Edwin(Er-Xin) Shang(ADM-RD-SH)

From:	Edwin(Er-Xin) Shang(ADM-RD-SH)
Sent:	Thursday, April 8, 2021 1:17 PM
To:	Edwin(Er-Xin) Shang(ADM-RD-SH)
Subject:	极简数学

极简数学

克里斯·韦林

107个笔记

第1章 数的分类

把一些有代表性的数字列了出来，它们能帮助读者更好地理解数的概念：

希尔伯特为国际数学家大会列出了23个尚未解决的问题（现在称为希尔伯特问题），其中3个至今仍未解决。有一个叫作“希尔伯特旅馆”的思维实验，上文中提到的动物园也来源于此，这个思维实验是关于希尔伯特对一家旅馆的思考。该旅馆有无穷个客房，希尔伯特说，如果我们让所有初次入住的客人搬入新房间，新房间号码是现在房间号码的两倍，那么我们仍然可以再容纳无穷多的新客人

第2章 康托尔计数法

自然数是完全平方数，但大多数都不是，所以非完全平方数一定比完全平方数多。然而，每个自然数都可以计算平方，从而产生一个完全平方数，所以这些平方数的数量与自然数的数量相同。于是，一个悖论产生了，这两个逻辑命题不可能都是真的。

康托尔把自然数的基数称为阿列夫零或ℵ0（阿列夫是希伯来字母表中的第一个字母）

如果一个集合包含从0到1的所有有理数，我可以从0开始尝试找出这中间的所有分数。分母可能使用的数就是自然数，分子也是自然数的一部分，所以从0到1的有理数的基数也是ℵ0。

所有的有理数集合的基数都为ℵ0。

康托尔也研究过无理数，但无理数的集合是无法系统地排列出来的。他提出的对角线方法证明

在新集合中创建新的无理数。于是就形成了一个循环，而这个循环意味着，人们永远无法系统地列出所有无理数，因为总是有被遗漏的数字。康托尔说，像这样的集合是无穷的无穷，它们的基数是ℵ1。

该假设认为不存在基数在ℵ0和ℵ1之间的集合——在可数集合和不可数集合之间不存在任何集合。后来的结果证明，连续统假设无法用集合论来证明或证否。

第3章 算术方法

大约在公元500年，他使用了十进制体系，其中每列数值是前一列的10倍。另一位印度天文学家婆罗门笈多（Brahmagupta，598—670）完善了这个体系，他使用了9个数字符号，并且用一个点来表示一个空列，这个点后来发展成了我们现在看到的0。

减掉6份压载物可以让气球上升6个高度，所以：−1 −(−6)=5。

第4章 加法和乘法

我可以将棋子排列成每行17个、共12行，来解决12×17的问题：[插图]但是，如果我把12分解为10+2，把17分解为10+7，我就可以分组计算：

纳皮尔曾施展巫术。他有一只黑色的公鸡，他每隔一段时间会命令仆人们独自进入一个房间，抚摸那只公鸡，说公鸡会感受到仆人是否诚实。实际上，纳皮尔事先把烟灰涂在了公鸡的羽毛上。任何有愧疚感的人都不会抚摸公鸡，于是他们的手上就没有沾上烟灰，狡猾的纳皮尔就会发现他们有罪。

第6章 分数和素数

我们得到了一个重复序列。我们在序列的首尾数字上各加一个点来表示这个数：[插图]而且，每个以7为分母的分数的重复序列都是相同的，只是起始、终结数字有所不同

素数是指只有两个因数的自然数。例如8可以被1、2、4和8整除，它有4个因数，显然它不是素数。5有两个因数，1和5，所以它是素数

算术基本定理，即每个自然数都可以写成素数的乘积，但是这样的写法只有一种。例如：30=2×3×5

当把分数转换成小数时，为获得有限的小数位数，我们需要将它的分母变为10的倍数。10的素因数是：10=2×5

两个分母的最小公倍数。例如，如果我想计算[插图]和[插图]的和，就要先确定8和12的最小公倍数，结果显然是24

值得注意的是，将一个数乘以真分数，数值会变小。

法国牧师马林·梅森（Marin Mersenne，1588—1648）用下面这个公式计算了一系列数字：Mn=2n–1

第7章 二进制数

德国数学家戈特弗里德·莱布尼茨（Gottfried Leibniz，1646—1716）对《易经》非常感兴趣，并在17世纪末设计了现代二进制系统。

直接告诉读者用二进制表示的[插图]是一个循环小数：[插图]我可以把这个数写成[插图]。它使用了我们在前文看到的符号。

二进制的[插图]是循环小数，所以他们必须要切断数字的尾部。换算回十进制系统后，实际时间就不是测量的[插图]（或0.1）秒，而是0.099 999 91秒，误差是0.000 000 09秒。这个时间看似微不足道，但随着时间的推移，误差会越来越大，因为时钟每秒钟就快了[插图]秒。

