报告：Ito 引理仿真

报告人：王尚忻 3216008691 16 金工 1 班

一、Ito 数学公式推导

已知 $dX(t)=a(t)X(t)dt+b(t)X(t)dZ(t)$， $Y(X)=\ln X(t)$，求 $d(Y(X))$，并进而得到 $Y(X)$。

A. 方法 1：（Monte Carlo 仿真）通过求得 $X(t)$ 得到 $Y(X)$，记为 $Y_1(X)$；

已知 $dX(t)=a(t)X(t)dt+b(t)X(t)dZ(t)$，则有：

$$\frac{dX}{X}=adt+bdZ$$

在短时间 Δt 情况下，换成差分形式为：

$$\frac{\Delta X}{X}=adt+b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

$$\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{X(t)}=a\Delta t+b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

$$X(t+\Delta t)=X(t)+aX(t)\Delta t+bX(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

又因为 $Y(X)=\ln X(t)$，所以有：

$$Y(X(t+\Delta t))=\ln X(t+\Delta t)=\ln(X(t)+aX(t)\Delta t+bX(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t})$$

B. 方法 2：（Monte Carlo 仿真）通过求得 $d(Y(X))$ 得到 $Y(X)$，记为 $Y_2(X)$；

1） 首先对 $Y(X)$ 进行泰勒展开：

$$Y(X+\Delta X)=Y(X)+Y'(X)\Delta x+\frac{1}{2!}Y''(X)\Delta x^2+...$$
$$\Delta Y=Y'(X)\Delta X+\frac{1}{2!}Y''(X)\Delta X^2+...$$

2） 已知 $dX(t)=a(t)X(t)dt+b(t)X(t)dZ(t)$，

将其改成差分形式为：$\Delta X=aX\Delta t+bX\varepsilon\sqrt{\Delta t}$

左右两边同时平方得：$\Delta X^2=a^2X^2\Delta t^2+b^2X^2\varepsilon^2\Delta t+2abX^2\varepsilon\Delta t\sqrt{\Delta t}$

因为 $\varepsilon\sim N(0,1)$,有 $E(\varepsilon^2)=1$，
且满足 $E(\varepsilon^2\Delta t)=\Delta t, Var(\varepsilon^2\Delta t)=(\Delta t)^2E(\varepsilon^2-E(\varepsilon^2))^2$，

当 $\Delta t\to 0$ 和 $\Delta X\to 0$ 时，$Var(\varepsilon^2\Delta t)$ 是 Δt 的高阶小量。此时 $\varepsilon^2\Delta t$ 不再是随机变量，从而，$\varepsilon^2\Delta t\to dt$。

所以，$\Delta X^2=b^2X^2\varepsilon^2\Delta t+o(\Delta t)$

3） 将 $\Delta X^2=b^2X^2\varepsilon^2\Delta t+o(\Delta t)$ 代入泰勒展开式，略去二阶以上的高阶小量，即得：

$$dY=Y'(X)dX+\frac{1}{2}Y''(X)(b^2X^2\varepsilon^2dt+o(dt))$$
$$=Y'(X)dX+\frac{1}{2}b^2X^2Y''(X)dt$$

将 $dX(t)=a(t)X(t)dt+b(t)X(t)dZ(t)$ 代入上式得：

$$dY=Y'(X)(aXdt+bXdZ)+\frac{1}{2}b^2X^2Y''(X)dt$$
$$=(aX\cdot Y'(X)+\frac{1}{2}b^2X^2\cdot Y''(X))dt+bX\cdot Y'(X)dZ$$

又因为 $Y(X)=\ln X(t)$，所以 $Y'(X)=\frac{1}{X},Y''(X)=-\frac{1}{X^2}$，则有：

$$dY=(aX\frac{1}{X}+\frac{1}{2}b^2X^2(-\frac{1}{X^2}))dt+bX\frac{1}{X}dZ$$
$$=(a-\frac{1}{2}b^2)dt+bdZ$$

综上，当 $dX(t)=a(t)X(t)dt+b(t)X(t)dZ(t)$ 和 $Y(X)=\ln X(t)$ 时，

$$d(Y(X))=(a(t)-\frac{1}{2}b(t)^2)dt+b(t)dZ(t)$$

二、仿真的离散格式表达式

A. 方法 1：（Monte Carlo 仿真）通过求得 $X(t)$ 得到 $Y(X)$，记为 $Y_1(X)$；

$$dX(t)=a(t)X(t)dt+b(t)X(t)dZ(t)$$

$$\frac{dX}{X}=adt+bdZ$$

在短时间 Δt 情况下，换成差分形式为：

$$\frac{\Delta X}{X}=adt+b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$
$$\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{X(t)}=a\Delta t+b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$
$$X(t+\Delta t)=X(t)+aX(t)\Delta t+bX(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

又因为 $Y(X)=\ln X(t)$，所以有：

$$Y(X(t+\Delta t))=\ln X(t+\Delta t)=\ln(X(t)+aX(t)\Delta t+bX(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t})$$

