දැන් } \left(\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)^2 = \left(\frac{\beta}{2\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)^2 - 2\,\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\cdot\frac{\beta}{2\alpha+\beta}$$

$$= \left(\frac{-2(q-p^2)}{2p^2+q}\right)^2 - 2\left(\frac{q}{2p^2+q}\right)$$

$$= \frac{4[q^2 - 2p^2q + p^4] - 2q(2p^2+q)}{(2p^2+q)^2}$$

$$= \frac{2q^2 - 12p^2q + 4p^4}{(2p^2+q)^2}$$

$$= \frac{2(q^2 - 6p^2q + 2p^4)}{(2p^2+q)^2}$$

(b) $(y+ax)(y+bx)(y+cx) = y^3 + (a+b+c)y^2x + (ab+bc+ca)x^2y + abcx^3$

$= y^3 - 3myx^2 + abcx^3$

$(\because a+b+c = 0$ හා $ab+bc+ca+3m = 0)$

$y = x^2 + m$ විට $\quad = y(y^2 - 3mx^2) + abcx^3$

$(x^2+ax+m)(x^2+bx+m)(x^2+cx+m)$

$= (x^2+m)\{(x^2+m)^2 - 3mx^2\} + abc\,x^3$

$= (x^2+m)(x^4 + 2mx^2 + m^2 - 3mx^2) + abc\,x^3$

$= x^6 + abc\,x^3 + m^3$ —— ①

$g(x) = x^6 + 16x^3 + 64$ට (x^2-2x+m), (x^2+ax+m) හා (x^2+bx+m) යන සාධක වේ නම්

$x^6 + 16x^3 + 64 \equiv (x^2-2x+m)(x^2+ax+m)(x^2+bx+m)$ ලෙස ලිවිය හැක. එවිට ඉහත ① සමීකරණය සමග සැසඳීමෙන්

$m^3 = 64$ හා $-2ab = 16 \Rightarrow m = 4$ හා $ab = -8$

තවද $-2 + a + b = 0$ වේ. $\Rightarrow a + b = 2$

$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ බැවින්

$= 4 - 4(-8) = 36$

$\Rightarrow a - b = \pm 6 \Rightarrow 2a = 8$ හෝ $-4 \Rightarrow a = 4$ හෝ -2

$a = -2$ විට $b = 4$ හෝ $a = 4$ විට $b = -2$ හෝ වේ.

එනම් $m = 4, a = -2, b = 4$ හෝ $m = 4, a = 4, b = -2$

(i) $g(x) = (x^2 - 2x + 4)^2(x^2 + 4x + 4)$

$= (x^2 - 2x + 4)^2(x+2)^2 \geq 0 ;\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

(ii) $g(x) = 0$ හි මූල

$(x^2 - 2x + 4)^2(x+2)^2 = 0$

$[(x-1)^2 + 3]^2 (x+2)^2 = 0$

$[(x-1)^2 - (\sqrt{3}\,i)^2]^2 (x+2)^2 = 0$

$[x - 1 + \sqrt{3}\,i]^2 [x - 1 - \sqrt{3}\,i]^2 (x+2)^2 = 0$

$x = 1 - \sqrt{3}\,i$ (දෙවරක්) හෝ $x = 1 + \sqrt{3}\,i$ (දෙවරක්)

හෝ $x = -2$ (දෙවරක්)

02. (a) (i) පුනරාවර්තනයට ඉඩ ඇති විට සෑදිය හැකි සංඛ්‍යාංක 4 හි වෙනස් සංඛ්‍යා ගණන

$= 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$

(ii) පුනරාවර්තනයට ඉඩ නොමැති විට සෑදිය හැකි සංඛ්‍යාංක 4 හි වෙනස් සංඛ්‍යා ගණන

$= 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

(i) අවස්ථාවේ දී එකම සංඛ්‍යාංකය යෙදෙන සංඛ්‍යාංක හතරේ සංඛ්‍යා ගණන

$= {}^7C_1 \times \dfrac{4!}{4!}$

$= 7 \times 1 = 7$

එකම වර්ගයේ සංඛ්‍යාංක 3 ක් හා වෙනස් සංඛ්‍යාංකයක් තෝරාගත හැකි ආකාර ගණන $= {}^7C_1 \times {}^6C_1$

එවිට එකම සංඛ්‍යාංක 3 ක් හා වෙනස් සංඛ්‍යාංක් යෙදෙන සංඛ්‍යාංක 4 හි සංඛ්‍යා ගණන

$$= {}^7C_1 \times {}^6C_1 \times \frac{4!}{3!}$$
$$= 7 \times 6 \times 4 \times \frac{\cancel{3!}}{\cancel{3!}}$$
$$= 168$$

එමනිසා එකම සංඛ්‍යාංකය දෙවරකට වඩා නොයෙදෙන සංඛ්‍යාංක 4 හි සංඛ්‍යා ගණන

$$= 2401 - (168 + 7)$$
$$= 2226$$

(ii) අවස්ථාවේදී

ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාංක 2 ක් තෝරාගත හැකි ආකාරය $= {}^4C_2$

ඔත්තේ සංඛ්‍යාංක 2 ක් තෝරාගත හැකි ආකාරය $= {}^3C_2$

සංඛ්‍යාංක හතරේ එවැනි වෙනස් සංඛ්‍යා පිළියෙල කළ හැකි ආකාර ගණන $= 4\,!$

ඒවා මගින් ලබා ගත හැකි වෙනස් සංඛ්‍යා මුළු ගණන

$$= {}^4C_2 \times {}^3C_2 \times 4\,!$$
$$= 6 \times 3 \times 24$$
$$= 432$$

මෙසේ තෝරාගත් සංඛ්‍යාව ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවක් වීම සඳහා අවසාන සංඛ්‍යාව ඉරට්ටේ විය යුතුය.

අවසාන සංඛ්‍යාව ඉරට්ටේ වන ආකාර ගණන $= {}^4C_1 = 4$

එවිට අනෙක් සංඛ්‍යා තුන තෝරා ගත හැකි ආකාර ගණන $= {}^3C_2 \times {}^3C_1$

ඒවා පිළියෙල කල හැකි ආකාර ගණන $= {}^3C_2 \times {}^3C_1 \times 3!$

එමනිසා (ii) අවස්ථාවේ දී සෑදෙන ඉරට්ටේ සංඛ්‍යා ගණන $= {}^3C_2 \times {}^3C_1 \times 3! \times 4$

$$= 9 \times 6 \times 4 = 216$$

(b) $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1\,x + {}^nC_2\,x^2 + \dots + {}^nC_r\,x^r + \dots + {}^nC_n x^n$

$(1+x)^{n-1}\,(1+x)$ සලකමු.

$$= (1+x)\left[{}^{n-1}C_0 + {}^{n-1}C_1\,x + {}^{n-1}C_2 x^2 + \dots + {}^{n-1}C_r\,x^r + \dots + {}^{n-1}C_{n-1}\,x^{n-1}\right]$$

$$= {}^{n-1}C_0 + ({}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_0)\,x + ({}^{n-1}C_2 + {}^{n-1}C_1)\,x^2 + \dots + ({}^{n-1}C_r + {}^{n-1}C_{r-1})\,x^r + \dots + {}^{n-1}C_{n-1}\,x^n$$

දැන් $(1+x)^n \equiv (1+x)\,(1+x)^{n-1}$

${}^nC_0 = {}^{n-1}C_0 = {}^{n-1}C_{n-1} = {}^nC_n = 1$ බැවින්

දෙපසට x^r හි සංගුණක සලකා

${}^nC_r = {}^{n-1}C_r + {}^{n-1}C_{r-1}$ $\quad r = 1, 2, \dots n-1$ සඳහා

එබැවින්

$${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \dots + (-1)^r\,{}^nC_r + \dots + (-1)^{n-1}\,{}^nC_{n-1} + (-1)^n\ {}^nC_n$$

$$= {}^nC_0 - ({}^{n-1}C_0 + {}^{n-1}C_1) + ({}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_2) - \dots + (-1)^{n-1}\,({}^{n-1}C_{n-2} + {}^{n-1}C_{n-1}) + (-1)^n\ {}^nC_n$$

$$= {}^nC_0 - {}^{n-1}C_0 - {}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_2 - {}^{n-1}C_2 + \dots + (-1)^{n-1}\ {}^{n-1}C_{n-1} + (-1)^n\ {}^nC_n$$

$$= 1 - 1 \div (-1)^{n-1} + (-1)^n$$
$$= \underline{\underline{0}}$$

සත්‍යාපනය

$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + \dots + {}^nC_r\,x^r + \dots + {}^nC_n\,x^n$ හි $x = -1$ යෙදීමෙන්

$$0 = {}^nC_0 + {}^nC_1\,(-1) + {}^nC_2(-1)^2 + \dots + {}^nC_r(-1)^r + \dots {}^nC_n(-1)^n$$

$${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + \dots + (-1)^r\,{}^nC_r + \dots + (-1)^n\,{}^nC_n = 0$$

n ඉරට්ටේ නිබිලයක් විට ඉහත ප්‍රකාශය

${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + \dots - {}^nC_{n-1} + {}^nC_n = 0$ වේ. —— ①

$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1\,x + {}^nC_2\,x^2 + \dots + {}^nC_r\,x^r + \dots {}^nC_n\,x^n$

$x = 1$ විට $2^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \dots + {}^nC_r + \dots + {}^nC_n$ — ②

① + ② $\quad 2^n = 2({}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \dots + {}^nC_n)$

$$\Rightarrow {}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \dots {}^nC_n = 2^{n-1}$$

03. $4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 = n^4 - (n-1)^4$

$n = 1$ විට L. H. S $= 4.1^3 - 6.1^2 + 4.1 - 1 = 1$

R. H. S $= 1^4 - (1-1)^4 = 1$

$\therefore$ $n = 1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

$n = p$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යයි සිතමු. මෙහි $P \in \mathbb{Z}^+$

එවිට $\quad 4p^3 - 6p^2 + 4p - 1 = p^4 - (p-1)^4$ වේ.

$n = p+1$ විට L.H.S $= 4(P+1)^3 + 6\,(p+1)^2 + 4(p+1) - 1$

$$= 4p^3 + 12p^2 + 12\,p + 4 - 6p^2 - 12\,p - 6 + 4p + 4 - 1$$
$$= 4p^3 + 8p^2 + 4p + 1$$
$$= p^4 + 4p^3 + 8p^2 + 4p + 1 - p^4$$
$$= (p+1)^4 - p^4$$

$n = p+1$ R. H. S $= (p+1)^4 - p^4$

$\therefore$ $n = p+1$ විට ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

∴ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව ඕනෑම ධන නිඛිලමය n සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

ඉහත සාධනය අනුව

$r = 1, 2, 3, \ldots$ සඳහා $4r^3 - 6r^2 + 4r - 1$

$$= r^4 - (r-1)^4$$
$$= U_r - U_{r-1}$$

මෙහි $U_r = r^4$ වේ.

