иЗадание III. Фаизова Алсу Наиловна гр. 09-913 (ZIII_48)

Задание III.1.

1. Согласно новому исследованию ученых по межгалактическим путешествиям, полёт на Марс изменяет общий уровень тревоги жителей Земли.
2. Чтобы проверить это предположение 83 туриста до “красной планеты” прошли тест Тейлора перед и после безопасной(в том смысле, что все дальнепланетцы вернулись, инопланетяне не подменяли(см. **Задание III.4**), романов не заводили) космической миссии.
3. Полагая нормальность распределения уровня тревожности, статистические измерения получаются из $N(\mu, \sigma^2)$, где μ-математическое ожидание показателя тревожности, σ^2-дисперсия, характеризующая степень изменчивости этого показателя от испытуемого к испытуемому. До $\mu = \mu_1, \sigma^2 = \sigma_1^2$, после $\mu = \mu_2, \sigma^2 = \sigma_2^2$.
4. Ожидается, что $\theta = \mu_1 - \mu_2 \neq 0$, то есть в среднем уровень беспокойства останется прежним. Нулевая гипотеза $H_0: \theta = 0$ при альтернативе $H_1: \theta \neq 0$.
5. Уровень значимости $\alpha = 0.075$.
6. Ввиду предположения нормальности следует применить одновыборочный(разностный) критерий Стьюдента, основанный на разностях $\overline{X} - \overline{Y}$выборочных средних значений до и после . Для вычисления статистики Стьюдента необходимо найти их среднее арифметическое $\overline{U}$и дисперсию (смещенную) S_U^2разностей $u_i = x_i - y_i, i = 1,..., n$.
Статистика Стьюдента равна
$$T = \frac{\overline{U}}{\sqrt{S_U^2}}\sqrt{n - 1}.$$
В соответствии с теоретическим предположениями ожидается, что абсолютная величина $|x_i - y_i|$будет принимать большие положительные значения. Нулевая гипотеза должна отвергать, когда абсолютное значение статистики Стьюдента $|T| \geq C$.
7. Функция распределения тестовой статистики в граничной точке $\theta_0 = 0$совпадает с функцией распределения Стьюдента $\mathbb{St}_{(n-1)}$ с n-1=82 степенями свободы.
8. Критическая константа C_αнаходится из уравнения
$$P\{|T| \geq C\} = 2(1 - \mathbb{St}_{82}(C)) = 0.075,$$
т.е. равна верхней 0.075-квантили распределения Стьюдента с 82 степенями свободы. Воспользовавшись таблицей, нашли, что $C_\alpha = 1.803$.
9. Окончательный вид критической области $|T| \geq 1.803$.
   a. По предоставленным данным найдено

		До	После	По разностям
Объём выборки	n	83	83	83
Среднее	$\overline{x}$	78.811	77.419	1.392
Станд.отклонение	s	5.830	9.636	11.042
Станд.ошибка среднего	m	0.640	1.058	1.212
Статистика Стьюдента			$T = 1.142 = t_{\text{эксп}}$	
7.5%-ая критическая область			$\|T\|\geq 1.803$	
Гипотеза отсутствия эффекта			принимается	
с критическим уровнем значимости			$p - val = 0.26$	
Вывод. Отклонение от нулевой гипотезы статистически не значимо.				

10. Критический уровень значимости p-val вычисляется по формуле

$$p - val = 2(1 - \mathbb{St}_{82}(|T|)) = 2(1 - \mathbb{St}_{82}(1.142)) = 0.26.$$

Т.к. p-val >0.075, следует считать наблюдения не противоречащими гипотезе отсутствия эффекта предлагаемого внеземного туризма.

Задание III.2.

1. Требуется сравнить меткость исполнения межпространственного прыжка двух аппаратов, одну из которых произвела команда тропических доцентов, а вторую - команда “SpaceX” при консервативном предположении превышения качества второй технологии над первой.
2. Применяя технологию первой группы изобретателей, было произведено 25 испытаний добровольнопринудительцев, 67 вверило себя второй.
3. Можно предположить, что промах каждого прыжка носит случайный характер и имеет нормальное распределение со средним ноль и дисперсиями σ_1^2и σ_2^2.
4. Ожидается, что $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. То есть в терминах параметра $\theta = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$нулевая гипотеза $H_0: \theta \le 1$при альтернативе $H_1: \theta > 1$.
5. Уровень значимости $\alpha = 0.075$.
6. В силу нормальности распределения наблюдений, можно применить критерий Фишера. Тестовая статистика Фишера
$$F = \frac{\widehat{S_1^2}}{\widehat{S_2^2}},$$
где $\widehat{S_j^2}$- несмещенная оценка дисперсии в j-й группе. Ожидания успешности дилетантов будут подтверждены, если Fпримет достаточно большие значения, т.е. критическая область имеет вид $\{F > C\}$.
7. В граничной точке $\theta_0 = 1$распределение статистики Фишера совпадает с распределением Фишера $\mathbb{F}_{(n_1-1,\, n_2-1)}$с $n_1 - 1 = 24$и $n_2 - 1 = 66$степенями свободы.
8. Критическая константа C_αнаходится как решение уравнения
$$P\{F > C_\alpha\} = 1 - \mathbb{F}_{(24,\, 66)}(C) = 0.075,$$
т.е. равна верхней 0.075-квантили распределения Фишера. По таблице распределения Фишера находим $C_\alpha = 1.577$.
9. Окончательный вид критической области $\{F > 1.577\}$.
   a) По представленным данным:

