南卷汇

大一上期中考试试题汇编

南洋书院团工委学生会

学习部　制作

目录

试题

高数部分

线代部分

参考答案

高数部分

线代部分

高数上册期中考试试题

2011 年

一、 填空

1．要使 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-2x)}{x},x<0\\ a+1,x=0\\ \dfrac{\sin bx}{x},x>0\end{cases}$ 在 x=0 处连续，必须 a=____, b=____.

2．设 $y=\cos^2(\dfrac{1-\ln x}{x})$，则 $y'=$____.

3．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2(x+1)},x<0\\ \dfrac{x-1}{x^2+x-2},x\ge 0\end{cases}$ 则 x=____是 f(x)的第一类间断点；x=____是 f(x)的第二类间断点.

4．已知点（1,3）是曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则 a=____, b=____.

5．若 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}x(1+\dfrac{1}{t})^{2tx}$，则 $f'(x)=$____.

6．已知函数 $y=(x-5)^2(x+1)^{2/3}$，当 x=____时，y=____为极小值，当 x=____时，y=____为极大值.

二、 计算下列各题

1．设 $y=\arctan\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$，求 y'.

2．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(x^2+1)}{1-\cos x}$.

3．已知 $\begin{cases}x=f'(t)+2-\sin 3\\ y=tf'(t)-f(t)+3\end{cases}$，其中 f 二阶可导，且 $f''(t)\ne 0$. 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

4．设 f(x)满足方程 $xf''(x)+3x^2\left[f'(x)\right]^2=1-e^x$，且 f(x)具有二阶连续导数. 若 f(x)在 $x=\tau(\tau\ne 0)$ 处取得极值，问 $f(\tau)$ 必为极大值还是极小值，并证明你的结论.

5. 已知$\sin(xy)-\ln\dfrac{x+1}{y}=1$，求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

6. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$，其中 g(x)具有二阶连续导数，且 g(0)=1.

(1)确定 a 的值，使 f(x)在 x=0 连续.

(2)求$f'(x)$.

(3)讨论$f'(x)$在 x=0 处的连续性.

7. 已知轮船的燃料费与速度的立方成正比，当速度为 10km/h，每小时的燃料费为 80 元，又其他费用每小时需 480 元，问轮船的速度多大时才能使 20km 航程的总费用最少？此时每小时的总费用等于多少？

三、证明题

1. 证明：（学习工科数学分析者做第(2)题，其余做(1)）

(1)当$x\geq 1$时，$\arctan x-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{\pi}{4}$.

(2)设$0<x<1$，证明$\dfrac{1}{\ln 2}-1<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}$.

2. 设 f(x)在（0，1）内二阶可导，且$\max\limits_{0<x<1} f(x)=1, \min\limits_{0<x<1} f(x)=0.$证明：至少存在一点$\varsigma\in(0,1)$,使$f''(\varsigma)>2$.

2010 年

一、 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 若$f(x)=\frac{e^x-a}{x(x-1)}$有无穷间断点 x=0 及可去间断点 x=1，则 a=__________。

2. 曲线$y=xe^{2x}$的拐点是_____.

3. 若$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x} & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$, 在（$-\infty$，$+\infty$）上连续，则 a=_____.

4. 曲线由参数方程$\begin{cases}x=t^3+9t\\ y=t^2-2t\end{cases}$确定，则曲线在 t=0 的切线方程为________.

5. 曲线$y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)\ (x>0)$的渐近线方程为_____.

二、 单项选择题（每小题 4 分，共 16 分）

1. x=2 是函数$f(x)=arctan\frac{1}{2-x}$d 的（ ）

A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 第二类间断点

2. 设$f(x)=\begin{cases}\frac{1-cosx}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2g(x), & x\le 0\end{cases}$,其中 g（x）是有界函数，则 f(x)在 x=0 处（ ）

A. 极限不存在 B. 极限存在，但不连续 C. 连续、但不可导 D. 可导

3. 在区间（a，b）内 f’（x)>0, f’’（x)<0, 则 f（x）在（a，b）内是( )

A. 单增凸 B. 单减凹 C. 单增凹 D. 单减凹

4. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-1$, 则在点 x=a 处( )

A. f(x)的导数存在，且 f’(a)≠0 B. f(x)取得极大值

B. f(x)取得极小值 D. f(x)的导数不存在

三、计算下列各题（每小题 8 分，共 40 分）

1. 求极限$\lim_{x\to 0}(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x})$

2. 求极限$\lim_{x\to 3^+}\frac{(cosx)ln(x-3)}{ln(e^x-e^3)}$

3. 求函数$y=ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$的导数。

4. 设 y=y(x)由方程组$\begin{cases}x=3t^2+2t+3\\ e^y sint-y+1=0\end{cases}$确定，求$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

5. 求函数 lnx 在 x=2 处带有皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式。

四、（10 分）设 f(x)具有二阶连续导数，且 f(a)=0, $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x-a} & x\ne a\\ A, & x=a\end{cases}$

(1) 是确定 A 的值，使 g(x)在 x=a 处连续

(2)求 g’（x).

(3)证明:g’(x)在 x=a 处连续。

五、（8 分）函数 f(x)在（$-\infty$，$+\infty$）上有定义，在区间[0,2]上，$f(x)=x(x^2-4)$.假若对任意的 x 都满足 f(x)=kf(x+2),其中 k 为常数.

(1)写出 f(x)在[-2,0]上的表达式。

(2)问 k 为何值时，f(x)在 x=0 处可导？

六、(6 分）设函数 f(x),g(x)都在[1,6]上连续，在(1,6)内可导，且 f(1)=5, f(5)=1, f(6)=12.

求证：至少存在一个点$a\in(1,6)$使 f’(a)+g’(a)[f(a)-2a]=a.

2009 年

一、 填空

1. 求极限：$\lim_{x\to 0}(1+2xe^{x})^{\frac{1}{n}}=$ ____.

2. 设 $y=(x+e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$，则 $y'(0)=$____.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{sinax}{2x}, & x>0\\ b+1, & x=0\\ (1-2x)^{\frac{1}{x}}, & x<0\end{cases}$，要使 f(x) 在 x=0 点处连续，则 a=____，b=____.

4. 已知当 $x\to 0$ 时，$1-\sqrt{1+ax^2}$ 与 x^2 是等价无穷小，则 a=____.

5. 函数 $y=x^3-2x+\frac{1}{x}$ 的单调增区间是______，单调减区间是______.

二、 单项选择题

1. 设数列通项为 $a_n=\begin{cases}\frac{n+\sqrt{n}}{n}, & n\text{ 为奇数时}\\ \frac{1}{n}, & n\text{ 为偶数时}\end{cases}$，则当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是（　　）

   A. 无穷大量；　B. 无穷小量　　C. 有界变量；　　D. 无界变量。

2. 下列各式正确的是　（　　）

   A. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$；　　　　B. $\lim_{n\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$；

   C. $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}=-e$；　　　　D；$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{-x}=e$。

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x}=1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则 f(x) 在 x=0 点处　（　　）

   A. 极限不存在；　B. 极限存在但不连续；　C. 连续；　D. 可导。

4. 设 f(x) 和 g(x) 都在 x=a 处取得极大值，则 F(x)=f(x)g(x) 在 x=a 处　（　　）

   A. 必取得极大值；B. 必取得极小值；C. 不可能取得极值；D. 是否取得极值不能确定。

5. 设 $f(x)=2x\ln(1-x)$，$g(x)=\sin^2 x$，则当 $x\to 0$ 时，f(x) 是 g(x) 的（　　）

   A. 等价无穷小；　B. 同阶但非等价无穷小；　C. 高阶无穷小；　D. 低阶无穷小。

三、 解答下列各题

1. 设 $y=\cos^2(\frac{1-\ln x}{x})$，求 y'.

2. 设$x-y^2+\frac{1}{2}\sin y=0$，求$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

3. 求极限$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^2 sinx}$.

4. 求函数 $f(x)=(5-x)x^{\frac{2}{3}}$的极值.

5. 求曲线 $y=(x^2+1)e^{-x}$的拐点及凹向区间.

6. 求曲线 y=y(x)由方程$\begin{cases} x=\text{arctant} \\ 2y-ty^2+e^t=5 \end{cases}$所确定，求曲线在点 t=0 处的切线方程.

7. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{x(1+x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}, x\le 0 \\ \sin\frac{\pi}{x^2-4}, x>0 \end{cases}$ 的连续性，并确定其间断点的类型.

8. 求函数 $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$，$x\in R$，证明 f(x)>0.

9. 学工科分析者做（1），其余做（2）

（1） 设数列$\{x_n\}$满足$|x_{n+1}-x_n|\le\frac{1}{3^n}$($n\in N_+$)，证明极限$\lim_{n\to\infty}x_n$存在.