දැන් $U_r - U_{r-1} = 4r^3 - 6r^2 + 4r - 1$

$r = 1$ විට $U_1 - U_0 = 4.1^3 - 6.1^2 + 4.1 - 1$

$r = 2$ විට $U_2 - U_1 = 4.2^3 - 6.2^2 + 4.2 - 1$

$r = 3$ විට $U_3 - U_2 = 4.3^3 - 6.3^2 + 4.3 - 1$

$\vdots \quad \vdots$

$r = n-1$ විට $U_{n-1} - U_{n-2} = 4(n-1)^3 - 6(n-1)^2 + 4(n-1) - 1$

$r = n$ විට $U_n - U_{n-1} = 4.n^3 - 6.n^2 + 4.n - 1$

$$U_n - U_0 = 4\sum_{r=1}^{n} r^3 - 6\sum_{r=1}^{n} r^2 + 4\sum_{r=1}^{n} r - n$$

$$\therefore\ 4\sum_{r=1}^{n} r^3 = 6\sum_{r=1}^{n} r^2 - 4\sum_{r=1}^{n} r + n + U_n - U_0$$

$$4\sum_{r=1}^{n} r^3 = \cancel{6}^{1}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{\cancel{6}_{1}} - \cancel{4}^{2}\,\frac{n(n+1)}{\cancel{2}} + n + n^4$$

$$= n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n(n^3+1)$$
$$= n(n+1)[2n+1-2+(n^2-n+1)]$$
$$= n(n+1)(n^2+n)$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \underline{\underline{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}}$$

$1^2 + (1^2+2^2) + (1^2+2^2+3^2) + \ldots$ ශ්‍රේණියේ r වන පදය
$V_r = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + r^2$ වේ.

දැන් $V_r = \dfrac{r(r+1)(2r+1)}{6}$

$$= \frac{r^3}{3} + \frac{r^2}{2} + \frac{r}{6}$$

$$\sum_{r=1}^{n} V_r = \frac{1}{3}\sum_{r=1}^{n} r^3 + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} r^2 + \frac{1}{6}\sum_{r=1}^{n} r$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{6}\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\,[n^2+n+2n+1+1]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\,(n^2+3n+2)$$

$$= \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} V_r = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12} \to \infty$$

ශ්‍රේණියේ පද අනන්තයට ඓක්‍ය පරිමිත නොවන බැවින් ශ්‍රේණිය අභිසාරී නොවේ.

$$\frac{3}{1^2} + \frac{5}{1^2+2^2} + \frac{7}{1^2+2^2+3^2} + \frac{9}{1^2+2^2+3^2+4^2} + \ldots$$

මෙහි r වන පදය $W_r = \dfrac{2r+1}{1^2+2^2+3^2+\ldots+r^2}$

$$= \frac{2r+1}{\frac{r(r+1)(2r+1)}{6}}$$

$$= \frac{6}{r(r+1)} = \frac{6}{r} - \frac{6}{r+1}$$

$$= f(r) - f(r+1)$$

මෙහි $f(r) = \dfrac{6}{r}$ වේ.

දැන් $r = 1$ විට $W_1 = f(1) - f(2)$

$r = 2$ විට $W_2 = f(2) - f(3)$

$r = 3$ විට $W_3 = f(3) - f(4)$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$r = n-1$ විට $W_{n-1} = f(n-1) - f(n)$

$r = n$ විට $W_n = f(n) - f(n+1)$

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} W_r = f(1) - f(n+1)$$

$$= 6 - \frac{6}{(n+1)}$$

ඔව

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(6 - \frac{6}{n+1}\right) = 6 - \lim_{n\to\infty}\frac{6}{n+1}$$

$$= 6 \quad \left(\because \lim_{n\to\infty}\frac{6}{n+1} = 0\right)$$

පද අනන්තයට ඓක්‍යය පරිමිත බැවින් ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ.

04. (a) $Z = x + iy$ යයි ගනිමු. $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ නම්
එවිට $Z - a = (x - a) + iy$ හා

$Z + a = (x + a) + iy$ වේ.

$|Z - a| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ හා

$|Z + a| = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$ විට

$|Z - a| = |Z + a|$ විට

$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$

එනම් $(x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2 + y^2$

$\Rightarrow 4ax = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ($\because a \neq 0$ බැවින්)

එනම් $|Z - a| = |Z + a|$ සපුරාලන Z සංකීරණ සංඛ්‍යාව ආගන් සටහනේ අතාත්ත්වික අක්ෂය මත වේ.
එනම් Z හි පථය අතාත්ත්වික අක්ෂය වේ.

(b) $|Z_1 - 2Z_2| = |Z_1 + 2Z_2|$

$Z_2 \neq 0$ බැවින් $\left|\frac{Z_1}{Z_2} - 2\right| = \left|\frac{Z_1}{Z_2} + 2\right|$

ඉහත (a) කොටස අනුව $\frac{Z_1}{Z_2}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපනය කරන ලක්‍ෂ්‍යය ආගන් සටහනේ අතාත්වික අක්‍ෂය මත වේ.

එබැවින් $i\frac{Z_1}{Z_2}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව දක්වෙන ලක්‍ෂ්‍යය ආගන් සටහනේ තාත්ත්වික අක්‍ෂය මත වේ.

එනම් $i\frac{Z_1}{Z_2} = k$ මෙහි $k \in \mathbb{R}$ ලෙස ප්‍රකාශ කල හැක.

(i) $\frac{Z_1}{Z_2}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව දක්වෙන ලක්‍ෂ්‍යය අරගන්න.

තලයේ අතාත්වික අක්‍ෂයමත බැවින්

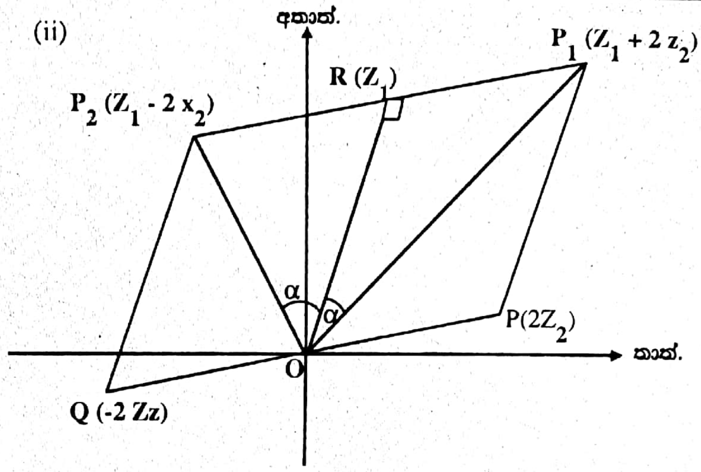
$$\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

මෙහි ධන අගය අතාත්ත්වික අක්‍ෂයේ ධන පැත්තේ වූ ලක්‍ෂ සඳහා වන අතර සෘණ අගය අනුරූප වන්නේ අතාත්ත්වික අක්‍ෂයේ සෘණ පැත්තේ පිහිටි ලක්‍ෂ්‍යයකට අනුරූපව වේ.

එවිට $\left|\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)\right| = |\arg(Z_1) - \arg(Z_2)|$

$= \frac{\pi}{2}$

(ii)



$|Z_1 - 2Z_2| = |Z_1 + 2Z_2|$ බැවින්

$OP_2 = OP_1$

තවද $RP_1 = OP = |2Z_2| = |-2Z_2|$

$OQ = RP_2$

$RP_1 = RP_2$

$\therefore O\hat{R}P_1 = \pi/2$

එවිට $\tan\alpha = \frac{RP_1}{OR} = \frac{OP}{OR} = \frac{|2Z_2|}{|Z_1|} = 2\left|\frac{Z_2}{Z_1}\right|$

$= \frac{2}{|k|}$ ($\because \frac{|iZ_1|}{|Z_2|} = k$)

OP_1 හා OP_2 ලම්බ නොවේනම් $\alpha \neq \pi/4$

$\Rightarrow \tan\alpha \neq 1 \Rightarrow |k| \neq 2$

එවිට $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{2}{|k|}}{1 - \frac{4}{|k|^2}} = \frac{4|k|}{k^2 - 4}$

එනම් $P_1\hat{O}P_2 = \tan^{-1}\left(\frac{4|k|}{k^2 - 4}\right)$

$OP_1 \perp OP_2$ වේ නම් එවිට $\alpha = \pi/4$

$\tan\alpha = \frac{2}{|k|} = 1 \Rightarrow |k| = 2 \Rightarrow k = \pm 2$

05. (a) $\lim_{x\to0} \frac{1 - \cos 4x + x\sin 3x}{x^2}$

$= \lim_{x\to0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} + \lim_{x\to0} \frac{3\sin 3x}{3x}$

$= \lim_{x\to0} \frac{2\sin^2 2x}{x^2} + 3\lim_{x\to0} \frac{\sin 3x}{3x}$

$= 8\left(\lim_{x\to0} \frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 + 3\lim_{x\to0} \frac{\sin 3x}{3x}$

$= 8 \times 1^2 + 3 \times 1 = 11$ ($\because \lim_{\theta\to0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$)

(b) (i) $z = \tan^{-1} x \Rightarrow \tan z = x$

$y = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ හි x වෙනුවට

ආදේශයෙන්

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\tan^2 z}-1}{\tan z}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\text{Sec } z - 1}{\tan z}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos z}{\sin z}\right)$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\,\text{Sin}^2 z/2}{2 \sin z/2 \cos z/2} = \tan^{-1}(\tan z/2)$$

$$= z/2$$

$$\therefore \frac{dy}{dz} = \frac{1}{2}$$

(ii) $y = e^{m \sin^{-1} x}$ x විෂයයෙහි අවකලයෙන්

$$\frac{dy}{dx} = e^{m\sin^{-1}x} \times \frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx} = my$$

x විෂයෙහි නැවත අවකලනයෙන්

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{dx} = m\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = m\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx}$$

$$= m^2 y$$

එනම් $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} - m^2y = 0$

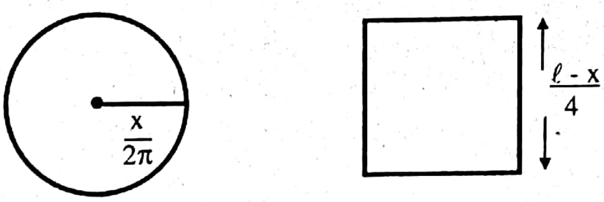
නැවත x විෂයයෙහි අවකලනයෙන්

$$(1-x^2)\frac{d^3y}{dx^3} - 2x\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - m^2\frac{dy}{dx} = 0$$

එනම් $(1-x^2)\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3x\dfrac{d^2y}{dx^2} - (1+m^2)\dfrac{dy}{dx} = 0$

x = 0 විට

$y = 1,\ \dfrac{dy}{dx} = m,\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = m^2\ \ \dfrac{d^3y}{dx^3} = m(1+m^2)$



වෘත්තයේ අරය $= \dfrac{x}{2\pi}$ සමචතුරස්‍රයේ පැත්තක දිග $= \dfrac{\ell - x}{4}$

වෘත්තයේ වර්ගඵලය $= \pi\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2 \quad \dfrac{x^2}{4\pi}$ = වර්ග ඒකක

සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය $= \left(\dfrac{\ell - x}{4}\right)^2$ වර්ග ඒකක

$A(x) = \dfrac{x^2}{4\pi} + \dfrac{(\ell - x)^2}{16}$ වර්ග ඒකක

$$\frac{d(A(x))}{dx} = \frac{1}{4\pi}2x - \frac{1}{16}2(\ell - x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{\ell}{8} + \frac{x}{8}$$

$$= \frac{(4+\pi)}{8\pi}x - \frac{\pi\ell}{8\pi} = \left(\frac{4+\pi}{8\pi}\right)\left[x - \frac{\pi\ell}{4+\pi}\right]$$

$$\frac{dA(x)}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi\ell}{4+\pi}$$

	$x < \frac{\pi\ell}{4+\pi}$	$x = \frac{\pi\ell}{4+\pi}$	$x > \frac{\pi\ell}{4+\pi}$
$\frac{dA(x)}{dx}$	(-)	0	(+)

$\therefore x = \dfrac{\pi\ell}{4+\pi}$ විට A (x) අවම වේ.