	1-й прибор	2-й прибор
n	25	67
$\overline{x}$	125.020	98.685
$\widetilde{S}^2$	156.852	95.926
Статистика Фишера $F = s_1^2/s_2^2$		1.635
7.5%-ая критическая область		$F > 1.577$
Гипотеза $H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2$		отвергается
<u>Вывод</u>: предположение о надежности разработки команды “SpaceX” статистически подтверждается		
p-значение		0.060

10. p-value вычисляется по формуле
$$p - val = 1 - \mathbb{F}_{(24,\, 66)}(T) = 1 - \mathbb{F}_{(24,\, 66)}(1.635) = 0.060.$$

Поскольку p-val меньше 7.5%-го уровня значимости, можно сделать вывод, что первой команде ещё есть над чем работать.

Задание III.3.

1. Ежегодно 30% жителей страны Бабочкарий улетают в Нектарий каждую пятницу понедельника(≡ ♎). Исследователи уловили идею - если ежедневно в течение месяца решать упражнения из Демидовича, то число нелетающих в день ♎ понизится.
2. Для проверки этого заявления методика применяется к группе n=60 случайно пойманных добровольцев.
3. Таким образом в эксперименте наблюдаются бернуллиевские случайные величины с вероятностью успеха(посетить Нектарий в день ♎) θ.
4. Ожидается, что $\theta > 0.7$. Нулевая гипотеза $H_0: \theta \leq 0.7$при альтернативе $H_1: \theta > 0.7$.
5. Уровень значимости $\alpha = 0.025$.
6. Применим критерий знаков, основанный на числе T отправившихся за границу после “вакцинации” Демидовичем, если T примет достаточно большое значение, т.е. критическая область имеет вид $\{T > C\}$.
7. В граничной точке $\theta_0 = 0.7$функция распределения статистики T есть функция биномиального распределения $\mathbb{Bin}(k|n, \theta_0) = P_{\theta_0}\{T \leq k\}$с n=60, k = 0,1,...,n.
8. Критическая константа C_αнаходится как решение неравенства
$$P\{T > C_\alpha\} = 1 - \mathbb{Bin}(C_\alpha|n, \theta_0) \leq 0.025,$$
причём из всех таких констант нужно выбрать наименьшую, т.е. C_αравна квантили порядка 0.975 биномиального распределения. По таблице находим, что $C_\alpha = 49$.
9. Окончательный вид критической области: нулевая гипотеза отвергается, если $\{T > 49\}$.
   a. По представленным данным:

Частота появления А (оказавшихся в Нектарии в ♎)	0.9 54 из 60
2.5%-ая критическая область	$T > 49$
Гипотеза H_0: $p < 0.7$	отвергается
Вывод. Отклонение от нулевой гипотезы статистически значимо. Имеются основания одобрить применении методики.	
Критический уровень значимости	α_{crit} = 0.00005

10. p-value вычисляется по формуле
$$p - val = 1 - \mathbb{Bin}(54|60;\ 0.7) = 0.00005.$$
Поскольку p-val значительно меньше 2.5%-го уровня значимости, можно сделать вывод о высокой значимости согласия данных с ожиданиями исследователей.

Задание III.4.

1. Марсианин выносливее землянина?
2. Проверкой служит бег с препятствиями, проводимый четвертой к 2021-му году земного календаря планетой. Зарегистрировались m = 90 бегунов принимающей стороны и n = 91 прибывших с одной из экспедиций(упомянутой в **Задание III.1)** землян.
3. Нетерпимость каждого существа есть случайная величина с функций распределения F_1 (для марсиан - 1-я выборка) или F_2(для землян - 2-я выборка).
4. Ожидается,что $F_1(x) < F_2(x)$ для $\forall x > 0$(т.е. более вероятнее. что землянин сойдёт с бесконечной дистанции скорее жителя Марса, что то же, что: $\xi_1 > \xi_2$- продолжительность активного пребывания на дистанции марсианина стохастически больше). Нулевая гипотеза H_0: $F_1(x) \equiv F_2(x)$, $\forall x$.
5. Уровень значимости $\alpha = 0.05$.
6. Применим критерий Вилкоксона, основанный на сумме Wрангов 1-й выборки в общем ряду данных. Если справедлива альтернатива(наблюдения в 1-й выборке стохастически больше наблюдений во 2-й), то ожидаются большие значения W. Другими словами, критическая область имеет вид $\{W \geq C\}$.
7. Если верна нулевая гипотеза, распределение статистики Wесть распределение Уилкоксона с параметрами (90, 91). Можно применить нормальную аппроксимацию с математическим ожиданием $\mu_W = 8190$и стандартным отклонением $\sigma_W = 352.441$.
8. Т.о., критическая константа C_α находится как целая часть решение уравнения

