Математический анализ

Конспект лекций Сидорова А.М

Фаизова Алсу

ИВМиИТ

3-й семестр 2-й курс

Темы

1. Внутренние и внешние меры ранга k и их свойства

2. Свойства внутренних и внешних мер Жордана

Внутренние и внешние меры ранга k и их свойства

Определение

Произведением множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *называется множество* $A_1 * A_2 * \ldots * A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in A_i, i = \overline{1, n}\}$

Определение

Пусть дано $n \in N$, k *- целое неотрицательное число.* n*-мерным кубом ранга* k *называется множество* $Q = \prod_{i=1}^{n} [\frac{m_i}{2^k}, \frac{m_i+1}{2^k}]$, *где* $m_i \in Z$.

Внутренние и внешние меры ранга k и их свойства

Замечание:

Через Q_n^k обозначим множество n-мерных кубов ранга k.

- Два n-мерных куба ранга k либо не пересекаются, либо пересекаются по общей их границе, то есть не имеют общих внутренних точек. Таким образом, два n-мерных куба ранга k имеют непересекающиеся внутренности.
- Всякий n-мерный куб ранга k состоит из 2^n n-мерных кубов ранга $k+1$.

Внутренние и внешние меры ранга k и их свойства

Пусть $A \subset R^n$ -ограниченное ограниченное множество. Пусть k – целое неотрицательное число. Через $I_*(k, A)$ обозначим количество всех n-мерных кубов ранга k, которые содержатся во внутренности множества A. Через $I^*(k, A)$ обозначим количество всех n-мерных кубов ранга k, которые пересекаются с замыканием множества A.

Определение

Объемом n-мерного куба ранга k назовем число $V_k = (\frac{1}{2^k})^n = \frac{1}{2^{kn}}$

Определение

Пусть множество $A \subset R^n$. *Внутренней мерой ранга* k *множества* A *называется число* $\mu_*(k, A) = I_*(k, A) * V_k$. *Внешней мерой ранга* k *множества* A *называется число* $\mu^*(k, A) = I^*(k, A) * V_k$.

Внутренние и внешние меры ранга k и их свойства

Теорема

Пусть множество $A \subset R^n$ ограничено. Тогда

$$0 \leq \mu_*(k, A) \leq \mu_*(k+1, A) \leq \mu^*(k+1, A) \leq \mu^*(k, A).$$

Внутренние и внешние меры ранга k и их свойства

Доказательство.

Всякий n-мерный куб ранга k $Q \in Q_n^k$ состоит из 2^n n-мерных кубов ранга $k+1$. $Q_1, ..., Q_{2^n} \in Q_n^{k+1}$. Если $Q \subset \dot{A}$, то все $Q_i \subset A$. Если $Q \cap \overline{A} \neq \emptyset$, то хотя бы один из Q_i пересекается с замыканием. Поэтому

$$0 \leq l_*(k,A) * 2^n \leq l_*(k+1,A) \leq l^*(k+1,A) \leq l^*(k,A) * 2^n.(*)$$

Ясно, что $V_{k+1} = \frac{V_k}{2^n}$. Умножим все члены равенства $(*)$ на V_{k+1}. Получим

$$0 \leq l_*(k,A) * V_k \leq l_*(k+1,A) * V_{k+1} \leq l^*(k+1,A) * V_{k+1} \leq l^*(k,A) * V_k.$$

Итак,

$$0 \leq \mu_*(k,A) \leq \mu_*(k+1,A) \leq \mu^*(k+1,A) \leq \mu^*(k,A).$$

□

Внутренние и внешние меры ранга k и их свойства

Следствие

Последовательность внутренних мер ранга k, то есть

$$\mu_*(k, A), \text{ является возрастающей и ограниченной сверху}$$
$$\mu_*(k, A) \leq \mu^*(0, A), \forall k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Последовательность внешних мер ранга k является убывающей и ограниченной снизу

$$\mu^*(k, A) \geq 0, \forall k = 0, 1, 2, \ldots.$$

По теореме Вейерштрасса у этих последовательностей $\exists$ пределы. Это дает основание ввести следующее определение.

Внутренние и внешние меры ранга k и их свойства

Пусть множество $A \subset R^n$ ограничено.

Определение

Внутренней мерой множества A называется число $\mu_*(A) = \lim_{k\to+\infty} \mu_*(k, A)$. Внешней мерой множества A называется число $\mu^*(A) = \lim_{k\to+\infty} \mu^*(k, A)$.

