Tema 3 - Producto por bloques y factorizaciones triangulares

Juan Gabriel Gomila & María Santos

null

Producto por bloques

Producto por bloques

En el `Tema 1` vimos como multiplicar matrices. Resumiéndolo, consistía en realizar productos de filas por columnas pertinentes

En caso de tener matrices (no necesariamente cuadradas) de órdenes elevados, cuyo producto pueda llevarse a cabo, los cálculos pueden resultar mucho más sencillos si dividimos las matrices en bloques y realizamos el producto por bloques.

Para llevar esto a cabo, hay que dividir las dos matrices que queramos multiplicar, A y B, en bloques o submatrices, de forma que cada fila de bloques de la primera matriz sea multiplicable por cada columna de bloques de la segunda.

Producto por bloques

Es decir, sean A,B matrices las cuales hemos dividido del siguiente modo:

$$A = \begin{pmatrix} C & | & D \\ -- & | & -- \\ E & | & F \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} G & | & H \\ -- & | & -- \\ J & | & K \end{pmatrix}$$

podremos multiplicar A por B por bloques de la siguiente forma, siempre que los productos de matrices indicados en la siguiente matriz puedan llevarse a cabo:

$$AB = \begin{pmatrix} CG + DJ & | & CH + DK \\ ------ & | & ------ \\ EG + FJ & | & EH + FK \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

Ejemplo 1

Supongamos que queremos multiplicar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$, sabemos que el producto puede llevarse a cabo.

No obstante, en vez de multiplicar a lo bruto, dividamos las matrices en bloques del siguiente modo:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & 5 \\ -- & -- & -- & -- \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right. \qquad B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -- & -- & -- \\ -3 & 2 & 1 \end{array}\right.$$

Ejemplo 1

Vemos que esta división es correcta ya que si nombramos a cada uno de los bloques tal y como se indica a continuación:

$$A = \begin{pmatrix} C & | & D \\ -- & | & -- \\ E & | & F \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} G & | & H \\ -- & | & -- \\ J & | & K \end{pmatrix}$$

tenemos que las submatrices $C, D, E, F, G, J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mientras que las submatrices $H, K \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$.

Una vez comprobado que todos los productos de matrices pueden llevarse a cabo, hay que hacer las siguientes operaciones para finalmente obtener

$$AB = \begin{pmatrix} CG + DJ & | & CH + DK \\ ------ & | & ------ \\ EG + FJ & | & EH + FK \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

$$CG = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$DJ = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -15 & 15 \end{pmatrix}$$

$$CH = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$DK = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$EG = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$FJ = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

$$EH = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$FK = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$CG + DJ = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -15 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 13 \\ -17 & 7 \end{pmatrix}$$

$$CH + DK = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$EG + FJ = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$EH + FK = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

Con lo cual,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -7 & 13 & 13 \\ -17 & 7 & 9 \\ -3 & 4 & -1 \\ -4 & 13 & 10 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

El producto por bloques resulta ser más interesante cuando alguna de las submatrices es muy sencilla con muchos 0's o bien es una matriz diagonal, una matriz identidad o directamente una matriz nula.

Ejemplo 2

Supongamos que las matrices A y B son de la forma

$$A = \begin{pmatrix} I_n & | & C \\ -- & | & -- \\ 0 & | & I_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} I_n & | & D \\ -- & | & -- \\ 0 & | & I_n \end{pmatrix}$$

donde $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e I_n representa la matriz identidad de orden n. Entonces tenemos que

$$AB = \begin{pmatrix} I_n \cdot I_n + C \cdot 0 & | & I_n \cdot D + C \cdot I_n \\ -------- & | & -------- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & | & D + C \\ ---- & | & ---- \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Por otro lado,

$$BA = \left(\begin{array}{c|c} I_n \cdot I_n + D \cdot 0 & I_n \cdot C + D \cdot I_n \\ \hline 0 \cdot I_n + I_n \cdot 0 & 0 \cdot C + I_n \cdot I_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & C + D \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)$$

Con lo cual, en este caso el producto es conmutativo para cualesquiera matrices C, D.

Producto por bloques

A la hora de calcular matrices inversas, tenemos casos de matrices por bloques en los cuales el cálculo de la inversa se simplifica considerablemente:

Proposición. Sea A una matriz cuadrada dividida en bloques del siguiente modo:

$$A = \begin{pmatrix} B & | & C \\ -- & | & -- \\ 0 & | & D \end{pmatrix}$$

donde $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}),\ C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R}),\ D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. Entonces, A es invertible si, y solo si, lo son B y D, y entonces

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & | & -B^{-1}CD^{-1} \\ -- & | & ------- \\ 0 & | & D^{-1} \end{pmatrix}$$

Producto por bloques

En particular, si $C = 0$, A es invertible si, y solo si, lo son B y D, y entonces:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & | & 0 \\ -- & | & -- \\ 0 & | & D^{-1} \end{pmatrix}$$

Factorizaciones triangulares

Factorizaciones triangulares

En este apartado nos proponemos estudiar cuando una matriz pude escribirse como producto de una matriz triangular inferior, a la que llamaremos L, y una matriz triangular superior a la que llamaremos U.

