报告：股票价格仿真——布朗运动

报告人：王尚忻 3216008691 16 金工 1 班

一、布朗运动模型的数学公式

1）普通布朗运动

假设股票价格$X(t)$服从漂移项为μ和方差参数为σ^2的普通布朗运动，

其中μ和σ^2均为常数，且$\Delta X \sim N(\mu \cdot \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$.

股票价格普通布朗运动的数学公式为$dX(t) = \mu dt + \sigma dW_t$，且$\mu \geq 0$。
其中，$X(t)$代表t时刻的股票价格，μ代表股票的期望漂移率（收益率），σ为股票的波动率，W_t为标准 Wiener 过程，即在时间间隔Δt内，$dW_t \sim N(0, \Delta t)$.
式中μdt为确定项，表示$X(t)$的漂移速度是每单位为μdt；第二项σdW_t是随机项，代表对$X(t)$的时间趋势过程所添加的噪声，使变量$X(t)$围绕着确定趋势上下随机波动，且该噪声是有 Wiener 过程的σ倍给出的。

2）几何布朗运动

已知由$S(t) = e^{X(t)} (t \geq 0)$定义的随机过程$S(t)$为几何布朗运动，$X(t)$遵循$dX(t) = \mu dt + \sigma dW_t$，则可得出$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW_t$。
这是一个漂移项为$\mu S(t)$、方差项为$\sigma^2 S(t)^2$的伊藤过程。

二、仿真的离散格式表达式

1）普通布朗运动： $dX(t)=\mu\cdot dt+\sigma dW_t$

在短时间 Δt 后，$X(t)$ 的变化值 ΔX 为：

$$\Delta X=X(t+\Delta t)-X(t)=\mu\Delta t+\sigma\Delta W_t=\mu\Delta t+\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$
$$X(t+\Delta t)=X(t)+\mu\Delta t+\sigma\Delta W_t=X(t)+\mu\Delta t+\sigma\cdot\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

其中,

$$\Delta W_t=\varepsilon\sqrt{\Delta t},$$
$$\varepsilon\sim N(0,1),$$
$$E(\Delta W_t)=E(\varepsilon\sqrt{\Delta t})=\sqrt{\Delta t}E(\varepsilon)=0$$
$$Var(\Delta W_t)=Var(\varepsilon\sqrt{\Delta t})=\Delta tVar(\varepsilon)=\Delta t$$
$$E(\Delta X)=E(\mu\Delta t+\sigma\Delta W_t)=E(\mu\Delta t)+E(\sigma\Delta W_t)=\mu\Delta t+\sigma E(\Delta W_t)=\mu\Delta t$$
$$Var(\Delta X)=Var(\mu\Delta t+\sigma\Delta W_t)=0+\sigma^2Var(\Delta W_t)=\sigma^2\Delta t$$

因此，ΔX 也具有正态分布特征，其均值为 μdt，标准差为 $\sigma\sqrt{\Delta t}$，方差为 $\sigma^2\Delta t$。这意味着在任意时间长度为 $T-t$ 后 X 值得变化具有正态分布特征，均值为 $\mu\cdot(T-t)$，标准差为 $\sigma\cdot\sqrt{T-t}$，方差为 $\sigma^2(T-t)$。

2）几何布朗运动： $dS(t)=\mu S(t)dt+\sigma S(t)dW_t$

假设 $S(t)$ 是股票价格，则 $d\ln S(t)$ 是股票的连续复利收益率。
根据伊藤过程，令 $G_t=\ln S(t)$，则：

$$\frac{\partial G}{\partial S}=\frac{1}{S(t)},\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}=-\frac{1}{S(t)^2},\frac{\partial G}{\partial t}=0$$

代入 $dG_t=(\frac{\partial G}{\partial S}\mu S(t)+\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S(t)^2)dt+\frac{\partial G}{\partial S}\sigma S(t)dW_t$ 可得到 $G_t=\ln S(t)$ 所遵循的随机过程：

$$dG_t=d\ln S(t)=(\mu-\frac{\sigma^2}{2})dt+\sigma dW_t$$

这说明股票的连续复利收益率$d\ln S(t)$服从期望值为$(\mu-\frac{\sigma^2}{2})dt$，方差为$\sigma^2 dt$的正态分布。

