&1.2 矩阵消元

一、概述

本节将讨论通过矩阵消元求解线性方程组。
我们还是通过简单例子来讲解。**首先**，对系数矩阵与增广矩阵代数描述消元过程（同时简单讨论了消元成功与消元失效的情况），通过回代求出方程组的解。**然后，引入消元矩阵的概念进行矩阵消元，将消元过程完全矩阵化。最后**，简单说明了矩阵乘法的运算规则。

要点：

- 消元 Elimination
    - 成功 Success
    - 失效 Failure
- 回代 Back-Substitution
- 消元矩阵 Elimination Matrices
- 矩阵乘法 Matrix Multiplication

二、举例

以

$$\begin{cases} x+2y+z=2 & \qquad (1) \\ 3x+8y+z=12 & \qquad (2) \\ 0x+4y+z=2 & \qquad (3) \end{cases}$$

为例。

· 矩阵形式

该方程组的矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

其中，系数矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$，增广矩阵(Augmented Matrix)为 $\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right]$。

三、代数消元

· 消元

消元法最早由高斯（Gauss）提出，消元法的思想其实很自然就能想出来：

- **step 1.** 通过方程（1）消去方程（2）、（3）的未知数 x，得到方程（$2'$）和方程（$3'$）；
- **step 2.** 再通过方程（$2'$）消去方程（$3'$）的 y，得到方程（$3''$）；
- **step 3.** 最后得到方程（1）含有未知数 x，方程（$2'$）含有未知数 y、z，方程（$3''$）含有未知数 z。

下面我们直接用矩阵语描述消元法的过程。

$\boxed{A}$

我们先只考虑系数矩阵的消元，然后再完成右侧向量b，做法同Matlab。

$$A=\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}\xrightarrow[（3，1）：row3-0\cdot row1]{（2，1）：row2-3\cdot row1}\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&1\\0&\boxed{2}&-2\\0&4&1\end{bmatrix}\xrightarrow{（3，2）：row3-2\cdot row2}\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&1\\0&\boxed{2}&-2\\0&0&\boxed{5}\end{bmatrix}=U$$

消元目的是从系数矩阵A得到系数矩阵的上三角矩阵U（Upper triangular）,这是科学计算中最普遍的运算。
关于消元，还有几点需要说明：

- 这个例子中我们找到了三个**主元(pivot)** :1、2、5，**主元不能为0**，否则将**消元失效。**
  - 失效指的是不能得到三个主元，即0占据了主元的位置。失效有下面几种情况。
    - 如果可以通过**行交换**在下面的行中找到非0主元，解决主元为0的“暂时性失效”，此时还可以得到三个非0主元，消元**成功。*系数矩阵可逆*。
    - 如果不能通过**行交换**找到非0主元，此时消元确定**失效。*系数矩阵不可逆*。
- 顺便提一下行列式（determinant），**行列式等于主元之积**，这个例子系数矩阵的行列式等于10。

$\boxed{\bar{A}}$

当系数矩阵消元时，很明显右侧向量b也同步变化，因此我们加上一列，形成增广矩阵。

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&2&1&2\\3&8&1&12\\0&4&1&2\end{array}\right]\xrightarrow[（3，1）：row3-0\cdot row1]{（2，1）：row2-3\cdot row1}\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&2&1&2\\0&\boxed{2}&-2&6\\0&4&1&2\end{array}\right]\xrightarrow{（3，2）：row3-2\cdot row2}\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&2&1&2\\0&\boxed{2}&-2&6\\0&0&\boxed{5}&-10\end{array}\right]$$

· 回代

我们把对$\bar{A}$的消元结果重新写成方程组形式。

$$\begin{cases}x+2y+z=2 & (a)\\ 2y-2z=6 & (b)\\ 5z=-10 & (c)\end{cases}$$

即

$$Ux=c$$

通过方程（c）求出 $z=-2$，再通过方程（b）求出 $y=1$，最后通过方程（a）求出 $x=2$。这就是回代求解的过程。

四、矩阵消元

· 置换矩阵P

消元过程中为了解决主元为0的“暂时性”消元失效，可能需要进行行交换，这时就需要置换矩阵。 **置换矩阵**（Permutation Matrices）是**初等矩阵（Elementary Matrices**）的一种，可以完成行交换和列交换。
置换矩阵形式上是行重新排列了的单位矩阵，下面我们举例说明置换矩阵的形式。

$Exchange\ row1\ and\ row2$

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c&d\\a&b\end{bmatrix}$$

$Exchange\ col1\ and\ col2$

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b&a\\d&c\end{bmatrix}$$

· 消元矩阵E

消元矩阵(**Elimination Matrices**)，顾名思义，是可以将我们前面讨论的代数消元矩阵化的一种特殊矩阵，它是初等矩阵的另一种。

为了写出消元矩阵，首先我们应该需要知道一下两点:

- 矩阵乘列向量等于矩阵各列的线性组合，组合系数为列向量的对应分量。
- 行向量乘矩阵等于矩阵各行的线性组合，组合系数为行向量的对应分量。

由此我们可以写出消元过程每一步的消元矩阵。

E_{21}：$row2-3\cdot row1$

第一行、第三行不变，只有第二行发生变化。

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&4&1\end{bmatrix}$$

消元矩阵 $E_{21}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$。

E_{32}：$row3-2\cdot row2$

第一行、第二行不变，只有第三行发生变化。

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&0&5\end{bmatrix}$$

消元矩阵 $E_{21}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}$。

· 综合

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&0&5\end{bmatrix}$$

即

$$E_{32}(E_{21}A)=U$$

消元矩阵化形式十分简洁，但它却包含这本节课的精华。

五、矩阵乘法

下面我们简单讨论一些矩阵乘法。
我们先思考一个问题，有没有一个矩阵可以使A一步到U，什么矩阵可以一次完成所有消元步骤?
首先矩阵乘法满足**结合律**，则

$$(E_{32}E_{21})A=U$$

这样我们就可以有单个矩阵$E=E_{32}E_{21}$，使得A一步到U。

矩阵的逆（Inverse）

这里只举一个简单例子说明。

我们有一个矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，这个矩阵意义是对矩阵的第二行消元，第二行等于行2减3倍行1.我们现在希望找到另外一个矩阵A^{-1}来回做这一步，显然A^{-1}需要做到第二行等于行2加3倍行1，则 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$。我们称$A^{-1}$为$A$的逆矩阵（inverse matrix）。

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

即

$$A^{-1}A=I$$