Problemas sobre funciones continuas

1. Determinar los puntos de continuidad de las funciones:

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (b) $g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$, $x > 0$

   (c) $h(x) = \dfrac{\sqrt{1 + |\sin x|}}{x}$, $x \neq 0$

   (d) $k(x) = \cos \sqrt{1 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

2. ¿Para qué valores de a y de b la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3, & \text{si } x < 1, \\ bx + a, & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 3ax, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

   es continua para todo $x \in \mathbb{R}$?

3. Sean f y g dos funciones continuas en $\mathbb{R}$.

   (a) Demuestra que $\sup\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$, para todo $x \in \mathbb{R}$

   (b) Demuestra que la función $h(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$ es una función continua para todo $x \in \mathbb{R}$

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que para todo $q \in \mathbb{Q}$, es

$$f(q) = aq^3 - bq^2 + c.$$

   Determina el valor que toma f sobre los puntos irracionales, es decir, calcula $f(x)$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq b$. Demuestra que entre a y b existe una solución de la ecuación

$$\frac{x^2 + 1}{x - a} + \frac{x^6 + 1}{x - b} = 0$$

6. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Demuestra que existen $a, b \in [0,1]$ tales que $f(a) = a$ y $f(b) = 1 - b$.

7. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ tal que para todo $x, y \in [0,1]$ es $|x - y| \leq |f(x) - f(y)|$. Demuestra que $f(x) = x$ o que $f(x) = 1 - x$.

8. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$. Demuestra que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) \geq \alpha$ para todo $x \in [a,b]$

9. Sea $f : [a,b] \to [a,b]$ continua. Demuestra que f tiene al menos un punto fijo, es decir que existe $x_0 \in [a,b]$, tal que $f(x_0) = x_0$.

10. Un ciclista parte de un punto a las 8 de la mañana de un dia y sube a una ermita para la que sólo se accede por una camino. El ciclista pasa la noche en la ermita y, a la mañana siguiente, también a las 8, regresa al punto de partida por el mismo camino. Demuestra que existe al menos un punto del camino en el que estará a la misma hora los dos dias.