在几何布朗运动下，股票价格$S(t)$的对数$\ln S(t)$服从普通布朗运动，具有恒定的漂移项$(\mu-\frac{\sigma^2}{2})$和恒定的方差项σ^2，而根据普通布朗运动的性质，服从普通布朗运动$dx_t = adt + bdW_t$的随机变量，在任意时间长度$T-t$内的变化之后都服从均值为$a\cdot(T-t)$、方差为$b^2(T-t)$的正态分布，同理可得，

$$\ln S(T)-\ln S(t)\sim\varphi((\mu-\frac{\sigma^2}{2})\cdot(T-t),\sigma\sqrt{T-t})$$

式中，$\ln S(T)$和$\ln S(t)$分别为当前t时刻和未来T时刻股票价格的自然对数，$\ln S(T)-\ln S(t)$就是股票价格在$T-t$期间的连续复利收益率。

进一步，给定初始值$S(0)$，由$d\ln S(t)=(\mu-\frac{\sigma^2}{2})dt+\sigma dW_t$可得：

$$\ln S(T)-\ln S(0)=(\mu-\frac{\sigma^2}{2})dt+\sigma dW_t$$

$$\ln S(T)=\ln S(0)+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})dt+\sigma dW_t$$

对上式左右两边同时取指数，可得：

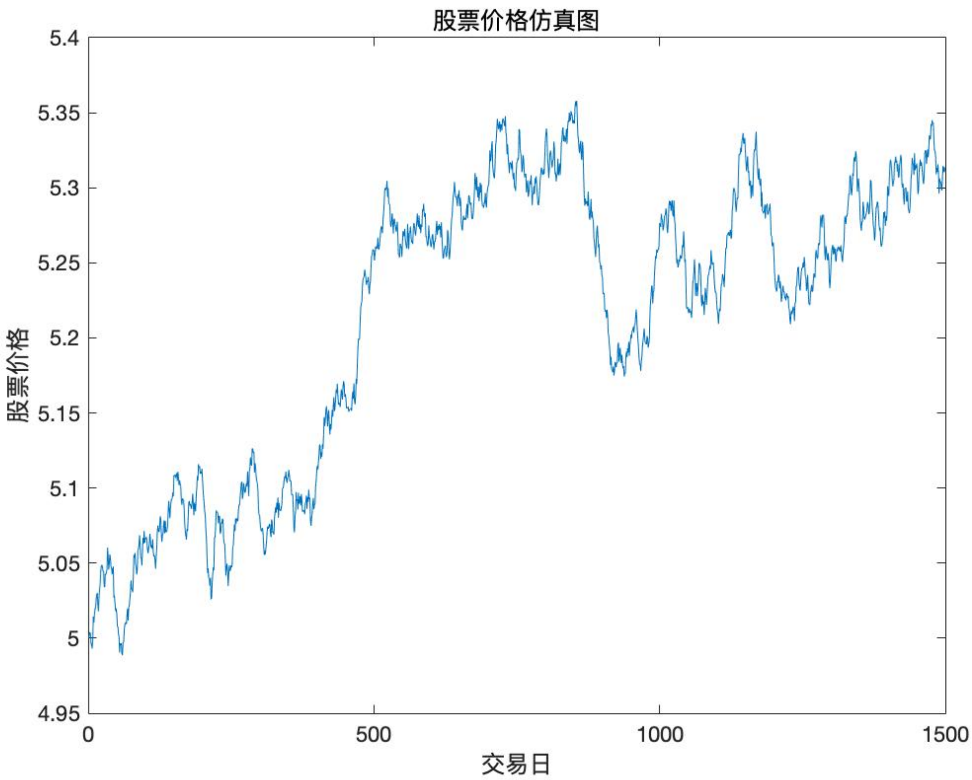
$$S(T)=S(0)\cdot e^{((\mu-\frac{\sigma^2}{2})dt+\sigma dW_t)}=S(0)\cdot e^{((\mu-\frac{\sigma^2}{2})dt+\sigma\varepsilon\sqrt{dt})}$$

