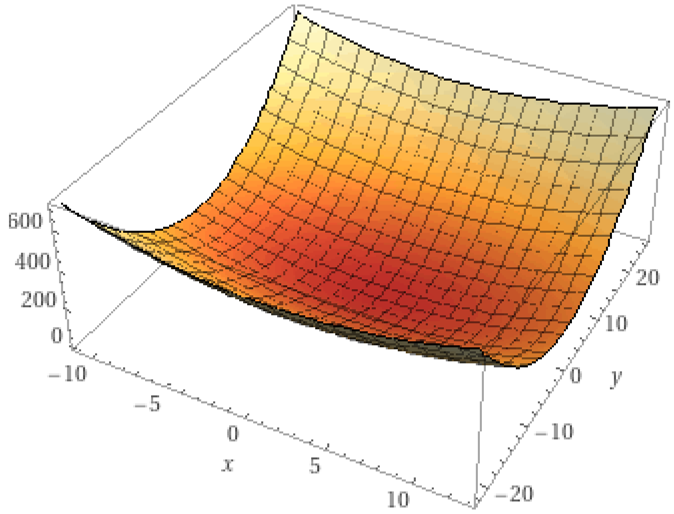
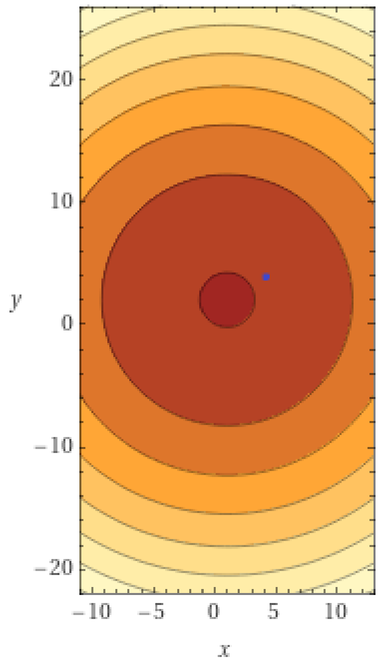
Выполните задание:

Для функции двух переменных $f(x)$, исходя из начальной точки x^0, методом циклического покоординатного спуска вычислить приближения x^1, x^2, x^3. Вычислять полный шаговый множитель. Все вычисления иллюстрировать графически. Найти точные значения x^*, f^* и сравнить их с $x^3, f(x^3)$.

1) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2\ ; x^0 = (4; 4)$.
2) $f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 - 2x_2\ ; x^0 = (-1; 0)$.

1) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2,\ x_0 = (4, 4)$.





Начальная точка: $\overline{x_0} = (4, 4),\ f(\overline{x_0}) = 4^2 + 4^2 - 2 * 4 - 4 * 4 = 8$.

<u>Итерация первая.</u>

Выберем направление спуска: $s_0 = (1, 0)$.

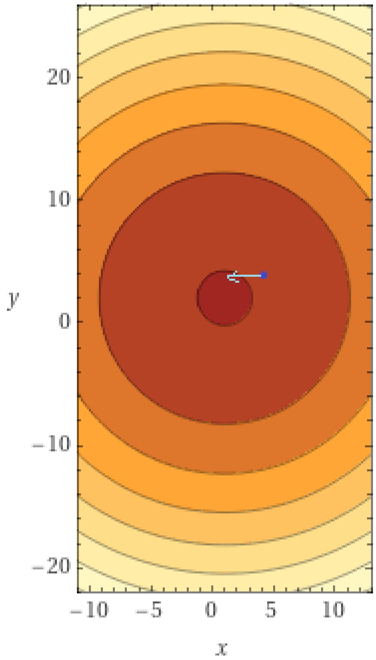
Ищем точку на луче $(4, 4) + a_0 * (1, 0)$:

$f(\overline{x_1}) = f(\overline{x_0} + a_0 s_0) = min\, f(\overline{x_0} + a_0 s_0) = min\, f((4, 4) + a_0(1, 0)) = min\, f(4 + a_0, 4) =$

$= min\,((4 + a_0)^2 + 4^2 - 2 * (4 + a_0) - 4 * 4) = min\,((16 + 8a_0 + a_0^2 + 16 - 8 - 2a_0 - 16) =$

$= min\,(a_0^2 + 6a_0 + 8)$:

$g(a_0) = a_0^2 + 6a_0 + 8,\ g'(a_0) = 2a_0 + 6 = 0\ if\ a_0 =- 3$.



При $a_0 =- 3$ получаем точку $\overline{x_1} = (1, 4)$, $f(\overline{x_1}) = 1^2 + 4^2 - 2 * 1 - 4 * 4 =- 1.$

Проверяем равенство нулю градиента выпуклой целевой функции:

$f'(\overline{x_1}) = (2x_1 - 2,\ 2x_2 - 4) = (0, 4) \neq (0, 0).$

<u>Итерация вторая.</u>

Выберем направление спуска: $s_1 = (0, 1)$.