（2） 已知$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x+1}-ax-b)=0$，试确定常数 a, b 的值.

10. 设函数$f(x)$在[a, b]上连续，在(a, b)内可导，且$f(a)=f(b)=1$，试证：存在ξ，$\eta\in(a，b)$，使$e^{\eta-\xi}[f(\eta)-f'(\eta)]=1$.

2008 年

一、解答下列各题(每小题 7 分，共 70 分)

1. 设$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+x^2e^{1-\sin\frac{1}{x}}$求$dy$.

2. 求曲线$xe^y+y=1$在点$(1,0)$处的切线及法线方程.

3. 求极限$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x^2})^{\cot^2 x}$.

4. 设$a_1>b_1>0, a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$，$b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$，证明数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都收敛，并且$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$.

5. 讨论函数$f(x)=x^3-3x^2-9x+5$的单调性，凸性和拐点.

6．设 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=t\cos t-\sin t \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

7．讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, \qquad x=0 \end{cases}$，在 $x=0$ 点的连续性与可导性

8．求函数 $f(x)=\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x-1}}{\sin\dfrac{\pi}{2}x}$ 的间断点，并指出间断点的类型.

9．设 $0\le x\le 2$，试证不等式 $4x\ln x\ge x^2+2x-3$.

10．设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x+f(x)}{x^4}=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{f(x)}$.

二、设有三次方程 $f(x)=x^3-3ax+2b=0$，其中 $a>0, b^2<a^3$. 证明：方程 $f(x)=0$ 有且仅有三个实根.

三、AB 和 AC 是两条交于 A 点的直线公路，$\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$，$AB=200km$. 汽车以每小时 $80km$ 的速度由 B 向 A 行驶. 而摩托车以每小时 $50km$ 的速度由 A 向 C 行驶. 若汽车与摩托车同时开动、问经过多少小时它们的距离最近.

四、设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, x\neq 0 \\ 0, \qquad ,x=0 \end{cases}$，其中 $g(x)$ 有二阶连续导数. 且 $g(0)=1, g'(0)=-1.$，

①求 $f'(x)$ ②讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

五、设 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可导，且 $|f(x)|\le 1$，又 $[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4,$ 证明:存在 $\xi\in(-2,2),$ 使 $f''(\xi)+f(\xi)=0.$

2007年

一、解答下列各题(每小题6分，共60分)

1. 设 $y=\arctan(\sqrt{x^2-1})-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}(x>1)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

2. 求由参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{1+t}{t^3} \\ y=\dfrac{3}{2t^2}+\dfrac{2}{t}, \end{cases}$ 所确定函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x-y+\arctan y=0$ 所确定，求 y',y''.

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$

5. 设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，且 $f(0)=0,f'(0)=0,f''(0)=6$，试求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}$.

6. 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})+\arccos\dfrac{1}{x}+e^3$ 的微分 dy.

7. 求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+9$ 的单调区间和极值.

8. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n})$

9. 已知当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^{\alpha}$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，求 k 和 α 的值。

10. 一个圆形铝片加热时，随着温度的升高而膨胀，设该圆片在温度为 t ℃时，半径为 $r=r_0(1+\alpha t)$，其中 r_0,α 为常数，求在 t_1°C 时圆片面积，对温度 t 的变化率.

二、(9 分)试证明：在区是 $(0,\dfrac{1}{2})$ 内，恒有不等式 $2x+(x-2)\arctan x-(x+\dfrac{1}{2})\ln(1+x^2)>0$ 成立

三、(9 分)从半径为R的圆上裁下中心角为t的扇形，卷成一个圆锥面，问当t取何值时，补上底面后所围成的园锥体体积最大？

四、(9 分)设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n\sin(\frac{\pi}{2}x)+\cos(a+bx)}{x^{2n+1}}$，其中$a,b$为常数，$n\in N_+, 0<a<2\pi$ (1)求$f(x)$的表达式(无极限符号).(2)试确实常数a,b，使$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1),\lim\limits_{x\to-1}f(x)=f(-1).$

五、(7 分)试证明数列$\{x_n\}$有界的充分必要条件是$\{x_n\}$的任意子列都有收收敛的子列。

六、(6 分)设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$，试证：对任意实数$\lambda$，必存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$。

2006 年

一、解答下列各题(每小题 7 分，共 70 分)

1. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{1+n}-1)\sin(n^2+1)}{n}$

2. 求极限$\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{2^x+3^x}{2})^{\frac{1}{x}}$。

3. 求函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\pi x}{x(x^2-4)}, & x>0\\ \dfrac{x(x+1)}{x^2-1}, & x\le0\end{cases}$的间断点，并判定其类型。

4. (注：学习《工科分析》的做(1)题；学习《高等数学基础》的做(2)题)

(1) 设非空数集 A 的上确界为 M,数集$B=\{b\,|\,b=\dfrac{a}{2},a\in A\}$,证明$\sup B=\dfrac{M}{2}$。

（2）讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性及可微性。

5．设 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})+\arccos\dfrac{1}{x}+e^3$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

6．设 $y(x)$ 是由方程 $\sin y+xe^y=1$ 所确定的隐函数，求曲线 $y(x)$ 在 $M(1,0)$ 的切线方程。

7．设数 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

8．求 $f(x)=-2x^3+6x^2+18x+7$ 的单调区间与极值。

9．试证方程 $2^x-x^2=1$ 有且仅有三个根。

10．设 $u_n=\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{a^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{a^n+1}(a>1,n\in N_+)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在。

二、证明 $1+x\ln(x+\sqrt{x^2+1})\geq\sqrt{x^2+1},(x\in R)$。

三、设 $f(x)$ 二阶导数连续，且 $f(0)=0,f'(0)=0,f''(0)=6$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}$。

四、一立体的下部为圆柱体，上部为以圆柱体顶面为底面的半球体，若该物体的体积为常 V，问圆柱体的高 h 与底面半径 r 为多少时，此立体有最小表面积。

五、(注：学习《工科分析》的做(1)题；学习《高等数学基础》的做(2)题)

（1）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $M>0$，（$n>1$）证明存在两个不同的 $x_1,x_2\in(0,1)$ 点，使得 $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=\dfrac{n}{M}$

（2）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,f(1)=0,f(\dfrac{1}{2})=1$，

证明存在$\xi \in (0,1)$点，使得 $f'(\xi)=1$。

2005年

一、解答下列各题（每小题7分，共70分）

1. 设$y=\arctan f(x)$，其中$f'(x)$存在，求y'。

2. 求由参数方程$\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^2+t^3 \end{cases}$所确定函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

3．设$y=y(x)$由方程$e^{\arctan\frac{y}{x}}=\sqrt{x^2+y^2}$确定，求$\dfrac{dy}{dx}$。

4．求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})$

5．已知$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=a$存在，并且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，求$a$的值.

6．求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}$，其中$a>0,b>0,c>0$。

7．求函数$y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$的微分$dy$。

8．证明：当$0<x<1$时，$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$。

9．求函数$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$的单调区间和极值。

10. （注：学习《工科分析》的做(1)题；学习《高等数学基础》的做(2)题）

（1）设数列$a_n=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}}_{n重} \quad (a>0)$，证明$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在并求此极限。

（2）设$a>0$，若极限$\lim\limits_{x\to\infty} x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})$存在且不为零，试求$p$的值以及极限值。

三、求函数$f(x)=3x^4-4x^3+1$的凹凸区间及拐点。

四、一火箭发射升空后沿竖直方向运动，在距离发射台 $4000m$ 处装有摄影机，摄影机对准火箭。用 h 表示火箭高度，假设在时刻 t_0，火箭高度 $h=3000m$，运动速度等于 $300m/s$，

（1）用 l 表示火箭与摄影机的距离，求在 t_0. 时刻 l 的增加速度。

（2）用 α 表示摄影机跟踪火箭的仰角(弧度)，求在时刻 α 的增加速度。

四、[8 分] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f'(\frac{a+b}{2})=0$，证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$。

五、[5 分]设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，证明存在两个不同的 $x_1,x_2\in(0,1)$ 点，使得 $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=1$。

2004 年

一、解答下列各题（每小题 7 分，共 70 分）

1. $y=x\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$，求 $y'(1)$.

2. 已知曲线 $\begin{cases}x-e^x\sin t+1=0\\y=t^3+2t\end{cases}$，求曲线在 $t=0$ 处的切线方程.

3. 知 $\sin(xy)-\ln\frac{x+1}{y}=1$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=?$。

4. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}x(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}})\quad(a>0.b>0)$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x & x<0\\ax^2+bx+c & x\geq0\end{cases}$，且 $f''(0)$ 存在, 试确定常数 a,b,c.