同理，在任意时间间隔Δt内，有$S(t+\Delta t)=S(t)\cdot e^{((\mu-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t+\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t})}$成立。

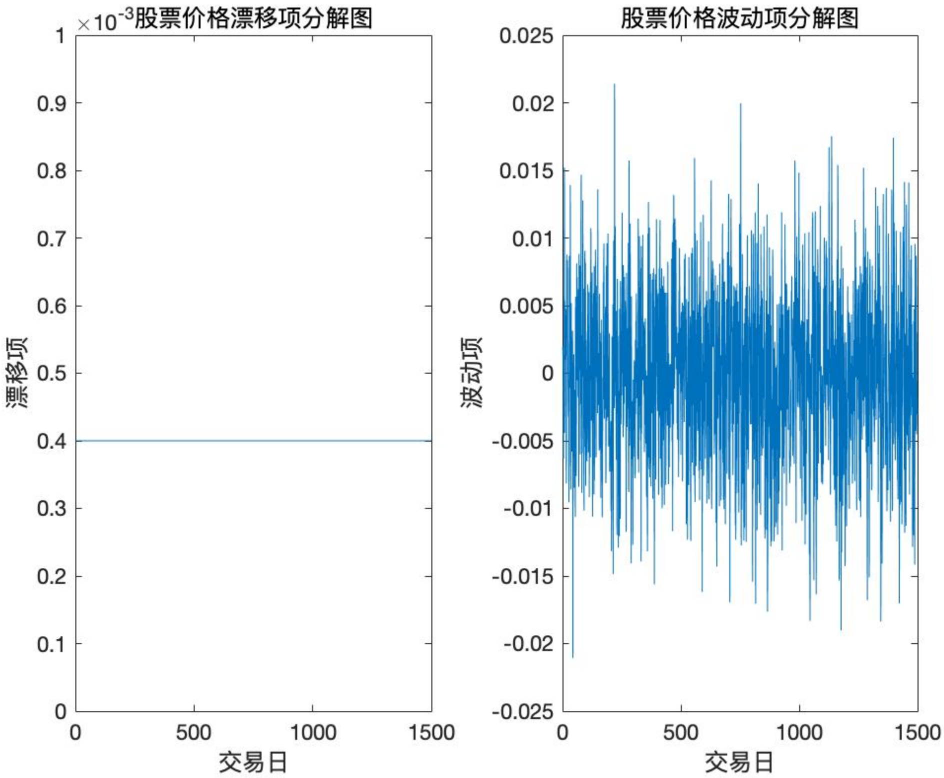
三、 仿真代码及仿真结果图

1）<u>*普通布朗运动：股票价格仿真*</u> $dx = mu * dt + sigma * dW$

a. 股票价格仿真图：



b. *股票价格漂移项和股票价格波动项分解图：*



c. 仿真代码

%% 普通布朗运动股票价格仿真 $dx = mu * dt + sigma * dW$

clc; %% 清理屏幕

clear all; %% 清理所有变量值

close all; %% 关闭所有图

%% $x(t+dt) = x(t) + mu * dt + sigma * epsilon * sqrt(dt)$;

%% 需要知道以下值：

%% (1) $x(t)$ = ?

%% (2) mu = ?

%% (3) dt = ?

%% (4) $sigma$ = ?

%% (5) $epsilon$ = ?