$x = \dfrac{\pi\ell}{4+\pi}$ විට වෘත්තයේ විෂ්කම්භය $= \dfrac{x}{\pi} = \dfrac{\ell}{4+\pi}$ හා

සමචතුරස්‍රයේ පැත්තක දිග $= \dfrac{\ell - x}{4} = \dfrac{\ell}{4} - \dfrac{\pi\ell}{4(4+\pi)}$

$$= \frac{4\ell + \pi\ell - \pi\ell}{4(4+\pi)}$$

$$= \frac{\ell}{4+\pi}$$

∴ සමචතුරස්‍රයේ පාදයක් වෘත්තයේ විෂ්කම්භව සමාන වනවිට A (x) අවම වේ.

06. (a) $\dfrac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2} \equiv \dfrac{Ax+B}{1+x^2} + \dfrac{C}{(1+x)} + \dfrac{D}{(1+x)^2}$

$$\Rightarrow 2x \equiv (Ax+B)(1+x)^2 + C(1+x^2)(1+x) + D(1+x^2)$$

$$\equiv (A+C)x^3 + (2A+B+C+D)x^2 + (A+2B+C)x + (B+C+D)$$

අනුරූප සංගුණක සැමයීමෙන්

$A + C = 0$ (1), $2A + B + C + D = 0$ (2), $A + 2B + C = 2$ (3),

$B + C + D = 0$ (4)

① හා ③ න් $2B = 2 \Rightarrow B = 1$

② න් ④ න් $2A = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow C = 0$

එවිට ④ න් $D = -1$

$A = C = 0, \ B = 1, D = -1$

$$\frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2} \equiv \frac{1}{(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\int \frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2}\, dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)} - \int \frac{dx}{(1+x)^2}$$

$$= \tan^{-1} x + \frac{1}{1+x} + C$$

මෙහි C අභිමත නියතයකි.

(b) (i)
$$\begin{aligned} bI &= b\int e^{ax}\cos bx\, dx \\ &= \int e^{ax}\, d(\sin bx) \\ &= e^{ax}\sin bx - \int \sin bx\, d(e^{ax}) \\ &= e^{ax}\sin bx - a\int e^{ax}\sin bx\, dx \\ &= e^{ax}\sin bx - aJ \end{aligned}$$

$$bI + aJ = e^{ax}\sin bx \quad \text{———} \ ①$$

(ii)
$$\begin{aligned} aI &= \int ae^{ax}\cos bx\, dx = \int \cos bx\, d(e^{ax}) \\ &= e^{ax}\cos bx - \int e^{ax}\, d(\cos bx) \\ &= e^{ax}\cos bx + \int e^{ax}\, b\sin bx\, dx \\ &= e^{ax}\cos bx + bJ \end{aligned}$$

$$aI - bJ = e^{ax}\cos bx \quad \text{———} \ ②$$

① × b + ② × a

$$(b^2 + a^2)\, I = b\, e^{ax}\sin bx + a\, e^{ax}\cos bx$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[b\sin bx + a\cos bx]$$

① × a - ② × b

$$(a^2+b^2)\, J = e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)$$

$$J = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$$

(c) $x^3 t + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -\frac{1}{t}$

$$\Rightarrow 3x^2\, dx = \frac{1}{t^2}\, dt$$

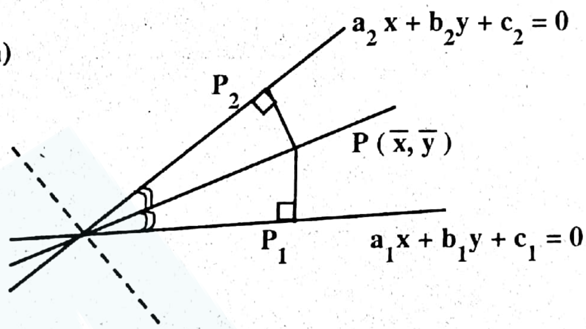
$x = -1$ විට $t = 1$ හා $x = -1/2$ විට $t = 8$

$$\int_{-1}^{-1/2} \frac{dx}{x(x^3-1)} = \frac{1}{3}\int_{-1}^{-1/2} \frac{3x^2\, dx}{x^3(x^3-1)} = \frac{1}{3}\int_{1}^{8} \frac{\frac{1}{t^2}\, dt}{\frac{-1}{t}\left(\frac{-1}{t} - 1\right)}$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{dt}{(1+t)} = \frac{1}{3}\, \ell n\, |1+t|\Big|_1^8$$

$$= \frac{1}{3}[\ell n\, 9 - \ell n\, 2] = \frac{1}{3}\ell n\, \frac{9}{2}$$

07. (a)



දී ඇති රේඛා දෙක අතර කෝණ සමච්ඡේදකයක් මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් $P(\overline{x}, \overline{y})$ යයි ගනිමු.

p සිට $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ හා $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ රේඛාවලට ඇති ලම්බවල අඩි p_1 හා p_2 නම්

$$PP_1 = \frac{|a_1\overline{x} + b_1\overline{y} + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \text{ හා } PP_2 = \frac{|a_2\overline{x} + b_2\overline{y} + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

තවද $PP_1 = PP_2$ බැවින්

$$\frac{|a_1\overline{x} + b_1\overline{y} + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{|a_2\overline{x} + b_2\overline{y} + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$(\overline{x}, \overline{y})$ රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් බැවින් සමච්ඡේදන වල සමීකරණය

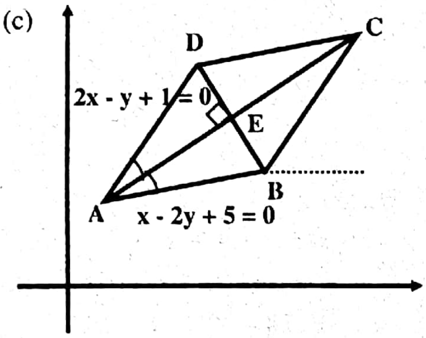
$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \text{ වේ.}$$

(b) (x_0, y_0) ලක්ෂ්‍යය හා (x, y) ලක්ෂ්‍ය අතර දුර

$$= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{(at)^2 + (bt)^2}$$
$$= \sqrt{(a^2+b^2)\, t^2} = \sqrt{a^2+b^2}\, |t|$$
$$= |t| \qquad (\because a^2 + b^2 = 1)$$

$\therefore$ $|t|$ යනු රේඛාව දිගේ (x_0, y_0) සිට (x, y) ට ඇති දුර වේ.

(c)



ඉහත (a) කොටස අනුව $B\hat{A}D$ හි සමච්ඡේදක වල සමීකරණ

$$\frac{2x - y + 1}{\sqrt{5}} = \pm \frac{x - 2y + 5}{\sqrt{5}}$$

එනම්

$x + y - 4 = 0$ හා $3x - 3y + 6 = 0$

$x - y + 2 = 0$ වේ.

AC යනු BAD හි සුළු කෝණ සමච්ඡේදකය වේ.

එවිට

$B\hat{A}C = D\hat{A}C < \pi/4$ විය යුතු ය.

දැන් $x + y - 4 = 0$ හා AD රේඛා අතර කෝණය α යයි ගනිමු.

එවිට $\tan\alpha = \left|\frac{-1 - 2}{1 + (-1) \times 2}\right| = \left|\frac{-3}{-1}\right| = 3 > 1$

$\therefore \alpha > \pi/4$

$\therefore$ AC හි සමීකරණය $x - y + 2 = 0$ වේ.

$x + y - 4 = 0$ හා $2x - y + 1 = 0$ විසඳීමෙන් $A \equiv (1, 3)$

(b) කොටස අනුව AC හි සමීකරණය $\frac{x - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y - 3}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = t$

ලෙස ගත හැක.

A සිට $2\sqrt{2}$ දුරින් AC මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යය

$\frac{x - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y - 3}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = |2\sqrt{2}|$ මගින් ලැබේ.

එවිට $x - 1 = 2$ හා $y - 3 = 2$ හෝ $x - 1 = -2$ හා $y - 3 = -2$

එනම් $(3, 5)$ හෝ $(-1, 1)$ අදාළ ලක්ෂ්‍ය වේ.

ABCD පූර්ණ ලෙස පළමු වෘත්ත පාදකය මත බැවින් $C \equiv (3, 5)$ වේ.

BC // AD බැවින් BC හි සමීකරණය $2x - y + \lambda = 0$ ආකාර වේ.

මෙය C (3, 5) හරහා යන බැවින්

$2 \times 3 - 5 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

එනම් BC හි සමීකරණය $2x - y - 1 = 0$ වේ.

DC // AB බැවින් DC හි සමීකරණය

$x - 2y + \mu = 0$ ආකාර වේ. මෙයද C හරහා යන බැවින්

$3 - 2 \times 5 + \mu = 0 \Rightarrow \mu = 7$

$\therefore$ DC හි සමීකරණය $x - 2y + 7 = 0$ වේ.

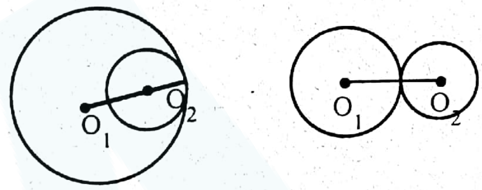
$DE = AE \tan\theta = \sqrt{2} \times \frac{1}{3}$ ($\because \theta = 90 - \alpha$)

$= \frac{\sqrt{2}}{3}$ ඒකක

ABCD හි වර්ගඵලය $= 4\ ADE\ \Delta = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3} \times \sqrt{2}$

$= \frac{4}{3}$ වර්ග ඒකක

08.



$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ හා

$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ යන වෘත්ත දෙකෙහි කේන්ද්‍ර අතර දුර d නම්

$d = \sqrt{(g_1 - g_2)^2 + (f_1 - f_2)^2}$ වේ.

ඒවායේ අරයන් පිළිවෙළින් r_1 හා r_2 නම්

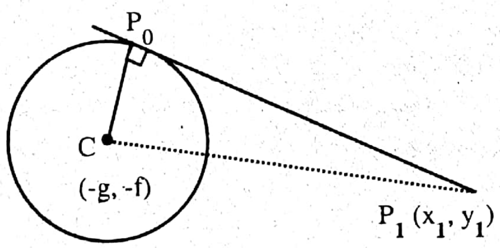
$r_1 = \sqrt{g_1^2 + f_1^2 - c_1}$ හා $r_2 = \sqrt{g_2^2 + f_2^2 - c_2}$ වේ.

වෘත්ත දෙක අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ වේ නම්

$d = |r_1 - r_2|$ වන අතර

බාහිරව ස්පර්ශ වේ නම් $d = r_1 + r_2$ වේ.

$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$



$P_1 (x_1, y_1)$ සිට $S = 0$ ට ඇඳි ස්පර්ශකය P_0 හිදී වෘත්තය ස්පර්ශ කරන්නේ යයි සිතමු.

CP_0 ස්පර්ශකයට ලම්බ වන අතර

$CP_0 = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ වේ.

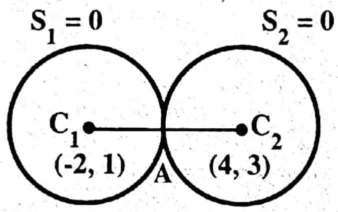
$CP_1 = \sqrt{(x_1 - -g)^2 + (y_1 - -f)^2}$

$CP_1^2 = P_1P_0^2 + CP_0^2$.

$$= (x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 - (g^2 + f^2 - c)$$

$$\therefore P_1P_0 = \sqrt{x_1^2 + 2gx_1 + g^2 + y_1^2 + 2fy_1 + f^2 - g^2 - f^2 + c}$$

$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + C}$$



$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$ හි කේන්ද්‍රය C_1 හා අරය r_1 නම්

$C_1 \equiv (-2, 1)$ $\quad r_1 = \sqrt{4 + 1 + 5} = \sqrt{10}$

$S_2 \equiv x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$ හි කේන්ද්‍රය C_2 හා අරය r_2 නම්

$C_2 \equiv (4, 3)$ $\quad r_2 = \sqrt{16 + 9 - 15} = \sqrt{10}$

$C_1C_2 = \sqrt{(4 + 2)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

දැන් $C_1C_2 = r_1 + r_2$ වන බැවින්

$S_1 = 0$ හා $S_2 = 0$ වෘත්ත දෙක බාහිරව ඡේදනය වේ.