$$P\{W \geq C\} \approx 1 - \Phi(\frac{C-8190}{352.441}) = 0.05 ,$$

т.е. C_αравна квантили порядка 0.95 нормального закона. По таблице находим $C_\alpha = 8769$.

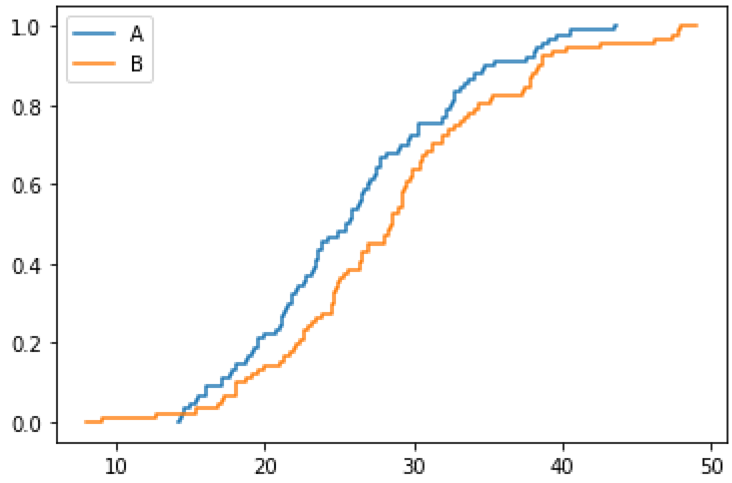
9. Окончательный вид критической области: нулевая гипотеза отвергается, если $\{W \geq 8769\}$.
   a) По представленным данным:

Объемы выборок		m=90	n=91
Сумма рангов 1-й выборки W		7373	
Математическое ожидание μ_W		8190	
Стандартное отклонение σ_W		352.441	
95%-я критическая область		$W \geq 8769$	
Вывод	Нулевая гипотеза о совпадении распределений	не отвергается	
	с критическим уровнем значимости	$\alpha_{crit} = 0.988$	
Заключение. Остерегайтесь внутригалактического расизма.			

10. p-value вычисляется по формуле

$$p - val \approx 1 - \Phi(\frac{7373-8190}{352.441}) = 0.988.$$

Видим, что p-value больше 95%-го уровня значимости. Следовательно нет оснований считать межпланетные расы отличающимися в предложенной форме испытания.


A
B
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
10
20
30
40
50

***Замечание**

Однако график ЭФР наводит сомнения и последующее желание проверить альтернативу $F_1(x) > F_2(x)$ для $\forall x > 0$(т.е. более вероятнее. что марсианин сойдёт с дистанции скорее жителя Земли, или что: $\xi_2 \succ \xi_1$- продолжительность активного пребывания на дистанции нашего однопланетца стохастически больше). Нулевая гипотеза $H_0: F_1(x) \equiv F_2(x),\ \forall x.$

Повторим несколько этапов.

6. Снова обратимся к критерию Вилкоксона. Подсчет рангов первой выборки относительно всего набора данных приведет к тому же значению статистикиW.Если справедлива альтернатива(наблюдения во 2-й выборке стохастически больше наблюдений в 1-й), то ожидаются небольшие значения W. Другими словами, критическая область имеет вид $\{W \le \mathrm{C}\}$.
7. Аналогично, если верна нулевая гипотеза, распределение статистики Wесть распределение Уилкоксона с параметрами (90, 91), и можно применить нормальную аппроксимацию с математическим ожиданием $\mu_W = 8190$и стандартным отклонением $\sigma_W = 352.441$.
8. Т.о., критическая константа C_αнаходится как целая часть решение уравнения

$$P\{W \le C\} \approx \Phi(\frac{C-8190}{352.441}) = 0.05\ ,$$

т.е. C_αравна квантили порядка 0.05 нормального закона. По таблице находим $C_\alpha = 7610.$

9. Окончательный вид критической области: нулевая гипотеза отвергается, если $\{W \le 7610\}$.

b) По представленным данным:

Объемы выборок		m=90	n=91
Сумма рангов 1-й выборки W		7373	
Математическое ожидание μ_W		8190	
Стандартное отклонение σ_W		352.441	
5%-я критическая область		$W \le 7610$	
Вывод	Нулевая гипотеза о совпадении распределений	отвергается	
	с критическим уровнем значимости	$\alpha_{crit} = 0.01$	
Заключение. Разница в преодолении беговой дистанции с препятствиями между двух исследуемых групп есть: выносливее оказывается житель “зелёной” планеты.			