从空中坠落的飞毛腿，其速度约为每秒1.5千米，飞毛腿在这段错误的时间内行进了约500米。

一枚飞毛腿导弹击中美军营房，造成28名士兵死亡，更多人受伤。一切都是由舍入误差引起的。

第8章 精确度

虽然在日常英语中我们会混用准确（accurate）和精确（precise）

舍入背后的意义在于，在保证准确的前提下，以更低的精度表现数字

第9章 乘方

基准的倍数关系：103：千——kilo——（k）106：百万——mega——（M）109：十亿——giga——（G）1012：万亿——tera——（T）

10100取个名字。他9岁的侄子把这个数字叫作“googol”。这个数字特别大，整个宇宙也只有1080个原子，也就是说googol是1080的100 000 000 000 000 000 000倍！

某个数字除以它本身，结果只能是1，所以30必须等于1

前缀相关：10–2：百分之一——centi——（c）10–3：千分之一——milli——（m）10–6：百万分之一——micro——（μ）10–9：万亿分之一——nano——（n）

公顷（hectare）有时被用作面积单位，但很少有人知道它的真实故事。公亩（are）

爱因斯坦的E=mc2为核能的发展铺平了道路，牛顿的F=Gm1m2r-2可以描述行星的运动。费马大定理涉及希腊数学家丢番图（Diophantus）的方程：an+bn=cn。

体重指数（BMI）的计算公式为：BMI=质量÷身高2

第10章 百分数

百分数是分母为100的分数，源于拉丁语“per centum”（以百计数）。它的写法“%”来自意大利商人的速记法（原写作per cento）。

一部分偿还当月累计利息，另一部分偿还本来的金额。

它会让你时刻想着在期末还清所有的债务：[插图]

很多数学家都想知道多年后利率会如何变化。雅各布·伯努利（1654—1705）注意到，不仅是利率，就连利率的计算频率也会影响还款额和最终支付的总金额。

可见，利息计算得越频繁，对你越有利。投资也是如此。伯努利得出结论：如果持续计算利息，你需要计算的公式是：[插图]

在一年中享受到的最多的利息是初始投资乘以2.7的乘方（乘方的次数是利率值）。如果我以每年5%的速度投资100英镑，并在一年中不断地获得利息

我们知道这个数字像π一样，永远不会重复：2.718 281 828 459 045 235 360 287 471 352 662 49...这个值出现在数学的很多领域，原本看似毫不相干。一位著名的瑞士数学家莱昂哈德·欧拉（1707—

1783）在他的力学（描述了事物的运动原理，而不是如何修理机器的学科）著作中，用字母e来表示这个数字，因此它也被称作欧拉数

欧拉的名声而被广泛使用：eiπ+1=0

第11章 统一度量衡

分析量纲后，我们发现该式与前面的示例完全相同。然而，我们需要把老朋友π找出来，才能得到正确的答案：圆的面积=πr2对于π，它不会影响我们的量纲分析，因为它本身就不具有量纲

1秒是铯原子振动9 192 631 770次所需的时间。

开尔文（温度单位），安培（电流单位），摩尔（一定质量物质的量），坎德拉（发光强度单位）。这7个单位现在被称为国际单位制（SI）的7个基本单位

牛顿（1642—1726）以创立引力这个概念而闻名：牛顿第二定律：力=质量×加速度质量作为国际单位制中的基本单位，用千克度量。加速度的单位是米/秒2。所以，力的单位是“千克·米/秒2”。我们可以把这个较长的复合单位称为牛顿。

液压机和注射器。他的大部分研究都集中在压力上：[插图]正如我们刚才看到的，力的单位为千克·米/秒2，面积的单位是平方米。因此，压力的单位应该是千克·米/（秒2·米2），化简后为“千克/（秒2·米）”

第12章 比例

所需的面食质量是m，数学家为得出公式，第一步就是写出：m ∝ n这个符号的意思很简单，即“成正比”。我们还没有一个可用的公式，但已经列出了基本假设

黄金比例在数学中非常重要，所以像π和e一样，它也被赋予了一个单独的字母来表示：ϕ［发音为“phi”，和“eye”（眼睛）押韵］，这是古希腊建筑师和雕塑家菲迪亚斯（Phidias