$r_1 = r_2$ වන බැවින් A යනු C_1C_2 හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ..

$\therefore A \equiv (1, 2)$ වේ.

$P \equiv (\bar{x}, \bar{y})$ යයි ගනිමු.

P සිට $S_1 = 0$ ට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග $= \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 4\bar{x} - 2\bar{y} - 5}$

P සිට $S_2 = 0$ ට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග $= \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 8\bar{x} - 6\bar{y} + 15}$

$\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 4\bar{x} - 2\bar{y} - 5} = k\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 8\bar{x} - 6\bar{y} + 15}$ විට

$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 4\bar{x} - 2\bar{y} - 5 = k^2(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 8\bar{x} - 6\bar{y} + 15)$

$(1 - k^2)\bar{x}^2 + (1 - k^2)\bar{y}^2 + 4(1 + 2k^2)\bar{x} - 2(1 - 3k^2)\bar{y} - 5(1 + 3k^2) = 0$

(i) $k = 1$ විට $12\bar{x} + 4\bar{y} - 20 = 0$

$\therefore$ $k = 1$ විට P හි පථය $3x + y - 5 = 0$ සරල රේඛාව වේ. (1, 2) ලක්ෂ්‍යය මෙම සරල රේඛාව තෘප්ත කරන අතර එහි අනුක්‍රමණය -3 වේ.

දැන් C_1C_2 හි අනුක්‍රමණය $= \frac{3 - 1}{4 + 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$3x + y - 5 = 0$ හා C_1C_2 හි අනුක්‍රමණ ගුණිතය

$= -3 \times \frac{1}{3} = -1$ බැවින්

$3x + y - 5 = 0$, C_1C_2 ට ලම්බ වේ.

$\therefore$ $k = 1$ විට P හි පථය වෘත්ත දෙකේ කේන්ද්‍ර යා කරන රේඛාවට $\perp$ A හරහා යන සරල රේඛාව වේ.

(ii) $k \neq 1$ විට $1 - k^2 \neq 0$ වෙයි.

එවිට P හි පථය

$(1 - k^2)x^2 + (1 - k^2)y^2 + 4(1 + 2k^2)x - 2(1 - 3k^2)y - 5(1 + 3k^2) = 0$

වේ මගින් දැක්වෙන වෘත්තය වේ.

A හි බණ්ඩාංක ඉහත සමීකරණයට ආදේශයෙන්

$L.H.S. = (1 - k^2) + (1 - k^2) . 4 + 4(1 + 2k^2) - 2(1 - 3k^2) \times 2 - 5(1 + 3k^2)$

$= 5 - 5k^2 + 4 + 8k^2 - 4 + 12k^2 - 5 - 15k^2$

$= 0$

A ලක්ෂ්‍යය සමීකරණය තෘප්ත කරන බැවින්

$k \neq 1$ විට P හි පථය A හරහා යන වෘත්තයකි.

$k = \frac{1}{2}$ විට වෘත්තයේ සමීකරණය

$\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 + 6x - \frac{1}{2}y - \frac{35}{4} = 0$ වේ.

එනම් $x^2 + y^2 + 8x - \frac{2}{3}y - \frac{35}{3} = 0$ මෙය $S_3 = 0$ යයි ගනිමු.

මෙහි කේන්ද්‍රය C_3 වන අරය r_3 නම්

$C_3 \equiv (-4, \frac{1}{3})$ හා $r_3 = \sqrt{16 + \frac{1}{9} + \frac{35}{3}} = 5\frac{\sqrt{10}}{3}$

දැන් $C_1C_3 = \sqrt{2^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{40}}{3} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$

$C_1C_3 = \frac{5\sqrt{10}}{3} - \sqrt{10} = r_3 - r_1$

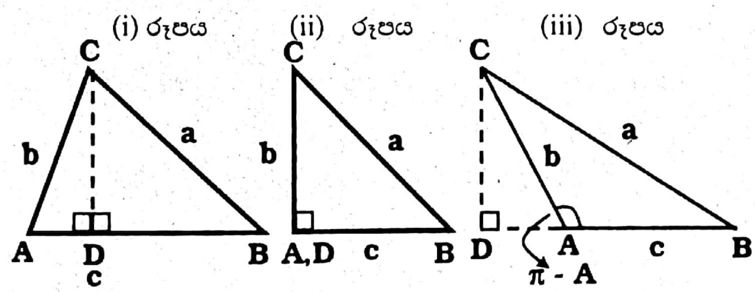
එබැවින් $S_1=0$ හා $S_3=0$ A හි දී අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ වේ.

$C_2C_3 = \sqrt{8^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{8}{3}\sqrt{10} = \frac{5\sqrt{10}}{3} + \sqrt{10} = r_3 + r_2$

$\therefore$ $S_3 = 0$ හා $S_2 = 0$ A හිදී බාහිරව ස්පර්ශ වේ.

09. (a) ABC ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සම්මත අංකනයෙන් $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ වේ.

සාධනය



ABC සුළුකෝණී විට ABC සෘජුකෝණී විට ABC මහ කෝණී විට

ABC සුළුකෝණී විට (i) රූපයෙන්

$BC^2 = CD^2 + DB^2$

$= AC^2 - AD^2 + (AB - AD)^2$

$= AC^2 + AB^2 - 2\,AB\,AD$

$= AC^2 + AB^2 - 2AC.\,AB\cos A$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

ABC සෘජුකෝණී විට (ii) රූපයෙන්

$BC^2 = AC^2 + AB^2$

$= AC^2 + AB^2 - 2\,AC,\,AB\cos \pi/2$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

ABC මහ කෝණී විට (iii) රූපයෙන්

$BC^2 = CD^2 + DB^2$

$= AC^2 - AD^2 + (AB + AD)^2$

$= AC^2 - AD^2 + AB^2 + 2AB.\,AD + AD^2$

$= AC^2 + AB^2 + 2AB.\,AC\cos(\pi - A)$

$= AC^2 + AB^2 - 2\,AB\,AC\cos A$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

∴ ABC ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් විට

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(i) $2\left(\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}\right)$

$= 2\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2abc} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2abc}\right)$

$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$

(ii) $\frac{1}{a + c} + \frac{1}{b + c} = \frac{3}{a + b + c}$ නම්

$\frac{a + b + 2c}{(a + c)(b + c)} = \frac{3}{a + b + c}$

$(a + b + 2c)(a + b + c) = 3(a + c)(b + c)$

$(a + b)^2 + 3c(a + b) + 2c^2 = 3ab + 3ac + 3bc + 3c^2$

$a^2 + b^2 + 2\cancel{a}b + 3\cancel{a}c + 3\cancel{b}c + 2c^2 = 3\cancel{a}b + 3\cancel{a}c + 3\cancel{b}c + 3c^2$

$a^2 + b^2 - c^2 = ab$

$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$

$\cos C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{3}$

(b) $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right]$

$= 2\left[\cos\frac{\pi}{6}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{6}\sin\theta\right]$

$= 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$

$= R\cos(\theta - \alpha)$;

මෙහි $R = 2$ හා $\alpha = \frac{\pi}{6}$ වේ.

$\sqrt{3}\cos^2\theta + (1 - \sqrt{3})\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta = \cos\theta - \sin\theta$

$(\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta) = \cos\theta - \sin\theta$

$(\cos\theta - \sin\theta)(\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta - 1) = 0$

$\cos\theta - \sin\theta = 0$ හෝ $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = 1$

$\cos\theta = \sin\theta$ හෝ $2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ (ඉහත කොටස අනුව)

$\tan\theta = 1$ හෝ $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$ හෝ $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$

$\theta = 2m\pi + \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3}$

මෙහි n හා m නිඛිල වේ.

(c) **1 අවස්ථාව** $-1 \le x \le 1$ විට

$x > 0$ විට

$\theta = \cos^{-1}x$ යයි සිතමු.

එවිට $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$ වේ.

එවිට $x = \cos\theta$ වන අතර

$-x = -\cos\theta = \cos(\pi - \theta)$ වේ.

එබැවින් $\cos^{-1}(-x) = \pi - \theta = \pi - \cos^{-1}x$

2 අවස්ථාව $x < 0$ යයි සිතමු.

එවිට $x = -y$ ලෙස $y > 0$ මගින් දැක්විය හැක.

එවිට 1 අවස්ථාව අනුව

$\cos^{-1}(-y) = \pi - \cos^{-1}y$ වේ.

දැන් $-y = x$ ලෙස යෙදීමෙන්

$\cos^{-1}x = \pi - \cos^{-1}(-x)$ ලැබේ.

3 අවස්ථාව $x = 0$ යයි සිතමු.

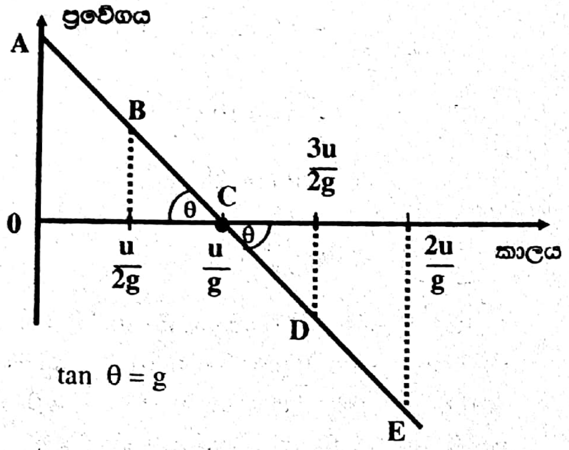
එවිට $\cos^{-1}x = \cos^{-1}0 = \frac{\pi}{2}$ හා

$\cos^{-1}(x) = \cos^{-1}0 = \frac{\pi}{2}$

මෙලෙස $\cos^{-1}x = \pi - \cos^{-1}(-x)$ වේ.

*** ***

01. (a)



$\tan\theta = g$

P_1, P_2 හා P_3 අංශු **තිරස්** ලෙස ප්‍රක්ෂේප කරන බැවින් ඒවායේ ආරම්භක **සිරස්** ප්‍රවේග සංරචක පිළිවෙළින් P අංශුවේ. $\frac{u}{2g}$, $\frac{u}{g}$ හා $\frac{3u}{2g}$ කාල වලදී

සිරස් ප්‍රවේගයන් වේ. එබැවින් P අංශුවේ ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාරය AE රේඛාවෙන් නිරූපනය වෙයි නම්, P_1, P_2 හා P_3 අංශුවල ප්‍රවේගයන්ගේ සිරස් සංරචක සඳහා වන ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාර කොටස් පිළිවෙළින් BE, CE හා DE කොටස් මගින් නිරූපනය වේ.

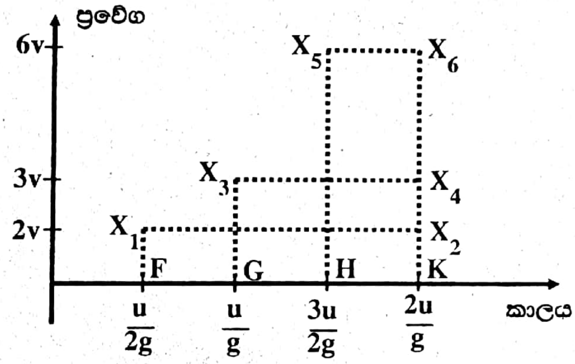
ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාරයට අනුව $t = \frac{2u}{g}$ කාලයේ දී P අංශුව පොළොවට ළඟ වෙයි.