6. 求 $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$.

7. 求 $y=\ln\sqrt{x^2+a^2}+\arctan\dfrac{a}{x}$ 的微分 dy

8. 当 $x\in(0,\pi)$ 时, 证明: $\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$.

9. 落在平静水面上的石头, 产生同心波纹, 若最外一圈波半径的增大率总是 6m/s. 问在 2s 末扰动水面面积的增大率为多少?

10. (注：学习＜工科分析＞的做①题，其余的做②题

①已知 $x_n\le a\le y_n$. 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a.$

②设 $y=\sin(3x+2)$. 求 $y^{(n)}$

三、 指出函数 $f(x)=\dfrac{\sin x\cos\frac{\pi}{2}x}{|x|(x^2+x-2)}$ 的间断点及其类型.

四、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数，且 $g(0)=1$

①确定 a 的值, 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

②求 $f'(x)$

③ 讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

五、设 $f(x)$ 在（0, 1）内二阶可导. 且 $\max\limits_{0<x<1}f(x)=1,\quad \min\limits_{0<x<1}f(x)=0$. 用泰勒公式证明: 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使 $f''(\xi)>2$.

六、设 $f(x)$ 在 [0, 1] 上可导, 且 $f(0)=0. f(1)=1.$ 证明: 在 [0, 1] 上存在两点 x_1,x_2,

使得 $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2.$

2003年

一 、解答下列各题（每小题 7 分，共 70 分。）

1. 设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求 y'。

2 . 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，试求 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x_0 f(x)-xf(x_0)}{x-x_0}$.

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\dfrac{1}{\sqrt{x}})^x$ 。

5. 已知极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$ ，求 a,b 。

6. 已知当 $x\to 0$ 时，$e^x-1-\sin x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 a,n.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0\end{cases}$ ， 试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性。

8. 证明：当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时， $\tan x>x+\dfrac{x^3}{3}$.

9 设 $f''(t)\neq 0$ 又 $x=f'(t),y=tf'(t)-t$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

10.（注:学习 《工科分析》的做（ 1）题；学习《高等数学基础》的做（2）题）

（1） 证明：若非空实数集合 A 有上界，则它的上确界是唯一的。

（2） 设 $f(x)=x^2\ln(2+x)$，求 $f^{(10)}(0)$ 。

二 、 证明函数 $f(x)=x^3-3x+a$ 在 $(0,1)$ 内部可能有两个零点，为使 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内存在零点， a 应满足怎样的条件

三、 [8 分]在曲线 $y=\ln x(1<x<2)$ 上求一点 p，使得经过 p 点的切线与直线 $x=1,x=2$，及 x 轴所围图形的面积最小。

四．讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x+1)}{\cos\frac{\pi}{2}x} & x\le 0\\ \sin\dfrac{\pi}{x^2-4} & x>0\end{cases}$ 的间断点及其类型。

五．设 $f(x)$ 二阶可导，且 $|f''(x)|\le M(M>0)$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}=1$，证明对于 $\forall a>1$ 有 $|f'(0)|+|f'(a)|\le Ma$。

线代期中考试试题

【说明】线性代数自 2010 年首次进行期中考试，故目前只有 2 份期中真题。其余为期末真题，请选择其中在考试范围内的题目进行练习.

2011 年

一、填空题（每题 5 分，共 20 分）

1. 设 A 为 3 阶方阵，且 $\det(A)=2$，则 $\det(3A^{-1}-2A^{*})=$__________。

2. 设 A, B 为三阶方阵，且 $\det(A)=9$，$\det(B)=2$，$\det(A^{-1}+B)=2$，则 $\det(A+B^{-1})=$__________。

3. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3k\\ -1 & 2k & -3\\ k & -2 & 3\end{bmatrix}$，若 $r(A)=2$，则 k=____________________ .

4. 平面 π_1：$x+2y-z+8=0$ 与平面 π_2 ：$2x+y+z-7=0$ 之间的夹角 $\Phi=$________________________ .

二、单选题（每题 5 分，共 20 分）

1. 设 A，B 是 n 阶矩阵，则下列结论中正确的是(　　　　).

(A) $AB\ne 0 \Leftrightarrow A\ne 0$ 且 $B\ne 0$

(B) $\det(A)=0 \Leftrightarrow A=0$

(C) $\det(AB)=0 \Leftrightarrow \det(A)=0$或$\det(B)=0$

(D) $A=E \Leftrightarrow \det(A)=1$

2.下列矩阵中，不是初等矩阵的是（　　　）

（A）$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$　（B）$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$　（C）$\begin{bmatrix}1&3&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$　（D）$\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

3 设 A为m $\times$ n 矩阵，若 $r(A)=r<m<n$，则（　　　）.

（A）A 的所有 r 阶子式都不为 0

（B）A 的所有 r-1 阶子式都不为 0

（C）A 经初等行变换可以化为 $\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}$

（D）A 不可能是满秩矩阵

4.点（2，1，0）到平面 3x+4y+5z=0 的距离 d=（　　　　）

（A）$\sqrt{2}$　（B）3　（C）1　（D）$\sqrt{3}$

三、计算题和证明题：

1.（14 分）若线性方程组 $Ax=0$ 有非零解，求 λ 的值，其中

$$A=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1&1\\-1&\lambda&1&-1\\-1&1&\lambda&-1\\1&-1&-1&\lambda\end{vmatrix}.$$

2.（12 分）A 是实对称可逆矩阵，证明：A 的伴随矩阵也是实对称可逆矩阵。

3.(12 分)用初等行变换求方阵 $A=\begin{bmatrix}0&2&1\\-1&1&4\\2&-1&-3\end{bmatrix}$ 的逆 A^{-1}。

4.（14 分）直线 L 过点 P（2，1，3），且与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直

相交，求直线 L 的方程。

2010 年

一、填空题（每题 6 分，共 24 分）

1. 设 A, B 均为 3 阶方阵，且 $|A|=-1$，$|B|=3$，则 $|2A^*B^{-1}|=$_________。

2. 当矩阵 $A=$________________，$B=$_________________时，有

$$A\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}1&3&2\\3&3&3\end{bmatrix}$$ 成立.

3. 设 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{bmatrix}$，矩阵 X 满足 $X=AX+B$，则

$X=$___________________ .

4. 已知两条直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$ 和 $L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$，则过 L_2 且平行于 L_1 的平面方程为_______________________ .

二、选择题（每题 6 分，共 24 分）

1. 设 n 阶矩阵 A，B，C 满足 $ABC=E$，则下列一定正确的是(　　　).

(A) $ACB=E$　(B) $BAC=E$　(C) $CBA=E$　(D) $CAB=E$

2. 设直线方程为 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\B_2y+D_2=0\end{cases}$，且 A_1,B_1,C_1,D_1,B_2,D_2 均不为 0，则该直线（　　）

（A）过原点；（B）平行于 z 轴；（C）垂直于 y 轴；（D）平行于 x 轴.

3 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三维列向量，记矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，

如果已知 $|A|=-1$，则 $|B|=$(　　　) .

(A)30;　(B)20;　(C)10;　(D) 0.

5. 设 A,B 均为二阶矩阵，若 $|A|=2,|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵是（　　　）

（A）$\begin{bmatrix} 2A^* & O \\ O & 3B^* \end{bmatrix}$；（B）$\begin{bmatrix} 3B^* & O \\ O & 2A^* \end{bmatrix}$；（C）$\begin{bmatrix} 2B^* & O \\ O & 3A^* \end{bmatrix}$；（D）$\begin{bmatrix} 3A^* & O \\ O & 2B^* \end{bmatrix}$.

三、计算题和证明题：

1.（12 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$.

2.（12 分）设 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 且 $AB=A+B$，证明 $r(AB-BA+2A)=r(A)$

3.（14 分）判断两直线 $L_1:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ 和 $L_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$ 是否在同一平面上. 如果在同一平面上，求交点；如果不在同一平面上，求两直线间的距离.

4.（14 分）已知齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+\lambda x_2+3x_3+4x_4=0 \\ x_1+\lambda^2 x_2+3^2 x_3+4^2 x_4=0 \\ x_1+\lambda^3 x_2+3^3 x_3+4^3 x_4=0 \\ (4+\lambda)x_1+5x_2+(2+\lambda)x_3+(1+\lambda)x_4=0 \end{cases}$

有非零解，求 λ 的值.