像π和e一样，ϕ也是一个无理数：[插图]

第14章 基础知识

上面列出的式子叫作方程式。我们经常（但也不总是）会求解方程式。我们可以把方程式形象地想象成天平或跷跷板，等号代表支点或枢轴。

括号围住它们，分别让每一个式子都等于0，就大功告成了。

对于ay2+by+c=0这样的二次方程，它的解是：[插图]

下面这些关键词很有用。有一些前面已经出现，但在这里总结一下。

第15章 优化

他的某个儿子是一名数学天才。他是如何圈住最多的土地的呢？我们可以对这种情况做如下的分析：

看起来很像前一章的例子：w2–50w=（w–25）2+c在这里用了“+c”，因为我知道要使方程成立，需要增加一个数。

完全平方只适用于二次方程，那么如果是二次以上的方程，该如何求解呢？

第16章 算法

假设有一个售货员需要绕过某些城镇，再以最短的路线回到工厂，而不必再经过任何城镇，如何计算他的最佳路线呢？哈密顿在1857年设计了一个棋盘游戏来说明这个问题，这个游戏叫作顶点游戏（Icosian Game）。时至今日，你仍然可以下载这个游戏的应用程序

阶乘值增长得很快。数学家称这类问题为非确定性多项式问题，即NP问题。用行话来说就是，随着所涉及的事物数量的增加，组合的数量也成倍增长，这就大大增加了需要考虑的组合数量，从而也使计算最优结果的时间加长。

第17章 公式

下面这个公式可将摄氏温度（用C表示）转换为华氏温度（用F表示）：[插图]

我们在前文中得知φ=1.618 033 98...这与斐波那契数有什么关系？如果你把斐波那契数的连续项相除

每个矩形的长度除以它的宽度，就可以得到等价分数：[插图]

棣美弗活到了87岁的高龄，这在那个时代并不多见。然而，传说中他发现自己每晚的睡眠时间在不断加长，并预言当他的睡眠时间比清醒时间更长时，他就会死去。他计算出了具体的日期，并正好在那一天死去。

正式阐述了三体问题。这个问题中涉及三个物体在空间中的运动以及它们之间的引力是如何相互影响的。

第18章 面积和周长

圆的周长是正方形边长的6倍多一点儿：圆周长=半径×6倍多一点儿一些数学家建议把6倍多一点儿用一个符号表示，即希腊字母τ。

阿基米德认为圆的周长介于内切六边形和外切六边形之间。然后，为了使多边形的周长更接近圆周长，阿基米德不断将多边形的边数加倍

也是一个超越数。这种数字不可能是任何一个整系数多项式方程的解。由于很难证明一个数是超越数，所以1882年，德国数学家费迪南德·冯·林德曼（Ferdinand von Lindemann，1852—1939）首次用π表示了这个数。

因为矩形的两侧边长加在一起等于圆周长。所以矩形的面积就是半径×（圆周长÷2）：[插图]

不规则形状：有限面积，无限周长下面是一个可以创建形状的算法。首先，我们从一个正方形开始，然后在每个边的中间再添加一个正方形：

这种不断重复原本形状的模式叫作分形，它们表现出一些非常有趣的特性。如果某个形状的边长增加一倍，我们就说它具有2倍的放大系数。

如果我无限地继续迭代，生成图形的周长趋向于无穷大，但面积是有限的。如果我们在三维空间中做此类迭代，也会发生类似的情况：物体的体积有限，但表面积无限延伸

以无限扩大表面积，如肺和叶片中都存在这种图形。

第19章 毕达哥拉斯定理

把4个这样的三角形排列成两个面积相等的正方形：

三元组。其他的例子还包括7、24、25和8、15、17。

证明了方程式xn+yn=zn只有在n=2时才成立，解就是毕达哥拉斯三元组。一直以来，人们都未能证明它的正确，在大约400年后，英国数学家安德鲁·威尔斯（Andrew Wiles，生于1953年）才最终给出了完整的证明。他的这项证明也为模块化理论的证明铺平了道路

根据需要将毕达哥拉斯定理扩展到尽可能多的维度。量子理论的最新研究表明，我们生活在一个十一维的宇宙中，但我们这里就只考虑三个维度好了！

第21章 平均数

英国前首相本杰明·迪斯雷利（Benjamin Disraeli，1804—1881）曾说过一句名言："有三种谎言：谎言、糟糕透顶的谎言和统计数据。"