$t = \frac{u}{2g}$ කාලයේදී ප්‍රක්ෂේප කෙරෙන P_1 අංශුව ද $\frac{3u}{2g}$ කාලයක් චලනය වීමෙන් පසු $t = \frac{2u}{g}$ මොහොතේ දී පොළොවට ළඟා වේ.

$t = \frac{u}{g}$ කාලයේ දී ප්‍රක්ෂේප කෙරෙන P_2 අංශුව ද $\frac{u}{g}$ කාලයකට පසු $t = \frac{2u}{g}$ මොහොතේ දී පොළොවට ළඟා වේ.

$t = \frac{3u}{2g}$ කාලයේ දී ප්‍රක්ෂේප කෙරෙන P_3 අංශුව $\frac{u}{2g}$ කාලයකට පසු $t = \frac{2u}{g}$ මොහොතේ දී පොළොවට ළඟා වේ.

එනම් අංශු තුනම $t = \frac{2u}{g}$ කාලයේ දී, (එකම මොහොතේ) පොළොවට ළඟා වේ.



ඉහත ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාරයට අනුව P_1, P_2 හා P_3 අංශුන්ගේ ප්‍රවේග - කාල ප්‍රස්තාර X_1X_2, X_3X_4 හා X_5X_6 මගින් නිරූපනය වේ.

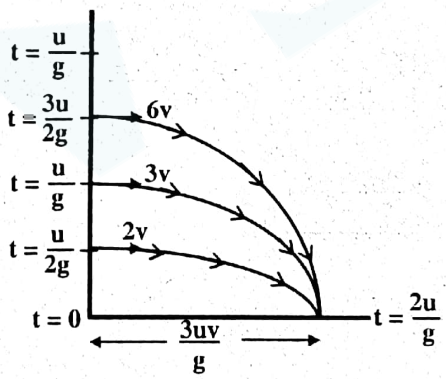
එක් එක් අංශුවේ තිරස් විස්ථාපනයක් සොයමු.

P_1 හි විස්ථාපනය = $X_1X_2KF \square = 2v \times \left(\frac{2u}{g} - \frac{u}{2g}\right) = \frac{3uv}{g}$

P_2 හි විස්ථාපනය = $X_3X_4KG \square = 3v \times \left(\frac{2u}{g} - \frac{u}{g}\right) = \frac{3uv}{g}$

P_3 හි විස්ථාපනය = $X_5X_6KH \square = 6v \times \left(\frac{2u}{g} - \frac{3u}{2g}\right) = \frac{3uv}{g}$

එමනිසා අංශුන් තුනම එකම ලක්ෂ්‍යයක දී, එකම කාලයේ දී පොළවට ළඟා වේ. (∵ අංශු තුනේම තිරස් විස්ථාපනයන් සමාන බැවින්) පහත සටහන වලින පථයන් දක්වයි.



(b) (මි ජ) = u

(ජ E) = v

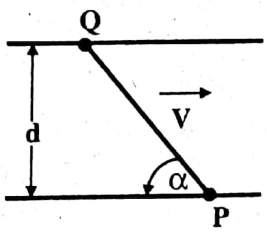
(මි E) = (මි ජ) + (ජ E)

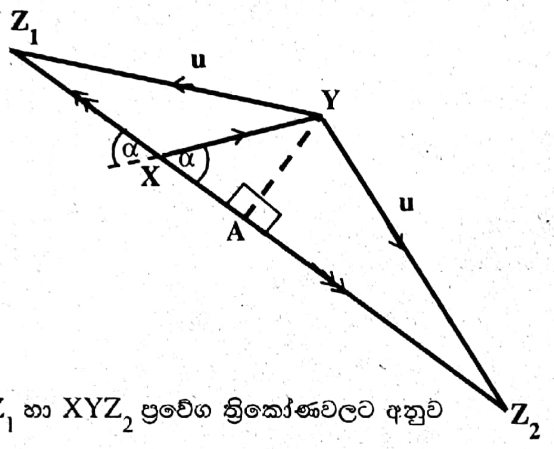
$= u \; + \rightarrow v$

$= \rightarrow v + u$

$= \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}_i$

$= \overrightarrow{XZ}_i \; (i = 1, 2)$





XYZ_1 හා XYZ_2 ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණවලට අනුව

$XZ_1 = \sqrt{u^2 - v^2 \sin^2 \alpha} - v \cos \alpha$

$\overrightarrow{XZ_2} = \sqrt{u^2 - v^2 \sin^2 \alpha} + v \cos \alpha$

දෙගමනට ගතවන කාලය T නම්

$$T = \frac{PQ}{|\overrightarrow{XZ_1}|} + \frac{PQ}{|\overrightarrow{XZ_2}|}$$

$$= PQ\left(\frac{1}{XZ_1} + \frac{1}{XZ_2}\right)$$

$$= PQ\left[\frac{1}{(AZ_1 - AX)} + \frac{1}{(AZ_2 + AX)}\right]$$

$$= PQ\left[\frac{AZ_1 + \cancel{AX} + AZ_1 - \cancel{AX}}{AZ_1^2 - AX^2}\right]$$

$$= \frac{PQ \times 2\,AZ_1}{u^2 - v^2 \sin^2 \alpha - v^2 \cos^2 \alpha} \quad (\because AZ_1 = AZ_2 \text{ වේ.})$$

$$= \frac{2PQ\,(u^2 - v^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}}{u^2 - v^2}$$

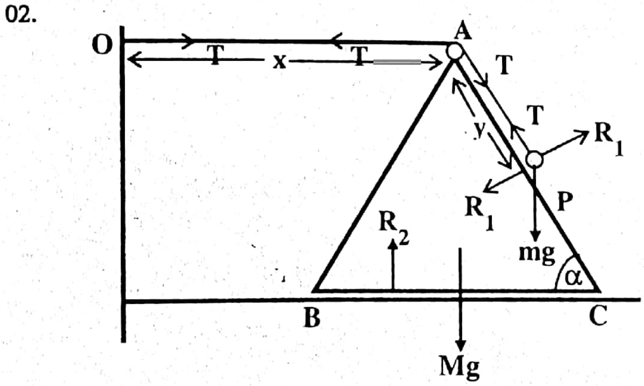
$$= \frac{2\,d \operatorname{cosec} \alpha\,(u^2 - v^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}}{u^2 - v^2}$$

$$= \frac{2d\,(u \operatorname{cosec}^2 \alpha - v^2)^{1/2}}{u^2 - v^2}$$

(i) Q ලක්ෂ්‍යය P ලක්ෂ්‍යයේ සිට ගඟ ගලන දිශාවෙහි නම් α වෙනුවට ඉහත ප්‍රතිඵලයෙහි $\pi - \alpha$ යෙදුවද T වෙනසක් නොවේ.

(ii) T අවම වන්නේ $\operatorname{cosec}^2 \alpha$ අවම වන විටය. අවම $\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1$ බැවින් හා එසේ වන්නේ $\alpha = \pi/2$ විට බැවින් T අවම වීම සඳහා PQ රේඛාව ගං ඉවුරට ලම්බ විය යුතුයි.

02.



කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව අංශුව ගමන් කරන දුර, පොළොවට සාපේක්ෂව කුඤ්ඤය ගමන් කරන දුරට සමාන වේ. තන්තුවේ දිග ℓ බැවින් $t = t$ විට $OA = x$ හා $AP = y$ නම් $x + y = \ell$ වේ. t විෂයයෙන් දෙවරක් අවකලනයෙන් $x + y = 0$ බව ලැබේ.

(කු E) $= \underleftarrow{F}$ නම් $|F| = \ddot{x} \Rightarrow F = -\ddot{x}$

(අං කු) $= \overset{f}{\searrow}\alpha$ නම් $|f| = \ddot{y}$ වේ $f = \ddot{y}$

$-F + f = 0 \Rightarrow F = f$

(අං E) = (අං කු) + (කු E)

$= \overset{f}{\searrow}\alpha + \underleftarrow{F}$

$= \overset{f}{\searrow}\alpha\ \underleftarrow{F} = \downarrow f \sin \alpha,\ \underleftarrow{F - f \cos \alpha}$

$\underline{F} = m\underline{a}$ යොදමු.

P ට $\searrow$ $-T + mg \sin \alpha = m(f - F \cos \alpha)$ —— ①

පද්ධතියට $\leftarrow$ $T = MF + m(F - f \cos \alpha)$ —— ②

$F = f$ ආදේශයෙන්

① න් $-T + mg \sin \alpha = mF(1 - \cos \alpha)$ —— ③

② න් $T = MF + mF(1 - \cos \alpha)$ —— ④

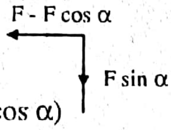
③ + ④ න් $mg \sin \alpha = F[M + 2m(1 - \cos \alpha)]$ මගින් F ලබාගත හැක.

B සිට බිත්තියට ඇති දුර d නම්, කුඤ්ඤයේ චලිතය සලකා $S = ut + \frac{1}{2}at^2$ $\leftarrow$ යෙදීමෙන්

$$d = 0 + \frac{1}{2}Ft_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2d}{F}}$$

F සඳහා ආදේශයෙන් $t_1 = \sqrt{\dfrac{2d\,[M + 2m(1 - \cos \alpha)]}{mg \sin \alpha}}$ ලැබේ.

අංශුවට v = u + at යෙදීමෙන් (අං E) =



← $v_1 = 0 + (F - F\cos\alpha)\,t_1 = Ft_1\,(1 - \cos\alpha)$

↓ $v_2 = 0 + F\sin\alpha\, t_1 \quad = Ft_1\sin\alpha$

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \quad = Ft_1\,[(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha]^{1/2}$$

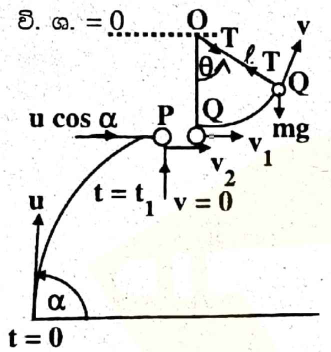
$$= Ft_1\,[2\,(1-\cos\alpha)]^{1/2}$$

t_1 හා F සඳහා ආදේශයෙන්

$$V = \left\{\frac{mg\sin\alpha}{M + 2m\,(1-\cos\alpha)}\right\}\sqrt{\frac{2d\,\{M + 2m\,(1-\cos\alpha)}{mg\sin\alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{2d\,mg\sin\alpha}{M + 2m\,(1-\cos\alpha)}}$$

03.



A → B චලිතය සලකා P අංශුවට,

↑ v = u + at යෙදීමෙන් $O = u\sin\alpha - gt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{u\sin\alpha}{g}$

→ $S = ut + \frac{1}{2}ft^2$ යෙදීමෙන් $a = u\cos\alpha\, t_1 \Rightarrow$

$$a = u\cos\alpha \times \frac{u\sin\alpha}{g}$$

$$\Rightarrow a = u^2\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{2g} = \frac{u^2\sin 2\alpha}{2g}$$

P හා Q සරලව ගැටෙන බැවින් (P තිරස් ලෙස චලනය වන බැවින්) ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්, ගැටුමින් පසු Q හා P හි වේග v_1 හා v_2 නම්

$\cancel{m}\,u\cos\alpha = \cancel{m}\,v_1 + \cancel{m}\,v_2$ — ① (P හි තිරස් ප්‍රවේග සංරචකය ගැටෙන මොහොත තෙක්ම u cos α වේ.)

නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමය යෙදීමෙන්
$e\,u\cos\alpha = v_1 - v_2$ — ②

① + ② $v_1 = \frac{u}{2}\cos\alpha\,(1 + e)$ ① - ② $v_2 = \frac{u}{2}\cos\alpha\,(1 - e)$

O ලක්ෂ්‍යය අචල යයි සලකමු. එවිට Q අංශුව කේන්ද්‍රය O වූ ද, අරය ℓ වූද වෘත්තයක චලිතය අරඹයි.

QO දිශාවට $\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්, QO උඩු අත් සිරසට θ කෝණයක් ආනතව ඇති විට

$$T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{\ell} \quad — ③$$

O හරහා තිරස් මට්ටම සම්මත විභවය ලෙස ගෙන ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 - \cancel{m}g\ell = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - \cancel{m}g\,\ell\cos\theta \quad — ④$$

$$\frac{1}{2}.\frac{u^2}{4}\cos^2\alpha\,(1+e)^2 - g\ell = \frac{1}{2}v^2 - g\ell\cos\theta$$

$v^2 = \frac{1}{4}u^2\cos^2\alpha\,(1+e)^2 - 2g\ell(1-\cos\theta)$ බව ලැබේ.

මෙම අගය ③ හි ආදේශ කිරීමෙන්

$$T = mg\cos\theta + \frac{m}{\ell}\left[\frac{1}{4}u^2\cos^2\alpha\,(1+e)^2 - 2g\ell\,(1-\cos\theta)\right]$$

Q අංශුව පූර්ණ වෘත්තයක් ගෙවා යෑමට නම් සියලු θ සඳහා T ≥ O විය යුතුය.

එනම් අවම T ≥ O විය යුතුය. T අවම වන්නේ θ = π විටය. [∵ අවම cos θ = -1 බැවින්]

එවිට $T_{අවම} = mg\,(-1) + \frac{m}{\ell}[\frac{1}{4}u^2(1+e)^2\cos^2\alpha - 2g\,\ell\,(1+1)\} \ge 0$ විය යුතුය.

$$\Rightarrow \frac{m}{\ell}\left[\frac{1}{4}u^2\,(1+e)^2\cos^2\alpha - 5g\ell\right] \ge 0$$

$$u^2\,(1+e)^2\cos^2\alpha \ge 20\,g\ell$$

$$u^2\cos^2\alpha \ge \frac{20\,g\ell}{(1+e)^2}$$

Q අංශුව පූර්ණ වෘත්ත ගෙවා යෑම සඳහා

$u\cos\alpha \ge \frac{2\sqrt{5\,g\ell}}{1+e}$ විය යුතුය.

P හි ආරම්භක චලිතය සලකා A → B සඳහා $v^2 = u^2 + 2as$ යෙදීමෙන්

$$0 = u^2\sin^2\alpha - 2gh \Rightarrow h = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$$

ගැටුමින් පසු P හි වේගය v_2 බැවින් B සිට නැවත ආරම්භක ලක්ෂ්‍යය හරහා ඇඳි තිරස් තලය තෙක් චලිතය සලකා,

↓ $S = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්

$$\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = 0 + \frac{1}{2}gt_2^2 \Rightarrow t_2 = \frac{u\sin\alpha}{g} = t_1$$

මෙම t_2 කාලය තුල P හි තිරස් විස්ථාපනය b නම්

$$b = v_2t_2 = \frac{u}{2}\cos\alpha\,(1-e)\,\frac{u\sin\alpha}{g}$$

∴ P අංශුවේ මුළු තිරස් විස්ථාපනය $= a + b = \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} + \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{2g}(1-e)$

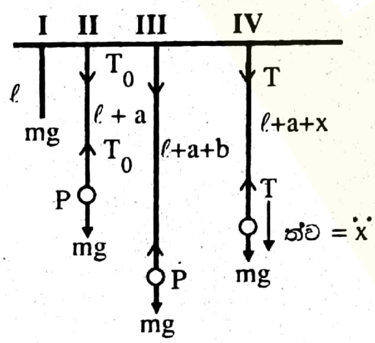
$$= \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{2g}\,[2+1-e]$$

$$= \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{2g}\,(3-e)$$

$$= \frac{u^2}{4g}\sin 2\alpha\,(3-e)$$

$e = 3$ විට සම්ප්‍රයුක්ත විස්ථාපනය ශුන්‍ය වන බැවින් P අංශුව ආරම්භක ලක්ෂ්‍යය වෙත ආපසු පැමිණෙයි.

04.



P අංශුව ස්වකීය සමතුලිත පිහිටීමේ දී තන්තුවේ විතතිය a වන අතර ඇදි තන්තුවේ ආතතිය T_0 යයි ගනිමු.

(I හා II රූප සටහන්)

$T_0 = mg$ වන අතර $T_0 = \frac{\lambda a}{\ell}$ (හුක් ගේ නියමය අනුව)

$$\therefore\ mg = \frac{\lambda a}{\ell} \Rightarrow a = \frac{mg\ell}{\lambda}$$

iv. අවස්ථාව සලකමු.

එවිට $T = \frac{\lambda(a+x)}{\ell}$

↓ $\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

$$mg - T = m\ddot{x}$$

$$mg - \frac{\lambda(a+x)}{\ell} = m\ddot{x}$$

$$\cancel{m}g - \frac{\cancel{m}g}{a}(a+x) = \cancel{m}\ddot{x}$$

$$g - g - \frac{g}{a}x = \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{-g}{a}x$$

මෙම සමීකරණය වලංගු වන්නේ තන්තුව ඇදී පවතින අතරතුරදී පමණි. ස. අ. චලිතයේ කේන්ද්‍රය x = 0 වන x = 0 විට බැවින් එය II සමතුලිත පිහිටීම වෙයි.

b > a බව දී ඇති නිසා මුදා හරින ලද අංශුව ඉහළට ගමන් කරන අතර x < -a විට චලිත සමීකරණය වලංගු නොවේ. (තන්තුව හැකිලෙන බැවින්)

∴ $-a \le x \le b$ විට පමණක් අංශුවේ චලිත සමීකරණය $\ddot{x} + \frac{g}{a}x = 0$ වේ.

$x = A\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$ විසඳුමක් යයි උපකල්පනය කරමු.

t විෂයයෙන් අවකලනයෙන්

$$\dot{x} = -A\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + B\sqrt{\frac{g}{a}}\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t \quad \text{— ①}$$

t = 0 විට x = b වන අතර $\dot{x} = 0$ බැවින්

$b = A$ හා $0 = B\sqrt{\frac{g}{a}} \Rightarrow B = 0$

∴ විසඳුම $x = b\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$ වේ.

x = -a විට තන්තුව හැකිලෙන බැවින් ස. අ. ච. අවසන් වෙයි. එවිට $t = t_1$ නම්

$$-a = b\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t_1 \Rightarrow \sqrt{\frac{g}{a}}\,t_1 = \cos^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)$$

$$\Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{a}{g}}\cos^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)$$

$$\Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{a}{g}}\,(\pi/2 + \alpha)$$

$\cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin\alpha = -\frac{a}{b}$ වන පරිදි α කෝණයක් තෝරා ගනිමු. එම $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$

∴ $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ වන t_1 කාලයක් සඳහා අංශුව සරල අනුවර්තී චලිතයේ යෙදේ.

① න් B = 0 බැවින්

$$\dot{x} = -b\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t \text{ බැවින්}$$

$$t = t_1\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \text{ විට}$$

$$\dot{x} = -b\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\times\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)$$

$$= -b\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -b\sqrt{\frac{g}{a}}\cos\alpha = -b\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$$

$$\dot{x} = -b\sqrt{\frac{g}{a}}\,\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b} = -\sqrt{\frac{g}{a}(b^2-a^2)}$$

$\therefore$ අංශුව $t = t_1$ විට $\uparrow \sqrt{\frac{g}{a}(b^2-a^2)}$ ප්‍රවේගයෙන් අනුවර්තී චලිතයෙන් ඉවත් වී ගුරුත්වය පමණක් යටතේ සිරස්ව ඉහළට චලනය වේ.

අංශුවේ චලිතය සලකා $\uparrow$ $v^2 = u^2 + 2as$ යෙදීමෙන් (සීලිම තෙක්)

$$u = \sqrt{\frac{g}{a}(b^2-a^2)} \quad , \quad a = -g\,,\ s = \ell$$

$$v^2 = \frac{g}{a}(b^2-a^2) - 2g\ell$$

$$= \frac{g}{a}[b^2 - a^2 - 2a\ell]$$

$$= \frac{g}{a}[b^2 - a^2 - 2a.\frac{\lambda a}{mg}] \quad \because a = \frac{mg\ell}{\lambda} \text{ බව පෙර ලැබී ඇත.}$$

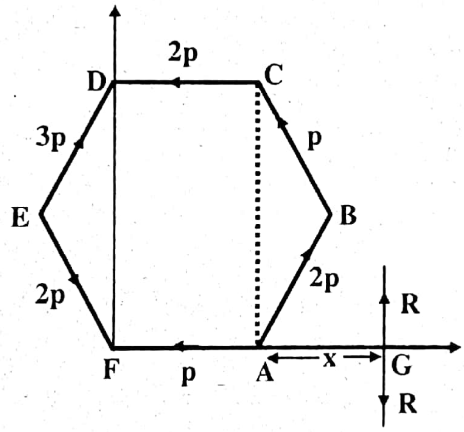
$$= \frac{g}{a}[b^2 - a^2(1+\frac{2\lambda}{mg})]$$

නිශ්ශුන්‍ය ප්‍රවේගයෙන් සීලිමේ ගැටීමට නම් $V^2 > 0$ විය යුතුයි.

මේ සඳහා $b^2 - a^2\left(1+\frac{2\lambda}{mg}\right) > 0$ විය යුතුය.

$$b > a\sqrt{1+\frac{2\lambda}{mg}} \quad \text{විය යුතුය.}$$

05. (a)



බල විභේදනය කරමු.

$\vec{X} = -P - 2P + 2P\cos 60 - P\cos 60 + 3P\cos 60 + 2P\cos 60$

$= -3P + 6P\cos 60$

$= -3P + 6P\times\frac{1}{2}$

$= -3P + 3P$

$\vec{X} = 0$

$\uparrow Y = (2P + P + 3P - 2P)\cos 30$

$= 4P\cos 30$

$= 4P\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\uparrow Y = 2\sqrt{3}\,P$

$X = 0$ බැවින් හා $Y \neq 0$ බැවින් පද්ධතිය $\uparrow$ දිශාවට වූ $R = 2\sqrt{3}\,P$ බලයකට තුල්‍ය වේ.

A වටා පද්ධතියේ ඝූර්ණ ගනිමු.

$\curvearrowleft A\,;\ P\times 2a\cos 30 + 2P\times 4a\cos 30 + 2P\times 2a\cos 30 - 3P\times 4a\cos 30$

$= 2\,Pa\cos 30\,[1 + 4 + 2 - 6] = Pa\sqrt{3}$

මේ අනුව බල පද්ධතිය A හරහා වූ $2\sqrt{3}\,P$ (AC දිශාවට) තනි බලයකටත්, ABCD අතට වූ $\sqrt{3}$ Pa ඝූර්ණය සහිත බල යුග්මයකටත් ඌනනය වේ.

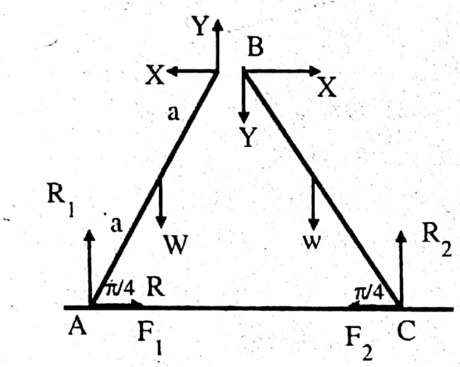
යුග්මය, සමාන සමාන්තර බල දෙකකින් ප්‍රතිස්ථාපනය කරමු. CA දිශාවට වූ $2\sqrt{3}\,P$ බලයක් හා ඊට ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවට වූ $2\sqrt{3}\,P$ බලයක් (දික්කල FA මත වූ G) පද්ධතියට එක් කරමු. $AG = x$ නම්, $2\sqrt{3}\,P\times x = Pa\sqrt{3}$ විය යුතුය.