线代期末考试试题

2010 年

一、单项选择题(每小题 5 分, 共 15 分)

(1). 设 A 为三阶方阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得矩阵 B, 再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得矩阵 C，记矩阵 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则

(A) $C=P^{-1}AP$. (B) $C=PAP^{-1}$. (C) $C=P^{T}AP$. (D) $C=PAP^{T}$. （　）

(2). 设有线性方程组(I) ：$AX=O$，　(II)：$A^{T}AX=O$, 则

(A) (II)的解是(I)的解，(I)的解也是(II)的解；

(B) (II)的解是(I)的解，但(I)的解不是(II)的解；

(C) (I)的解不是(II)的解，(II)的解也不是(I)的解；

(D) (I)的解是(II)的解，但(II)的解不是(I)的解；.　（　）

(3) 若n阶方阵$\boldsymbol{A}$相似于对角阵，则

(A) $\boldsymbol{A}$有n个不同的特征值；　(B) $\boldsymbol{A}$为实对称阵；

(C) $\boldsymbol{A}$有n个线性无关的特征向量；　(D) $r(\boldsymbol{A})=n$.　（　）

二、填空题(每小题 5 分, 共 15 分)

(1). 设$\lambda=2$是可逆矩阵 A 的一个特征值，则矩阵$\left(\frac{1}{3}A^{2}\right)^{-1}$的一个特征值为________.

(2). 矩阵$B=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}$，则二次型$f(x)=x^{T}Bx$的矩阵为__________

(3). 已知 η_1,η_2,η 是四元方程组 $AX=b$ 的三个解，其中 $r(A)=$ [illegible] 且 $\eta_1+\eta_2=(1,2,3,4)^{T},\eta_2+\eta_3=(4,4,4,4)^{T}$，则方程组 $AX=b$ 的通解为________

三、(12 分) 证明两直线$l_1:x=y=z-4$，$l_2:-x=y=z$异面; 求两直线间的距离；并求与l_1,l_2都垂直且相交的直线方程。

四、(12 分)线性方程组

$$\begin{bmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-3\\-2\\-2\end{bmatrix}$$

讨论λ取何值时，该方程组有唯一解、无解、有无穷多解?并在有无穷多解时，求出该方程组的结构式通解.

五、(12 分). 已知二次曲面方程 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可经过正交变换 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ 化为柱面方程 $y'^2+4z'^2=4$，求 a,b 的值及正交矩阵 P.

六、(12 分) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足 $AX+I=A^2+X$，其中 I 为三阶单位矩阵，求矩阵 X.

七、(12 分) (注意:学习过第 8 章“线性变换”者做第(2)题, 其余同学做第(1)题)

(1) 矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, 线性空间 $V=\{b\,|\,b\in F^4$，方程组Ax=b有解$\}$ 求 V 的基与维数.

(2) 设 $T\in L\left(R^3\right)$, T 在 R^3 的基 $\alpha_1=(-1,1,1)^T$, $\alpha_2=(1,0,-1)^T$, $\alpha_3=(0,1,1)^T$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求 T 在基 $\beta_1=(1,0,0)^T,\beta_2=(0,1,0)^T,\beta_3=(0,0,1)^T$ 下的矩阵

八、(10 分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维列向量组，矩阵

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{bmatrix}$$

试证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充要条件是对任意 n 维列向量 b，方程组 $AX=b$ 均有解。.

2009 年

一、单项选择题(每小题 5 分, 共 15 分)

(1). 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$.　(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$.

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$.　(D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$.　(　)

(2). 若 $AB=E$, 则

(A) A的行向量线性相关;　(B) B的行向量线性无关;

(C) A是列满秩的;　(D) B是列满秩的.　(　)

(3). 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 A与B

(A) 合同,相似. (B) 合同,不相似. (C) 不合同,相似. (D) 不合同,不相似. (　)

二、填空题(每小题 5 分, 共 15 分)

(1). 在 $A\vec{x}=\vec{b}$ 中，$\sum_{j=1}^{n}a_{3j}A_{3j}=3,\sum_{i=1}^{n}b_iA_{i3}=6$, 则 $x_3=$________.

(2). 若n阶矩阵A的特征值为$0,1,2,\cdots,n-1$，且 $B\sim A$，则$|B+E|=$______.

(3). $\begin{pmatrix}O&A_n\\B_n&O\end{pmatrix}^{-1}=$____________

三、(12 分) 求以$\Gamma:\begin{cases}y=0\\z=x^2\end{cases}$为准线, 母线平行于向量$(2,1,1)$的柱面方程.

四、(12 分) 设线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$ 与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$有公共解,

求a的值及所有公共解.

五、(12 分). 设二次型 $f(\vec{x})=\vec{x}^TA\vec{x}$，其中 $A=\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}$.

（1） 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ ，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 成对角矩阵；

（2） 若 $f(\vec{x})=-1$，指出方程所表示的图形名称.

六、（12 分） 设 $A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\2&1&0\\0&4&3\end{pmatrix}$ 且知 $AX-A=3X$ ，求矩阵 X.

2008 年

一、填空题(每小题 4 分, 共 16 分)

（1）. 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&3&2\\5&0&0\end{pmatrix}$，则 $\det(2\boldsymbol{AA}^*)=$____________.

（2）. 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,-2)^T$，则迹 $\mathrm{tr}(\alpha\alpha^T)=$______________.

（3）. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,2,1,^T)\boldsymbol{\alpha}_2,=\lambda(\ ,^T1\boldsymbol{\alpha}_3 0=)$，$\lambda$ 线性相关，则 λ

=____________.

（4）. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a&1\\3&-1&-a\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则 a 的取值范围

是________________.

二、单项选择题(每小题 4 分, 共 16 分)

（1）. 设 $\boldsymbol{AB}=C$，则必有

（A） $r(A+B)\geq r(A)+r(B)$.　　（B） $r(A)+r(B)=r(C)$.

（C） $r(C)\leq r(A)$.　　（D） $r(B)\leq r(C)$.　　（ ）

（2）. 直线 $L_1:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ 和直线 $L_2:\begin{cases}x+y=1\\z=3\end{cases}$

（A） 重合.　（B） 相交.　（C） 平行.　（D） 异面.　（ ）

（3）. $A\vec{x}=\vec{0}$ 只有零解的充分必要条件是

（A） A 的列向量线性相关；　（B） A 的行向量线性相关；

（C） A 是行满秩的；　（D） A 是列满秩的；　（ ）

(4). 设矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&3\\0&0&2\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$

(A) $\dfrac{1}{2}A^*$.　　(B) $\dfrac{1}{2}A$.　　(C) $\dfrac{1}{4}A$.　　(D) $\dfrac{1}{4}A^*$.　　(　)

三、(12 分) 写出以 $(0,0,0)$ 为顶点，$\begin{cases}x^2+y^2+2z^2=1\\x+y=z+1\end{cases}$ 为准线的锥面方程。并指出其在平面 $z=2$ 上的投影曲线的名称。

四、(12 分) a,b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{pmatrix}1&0&2&a\\0&1&-1&0\\1&1&0&a+b\\1&1&1&2a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\b+1\end{pmatrix}$$

有唯一解、无解、有无穷多解?并在有无穷多解时, 求出该方程组的结构式通解.

五、(12 分). 设二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$，其中 $B=\begin{pmatrix}2&0&2\\2&2&0\\0&2&2\end{pmatrix}$

(1) 写出二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 成对角矩阵;

(3) 求一个合同矩阵 $\boldsymbol{C}$，写出 f 在线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 下的规范形.

六、(12 分) 向量组 $\beta_1=(3,4,2,3)$，$\beta_2=(4,2,6,3)$, 能否由向量组 $\alpha_1=(2,2,2,1)$，$\alpha_2=(1,0,2,1)$，$\alpha_3=(1,2,0,1)$ 线性表示。若能，求出它们的表达式。

七、(10 分) (注意:学习过第 8 章“线性变换”者做第(2)题, 其余同学做第(1)题)

设数域 $\boldsymbol{R}$ 上的三维线性空间 V 中定义的两个运算是 $\oplus$ 和 $\circ$，即 $\alpha\oplus\beta\in V$，

$k\circ\alpha\in V$，且 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是 V 的一个基，θ 是 V 的零元，若

$\alpha_1=\varepsilon_1\oplus(-1)\circ\varepsilon_2\oplus2\circ\varepsilon_3$, $\alpha_2=3\circ\varepsilon_1\oplus(-2)\circ\varepsilon_2\oplus5\circ\varepsilon_3$, $\alpha_3=2\circ\varepsilon_1\oplus\varepsilon_2\oplus\varepsilon_3$

(1) 求 $\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 的基与维数。

（2）若V中的线性算子T的矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$，求$\ker(T)$和$T(V)$的一个基。

八、（10 分）设$\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T$，$\beta=(b_1,b_2,b_3)^T$，且$\alpha^T\beta=2, A=\alpha\beta^T$，

（1）求A的特征值，

（2）求可逆阵P及对角阵Λ，使$P^{-1}AP=\Lambda$.