B. 方法 2：（Monte Carlo 仿真）通过求得 $d(Y(X))$ 得到 $Y(X)$，记为 $Y_2(X)$；

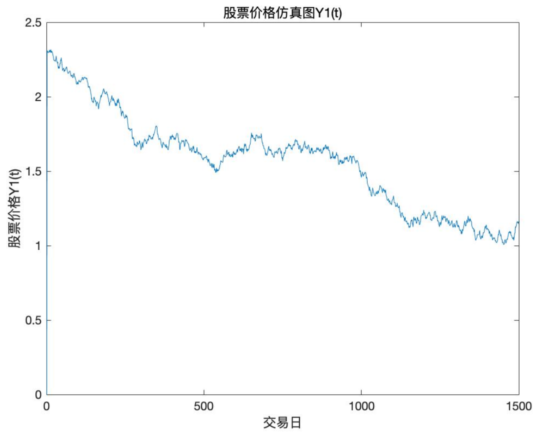
在短时间 Δt 后，$Y_2(X)$ 的变化值为 ΔY：

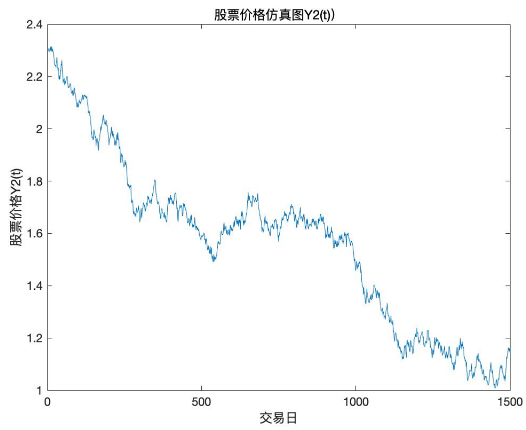
$$\Delta Y = Y(X+\Delta X) - Y(X) = (a - \frac{1}{2}b^2)\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

$$Y(X+\Delta X) = Y(X) + (a - \frac{1}{2}b^2)\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

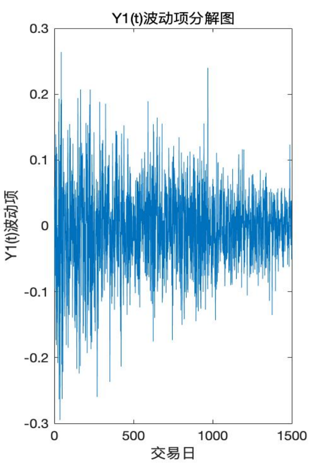
三、检验：$Y_1(X)$与$Y_2(X)$是否相同？

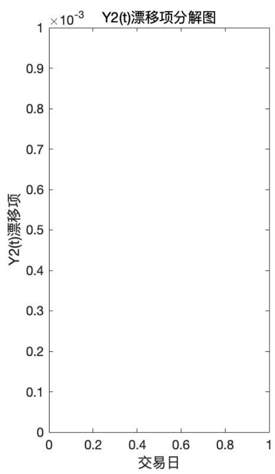
从仿真得到的$Y_1(X)$、$Y_2(X)$股票价格走势图中可看出，$Y_1(X)$与$Y_2(X)$不相同。

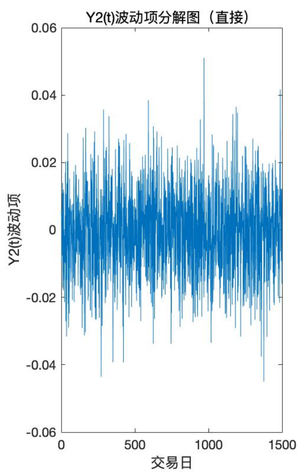




从$Y_1(X)$、$Y_2(X)$股票价格波动项分解图中看出，$Y_2(X)$波动项远小于$Y_1(X)$







四、仿真代码

```
%% 设置各参数初始值
x0 = 10;
dt = 1/250; % 代表一天
T = 6; % 代表 T 年
N = T/dt; % 代表 T 年的天数
my_epsilon = random('Normal',0,1); %随机数的生成，服从标准正态分布
x(1) = x0;
y2(1) = log(x(1));% y(t) = ln x(t)
a = -0.05;
b = 0.2;
y_mu = a - 0.5 * b^2;
y_sigma = b;

%% 两种方法计算 Y1(t)和 Y2(t)
for i=1:N
    my_epsilon = random('Normal',0,1);
    % 方法 1: 计算 Y1(t)
    x(i+1) = x(i) + a * x(i) * dt + b * x(i) * my_epsilon *
sqrt(dt);
    u(i) = b * x(i) * my_epsilon * sqrt(dt)
    if x(i+1)<0
        x(i+1) = x(i);
    end
   y1(i+1) = log(x(i+1)); % Monte Carlo 仿真 X, 得到 Y1
   % 方法 2: 计算 Y2(t)
   y2(i+1) = y2(i) + y_mu * dt + y_sigma * my_epsilon *
sqrt(dt); % Monte Carlo 仿真求得 Y2
   v(i) = y_sigma * my_epsilon * sqrt(dt);% 储存 Y2 波动项
end
```

```
%% 画图
%% 股票价格 Y1(t)
figure(1);
plot(1:N, y1(1:end-1));
xlabel('交易日');
ylabel('股票价格 Y1(t)');
title('股票价格仿真图 Y1(t)');
% 分解图：波动项
figure(2);
subplot(1,2,2);
plot(1:N, u);
xlabel('交易日');
ylabel('Y1(t)波动项');
title(' Y1(t)波动项分解图');


%%股票价格 Y2(t)
figure(3);
plot(1:N, y2(1:end-1));
xlabel('交易日');
ylabel('股票价格 Y2(t)');
title('股票价格仿真图 Y2(t)');
%% 分解图：漂移项
figure(4);
subplot(1,2,1);
plot(1:N, y_mu * dt);
xlabel('交易日');
ylabel('Y2(t)漂移项');
ylim([0,0.001]);
title(' Y2(t)漂移项分解图');
%%分解图：波动项
subplot(1,2,2);
plot(1:N, v);
```

```
xlabel('交易日');
ylabel('Y2(t)波动项');
title(' Y2(t)波动项分解图');
```