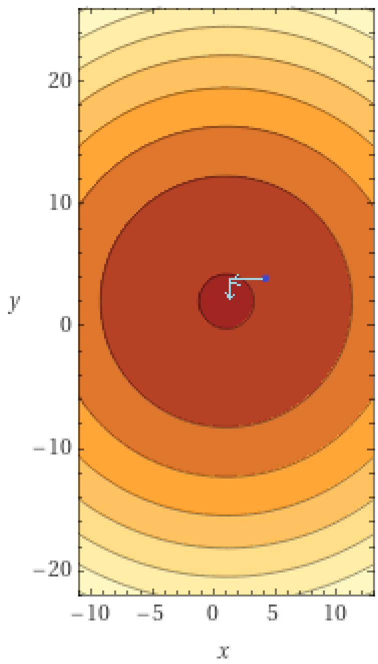
Ищем точку на луче $(1, 4) + a_1 * (0, 1)$:

$f(\overline{x_2}) = f(\overline{x_1} + a_1 s_1) = min\, f(\overline{x_1} + a_1 s_1) = min\, f((1, 4) + a_1(0, 1)) = min\, f(1, 4 + a_1) =$

$= min\,(1^2 + (4 + a_1)^2 - 2 * (1) - 4 * (4 + a_1)) = min\,(1 + 16 + 8a_1 + a_1^2 - 2 - 16 - 4a_1) =$

$= min\,(a_0^2 + 4a_0 - 1)$:

$g(a_1) = a_1^2 + 4a_1 - 1,\ g'(a_1) = 2a_1 + 4 = 0\ if\ a_1 =- 2$.



При $a_1 =- 2$ получили точку $\overline{x_2} = (1, 2)$, $f(\overline{x_2}) = 1^2 + 2^2 - 2 * 1 - 4 * 2 =- 5$.

Проверяем равенство нулю градиента выпуклой целевой функции:

$f'(\overline{x_2}) = (2x_1 - 2,\ 2x_2 - 4) = (0, 0)$.

Найдена оптимальная точка

<u>Итерация третья.</u>

Выберем направление спуска: $s_3 = (1, 0)$.

Ищем точку на луче $(1, 2) + a_2 * (1, 0)$:

$f(\overline{x_3}) = f(\overline{x_2} + a_2 s_2) = min\, f(\overline{x_2} + a_2 s_2) = min\, f((1, 2) + a_2(1, 0)) = min\, f(1 + a_2, 2) =$

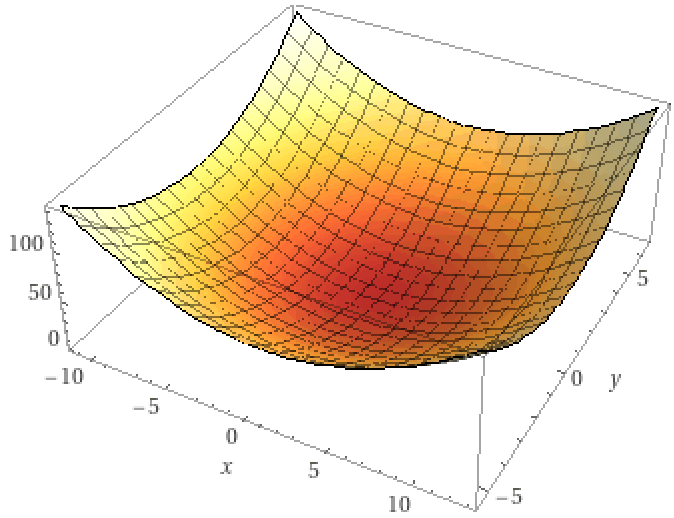
$= \ min\, ((1 + a_2)^2 + (2)^2 - 2 * (1 + a_2) - 4 * (2)) = min\, (1 + 2a_2 + a_2^2 + 4 - 2 - 2a_2 - 8) =$

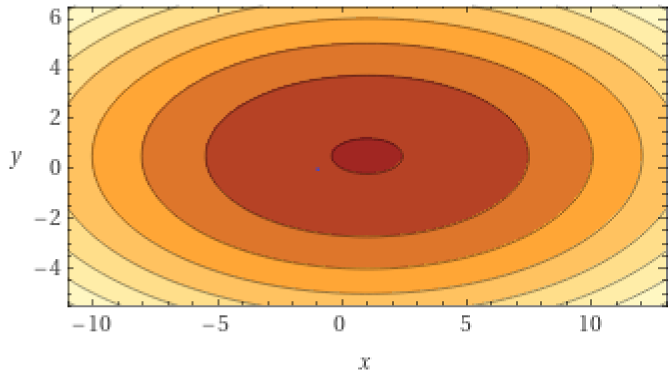
$= \ min\, (a_2^2 - 5)$:

$g(a_1) = a_2^2 - 5,\ g'(a_1) = 2a_2 = 0\ if\ a_2 = 0$.