参考答案

【高数部分】

2011 年

一、1. -3, 2　2. $\sin\frac{2(1-\ln x)}{x}$　3. 1，-1　4. $-\frac{3}{2},\frac{9}{2}$　5. $(2x+1)e^{2x}$　6. 5, 0，$\frac{1}{2}$，$\frac{81}{4}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

二、1. $\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{3/2}}$　2. 2　3. $\frac{1}{f''(t)}$　4. 极小值　5. e(1-e)　6. (1) $g'(0)$ (2) $f'(x)=\begin{cases}\frac{x[g'(x)+\sin x]-[g(x)-\cos x]}{x^2}, x\neq 0\\ \frac{g''(0)+1}{2}, x=0\end{cases}$ (3) 连续　7. $x=10\sqrt[3]{3}$，720

三、1. (2) 证明：令 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$，则 $f'(x)=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{(1+x)x^2\ln^2(1+x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln^2(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)}{2x}=$$

$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x}}{2}$ =1；$\lim_{x\to 1}\frac{(1+x)\ln^2(1+x)}{x^2}=2\ln 2<1$，则

$\frac{(1+x)\ln^2(1+x)}{x^2}$<1，即 $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$，又 $(1+x)x^2\ln^2(1+x)$>0, 故

$f'(x)$<0，即 f(x) 在（0, 1）上单调递减，则 f(x)>f(1)= $\frac{1}{\ln 2}-1$, f(x)<

$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$. 　则结论得证.

2. 证明：设 $x_1,x_2\in(0,1)$，使 f(x_1)=1, f(x_2)=0

由于 x_2 为 f(x) 在（0, 1）上的极小值点，故 $f'(x_2)$=0，由泰勒公式得：

$f(x)=f(x_2)+f'(x_2)(x-x_2)+\frac{f''(\varsigma)}{2!}(x-x_2)^2,\varsigma$ 在 x 与 x_2 之间，即

$\varsigma\in(0,1)$，则 $f(x_1)=f(x_2)+f'(x_2)(x_1-x_2)+\frac{f''(\varsigma)}{2}(x_1\ -x_2)^2=1$, 即

$\frac{f''(\varsigma)}{2}(x_1-x_2)^2=1,\frac{f''(\varsigma)}{2}=\frac{1}{(x_1-x_2)^2}$. 又

$x_1,x_2\in(0,1),\therefore(x_1-x_2)^2\in(0,1)$，则 $f''(\varsigma)>2$，命题得证.

2010 年

一、填空：

1. a=e.　　2. $(-1,-\frac{1}{e^2})$　　3、-2　　4、$y=-\frac{2}{9}x$　　5、$y=x+\frac{1}{e}$

二、单选　　1. C　　2. D　　3. C　　4. A

三、1. 原式$=\lim_{x\to0}\frac{x(1+x)-(1-e^{-x})}{x(1-e^{-x})}=\lim_{x\to0}\frac{1+2x-e^{-x}}{1-e^{-x}+xe^{-x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2+e^{-x}}{2e^{-x}-xe^{-x}}=\frac{3}{2}$

2. 原式$=\lim_{x\to3^-}\frac{\frac{1}{x-3}}{\frac{e^x}{e^x-e^3}}\cos3=(\cos3)\lim_{x\to3^-}\frac{e^x-e^3}{e^x(x-3)}$

$=(\cos3)\lim_{x\to3^-}\frac{e^x}{e^x+(x-3)e^x}=\cos3$

3. $y=ln\frac{2-2\sqrt{1-x^2}}{2x}=\ln\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)-lnx$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}$$

4. $\dot{x}=6t+2.\quad\ddot{x}=6.$　对$e^y sint-y+1=0$ 两边关于 t 求导数：

$e^y.\dot{y}sint+e^ycost-\dot{y}=0.$再对 t 求导数：

$e^y\cdot\dot{y}^2sint+e^y\cdot\dot{y}cost+e^y\cdot\dot{y}cost-e^ysint-\ddot{y}=0.$

t=0 时，y=1. $\dot{y}=e.\ddot{y}=2e^2.$　$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}.$　　$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=\frac{2e^2-3e}{4}$

5. $lnx=\ln[2+(x-2)]=ln2+\ln(1+\frac{x-2}{2})$

$=ln2+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(\frac{x-2}{2})^k+o((x-2)^n)$

四.（1）$A=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}f'(x)=f'(a)$

(2) $g'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{x-a}-f'(a)}{x-a}=\frac{f''(a)}{2}$

$$g''(x)=\begin{cases}\frac{f'(x)(x-a)-f(x)}{(x-a)^2} & x\neq a\\ \frac{1}{2}f''(a) & x=a\end{cases}$$

(3) $\lim_{x\to a}g'(x)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)(x-a)-f(x)}{(x-a)^2}=\frac{1}{2}f''(a)=g'(a)$

五. (1) $-2\le x\le 0$ 时， $x+2\ge 0$

$$f(x)=kf(x+2)=k(x+2)[(x+2)^2-4]=kx(x+2)(x+4)$$

(2) $f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x^2-4)}{x}=-4$

$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{kx(x+2)(x+4)}{x}=8k$ 当 $k=-\frac{1}{2}$ 时，可导

六、证明：设 F(x)=f(x)-2x. 因为 F(6)=0. F(1)=3>0. F(5)=-9<0.

据介值定理。$\exists b\in(3,5)$. 使 $F(b)=0$

在[b, 6]上，作 $\phi(x)=e^{g(x)}[f(x)-2x]$. $\phi(6)=0$. $\phi(9)=0$

可知，$\exists a\in(y,b)$ 使 $\phi'(a)=0$

将 $\varphi(x)=g'(x)e^{g(x)}[f(x)-2x]+e^{g(a)}[f'(x)-2]$ 带入，再除以 $e^{g(x)}$

2008 年

一. 1. $dy=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx+(2xe^{1-\sin\frac{1}{x}}+e^{1-\sin\frac{1}{x}}\cos(\frac{1}{x}))dx$

(7’)少 dx 扣一分

2. 两边对 x 求导得：$e^y+xe^y y'+y'=0$

$y'=-\frac{e^y}{1+xe^y}$, $k=y'|_{x=1}=-\frac{1}{2}$ (3’)

切线方程：$y=-\frac{1}{2}(x-1)$ (5’)

法线方程：$y=2(x-1)$ (7’)

3. 原式 $=\lim_{x\to 0}e^{(\cot^2 x)\ln\sqrt{1+x^2}}$ (2’)

而 $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x^2}}{2\tan x\sec^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{2\frac{\tan x}{x}\sec^2 x}=\frac{1}{2}$

原式$=e^{\frac{1}{2}}$　　（7’）

4. (1)$\because a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\geq\sqrt{a_nb_n}=b_{n+1}$　　（1’）

$\therefore a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\leq a_n$，$b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\geq b_n$　　（2’）

于是$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq a_{n+1}\geq b_{n+1}\geq b_n\geq\cdots\geq b_1$
$\{a_n\}$单调有下界b_1，$\{b_n\}$单调有上界a_1　　（6’）
于是设：$\lim_{n\to\infty}a_n=l,\lim_{n\to\infty}b_n=m.$

对$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, 两边令$n\to\infty$取极限得 l=m。　　（7’）

(2)$\because x_n-x_{n-1}=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}-x_{n-1}=\frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{2}=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2})$　　（2’）

$\therefore x_n=x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+(x_n-x_{n-1})$　　（4’）

$=\mathrm{a}+(\mathrm{b}-\mathrm{a})-\frac{b-a}{2}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{b-a}{2^{n-2}}$

$=\mathrm{a}+(\mathrm{b}-\mathrm{a})\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n-2}}{1-(-\frac{1}{2})}$　　（6’）

于是$\lim_{n\to\infty}x_n=a+\frac{2}{3}(b-a)=\frac{a+2b}{3}$　　（7’）

5. $\because f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$　　（2’）
$f''(x)=6x-6$　　（3’）
∴在$(-\infty,-1)$和$(3,+\infty)$内 f(x)单增，在$(-1,3)$内单增　（5’）
在$(-\infty,-1)$为凹，在$(1,+\infty)$为凸，拐点为$(1,-6)$　　（7’）

6. $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=t$　　（3’）

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{\sin t}$　（6’）

$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\sqrt{2}$　　（7’）

7. $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x^2sin\frac{1}{x}=0=f(0)$ 连续　　（3’）

$f'(0)\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}xsin\frac{1}{x}=0$　可导　　（7’）