%% 设置各参数初始值

$x0$ = 5;

my_mu = 0.1; % 代表收益率

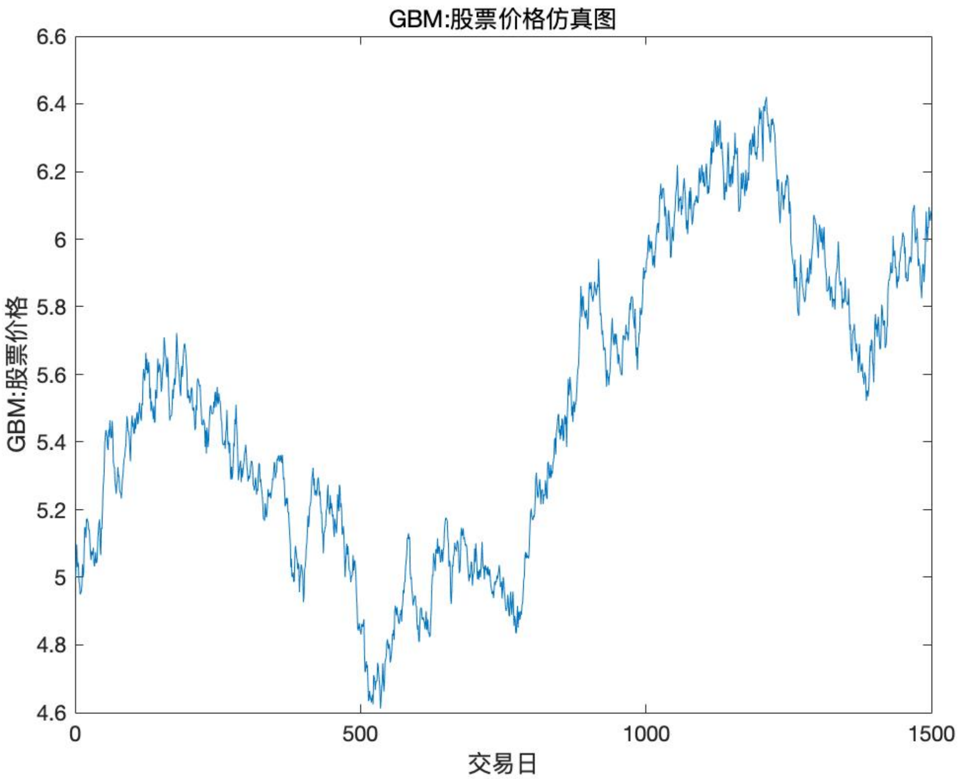
dt = 1/250; % 代表一天

```
T = 6; % 代表 T 年
N = T/dt; % 代表 T 年含有的天数
my_sigma = 0.1; % 代表波动率
epsilon = random('Normal',0,1);%随机数的生成，epsilon 服从标准正态分布
x(1) = x0;    % 设置第一天的股价为 x0

%% 循环计算和更新股价 N 天
for i=1:N
    epsilon = random('Normal',0,1);
    x(i+1) = x(i) + my_mu * dt +
             my_sigma * epsilon * sqrt(dt); % 更新下一天的股价
    y(i) = my_sigma * epsilon * sqrt(dt);
    if x(i+1)<0
        x(i+1) = x(i)
    end
end

%% 画图
%% 股价仿真总图
figure(1);
plot(1:N, x(1:end-1));
xlabel('交易日');
ylabel('股票价格');

%% 分解图-漂移项
figure(2);
subplot(1,2,1);
plot(1:N, my_mu * dt * ones(1, N));
xlabel('交易日');
ylabel('漂移项');
ylim([0,0.001]);
%% 分解图-波动图
```