එවිට $X = \frac{a}{2}$ වේ.

ඒ අනුව බල පද්ධතිය, දික් කළ FA පාදය $AG = \frac{a}{2}$ වන පරිදි වූ G ලක්ෂ්‍යයේ ක්‍රියාකරන AC ට සමාන්තර වූ $2\sqrt{3}\,P$ තනි බලයකට තුල්‍ය වේ.

පද්ධතිය සමතුලිතතාවයේ පවත්වා ගැනීම සඳහා G හරහා CA දිශාවට සමාන්තර වන පරිදි $2\sqrt{3}P$ විශාලත්වයෙන් යුත් බලයක් පද්ධතියට එක් කළ යුතුය. මෙම බලය R ට සමාන වේ.

(b)



පද්ධතියේ සමතුලිතතාවය සලකා තිරස් විභේදනයෙන් $\rightarrow F_1 - F_2 = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 = F$ යයි ගනිමු.

A වටා සූර්ණ ගැනීමෙන් (දණ්ඩක දිග 2a යයි ගනිමු.)

$$W \times a\cos 45 + w \times 3a\cos 45 = R_2 \times 4a\cos 45$$

$$\therefore \quad R_2 = \frac{W + 3w}{4}$$

C වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්

$$W \times a\cos 45 + w \times 3a\cos 45 = R_1 \times 4a\cos 45$$

$$\therefore \quad R_1 = \frac{3W + w}{4}$$

AB දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සලකා B වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$W \times \cancel{a\cos 45} + F_1 \times 2\cancel{a\sin 45} - R_1 \times 2\cancel{a\cos 45} = 0$$

$$\therefore \quad F_1 = \frac{R_1 - W}{2}$$

$$= \frac{2\left(\frac{3W + w}{4}\right) - W}{2}$$

$$F_1 = \frac{W + w}{4} = F_2 \text{ වේ.}$$

A හිදී නොලිස්සීමට නම් $\frac{F_1}{R_1} \leq \mu$ ද

C හිදී නොලිස්සීමට නම් $\frac{F_2}{R_2} \leq \mu$ ද විය යුතුය.

එනම් $\frac{W + w}{3W + w} \leq \mu$ ද $\frac{W + w}{W + 3w} \leq \mu$ ද විය යුතුය.

W > w බව දී ඇති නිසා අවශ්‍යතාවන් ඉෂ්ට වීම සඳහා

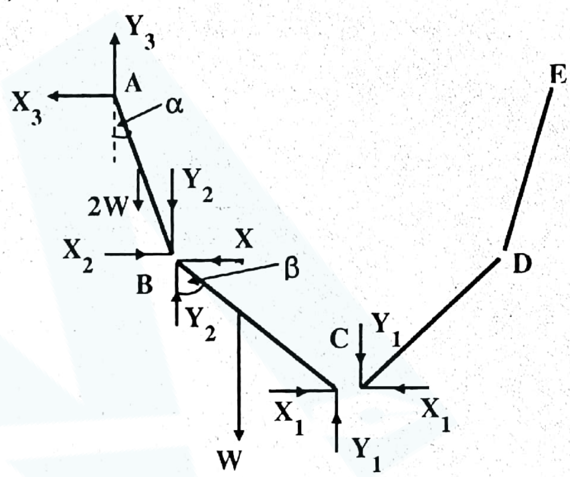
$\frac{W + w}{W + 3w} \leq \mu$ විය යුතුය. $\left[\therefore \frac{W + w}{3W + w} < \frac{W + w}{W + 3w}\right.$ නිසා$\left.\right]$

$\therefore$ අවම $\mu = \frac{W + w}{W + 3w}$

$\mu = \frac{W + w}{W + 3w}$ නම් C ලක්ෂ්‍යය සීමාකාරී සමතුලිතතාවයට එළඹෙන නමුත් $\frac{F_1}{R_1} < \mu$ බැවින් A හිදී එසේ නොවේ.

එබැවින් A හිදී නොව C හිදී ලිස්සීම සිදුවීමට ආසන්න වේ.

06. (a)



දණ්ඩක දිග 2a යයි ගනිමු.

පද්ධතිය C හරහා ඇති සිරස් රේඛාව වටා සමමිතික වේ.

$\therefore Y_1 = 0$

BC දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සලකා B වටා සූර්ණ ගැනීමේ

$$W \times a\sin\beta = X_1 \times 2a\cos\beta \quad \Rightarrow X_2 = \frac{W}{2}\,\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

AB හා BC දඬු දෙකේ සමතුලිතතාවය සලකා A වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්

$$2\cancel{W} \times \cancel{a}\sin\alpha + \cancel{W} \times (2\cancel{a}\sin\alpha + \cancel{a}\sin\beta)$$

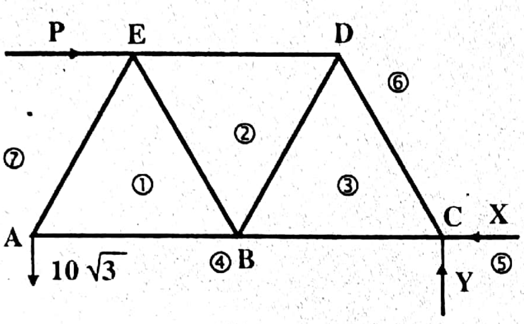
$$= \frac{W}{2}\,\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\,(2a\cos\alpha + 2a\cos\beta)$$

$$2\sin\alpha + 2\sin\alpha + \sin\beta = \tan\beta\cos\alpha + \sin\beta$$

$$4\sin\alpha = \tan\beta\cos\alpha$$

$$4\tan\alpha = \tan\beta$$

(b)



දණ්ඩක දිග 2a යයි ගනිමු.

රාමු සැකිල්ලේ සමතුලිතතාවය සලකා C වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$10\sqrt{3}\times 4\cancel{a} = P\times 2\cancel{a}\sin 60 \Rightarrow 40\cancel{\sqrt{3}} = P\times 2\times\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2} \Rightarrow \underline{P = 40\text{ N}}$

තිරස් විභේදනයෙන් $\leftarrow$ X = P = 40

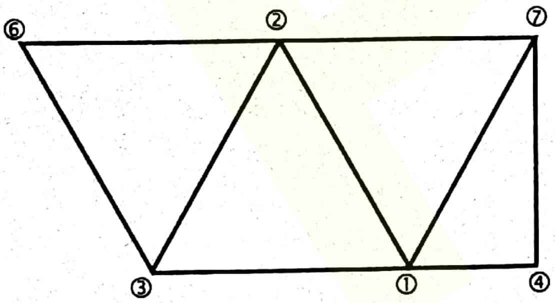
සිරස් විභේදනයෙන් $\uparrow$ $Y = 10\sqrt{3}$

C හි ප්‍රතික්‍රියාව$= \sqrt{40^2 + (10\sqrt{3})^2} = \sqrt{1900} = 10\sqrt{19}$ N

C හි ප්‍රතික්‍රියාව තිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදයි නම්,

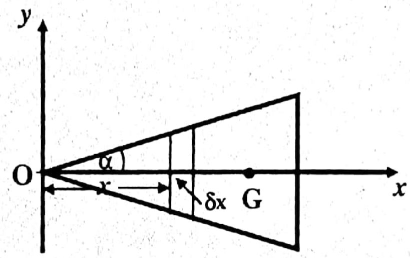
$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{10\sqrt{3}}{40} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

ප්‍රත්‍යා බල සටහන



දණ්ඩ	ප්‍රත්‍යාබලය	විශාලත්වය
AB	තෙරපුම	10 N
AE	ආතතිය	20 N
BE	තෙරපුම	20 N
DE	තෙරපුම	20 N
BD	ආතතිය	20 N
CD	තෙරපුම	20 N
BC	තෙරපුම	30 N

07.



සමමිතිකත්වයෙන් කේතුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය x - අක්ෂය මත පිහිටයි. එය G නම් $G \equiv (\bar{x}, 0)$ ආකාරය වේ.

y අක්ෂයේ සිට x දුරින් වූ ඝනකම δx වූ තුනී තැටියක් සලකමු.

එම තැටියේ පරිමාව $= \pi (x\tan\alpha)^2\,\delta x$

කේතුවේ ඝනත්වය ρ නම්

තැටියේ බර $= \pi (x\tan\alpha)^2\,\delta x \times \rho$

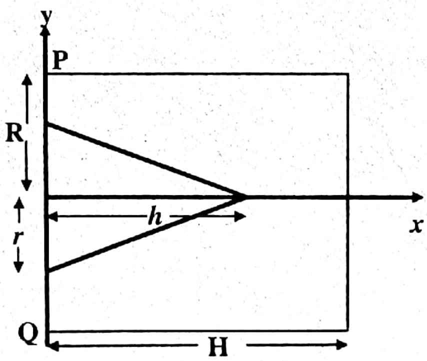
ගු. කේ. අර්ථ දැක්වීමෙන්

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h \pi x^2\tan^2\alpha\, dx\rho \times x}{\int_0^h \pi x^2\tan^2\alpha\, dx\rho}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}[x^4]_0^h}{\frac{1}{3}[x^3]_0^h} = \frac{3}{4}h$$

$\therefore G \equiv (\frac{3}{4}h, 0)$

සමමිතිකත්වයෙන් අච්චුවේ ගු. කේ. ය x අක්ෂය මත පිහිටයි.



කොටස	බර	ගු. කේ. ට y අක්ෂයේ සිට දුර
සිලින්ඩරය	$\pi R^2 H\rho$	$\frac{H}{2}$
කේතුව	$\frac{1}{3}\pi r^2 h\rho$	$\frac{h}{4}$
අච්චුව	$\pi\rho(R^2H - \frac{1}{3}r^2h)$	$\bar{\bar{x}}$

සූර්ණ ගැනීමෙන්

$$\pi R^2 H\rho \times \frac{H}{2} - \frac{1}{3}\pi r^2 h\rho \times \frac{h}{4} = \pi\rho\left(R^2H - \frac{1}{3}r^2h\right)\bar{\bar{x}}$$

$$\frac{R^2H^2}{2} - \frac{r^2h^2}{2} = \frac{(3R^2H - r^2h^2)}{3}\bar{\bar{x}}$$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{6R^2H^2 - r^2h^2}{4(3R^2H - r^2h)}$$

අච්චුවේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, කේතු කුහරයේ ශීර්ෂය පිහිටයි නම් $\bar{\bar{x}} = h$ වන අතර $R = 2r$ බැවින්

$$h = \frac{6 \times 4r^2 \times H^2 - r^2h^2}{4[3(2r)^2 H - r^2h]}$$

$$h = \frac{24r^2H^2 - r^2h^2}{4[12r^2H - r^2h]} = \frac{24H^2 - h^2}{4(12H - h)}$$

$$48Hh - 4h^2 = 24H^2 - h^2$$

$$3h^2 - 48Hh + 24H^2 = 0$$

$$h^2 - 16Hh + 8H^2 = 0$$

$$h = \frac{16H \pm \sqrt{256H^2 - 32H^2}}{2}$$

$$= \frac{16H \pm 2\sqrt{56H^2}}{2}$$

$$h = 8H \pm 2\sqrt{14}H$$

$H > h$ බැවින් $h = 8H - 2\sqrt{14}H$

$\therefore \quad h = 2(4 - \sqrt{14})H$ වේ.