8. $\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x\cdot arctan\frac{1}{x-1}}{sin\frac{\pi}{2}x}=\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to1^-}f(x)=-\frac{\pi}{2}$

$\therefore x=1$为跳跃间断点　　（3’）

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{arctan\frac{1}{x-1}}{sin\frac{\pi}{2}x/x}=-\frac{1}{2}$, $x=0$为可去间断点

$\lim_{x\to2k}f(x)=\infty, x=2k(k\in N)$为无穷间断点　　（7’）

9. $f(x)=4x\ln x-x^2-2x+3,x\in[0,2]$　　（2’）

$f'(x)=4\ln x-2x+2$, 令$f'=0,x=1$　　（4’）

$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=3$

$f''(1)=2>0$,极小值唯一，没有极大，故极小值为最小值

$\therefore f(2)\ge f(1)=0$ （7’）

$f(2)=8\ln 2-5>0$

10. $\because \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x+f(x)}{x^4}=1$

$\therefore \frac{x-\sin x+f(x)}{x^4}=1+\alpha, \alpha\to 0(x\to 0)$ （4’）

于是$f(x)=x^4+\alpha x^4-x+\sin x$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=-\frac{1}{6}$ （6’）

于是原式=-6 （7’）

二．$f'(x)=3x^2-3a=3(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})$ （2’）

注意到$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$,$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$f(-\sqrt{a})=2(a\sqrt{a}+b)>0,$

$f(-\sqrt{a})=2(-a\sqrt{a}+b)<0$ （4’）

$\therefore f(x)=0$ 在$(-\infty,-\sqrt{a}),(-\sqrt{a},\sqrt{a}),(\sqrt{a},+\infty)$各至少有一个根 （5’）

又 f’’’=6

$\therefore f=0$最多三个根 （7’）

三．以 A 为坐标原点作直角坐标系，经过 t 小时，B 移动到 B’（200-80t,0），A 移动到 A’（25t,25$\sqrt{3}t$） （2’）

设：$f(t)=(200-105t)^2+1875t^2>0$

令 f’=0, t=$\frac{70}{43}$, f’’(t)>0 （6’）

故 t=$\frac{70}{43}$是 f(t)的极小值点，且是唯一驻点，

故 t=$\frac{70}{43}$是 f(t)的最小值点 （8’）

四．

①当 x≠ 0时，$f'(x)=\frac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}$ （2’）

当 x=0 时，$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-e^{-x}}{x^2}=\frac{g''(0)-1}{2}$

②$\because \lim_{x\to 0} f'(0)=\frac{x\cdot g''(x)+e^{-x}-(1+x)e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}\right)=f'(0)$

故连续 （8’）

五．令$F(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2$ （2’）

$$\frac{f(0)-f(-2)}{0+2}=f'(a),-2<a<0$$

$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(b),0<b<2$ （3’）

|f’(a)|≤1,|f’(b)|≤1

F(x)在[a,b]上连续，在(a,b)内可导
且 F(a)$\leq 2,\mathrm{F(b)}\leq 2$,F(0)=4

∴F(x)在(a,b)取得最大值，设为ξ，

则$\mathrm{F'(\xi)=0}$, 从而$2\mathrm{f'(\xi)[f(\xi)+f'(\xi)]=0}$ （5’）
而$\mathrm{f'(\xi)=0}$, 否则$\mathrm{F(\xi)=[f'(\xi)]^2\leq 1}$ （6’）

2006 年

6. $(\sin y)\mathrm{y}'+e^y+xe^y y'=0$ $(3')$

$\mathrm{y}'=\frac{-e^y}{xe^y+\cos y}$ ， $k=y'|_{(0,1)}=-\frac{1}{2}$ $(5')$

切线为：y=$-\frac{1}{2}(x+1)$ $(7')$

7. $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$ $(4')$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}$ $(7')$

8. $\mathrm{f'(x)}=-6x^2+12x+18=-6(x+1)(x-3)$ $(2')$

f(X)在(-∞,-1)和(3,+∞)单减，在(-1,3)单增。 （5’）

极大 f(3)=61,极小 f(-1)=-3. （7’）

9. 证：$\mathrm{f(x)}=2^x-x^2-1$

$\mathrm{F(1)=0,f(0)=0,f(2)}=-1<0, f(5)=6>0$
则 f(x)至少有三个实根。 （4’）
但$\mathrm{f'''(x)}=2^x(\ln 2)^3>0$ ，f(x)最多有三个实根。 （6’）
故 f(x)仅有三个实根。

10. $U_{n+1}-U_n=\frac{1}{a^{n+1}+1}>0$ 单增 （3’）

$0<U_n<\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{1}{a^n}<\frac{1}{a-1}$ 有界 （6’）

据单调有界原理可知$\lim_{n\to\infty} U_n$ 存在　（7’）

二．证：$f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})$　（3’）

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0\ ,\ \ f'(0)+0 \qquad （5’）$$

f(0)为极小值，又极小唯一，没有极大值，
则极小值为最小值　（7’）
f(x) ≥f(0)=0　（8’）

三

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(sin^2x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(sin^2x)sin2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{2x}\frac{f'(sin^2x)}{2x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(sin^2x)sin2x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{2x}\frac{f''(sin^2x)}{2}=\frac{f''(0)}{2}=3 \qquad （8’）$$

四．$V=\frac{2}{3}\pi r^3+\pi r^2 h$　（1’）

$$S(r)=3\pi r^2+2\pi rh=\frac{3}{5}\pi r^2+\frac{2\pi}{r} \qquad （3’）$$

$$S'(r)=\frac{10}{3}\pi r-\frac{2\pi}{r^2}=0\ ,\ r=\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}} \qquad （5’）$$

$$S''(r)=\frac{10}{3}\pi+\frac{4\pi}{r^3}>0 \qquad （7’）$$

$$S_{min}=5\pi\sqrt[3]{\frac{9V^2}{25\pi^2}}$$

五．①证:∵ $f\in c[0,1]$, 故存在最大值 M>0 及最小值 m<0(由 f(0)=f(1)=0 可知)，

∴存在大于 1 的整数，使得 $m<\frac{M}{n}<M$,

据介值定理，$\exists c\in(0,1)$,使$f(c)=\frac{M}{n}$　（3’）

据 Lagrange Th, 可知$\exists\xi_1\in(0,c),\xi_2\in(c,1)$,

使得$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(c)}{c}$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=-\frac{f(c)}{1-c} \qquad （5’）$$

$$\frac{1}{f'(\xi_1)}-\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{c}{f(c)}+\frac{1-c}{f(c)}=\frac{1}{f(c)}=\frac{n}{M} \qquad （6’）$$

②证：$F(x)=f(x)-x, F(x)\in c[0,1]$　（1’）

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0, F(1)=-1<0$$

据介值定理，$\exists\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, 使 $F(\eta)=0$　（3’）

而$f(\eta)=\eta$, 据 Lagrange Th, $\exists\xi\in(0,1)$,

$f'(\xi)=\frac{f(\eta)-f(0)}{\eta-0}=\frac{\eta}{\eta}=1$ （6’）

【线代部分】

期中部分

2011 年

一、1. $-\frac{1}{2}$ 2. 9 3. -2 4. $-\frac{\pi}{3}$

二、1.C 2.C 3.D 4.A

三、1. λ=1 或-3

2. $\because$ A可逆，$\therefore$ $|A|\neq 0$.

又$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$，

$\therefore A^*=A^{-1}\cdot|A|,$

$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0,$

$\therefore$ A^*可逆.

3. $A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{vmatrix}1&5&7\\5&-2&-1\\-1&4&2\end{vmatrix}$

4. L: $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$

2010 年

一、1. $\frac{8}{3}$　　2. $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$　　3. $\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

4. $x+2-3(y-1)+z=0$ 或者 $x-3y+z+5=0$

二、1.D　2.C　3.A　4.D

四、1. $D_4=\begin{vmatrix}x+3a & x+3a & x+3a & x+3a\\ a & x & a & a\\ a & a & x & a\\ a & a & a & x\end{vmatrix}$..........（4 分）

$$=(x+3a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & x & a & a\\ a & a & x & a\\ a & a & a & x\end{vmatrix}$$ ....（6 分）

$$=(x+3a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & x-a & 0 & 0\\ 0 & 0 & x-a & 0\\ 0 & 0 & 0 & x-a\end{vmatrix}$$ ....（10 分）=

$(x+a)(x-a)^3$......（12 分）

2. 证法 1：$AB=A+B\Rightarrow\begin{cases}B=A(B-I) & (1)\\ A=(A-I)B & (2)\end{cases}$ ....（2 分），把（1）式代入（2）式，得 $A=(A-I)A(B-I)=(A^2-A)(B-I)$ ....（5 分）

由题设条件知，A 可逆，上式两端左乘 A^{-1}，得 $(A-I)(B-I)=I$.......（8 分）

于是有 $(B-I)(A-I)=I$，从而 $BA=A+B$，所以，$AB=BA$......（10 分）

故　$r(AB-BA+2A)=r(2A)=r(A)$.......（12 分）

证法 2：先求 $(A-I)^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ ....(5 分)

$$AB=A(A-I)^{-1}A=\begin{bmatrix}2&2&0\\4&2&0\\0&0&4.5\end{bmatrix}$$ ....(7 分)

$$BA=(A-I)^{-1}A^2=\begin{bmatrix}2&2&0\\4&2&0\\0&0&4.5\end{bmatrix}$$ ....(9 分)

$\therefore AB=BA$.........(10 分)

故 $r(AB-BA+2A)=r(2A)=r(A)$......(12 分)

3. 设 L_1 的方向向量为 $\vec{a}_1=(1,1,2)$， $p_1(-1,0,1)$ 在 L_1 上；

L_2 的方向向量为 $\vec{a}_2=(1,3,4)$， $p_2(0,-1,2)$ 在 L_2 上.