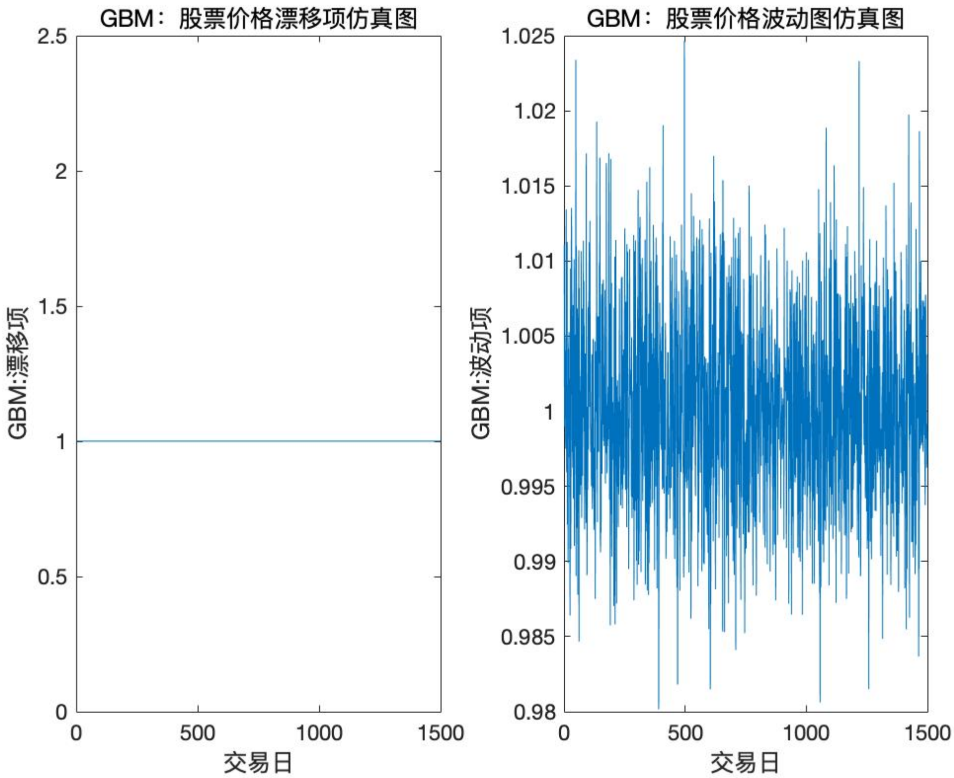
```
subplot(1,2,2);
plot(1:N, y);
xlabel('交易日');
ylabel('波动率');
```

2）几何布朗运动：股票价格仿真 $dS(t)=\mu S(t)dt+\sigma S(t)dW_t$

a. 股票价格仿真图：



b. 股票价格漂移项和股票价格波动项分解图：



c. 仿真代码

```
%% 股票价格：GBM 几何布朗运动 s(t) = exp(x(t)) 的仿真
%% ds(t) = s(t) * mu * dt + s(t) * sigma * dW_t; dW_t = epsilon * sqrt(dt)，其代表维纳过程
clc; %% 清理屏幕
clear all; %% 清理所有变量值
close all; %% 关闭所有图

%% s(t+dt) = s(t)*exp((mu-sigma^2/2)*dt+sigma*epsilon*sqrt(dt))
s0 = 5;
gbm_mu = 0.1; % 代表收益率
```

```
dt = 1/250; % 代表一天
T_gbm = 6; % 代表 T_gbm 年
N_gbm = T_gbm/dt; % 代表 T_gbm 年的天数
gbm_sigma = 0.1; % 代表波动率
gbm_epsilon=random('Normal',0,1); %随机数的生成，epsilon 服从标准正态分布
s(1) = s0; % 设置第一天的股票价格为 s0

%% 循环计算和更新股价 N_gbm 天
for i=1:N_gbm
    gbm_epsilon = random('Normal',0,1);
    s(i+1) = s(i) * exp((gbm_mu - gbm_sigma^2/2) * dt
            + gbm_sigma *   gbm_epsilon * sqrt(dt)) % 更新下一天股价
    z(i) = exp(gbm_sigma * gbm_epsilon * sqrt(dt));
end

%% 画图
%% 股价仿真总图
figure(3);
plot(1:N_gbm, s(1:end-1));
xlabel('交易日');
ylabel('GBM:股票价格');
title('GBM:股票价格仿真图')

%% 分解图-漂移项
figure(4);
subplot(1,2,1);
plot(1:N_gbm, exp((gbm_mu - gbm_sigma^2/2) * dt) * ones(1, N_gbm));
xlabel('交易日');
ylabel('GBM:漂移项');
title('GBM:股票价格漂移项仿真图')
```

```
%% 分解图-波动项
subplot(1,2,2);
plot(1:N_gbm, z);
xlabel('交易日');
ylabel('GBM:波动项');
title('GBM:股票价格波动项仿真图')
```