Antes de empezar, repasemos las operaciones elementales

Factorizaciones triangulares

Matriz Elemental (por filas). Se obtiene a partir de la matriz identidad I_m de la siguiente manera:

- F_{ij} : matriz elemental obtenida a partir de la matriz identidad I_m a la que se le han intercambiado las filas i, j
- $F_i(\alpha)$: matriz elemental obtenida a partir de la matriz identidad I_m a la que se le ha multiplicado la fila i por $\alpha \in \mathbb{K}$
- $F_{ij}(\alpha)$: matriz elemental obtenida a partir de la matriz identidad I_m a la cual se le ha sumado a la fila i la fila j multiplicada por α

Factorizaciones triangulares

Proposición. Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ una matriz. Entonces, cada una de las transformaciones elementales por filas que se pueden realizar sobre A corresponden a multiplicar la matriz A por la izquierda por una matriz elemental de la siguiente manera:

- Intercambiar las filas i, j de A se corresponde a realizar el producto $F_{ij} \cdot A$
- Multiplicar la fila i por $\alpha \in \mathbb{K}$ se corresponde a realizar el producto $F_i(\alpha) \cdot A$
- Sumar a la fila i de la matriz A, la fila j multiplicada por un número $\alpha \in \mathbb{K}$ se corresponde a realizar el producto $F_{ij}(\alpha) \cdot A$

Ejemplo 3

Ejemplo 3

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Entonces, intercambiar las filas 1 y 3 corresponde a multiplicar

$$F_{13} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Multiplicar la segunda fila de A por -2 se corresponde con

$$F_2(-2) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ -4 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3

Sumar a la tercera fila de A, la segunda multiplicada por 5 corresponde a realizar el producto

$$F_{32}(5) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 10 & 0 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Factorizaciones triangulares

Es fácil comprobar que las transformaciones elementales por columnas corresponden igualmente a multiplicar, en este caso por la derecha, por matrices elementales similares obtenidas a partir de la matriz identidad operando por columnas: $C_{ij}, \ C_i(\alpha), \ C_{ij}(\alpha)$

Factorizaciones triangulares

Proposición. Todas las matrices elementales son invertibles y sus inversas vuelven a ser matrices elementales:

- $F_{ij}^{-1} = F_{ij}$
- $F_i(\alpha)^{-1} = F_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$
- $F_{ij}(\alpha)^{-1} = F_{ij}(-\alpha)$

Observación. Las matrices $F_i(\alpha)$ son diagonales y las matrices $F_{ij}(\alpha)$ son triangulares inferiores si $i > j$ o triangulares superiores si $i < j$.

Factorizaciones triangulares

Ahora ya estamos preparados para ver los teoremas relativos a las factorizaciones triangulares, también conocidas como Factorizaciones LU.

Factorizaciones triangulares

Teorema. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y U una matriz escalonada por filas equivalente con todos los pivotes 1 (la cual será triangular superior)

- Si U se puede obtener a partir de A sin necesidad de hacer ninguna permutación entre sus filas, entonces existe una matriz triangular inferior L de forma que $A = LU$. Además, si A es invertible, entonces esta factorización es única.
- Si para llegar a U se requieren permutaciones de filas y A es invertible, entonces existe una matriz P tal que $PA = LU$ donde P es simplemente un producto de matrices elementales de la forma F_{ij}. Para cada P (ya que puede haber más de una) la factorización es única.

Factorizaciones triangulares

Existe un algoritmo para encontrar una factorización LU de una matriz cualquiera A. Y es el siguiente:

1. Encontrar matriz escalonada por filas con pivotes 1 equivalente a A, la que será nuestra U.
2. Para llegar a dicha matriz, habremos realizado una serie de transformaciones elementales correspondientes a matrices elementales de la forma $F_i(\alpha)$ y $F_{ij}(\alpha)$ con $i < j$. Así, $U = L_n \cdots L_1 \cdot A$
3. Entonces, $A = (L_n \cdots L_1)^{-1} U = L_1^{-1} \cdots L_n^{-1} \cdot U = LU$, donde L es triangular inferior porque todas las L_i^{-1} lo son.