$\because \left[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\overrightarrow{p_1p_2}\right]=2\neq 0$ $\therefore$ 两直线异面.............(6 分)

两直线间距离为 $d=\dfrac{\left|\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\overrightarrow{p_1p_2}\right]\right|}{\left\|\vec{a}_1\times\vec{a}_2\right\|}$ ....(10 分)

$=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.........(14 分)

4. $$D\overset{(1)+(4)}{=}\begin{vmatrix}1&\lambda&3&4\\1&\lambda^2&3^2&4^2\\1&\lambda^3&3^3&4^3\\5+\lambda&5+\lambda&5+\lambda&5+\lambda\end{vmatrix}$$ ....(4 分)

$$=-6(\lambda+5)(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&1&1\\\lambda&3&4\\\lambda^2&3^2&4^2\end{vmatrix}$$ ....(7 分)

$$=-6(\lambda+5)(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-4)$$ ....(10 分)

当 $\boldsymbol{D=0}$，即 $\boldsymbol{\lambda=1}$**或**$\boldsymbol{\lambda=3}$**或**$\boldsymbol{\lambda=4}$**或**$\boldsymbol{\lambda=-5}$ 时，齐次线性方程组有非零解.....（14 分）

期末部分

2010 年

一. 单选题（5 分×3=15 分） 1. B 2. A 3. C

二. 填空题（5 分×3=15 分） 1. $\frac{3}{4}$ 2. $\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

3. $k(3,2,1,0)^T+(2,2,2,2)^T, k$为任意常数

三.（12 分） $\vec{a}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}, \vec{a}_2=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$

取点 $P_1(0,0,4)\in l_1$，点 $P_2(0,0,0)\in l_2$，$\overrightarrow{P_1P_2}=(0,0,-4)$

混合积 $[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\overrightarrow{P_1P_2}]=-8\neq 0$，故 l_1,l_2 异面…

l_1 与 l_2 的距离 $d=\dfrac{|[\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \overrightarrow{P_1P_2}]|}{\|\vec{a}_1\times\vec{a}_2\|}=\dfrac{8}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

公垂线 l 的方向向量 $\vec{l}\,//(0,1,-1)$

含 l,l_1 的平面方程为 $-2(x-0)+1(y-0)+1(z-4)=0$ 含 l,l_2 的平面方程为 $-2(x-0)-1(y-0)-1(z+0)=0$ 故公垂线 l 的方程为:

$$\begin{cases} 2x-y-z+4=0 \\ 2x+y+z=0. \end{cases}$$

四.（12 分）$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc:c} \lambda & 1 & 1 & \lambda-3 \\ 1 & \lambda & 1 & -2 \\ 1 & 1 & \lambda & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & (1-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+2)(1-\lambda) & 3(\lambda-1) \end{bmatrix}$

①当 $\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq 1$ 时, $r(\bar{A})=r(A)=3$ 方程组有唯一解

②当 $\lambda\neq-2$ 时, $r(\bar{A})=2, r(\bar{A})=3$ 方程组无解…

③当 $\lambda=1$ 时, $\bar{A}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, r(A)=(\bar{A})=1<3$ 方程组有无穷多解, 取一个特解 $\eta=(-2,0,0)^{\mathrm{T}}$, 易得导出组的一个基础解系为: $\xi_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}, \xi_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$,

故结构式通解为 $x=\eta+c_1\xi_1+c_2\xi_2$, c_1c_2 为任意常数

五. 记 $A=\begin{bmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&4\end{bmatrix}$，有 $P^{-1}AP=P^{\mathrm{T}}AP=D$， $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

$\begin{cases}0+1+4=1+a+1\\0\times1\times4=|A|=-(b-1)^2\end{cases}$, 故 $a=3,b=1\cdots$

对 $\lambda_1=0$，解 $(0\cdot I-A)x=0$, 得属于 λ_1 的特征向量 $(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$；

对 $\lambda_2=1$，解 $(1\cdot I-A)x=0$, 得属于 λ_2 的特征向量 $(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$；

对 $\lambda_3=4$，解 $(4\cdot I-A)x=0$, 得属于 λ_3 的特征向量 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

将上述 3 个特征向量再正交化，单位化，得正交矩阵

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\\0&-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}$$

六、(12 分) 由题知 $(A-I)X=A^2-I=(A-I)(A+I)$,

$A-I=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$可逆…

故 $X=(A-I)^{-1}(A-I)(A+I)=A+I=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$

七、(12 分) 1. W 的基与维数为 A 的列向量组的极大无关组和秩….

记 $A=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4]$，可计算出 A 的极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，

故 W 的基为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$， 维数为 3 ……

2. 基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵记为 P

即 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}P$ ………………………

则 T 在 β_1,β_2,β_3 下的矩阵为 $PAP^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&-2\\2&2&0\\3&0&2\end{bmatrix}$ ……

八. (10 分) 记 $D=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n]$

$\Rightarrow$ 由 $\alpha_1,\cdots\alpha_n$ 线性无关知 $|D|\neq0$ 而 $|A|=|D^{\mathrm{T}}D|=|D|^2\neq0$，即 A 可逆， 故对任意 n 维列向量 b，方程组 $AX=b$ 均有解 $X=A^{-1}b$。 ……………

$\Leftarrow$ 分别取 $b=\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$, 由方程组 $AX=b$ 均有解知， $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$ 与 A 的列向量组等价, 故 $r(A)=n$， 从而 $|A|=|D^{\mathrm{T}}D|=|D|^2\neq0$, 得 $|D|\neq0$ 故 $\alpha_1,\cdots\alpha_n$ 线性无关。

2009 年

一、单项选择题(每小题 5 分,共 15 分)

(1).【 A 】(2).【 D 】(3).【 B 】

二、填空题(每小题 5 分,共 15 分)(1). $x_3 =$ 2 . (2). n! . (3). $\begin{pmatrix} O & B_n^{-1} \\ A_n^{-1} & O \end{pmatrix}$.

三、(12 分). 解 设柱面上的点为$\vec{p}(x,y,z)$,准线Γ上的点为$\vec{p}_\Gamma(x_\Gamma,y_\Gamma,z_\Gamma)$,则

$$\vec{p}_\Gamma - \vec{p} = t(2,1,1)$$

即 $\begin{cases} x_\Gamma - x = 2t \\ y_\Gamma - y = t \\ z_\Gamma - z = t \end{cases}$, 或 $\begin{cases} x_\Gamma = x + 2t \\ y_\Gamma = y + t \\ z_\Gamma = z + t \end{cases}$

代入Γ: $\begin{cases} y = 0 \\ z = x^2 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} y + t = 0 \\ z + t = (x+2t)^2 \end{cases}$

消去t, 即得所求柱面方程 $z - y = (x-2y)^2$,

或 $x^2 + 4y^2 - 4xy + y - z = 0.$

四、(12 分)解:因为方程组①与②的公共解,即为联立方程组

$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a-1 \end{cases}$ $(*)$的解. 对方程组$(*)$的增广矩阵$\bar{A}$施以行初等变换:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{array}\right] = B$$

因为方程组$(*)$有解, 所以$a=1$或$a=2$,

当$a=1$时, $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, ①与②的公共解为$\vec{x} = k\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

当 $a=2$时, $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, ①与②的公共解为五、(12 分). 解: (1)

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & 2 & 2\\ 2 & -\lambda & 2\\ 2 & 2 & -\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -\lambda & 2\\ 2 & 2 & -\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(\lambda+2)^2=0,$$

