&2.2 求解Ax=0：主变量、特解

一、概述

上节我们讲了向量空间，特别是矩阵的列空间和零空间。这节我们主要讲零空间的求解算法。
要点:

- **行阶梯型矩阵**
- **秩**
- **主变量、自由变量**
- **特解**
- **最简行阶梯型**
- **零空间矩阵**

二、

这节我们主要研究长方矩阵。
举例:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}$$

我们观察可得，列2是列1的2倍，行1加行2等于行3。这些都会在消元中表现出来。

· 求解

1、消元

$$Ax=0$$

$$A=\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}\xrightarrow[row3-3\cdot row1]{row2-2\cdot row1}\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&2&2\\0&0&\boxed{2}&4\\0&0&2&4\end{bmatrix}\xrightarrow{row3-row2}\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&2&2\\0&0&\boxed{2}&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}=U$$

消元最终的到**行阶梯型矩阵**(row echelon form) U。

- 我们找到两个**主元**：1、2。主元的数量称为矩阵的**秩**(rank)，本例中 A的秩为2。
- 消元后由 $Ax=0$ 变为 $Ux=0$，列空间发生变化，但解和零空间不变。
- 行3为0，因为行3是行1和行2的线性组合，消元使这种关系显式表现出来

2、找出主变量

主元所在的列称为**主列**，其他列称为**自由列** 。主列所对应的变量称为**主变量**(pivot variables)，自由列对应的变量称为**自由变量**(free variables)。"自由"指可以自由或任意分配数值给这些未知数。
本例中主列为列1和列3，自由列为列2和列4，主变量为 x_1、x_3，自由变量为 x_2、x_4。

回代:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+2x_4=0\\ \qquad 2x_3+4x_4=0\end{cases}$$

$$Ux=0$$

令 $x_2=1$、$x_4=0$，得 $x_1=-2$、$x_3=0$，即 $x=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$。

令 $x_2=0$、$x_4=1$，得 $x_1=-2$、$x_3=0$，即 $x=\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$。

$\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$ 称为**特解**(special soltion)，有了特解，就能得到所有的解了。

$$x = c\cdot\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix} + d\cdot\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$$

$\boxed{结论1}$：零空间所包含的向量是特解的线性组合。

$\boxed{结论2}$：对于$A_{m\times n}$，秩为 r，则特解的个数为 $(n-r)$。

$$\begin{aligned} rank\ of\ A(A的秩) &= \#\ of\ pivots(主元的个数)\\ &= \#\ of\ pivot\ variables(主变量的个数)\\ &= r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \#\ of\ special\ solutions(特解的个数) &= \#\ of\ free\ variables(自由变量的个数)\\ &= n-r \end{aligned}$$

· 简化、综合

下面我们对**行阶梯型矩阵** U 进一步简化，化简为**简化行阶梯型(reduced row echelon form)** R。

$$A = \begin{bmatrix}\boxed{1}&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix} \xrightarrow[row3-3\cdot row1]{row2-2\cdot row1} \begin{bmatrix}\boxed{1}&2&2&2\\0&0&\boxed{2}&4\\0&0&2&4\end{bmatrix} \xrightarrow{row3-row2} \begin{bmatrix}\boxed{1}&2&2&2\\0&0&\boxed{2}&4\\0&0&0&0\end{bmatrix} = U \xrightarrow[row2\div 2]{row1-row2} \begin{bmatrix}\boxed{1}&2&0&-2\\0&0&\boxed{1}&2\\0&0&0&0\end{bmatrix} = R$$

$$R = \begin{array}{c} \begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}\boxed{1}&2&0&-2\\0&0&\boxed{1}&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

- 1、在简化行阶梯型形式中，主元上下都是0，它以最简形式包含了所有信息。它包含什么信息呢？
  - 可以看出主行为行1和行2，主列为列1和列3。
  - 行3为0，表示行3是其他行的线性组合，因此实际上只有两行。
  - 包含一个 2×2 的单位阵，位于主行和主列交汇处。

$$R = \begin{array}{c} \begin{matrix}x_1 & x_3 & x_2 & x_4\end{matrix}\\ \left[\begin{array}{cc|cc}\boxed{1}&0&2&-2\\0&\boxed{1}&0&2\\\hline 0&0&0&0\end{array}\right]\end{array} = \begin{array}{c|c} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{F}\\\hline 0 & 0\end{array}$$

- 2、我们可以直接写出**零空间矩阵** N，其中零空间矩阵 N 就是将所有**特解**作为列的矩阵。

  $\boxed{推导}$

  已知

  $$R = \begin{bmatrix}I & F\\0 & 0\end{bmatrix}$$

  $$R\cdot N = 0$$

  则

  $$N = \begin{bmatrix}-F\\I\end{bmatrix}$$

  $\boxed{解释}$

  $$\begin{bmatrix}I & F\\0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_{pivot}\\x_{free}\end{bmatrix} = 0$$

  即

  $$x_{pivot} = x_{free}\cdot F$$

  若 $x_{free} = I$，则 $x_{pivot} = -F$。

  $\boxed{验证本例}$

  $$N = \begin{bmatrix}-F\\I\end{bmatrix} = \begin{array}{cc}\begin{bmatrix}-2&2\\0&-2\\1&0\\0&1\end{bmatrix} & \begin{matrix}x_1\\x_3\\x_2\\x_4\end{matrix}\end{array}$$

File failed to load: /extensions/MathZoom.js

有前面的 $\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$ 一致。

- 3、在Matlab中，使用 $rref$ 函数可完成 $A \to R$，使用 $null$ 函数可得到归一化零空间矩阵 N（列为零空间的基）。

```
Command Window
>> A = [1 2 2 2; 2 4 6 8; 3 6 8 10];
>> R = rref(A)

R =

     1     2     0    -2
     0     0     1     2
     0     0     0     0

>> N = null(A)

N =

    0.8422   -0.3440
   -0.1965    0.5213
   -0.4491   -0.6985
    0.2246    0.3493

>> N(:, 1)'*N(:, 1)

ans =

    1.0000
```

三、练习

举例:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\2&6&8\\2&8&10\end{bmatrix}$$

解:

$$A=\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&3\\2&4&6\\2&6&8\\2&8&10\end{bmatrix}\xrightarrow[row4-2\cdot row1]{row2-2\cdot row1、row3-2\cdot row1}\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&3\\0&0&0\\0&2&2\\0&4&4\end{bmatrix}\xrightarrow{exchange\ row2\ and\ row3}\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&3\\0&\boxed{2}&2\\0&0&0\\0&4&4\end{bmatrix}\xrightarrow{row4-2\cdot row2}\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&3\\0&\boxed{2}&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=U\xrightarrow[row2\div 2]{row1-row2}\begin{bmatrix}\boxed{1}\\0\\0\\0\end{bmatrix}\Big[$$

· 解法1

回代:

$$\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$$

$$Rx=0$$

x_1、x_2 为主变量，x_3 为自由变量；秩 $r=2$，特解个数为 1。

令 $x_3=1$，可得 $x_1=-1, x_2=-1$，即特解 $x=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$，则零空间为 R^3 中的一条直线:

$$x = c \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c\text{为常数})$$

· 解法2

$$R = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} = \left[\begin{array}{c|c} I & F \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right].$$

则

$$N = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}$$

零空间为一条直线：

$$x = c \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c\text{为常数})$$

- 转置不改变矩阵的秩。
- 零空间矩阵直接给出了所有特解，这些特解是零空间的基。