При $a_2 = 0$ получили точку $\overline{x_3} = \overline{x_2}$, $f(\overline{x_3}) =- 5$.

2) $f(x) = 0.5x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 - 2x_2$, $x_0 = (-1, 0)$.





Начальная точка:

$\overline{x_0} = (-1, 0)$, $f(x_0) = 0.5 * (-1)^2 + 2 * 0 - (-1) - 2 * (0) = 1.5$.

<u>Итерация первая.</u>

Выберем направление спуска: $s_0 = (1, 0)$.

Ищем точку на луче $(-1, 0) + a_0 * (1, 0)$:

$f(\overline{x_1}) = f(\overline{x_0} + a_0 s_0) = min\, f(\overline{x_0} + a_0 s_0) = min\, f((-1, 0) + a_0(1, 0)) = min\, f(-1 + a_0, 0) =$

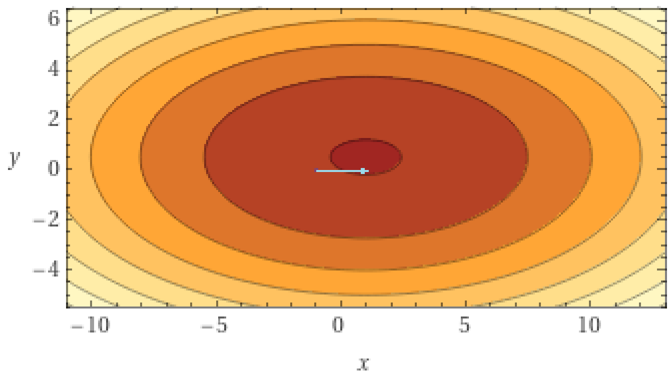
$= min\,((-1 + a_0)^2 + 0^2 - 2 * (-1 + a_0) - 4 * 0) = min\,(1 - 2a_0 + a_0^2 + 2 - 2a_0) =$

$= min\,(a_0^2 - 4a_0 + 3)$:

$g(a_0) = a_0^2 - 4a_0 + 3$, $g'(a_0) = 2a_0 - 4 = 0\; if\; a_0 = 2$.

При $a_0 = 2$ получили точку

$\overline{x_1} = (1, 0)$, $f(\overline{x_1}) = 0.5 * (1)^2 + 2 * 0 - (1) - 2 * (0) = 0.5 - 1 =- 0.5$.



Проверяем равенство нулю градиента выпуклой целевой функции:
$f'(\overline{x_1}) = (x_1 - 1,\ 2x_2 - 2) = (0, -2) \neq (0, 0).$

<u>Итерация вторая.</u>

Выберем направление спуска: $s_1 = (0, 1).$

Ищем точку на луче $(1, 0) + a_1 * (0, 1)$:

$f(\overline{x_2}) = f(\overline{x_1} + a_1 s_1) = min\, f(\overline{x_1} + a_1 s_1) = min\, f((1, 0) + a_1(0, 1)) = min\, f(1, a_1) =$

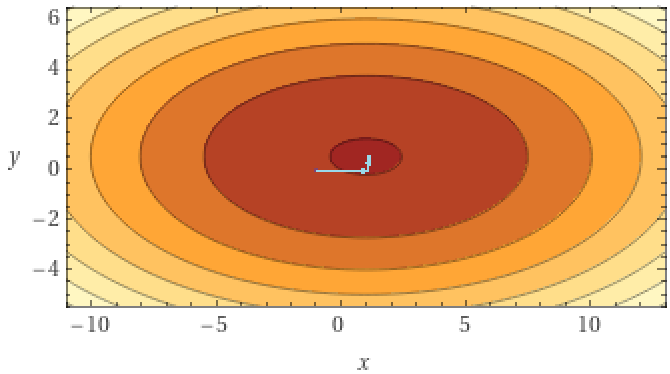
$= min\,(0.5 * 1^2 + 2 * (a_1)^2 - (1) - 2 * (a_1)) = min\,(0.5 + 2a_1^2 - 1 - 2a_1) =$

$= min\,(2a_1^2 - 2a_1 - 0.5)$:

$g(a_1) = 2a_1^2 - 2a_1 - 0.5,\ g'(a_1) = 4a_1 - 2 = 0\ if\ a_1 = 0.5$.

При $a_1 = 0.5$ получили точку

$\overline{x_2} = (1, 0.5),\ f(\overline{x_2}) = 0.5 * (1)^2 + 2 * (0.5)^2 - (1) - 2 * (0.5) = -1.$



Проверяем равенство нулю градиента выпуклой целевой функции:
$f'(\overline{x_2}) = (x_1 - 1,\ 2x_2 - 2) = (0, 0).$

<u>Итерация третья.</u>

(аналогично получаем, что точка третьей итерации совпадает с точкой второй итерации.)