解得 $\lambda_1=4,\lambda_2=\lambda_3=-2.$

当 $\lambda_1=4$时，$\begin{bmatrix}-4 & 2 & 2\\ 2 & -4 & 2\\ 2 & 2 & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$;

当 $\lambda_2=\lambda_3=-2$时，$\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\alpha_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$,

正交化，$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2,\beta_3=\alpha_3-\dfrac{<\alpha_3,\beta_2>}{<\beta_2,\beta_2>}\beta_2=(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1)^T$,

单位化，$\varepsilon_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=(\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3})^T,\varepsilon_2=(-\dfrac{1}{\sqrt2},\dfrac{1}{\sqrt2},0)^T,\varepsilon_3=(-\sqrt{\dfrac{1}{6}},-\sqrt{\dfrac{1}{6}},\sqrt{\dfrac{2}{3}})^T$

令 $P=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]$，则 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}4 & & \\ & -2 & \\ & & -2\end{bmatrix}$

(2)做变换 $\vec{x}=P\vec{y}$，则 $f(\vec{x})=\vec{x}^TA\vec{x}=\vec{y}^TP^TAP\vec{y}=\vec{y}^T\Lambda\vec{y}=4y_1^2-2y_2^2-2y_3^2=-1$

整理得 $-\dfrac{y_1^2}{\frac{1}{4}}+\dfrac{y_2^2}{\frac{1}{2}}+\dfrac{y_3^2}{\frac{1}{2}}=1$, 为单叶双曲面.

六、(12 分) 设 解：由 $AX-A=3X$，得 $AX-3X=A$，

即 $X=(A-3E)^{-1}A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ 2 & -2 & 0\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

$$=\frac{1}{-8}\begin{pmatrix}0 & -4 & -2\\ 0 & 0 & -2\\ 8 & 4 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{-8}\begin{pmatrix}-8 & -12 & -6\\ 0 & -8 & -6\\ 24 & 12 & -20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{4}\\ 0 & 1 & \frac{3}{4}\\ -3 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2}\end{pmatrix}.$$

七、(12 分) **解**：(1) $[1+x,x+x^2,x^2-1]=[1,x,x^2]\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$，而

$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，故$1+x,x+x^2$可作为$\mathrm{span}\{1+x,x+x^2,x^2+1\}$的一个基，维数是 2.

(2) $T(a,b,c)=\begin{pmatrix}a+b+c & a+c\\ 0 & 2a+b+2c\end{pmatrix}=(E_{11}E_{12}E_{22})\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$,

而 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

故 $R(T)$的基为$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\ker(T)$的基为$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

八、(10 分)证：设$t_1(\alpha_1+\beta)+t_2(\alpha_2+\beta)+\cdots+t_k(\alpha_k+\beta)=\vec{0}$，则

$$t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_k\alpha_k+(t_1+t_2+\cdots+t_k)\beta=\vec{0} \qquad (*)$$

（*）式左乘A，得$t_1A\alpha_1+t_2A\alpha_2+\cdots+t_kA\alpha_k+(t_1+t_2+\cdots+t_k)A\beta=\vec{0}$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$是齐次线性方程组$A\vec{x}=\vec{0}$的基础解系

因而，$A\alpha_j=\vec{0}$，所以 $(t_1+t_2+\cdots+t_k)A\beta=\vec{0}$，但$A\beta\neq\vec{0}$

从而$t_1+t_2+\cdots+t_k=0$，继而$t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_k\alpha_k=\vec{0}$，

又 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$是齐次线性方程组$A\vec{x}=\vec{0}$的基础解系。

推得$t_1=t_2=\cdots=t_k=0$，证毕.

2008 年

一、填空题(1). 40 .(2). 9 .(3). -1,0,1 .(4). $0<a<1$.

二、单项选择题(1).【 C 】(2).【 B 】(3).【 D 】(4).【 A 】

三、设顶点为$\vec{P}_0=\vec{0}$，准线上的点为$\vec{P}_\Gamma$，锥面上的点为$\vec{P}$，则

$\vec{P}_\Gamma-\vec{P}_0=t(\vec{P}-\vec{P}_0)$，即$\vec{P}_\Gamma=t\vec{P}$，因而$x_\Gamma=tx, y_\Gamma=ty, z_\Gamma=tz$

故，$\begin{cases}(tx)^2+(ty)^2+2(tz)^2=1\\ tx+ty=tz+1\end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+2z^2=(x+y-z)^2$解得锥面方程为

$z^2-2xy+2xz+2yz=0$，其在平面$z=2$上的投影为

$\begin{cases}2-xy+2x+2y=0\\ z=2\end{cases}$，令$x=s-t, y=s+t$，则

$\begin{cases}s^2-t^2-4s-2=0\\ z=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(s-2)^2-t^2=6\\ z=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{(s-2)^2}{6}-\dfrac{t^2}{6}=1\\ z=2\end{cases}$，此投影曲线是双曲线。

四、解：$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&a&2\\0&1&-1&0&-1\\1&1&0&a+b&0\\1&1&1&2a&b+1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&a&2\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-b&1\\0&0&0&a&b\end{array}\right)$，

当$a=0,b\neq0$时，无解。当$a\neq0$时，有唯一解。当$a=0,b=0$时，有无穷多解，此时：

$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&a&2\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-b&1\\0&0&0&a&b\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$，故其结构式解为 $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

五、(1) $A=\frac{1}{2}(B+B^T)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ (2) $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\1&2-\lambda&1\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4$

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$。正交化：$\eta_1=\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix};\eta_2=\xi_2-\frac{\xi_2^T\eta_1}{\eta_1^T\eta_1}\eta_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$，

当$\lambda_3=4$时，$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,规范化：

$\varepsilon_1=\frac{\eta_1}{\|\eta_1\|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\frac{\eta_2}{\|\eta_2\|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\varepsilon_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，

令$P=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]$，则$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{bmatrix}$，且$P=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]$为正交矩阵；

(3)令$C=P\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1/2\end{pmatrix}$，则$f(\vec{x})=x^TAx=y^TC^TACy=y^Ty=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

六、解 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\mid\beta_1,\beta_2)=\left(\begin{array}{ccc|cc}2&1&1&3&4\\2&0&2&4&2\\2&2&0&2&6\\1&1&1&3&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&1&3&3\\0&-1&-1&-3&-2\\0&0&-2&-4&0\\0&-2&0&-2&-4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&0&1\\0&-1&-1&-3&-2\\0&0&1&2&0\\0&1&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&0&1\\0&1&0&1&2\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$，故，

β_1，β_2可以由向量组α_1，α_2，α_3线性表示，且$\beta_1=\alpha_2+2\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$

七、解 由题设知，$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&-2&1\\2&5&1\end{pmatrix}$，而

$\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&-2&1\\2&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&3\\0&-1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}$故，$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，可作为$\text{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$的一个基，

且其维数为2；

(2) 若V中的线性算子T的矩阵$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&-2&1\\2&5&1\end{pmatrix}$，求$\ker(T)$和$T(V)$的一个基

$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&-2&1\\2&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&3\\0&-1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-7\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}$,故$A\vec{x}=\vec{0}$的结构解$\vec{x}=k\begin{pmatrix}7\\-3\\1\end{pmatrix}$

故，$\ker(T)=\{\alpha\mid T(\alpha)=\theta,\alpha\in V\}=\{k\circ(7\circ\varepsilon_1\oplus(-3)\circ\varepsilon_2\oplus\varepsilon_3)\}$的一个基为$\alpha=7\circ\varepsilon_1\oplus(-3)\circ\varepsilon_2\oplus\varepsilon_3$。$T(V)=\{T(\alpha)\mid\alpha\in V\}=\text{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}$的一个基为$\alpha_1,\alpha_2$，即$\alpha_1=\varepsilon_1\oplus(-1)\circ\varepsilon_2\oplus 2\circ\varepsilon_3,\alpha_2=3\circ\varepsilon_1\oplus(-2)\circ\varepsilon_2\oplus 5\circ\varepsilon_3$。

八、(10分) 设$\alpha^T\beta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=2\neq 0,$，故可妨设$a_1b_1\neq 0$，因而$r(A)=1$,

故$\lambda_1=\lambda_2=0$是A的两个特征值，又$0+0+\lambda_3=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=2,\lambda_3=2$，

对应于$\lambda_2=\lambda_1=0$的特征向量是方程$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0,$的基础解系为

$\xi_1=(b_2,-b_1,0)^T,\xi_2=(b_3,0,-b_1)^T$，又$A\alpha=(\alpha\beta^T)\alpha=\alpha(\beta^T\alpha)=2\alpha$，$\xi_3=\alpha$，于是

$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3),\Lambda=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.