&2.3 求解 $Ax=b$：可解性、解的结构

一、概述

这节我们将求解完整的线性方程组：$Ax=b$，我们主要关心两点：可解性与解的结构。
首先 我们讨论 $Ax=b$ 的是否有解，得出可解性条件。**然后** 我们求解 $Ax=b$，得出解的结构：$x_{complete}=x_{particular}+x_{nullspace}$。**最后** 我们讨论不同秩下，$Ax=b$ 的性质与解的个数。

要点:

- **可解性 solvability**
- **通解：$x_{complete}=x_{particular}+x_{nullspace}$**
- **秩 r**
  - $r=n<m$
  - $r=m<n$
  - $r=n=m$
  - $r<n, r<m$

二、

· 举例

我们还使用上节课的例子，$A=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}$，则

$$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+2x_4=b_1 & (1)\\2x_1+4x_2+6x_3+8x_4=b_2 & (2)\\3x_1+6x_2+8x_3+10x_4=b_3 & (3)\end{cases}$$

增广矩阵 $\bar{A}=\begin{bmatrix}1&2&2&2&b_1\\2&4&6&8&b_2\\3&6&8&10&b_3\end{bmatrix}$。

· 可解性

由观察方程组可知，方程(1)左侧加方程(2)左侧等于方程(3)左侧，如果方程有解的话，必须等号右侧 $b_3=b_1+b_2$ 。这很容易看出来，换句话说，如果左侧各行的线性组合得到0，那么右侧常数的相同组合必然也得等于0。
下面我们用消元使这种关系显示得呈现出来。

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}1&2&2&2&b_1\\2&4&6&8&b_2\\3&6&8&10&b_3\end{bmatrix}\xrightarrow[row3-3\cdot row1]{row2-2\cdot row1}\begin{bmatrix}1&2&2&2&b_1\\0&0&2&4&b_2-2b_1\\0&0&2&4&b_3-3b_1\end{bmatrix}\xrightarrow{row3-row2}\begin{bmatrix}1&2&2&2&b_1\\0&0&2&4&b_2-2b_1\\0&0&0&0&b_3-b_2-b_1\end{bmatrix}$$

于是有 $0 = b_3 - b_2 - b_1$，这是有解的条件，与我们之前观察的一致，不过对于复杂的方程组直接观察十分困难，进行消元才是正确的做法。

总 结：方程组的可解性必须满足的条件：
$Ax = b$ **有解，**

(1) 当且仅当 b 属于 A 的列空间，即 $b \in C(A)$
(2) 如果 A 的线性组合得到零行，b 分量的相同组合也必须为零

· 解的结构

下面我们讨论有解时解的结构。

假设 $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$。

消 元

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 6 \end{bmatrix} \underset{row3-3\cdot row1}{\xrightarrow{row2-2\cdot row1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{row3-row2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{U} \underset{row2\div 2}{\xrightarrow{row1-row2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{R}$$

$x_{particular}$

我们先找出 $Ax = b$ 的一个特解。

方法：将所有自由变量设为0，然后解出 $Ax = b$ 中的主变量。

本例中自由变量 $x_2 = 0, x_4 = 0$，则由 $\bar{R}$ 可得主变量 $x_1 = -2, x_3 = 1.5$，即 $x_p = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1.5 \\ 0 \end{bmatrix}$。

$x_{nullspace}$

$$R = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则

$$N = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{matrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}$$

$$x_n = c \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

通 解 $x_{complete}$

$Ax = b$的解为：

$$x_c = x_p + x_n = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1.5 \\ 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 解释：

  $$A \cdot x_p = bA \cdot x_n = 0$$

  则

  $$A \cdot (x_p + x_n) = b$$

- 方程的特解与零空间内任意向量之和任为方程的解。
- 解空间不是向量空间，是不通过原点的一个平面。

· 解的个数与秩的关系

下面我们讨论一般情况下解的个数问题。

对于秩为 r 的矩阵 $A_{m \times n}$，必然有 $r \leqslant m, r \leqslant n$。

我们来讨论满秩的情况。

(1) 列满秩：$r = n < m$

$$A = [\quad\quad] \rightarrow R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

如：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 每一列都有主元，列线性无关，行线性相关，有 n **个主变量，没有自由变量**，此时 **零空间只有一个零向量，$N(A) = \{zero\ vector\}$**
- $Ax = b$ 的解的 **个数** 为 **0** 或 **1** 个。
  - 当 b 满足 **可解性条件** 时，有 **唯一解**，否则 **无解**。
  - 如果有解的话，有**唯一解 $x_c = x_p$**

(2) 行满秩：$r = m < n$

$$A = [\qquad] \rightarrow R = \begin{bmatrix} I & F \end{bmatrix}$$

如:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

- 每一行都有主元，行线性无关，列线性相关，有 $\boldsymbol{m}$ **个主变量**，$\boldsymbol{n-m}$ **个自由变量**，此时零空间 $N(A) = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$
- 对于任意 b， $Ax=b$都有解，解的个数为**无数个**

(3) 满秩：$\boldsymbol{r=m=n}$

$$A = [\qquad] \rightarrow R = I$$

如:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $r=m=n$ 意味着 A 是一个**可逆矩阵**
- **零空间只有一个零向量**
- 对于任意 b， $Ax=b$都有解，解的个数为**1个**

总 结