10. p-value вычисляем по формуле

$$p - val = \Phi(\frac{7373-8190}{352.441}) = 0.01,$$

т.е., меньше установленного 5%-го уровня значимости. Следовательно нет оснований считать произведение Берроуза вымыслом, либо благоприятствовала смена обстановки на данный вид землян.

****Замечание**

В случае вычисление статистики второй группы относительно всего набора данных при тех же нулевой и альтернативной гипотезах: $W = 8970$. Критическая константа и p-value будут находится из уравнений

$$P\{W \ge C\} \approx 1 - \Phi(\frac{C-8190}{352.441}) = 0.05 \Rightarrow C_\alpha = 8769 < 8970$$

$$p - val = 1 - \Phi(\frac{8970-8190}{352.441}) = 0.99 > 0.95.$$

Заключения на основе полученных значений совпадают с выводами предыдущего замечания.

Задание III.5.

1. "Не мешает ли я, беспокойный программист, своим домашним растениям?"-таким вопросом задался программист Женя.
2. Измерено содержание жизненной энергии в $n_1 = 85$саженцах хурмы в саду у храма и $n_2 = 91$саженцах в однушках программистов, за которыми замечены признаки неудовлетворенности(расстройство пищевого поведения, посещение публичных страниц с депрессивными мемами).
3. Содержаний жизненной энергии в деревце есть случайная величина с функцией распределения F_1(для первой группы) или F_2(для второй группы).
4. Женя за равновесие в мире, поэтому выясним справедливость $F_1(x) = F_2(x),\ \forall x$(то есть содержание жизненной энергии стохастически одинаково). Т.о., нулевая гипотеза $H_0: F_1 \equiv F_2$-гипотеза однородности совокупностей(без альтернативы).
5. Уровень значимости $\alpha = 0.1$.
6. Применим критерий однородности хи-квадрат, основанный на статистике X^2, равной сумме квадратов разностей частот попадания данных в $r = 12$интервалов группировки. Ожидания будут подтверждены, если X^2примет маленькое значение, т.е. критическая область имеет вид $\{X^2 \geq C\}$.
7. При справедливости нулевой гипотезы функцию распределения статистики X^2можно приблизить функцией хи-квадрат распределения $\mathbb{Khi}(x|r-1) = P_{H_0}\{X^2 < x\}$с $r - 1 = 11$степенями свободы.
8. Критическая константа C_αнаходится как решение неравенства

$$P_{H_0}\{X^2 \geq C\} = 1 - \mathbb{Khi}(C_\alpha|11) = 0.1\,,$$

т.е. равна квантили порядка 0.9 хи-квадрат распределения с 11-ю степенями свободы. По таблице хи-квадрат распределения находим $C_\alpha = 17.275$.

9. Окончательный вид критерия: гипотеза однородности отвергается, если $\{X^2 \geq 17.275\}$.
   a. По представленным данным:

	частоты				
Границы	Группа А		Группа В		χ^2
52.75	3	0.0353	0	0.0000	3.2118
55.85	21	0.2471	8	0.0879	6.7555
58.95	18	0.2118	16	0.1758	0.2939
62.05	17	0.2000	15	0.1648	0.2989
65.15	16	0.1882	24	0.2637	1.1023
68.25	5	0.0588	8	0.0879	0.5035
71.35	3	0.0353	9	0.0989	2.6079
74.35	0	0.0000	4	0.0440	3.7363
77.55	2	0.0235	3	0.0330	0.1378
80.65	0	0.0000	3	0.0330	2.8022
83.75	0	0.0000	0	0.0000	0.0000
∞	0	0.0000	1	0.0110	0.9341
Σ	85	1	91	1	**22.384**
90%-я критическая область					$X^2 > 17.275$
Вывод	Гипотеза однородности групп				отвергается
p-value	с критическим уровнем значимости				0.02
Вывод. Содержание жизненной энергии в саженцах хурмы двух выборок высоко значимо различаются.					

10. p-value вычисляется по формуле

$$p - val = 1 - \mathbb{Khi}(22.384|11) = 0.02.$$

Поскольку p-val значительно меньше заявленного 10%-го уровня значимости, теоретически есть основания усомниться в невлияемости присутствия Жени рядом с растениями.