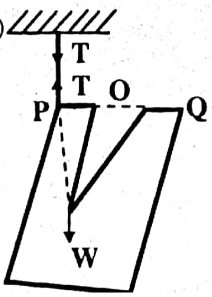
$PO = R = 2r$ දී ඇත.

PQ රේඛාව යටි අත් සිරස සමඟ සාදන කෝණය θ නම්

$$\tan\theta = \frac{\text{කේතුවේ උස}}{\text{සිලින්ඩරයේ අරය}} = \frac{OG}{PO} = \frac{\bar{\bar{x}}}{2r}$$

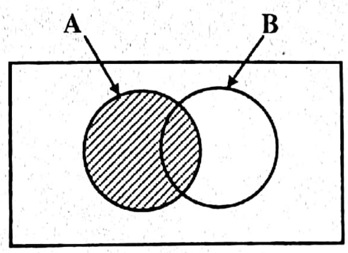
$$\tan\theta = \frac{2(4 - \sqrt{14})H}{2r}$$

$$= \frac{\cancel{2}(4 - \sqrt{14})3\cancel{r}}{\cancel{2r}}$$ (∵H=3r බැවින්)



$$\theta = \tan^{-1}[3(4 - \sqrt{14})]$$

08.



$A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$ වේ.

$\therefore P(A) = P[(A \cap B) \cup (A \cap B')$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$

($\because A \cap B$ හා $A \cap B'$ අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධීන් නිසා)

එවිට $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$ — ①

$A \cup B = B \cup (A \cap B')$

$\therefore P(A \cup B) = P[B \cup (A \cap B')]$ [∵ B හා $A \cap B'$ අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර වේ.]

$= P(B) + P(A \cap B')$

$P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B)$ (① න්)

A හා B ස්වායත්ත සිද්ධීන් බව දී ඇත.

(i) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$ ① න්

$= P(A) - P(A)P(B)$ (A හා B ස්වායත්ත බැවින්)

$= P(A)[1 - P(B)]$

$P(A \cap B') = P(A)P(B')$

$\therefore$ A හා B' ස්වායත්ත වේ.

(ii) $P(A' \cap B') = P[(A \cup B)']$; ද මෝගන් නියම අනුව

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)$

$= 1 - P(A) - P(B)[1 - P(A)]$

$= P(A') - P(B)P(A')$

$= P(A')[1 - P(B)]$

$= P(A')P(B')$

$\therefore A'$ හා B' ද ස්වායත්ත වේ.

C ; එක්දින තරඟාවලියකට පෙර X නිත්‍ය පිතිකරුවා ආබාධයකට ලක්වීම.

D ; එක්දින තරඟාවලියකට පෙර Y නිත්‍ය පන්දුයවන්නා ආබාධයකට ලක්වීම යැයි අර්ථ දක්වමු.

P(C) = 0.2 හා P(D) = 0.1 බව දී ඇත.

N ; X හෝ Y දෙදෙනාගෙන් කිසිවකුත් ආබාධයකට ලක් නොවේ.

A ; X පමණක් ආබාධයකට ලක් වීම.

B ; Y පමණක් ආබාධයකට ලක් වීම.

AB : X සහ Y දෙදෙනාම ආබාධයකට ලක් වීම.

$P(N) = P(C' \cap D')$

$= P(C') \times P(D')$ ($\because$ C හා D ස්වායත්ත සිද්ධීන් නිසා)

$= [1 - P(C)]\,[1 - P(D)]$

$= (1 - 0.2)(1 - 0.1)$

$= 0.8 \times 0.9$

$= \underline{\underline{0.72}}$

$P(A) = P(C \cap D')$

$= P(C) \times P(D')$

$= 0.2 \times (1 - 0.1)$ [$\because$ P(D) = 0.1 බැවින්]

$= \underline{\underline{0.18}}$

$P(B) = P(C' \cap D)$

$= P(C') \times P(D)$ [$\because$ P(C) = 0.2 බැවින්]

$= (1 - 0.2) \times 0.1$

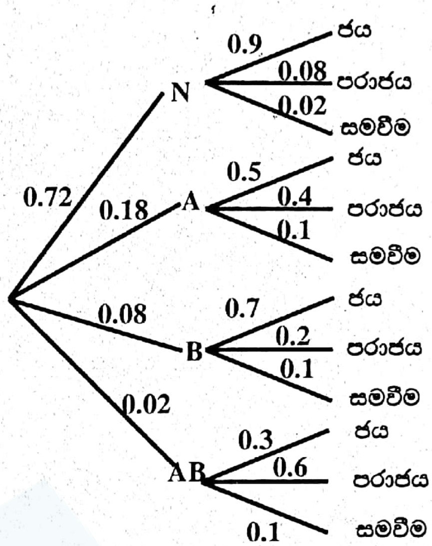
$= \underline{\underline{0.08}}$

$P(AB) = P(C \cap D)$

$= P(C) \times P(D)$[$\because$ C හා D ස්වායත්ත බැවින්]

$= 0.1 \times 0.1$

$= \underline{\underline{0.02}}$



රුක් සටහන අනුව

ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායම ළඟ එන තරඟාවලිය ජයග්‍රහණය කිරීමේ සම්භාවිතාව $= (0.72 \times 0.9) + (0.18 \times 0.5) + (0.08 \times 0.7) + (0.02 \times 0.3)$

$= 0.648 + 0.090 + 0.056 + 0.006$

$= 0.8$

ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායම ළඟ එන තරඟාවලිය පරාජය වීමේ සම්භාවිතාව $= (0.72 \times 0.08) + (0.18 \times 0.4) + (0.08 \times 0.2) + (0.02 \times 0.6)$

$= 0.0576 + 0.072 + 0.016 + 0.012$

$= 0.1576$

Y ආබාධයකට ලක්ව ඇති විටක ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායම පරාජයට පත්වීමේ සම්භාවිතාව $= 0.08 \times 0.02$

$= 0.016$

අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව අර්ථ දැක්වීමට අනුව ශ්‍රී ලංකා කණ්ඩායම පරාජයට පත්වී ඇති බව දී ඇතිවිට එම තරඟාවලියට පෙර Y ආබාධයකට ලක්වීමේ

සම්භාවිතාව $= \dfrac{0.016}{0.1576} = \dfrac{20}{197}$

09. (a) $\{x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots, x_n\}$ දත්ත කුලකයේ

මධ්‍යන්‍යය $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ හා

විචලතාව $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$ වේ.

මෙහි $\overline{x}$ යනු මධ්‍යන්‍යය වේ.

නියැදි මධ්‍යන්‍යය = 58 ; නියැදි විචලතාව = 3.2

නිවැරදි නිරීක්ෂණ දෙකෙහි එකතුව = 63 + 55 = 118

සාවද්‍ය නිරීක්ෂණ දෙකෙහි එකතුව = 65 + 53 = 118

එෙකයන් දෙක සමාන බැවින් මධ්‍යන්‍යය කෙරෙහි බලපෑමක් සිදු නොවේ.

$$\text{විචලතාව} = \frac{1}{40}\sum_{i=1}^{40} (x_i - \overline{x})^2$$

නිවැරදි විචලතාව

$$= \frac{1}{40}\left(\sum_{i=1}^{38}(x_i - \overline{x})^2 + (\overline{x} - x_{39})^2 + (\overline{x} - x_{40})^2\right)$$

මෙහි $x_{39} = 63$ හා $x_{40} = 55$ ද $\overline{x} = 58$ ද වේ.

නිවැරදි විචලතාව

$$= \frac{1}{40}\left(\sum_{i=1}^{38}(x_i - 58)^2 + (58 - 63)^2 + (58 - 55)^2\right) \quad ①$$

සාවද්‍ය විචලතාව

$$= \frac{1}{40}\left(\sum_{i=1}^{38}(x_i - 58)^2 + (58-65)^2 + (58-53)^2\right) \quad ②$$

① - ② නිවැරදි විචලතාව - සාවද්‍ය විචලතාව

$$= \frac{1}{40}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - 58)^2 + 25 + 9 - \sum_{i=1}^{38}(x_i - 58)^2 - 49 - 25\right)$$

නිවැරදි විචලතාව - 3.2 $= \frac{1}{40}[-40]$

නිවැරදි විචලතාව $= 3.2 - 1.0$

$= 2.2$

විචලතාව අඩු වී ඇත.

(b)

පන්ති ප්‍රාන්තරය	මධ්‍ය අගය	සංඛ්‍යාතය f_i	අපගමනය	U_i	f_iU_i	f_iU_i
0-10	5	10	-20	-4	-402	160
10-20	15	27	-15	-3	-81	243
20-30	25	33	-10	-2	-66	132
30-40	35	35	-5	-1	-35	35
40-50	45	38	0	0	0	0
50-60	55	30	5	1	30	30
60-70	65	19	10	2	38	76
70-80	75	8	15	3	24	72
		200			-130	748

මධ්‍යන්‍යය $\overline{x} = 45 + \frac{(-130)}{200} \times 10 = 45 - 0.65 \times 10 = 45 - 6.5$

$\underline{\underline{\overline{x} = 38.5}}$

$$\text{මධ්‍යස්ථය} = L + \frac{\left(\frac{N}{2} - cf\right)c}{f_{med}}$$

$$= 40 + \frac{\left(\frac{200}{2} - 70\right)}{35}10$$

$= \underline{\underline{38.57}}$

$$\text{මාතය} = L + \frac{(f_1 - f_0)\,c}{(2f_1 - f_2 - f_0)}$$

$$= 40 + \frac{(38 - 35)\,10}{76 - (35 + 30)}$$

$= \underline{\underline{42.73}}$

මධ්‍යන්‍යය < මධ්‍යස්ථය < මාතය වේ. ඒ යටතේ මගීන් සංඛ්‍යාවන්

$\frac{1500}{38.5} \simeq 39$ $\quad \frac{1500}{42.73} \simeq 35$ වන අතර

ආරක්ෂිතව ගෙන යා හැකි සංඛ්‍යාවට මෙම අගය දෙකෙන් වඩා අඩු සංඛ්‍යාව වන 35 බව නිගමනය කළ හැක.

$$\text{විචල්‍යතාව} = c^2\left\{\frac{\sum f_iU_i^2}{\sum f_i} - \left(\frac{1}{\sum f_i}\sum f_iU_i\right)^2\right\}$$

$$= 100\left\{\frac{748}{200} - \left(\frac{-130}{200}\right)^2\right\}$$

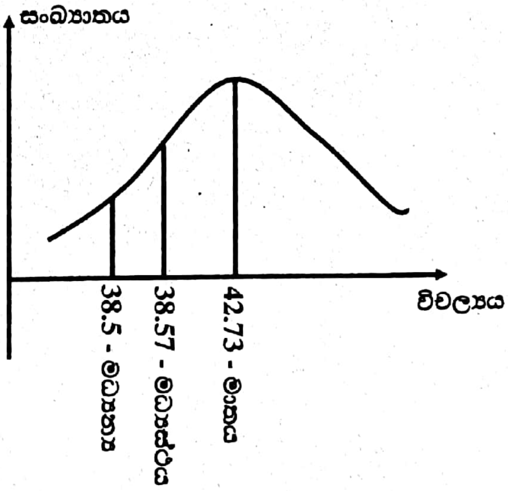
සම්මත අපගමනය $= \underline{\underline{18.21}}$

$$\text{කුටිකතා සංගුණකය} = 3\,\frac{(\text{මධ්‍යන්‍යය - මධ්‍යස්ථය})}{\text{සම්මත අපගමනය}}$$

$$= 3\,\frac{(38.5 - 38.57)}{18.21}$$

$= \underline{\underline{-0.115}}$

(-) ඍන කුටික ව්‍යාප්තියකි.



*** ***