Ejemplo 4

Ejemplo 4

Encontremos la factorización LU de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Empecemos buscando su forma escalonada reducida por filas:

$$A \sim_{f_2-2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 7 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim_{f_4-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 7 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim_{-\frac{1}{5}f_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & - \\ 0 & - \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4

$$\sim_{f_3+2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & \frac{17}{5} & -\frac{19}{5} \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim_{f_4+2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & \frac{17}{5} & -\frac{19}{5} \\ 0 & 0 & \frac{17}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \sim_{\frac{5}{17}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\sim_{f_4-\frac{17}{5}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim_{\frac{1}{3}f_4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y con todo esto, ya tenemos a nuestra matriz U:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4

Para obtener U hemos llevado a cabo 8 operaciones elementales:

$$U = L_8 \cdot L_7 \cdots L_1 \cdot A$$

$$= F_4\left(\frac{1}{3}\right)\cdot F_{43}\left(-\frac{17}{5}\right)\cdot F_3\left(\frac{5}{17}\right)\cdot F_{42}(2)\cdot F_{32}(2)\cdot F_2\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot F_{41}(-1)\cdot F_{21}(-2$$

Multiplicando ahora por las inversas por la izquierda, lo que tenemos es

$$A = L_1^{-1}\cdots L_8^{-1}\cdot U = F_{21}(2)\cdot F_{41}(1)\cdot F_2(-5)\cdot F_{32}(-2)\cdot F_{42}(-2)\cdot F_3\left(\frac{17}{5}\right)\cdot F_4$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4

Entonces,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{17}{5} & 0 \\ 1 & -2 & \frac{17}{5} & 3 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobemos que estas matrices obtenidas son las correctas:

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{17}{5} & 0 \\ 1 & -2 & \frac{17}{5} & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Ejemplo 5

Ejemplo 5

Encontremos la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculemos su matriz escalonada reducida equivalente:

$$A \sim_{f_2 \to f_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim_{f_3+3f_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \sim_{f_3-7f_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -28 \end{pmatrix},$$

En este caso hemos llevado a cabo una permutación de filas. Más concretamente, hemos cambiado la fila f_1 por la fila f_2. Esto corresponde a multiplicar la matriz A ppr la matriz F_{12} por la izquierda. Con lo cual:

Ejemplo 5

Con lo cual, lo que tenemos es que la matriz PA admite una factorización LU.

Las operaciones elementales llevadas a cabo sobre la matriz

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

para obtener U han sido

$$U = F_3\left(-\frac{1}{28}\right) \cdot F_{32}(-7) \cdot F_{31}(3) \cdot PA$$

Con lo cual,

$$L = F_{31}(-3) \cdot F_{32}(7) \cdot F_3(-28) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -28 \end{pmatrix}$$

Ejemplo5

Comprobemos que todo está bien:

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & -28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = PA$$

Factorizaciones triangulares

Una de las aplicaciones que tienen las factorizaciones triangulares (o factorizaciones LU) se ve en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Con las factorizaciones $A = LU$ o $PA = LU$ tendremos que hacer los cálculos solamente una vez y finalmente, resolver los sistemas triviales para cada término independiente.

En primer lugar, tendremos el sistema $AX = b$, el cual es equivalente a $LUX = b$.

Ahora, consideremos el sistema $Y = UX$, de forma que $LY = b$. Este sistema tiene solución inmediata, pues L es triangular inferior.

Por último, resolvemos $UX = Y$, que también tendrá solución inmediata ya que U es triangular superior.

Factorizaciones triangulares

En caso de que el sistema admita factorización $PA = LU$ es exactamente igual ya que $AX = b$ es equivalente a $PAX = Pb$, puesto que solamente hemos permutado filas.

Ejemplo 6

Ejemplo 6

Consideremos el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ -3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}\right.$$

Podemos escribir el sistema en su forma matricial, $AX = b$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Observad que la matriz A es la del `Ejemplo 5`, la cual sabemos que admite factorización $PA = LU$.

Evidentemente, los sistemas $AX = b$ y $PAX = Pb$ tendrán las mismas soluciones ya que de un sistema a otro solamente hemos

Ejemplo 6

Dicho esto, sabemos que $PAX = Pb$ es equivalente a $LUX = Pb$.

Consideremos $Y = UX$. Con lo cual, buscamos Y tal que

$$LY = Pb \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & -28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3 & 7 & - \end{pmatrix}$$

sistema que tiene solución inmediata
$y_1 = 3,\ y_2 = 1,\ y_3 = \frac{-3y_1+7y_2+2}{28} = 0$

Ahora ya solo nos queda resolver el sistema $UX = Y$. Es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que vuelve a tener solución inmediata
$x_3 = 0,\ x_2 = 1 - x_3 = 1,\ x_1 = 3 - 3x_2 + 2x_3 = 0$

Ejemplo 6

Con lo cual, la solución a nuestro sistema inicial

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ -3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}\right.$$

es $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Observación. Observad que por mucho que cambiemos los términos independientes, ello no afecta a la factorización LU, ya que ésta seguirá siendo la misma puesto que la matriz de coeficientes A no está siendo modificada.