Свойства внутренних и внешних мер Жордана

Теорема

Пусть множества $A, B \subset R^n$ *ограничены. Тогда*

1. $0 \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A)$
2. *Если* $A \subset B$, *то* $\mu_*(A) \leq \mu_*(B)$ *и* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
3. *Если* $A \cap B = \emptyset$, *то* $\mu_*(A) + \mu_*(B) \leq \mu_*(A \cup B)$
4. $\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$

Свойства внутренних и внешних мер Жордана

Доказательство.

1. Ясно, что
$$0 \le \mu_*(k, A) \le \mu^*(k, A), \forall k = 0, 1, 2....$$
Перейдём в неравенстве к пределу:
$$0 \le \lim_{k\to+\infty} \mu_*(k, A) \le \lim_{k\to+\infty} \mu^*(k, A) \to 0 \le \mu_*(A) \le \mu^*(A)$$

□

Свойства внутренних и внешних мер Жордана

Доказательство.

1. Ясно, что
$$0 \leq \mu_*(k, A) \leq \mu^*(k, A), \forall k = 0, 1, 2....$$
Перейдём в неравенстве к пределу:
$$0 \leq \lim_{k\to+\infty} \mu_*(k, A) \leq \lim_{k\to+\infty} \mu^*(k, A) \to 0 \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A)$$
2. Пусть $A \subset B$, тогда $\dot{A} \subset \dot{B}, \overline{A} \subset \overline{B}$. Поэтому
$$\mu_*(k, A) \leq \mu_*(k, B) \text{ и } \mu^*(k, A) \leq \mu^*(k, B), \forall k = 0, 1, 2....$$
Перейдём в неравенстве к пределу:
$$\lim_{k\to+\infty} \mu_*(k, A) \leq \lim_{k\to+\infty} \mu_*(k, B) \to \mu_*(A) \leq \mu_*(B)$$
$$\lim_{k\to+\infty} \mu^*(k, A) \leq \lim_{k\to+\infty} \mu^*(k, B) \to \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

□

Свойства внутренних и внешних мер Жордана

Доказательство.

3. Пусть $A \cap B = \emptyset$. Тогда $\dot{(A)} \cap \dot{(B)} = \emptyset$. Поэтому
$$\mu_*(k, A) + \mu_*(k, B) \le \mu_*(k, A \cup B).$$
Перейдём к пределу, учтя что $\dot{(A)} \cup \dot{(B)} \subset \dot{(A \cup B)}$.
$$\lim_{k\to+\infty} \mu_*(k, A) + \lim_{k\to+\infty} \mu_*(k, B) \le$$
$$\lim_{k\to+\infty} \mu_*(k, A \cup B) \to \mu_*(A) + \mu_*(B) \le \mu_*(A \cup B)$$

$\square$

Свойства внутренних и внешних мер Жордана

Доказательство.

3. Пусть $A \cap B = \emptyset$. Тогда $\dot{(A)} \cap \dot{(B)} = \emptyset$. Поэтому
$$\mu_*(k, A) + \mu_*(k, B) \le \mu_*(k, A \cup B).$$
Перейдём к пределу, учтя что $\dot{(A)} \cup \dot{(B)} \subset \dot{(A \cup B)}$.
$$\lim_{k\to+\infty} \mu_*(k, A) + \lim_{k\to+\infty} \mu_*(k, B) \le$$
$$\lim_{k\to+\infty} \mu_*(k, A \cup B) \to \mu_*(A) + \mu_*(B) \le \mu_*(A \cup B)$$
4. Справедливо равенство $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Поэтому, если $Q \in Q_n^k \cup \overline{A \cup B}$, то либо $Q \cap \overline{A} \ne \emptyset$, либо $Q \cap \overline{B} \ne \emptyset$. Значит, $\mu^*(k, A \cup B) \le \mu^*(k, A) + \mu^*(k, B), \forall k = 0, 1, 2, \ldots$. Осталось перейти к пределу.
$$\lim_{k\to+\infty} \mu_*(k, A \cup B) \le \lim_{k\to+\infty} \mu_*(k, A) + \lim_{k\to+\infty} \mu_*(k, B) \to$$
$$\mu_*(A \cup B) \le \mu_*(A) + \mu_*(B)$$

□