数值数据可以分为两类：连续数据，可以取给定范围内的任何值（如高度或重量）；离散数据，只能取该范围内的某些值，如儿童人数或鞋子尺寸。

中位值是将数字按顺序排列后位于中间的基准数值，我们可以按高度或重量（或其他标准）将样本排列，然后选择中间的值。

第22章 离散

计算出数据离散的量度。下面介绍几个值，按从简单到复杂的顺序排列。

最简单的方法就是计算出极差：用最高分减去最低分。如果分数的极差是20，这就意味着考试的分数从约65分扩散到约85分

使用四分位距，它可以显示中间50%的数据的分布。要做到这一点，我需要计算四分位数。

第25%的数，它被称为下四分位数。对数据的上半部分进行类似的处理，则可以得出上四分位数，即第75%的数。因此，四分位距是指上四分位数减去下四分位数。

这两组数据的极差是100–20=80。上一组数据的四分位距为82–62=20，所以有一半的学生得分在彼此的20%以内。

为了计算标准差，我们把每个数都减去平均数。当这个数小于平均数时，我们就会得到负值，但我们关心的是距离平均数的均值，与它是正值或负值无关

离群值是指与其他数据不匹配，看起来过低或过高的数值

你认为一个数是离群值，它就是离群值：高于平均数两个以上标准差低于平均数两个以上标准差在上四分位数以上，高于1.5个四分位距或在下四分位数以下，低于1.5个四分位距

要对离群值非常小心了。离群值是真的吗？它应该被保存在数据集中，还是应该删除掉？

南极上空飞行时，经常会产生非常低的读数，分析软件将其判别为离群值。这使得直到10年后，在南极洲工作的科学家才发现了臭氧层空洞。臭氧层可以阻止太阳发出的大部分有害的紫外线辐射到达地表，因此对地球上的生命至关重要

第23章 正态分布

大多数苹果接近中心的值（平均数），离平均数越远，我们发现，相应的苹果数量越少。这种曲线很常见，所以它被称为正态分布也在情理之中

规范化的模式，也就是说它的平均数为0，标准差为1，并以此为基础来统计数据。它可以用来计算实际人口数高于给定值的百分之几。

在正态分布中，68%的数据在平均数的一个标准差之内，95%的数据在两个标准差之内，99.7%的数据在三个标准差之内

希格斯玻色子，并提及了“5西格玛”。西格玛是用来表示标准差的希腊字母，5西格玛的意思是，在不考虑新粒子的情况下，它们的数据偶然出现的概率是偏离平均值5个标准差，这个概率约为0.000 000 3

第24章 相关性

发现了一种计算相关性的数学方法（称为皮尔逊积矩相关系数）

相关性不等于因果关系两个事物具有相关性并不是说其中一个会引发另一个。个子越高，体重就越重，但体重值升高并不会让你的身高增长。冰激凌的销售和溺水之间有相关性，但是冰激凌并不会让人溺水

美国有一个很好的网站——泰勒·维根网站（tylervigen.com），列出了所有虚假的相关性。我最喜欢的例子见下图：[插图]

第25章 可能性

计算概率时，经常会遇到一些假设。例如，我们通常假设掷出的色子公平或不偏不倚，也就是说出现每个结果的概率相等。我们还假设事件链是独立的。

某次掷色子得数的概率比较抽象，所以我做了一张表格，这样更直观些。所有的结果都可以显示出来

这个表被称为概率空间图。我们可以看到有36个概率相等的结果。7出现得最多

在24次投掷中至少出现一次两个6的概率是49.1%。

如果只有23人出席，其中任意两人的生日是同一天的概率达到50%。如果有70个人，这个概率就会上升到99.9%。

第26章 组合与排列

如果从n件物品中选出k个物品，排列种类数共有：

如果忽略顺序，从n中选择k，就会有：[插图]

第27章 相对频率

第一周我在7天内喝了5杯咖啡。根据这个记录可知，在任何一天我喝咖啡的概率是[插图]。数学家称之为相对频率，表示它不是理论上推导的概率。

总结起来就是，时间越久，相对频率就能越精确地代表我在任意一天喝咖啡的可能性。

实际上硬币出现正反面的可能性是相同的。虽然连续8次人头朝上是不可能的（大约0.4%），但它的出现和其他连续投掷结果的概率也是相同的。

点评

认为好看

用浅显的方式解释了很多基本数学概念及其来历。从无穷的定义，到e的来历，算数基本定理，微分，多面体体积面积，概率与频率，费马大定理，毕达哥拉斯定理（勾股定理）等。从内容看概念介绍的很好理解，限于篇幅内容略少。

微信读书