&2.4 线性相关性、基、维数

一、概述

这一节我们的主要研究对象是 **向量组**，我们将解析这些术语的含义：向量组是“线性相关”或“线性无关”的，向量组“生成”一个空间，向量组作为一个基，子空间的维数。

要点:

- **向量组（矩阵的列向量组）**
- **线性相关性 linear independence**
- **生成空间 spaning a space**
- **基和维数 basis and dimension**

二、线性相关性

线性相关性是对于向量组而言的。**向量组** 就是一组向量，通常表示为：**向量组** $\boldsymbol{V}$：v_1，v_2，$\cdots$，v_n 。

· 背景

假设矩阵 $A_{m\times n}$（$m<n$），

$$A=\begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix}$$

则 对于 $Ax=0$ （未知数个数>方程个数）一定存在非零解，即 A 的零空间除了零向量外，还包含其他向量。
原因：$m<n$ 则一定存在自由变量。

> 求解：（求解 $Ax=0$ 见2.2节）
>
> $$A=\begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix}\rightarrow R=\begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
>
> $$N(A)=\begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$$

· 线性相关性

（1）定义

对于向量组 $\boldsymbol{V}$：v_1，v_2，$\cdots$，v_n，

- 如果 **当且仅当标量** k_1，k_2，$\cdots$，k_n **都为0** 时，才有

$$k_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + k_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n \cdot \boldsymbol{v}_n = 0$$

那么我们称向量组 $\boldsymbol{V}$ **线性无关(linear independence)**。

- 如果 **存在标量** k_1，k_2，$\cdots$，k_n **不全为0** 时，有

  $$k_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + k_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n \cdot \boldsymbol{v}_n = 0$$

  那么我们称向量组 $\boldsymbol{V}$ **线性相关(linear dependence)**。

  - 如果向量组中有零向量，那么向量组一定线性相关。

（2）向量组与矩阵的联系

将向量组 $\boldsymbol{V}$：v_1，v_2，$\cdots$，v_n 的各向量作为矩阵的列，可构造矩阵 A：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{array} \\ A = & \left[\begin{array}{cccc} | & | & & | \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{array}\right] \end{array}$$

向量组 $\boldsymbol{V}$ 称为矩阵的**列向量组**。

对于 $Ax = 0$，可写为：

$$A \cdot x = [\boldsymbol{v}_1, \ \boldsymbol{v}_2, \ \cdots, \ \boldsymbol{v}_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + x_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n \cdot \boldsymbol{v}_n = 0$$

由此可知，我们对矩阵的列向量组"线性相关"还是"线性无关"感兴趣：

- 若向量组 $\boldsymbol{V}$：v_1，v_2，$\cdots$，v_n **线性无关**，则 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$，$N(A) = \{zero\ vector\}$。矩阵 A 的秩 $r = n$。
- 若向量组 $\boldsymbol{V}$：v_1，v_2，$\cdots$，v_n **线性相关**，则方程组存在非零解，零空间 $N(A)$ 存在非零向量。矩阵 A 的秩 $r < n$。

三、Spaning a Space、Basis and Dimension

· Spaning a Space

实际上我们已经见过生成向量空间的例子：列空间，矩阵的 **列向量组** 进行 **线性组合** 得到矩阵的 **列空间。**
下面我们给出更严格的定义。

设有向量组 $\boldsymbol{V}$：v_1，v_2，$\cdots$，v_n ，记 v_1，v_2，$\cdots$，v_n 的所有线性组合为 $\boldsymbol{S} = Span(v_1, v_2, \cdot\cdot, v_n$，即

$$S=\{v|v=k_1\cdot \boldsymbol{v_1}+k_2\cdot \boldsymbol{v_2}+\cdots+k_n\cdot \boldsymbol{v_n}, k_i\in R\ i=1,2,\cdots,n\}$$

我们称 $\boldsymbol{S}$ 为向量组 $\boldsymbol{V}$ 生成的子空间。【百度百科】

向量组是线性相关还是线性无关的呢？不一定，可能线性相关，也可能线性无关。
我们更关心这样**向量组**：能生成完整的空间，本身又线性无关，由此我们得出“基”的概念。

· Basis and Dimension

若向量组向量组 $\boldsymbol{V}$：v_1，v_2， $\cdots$， v_d 满足：

- （1）线性无关 （**Independent**）
- （2）可以生成整个空间 $\boldsymbol{S}$ （**Spanning the Space**）

那么我们称**向量组** $\boldsymbol{V}$为向量空间 $\boldsymbol{S}$ 的**基**(**basis**)。

- 上述的两个条件也同样是“基”的两个性质。
- 向量空间的“基”有重要意义，知道向量空间的“基”，就知道了这个向量空间的全部信息，就能唯一确定这个向量空间。
- 如果矩阵 $A_{n\times n}$ 的列向量组是 R^n 的一组基，那么 $A_{n\times n}$ 可逆。

对于某个向量空间 $\boldsymbol{S}$，“基”有无数组，但每组“基”向量的个数总是确定的。我们称“基”向量的个数为向量空间 $\boldsymbol{S}$ 的**维数**(**dimension**)。

四、练习

- **向量组** dependent、independent
- **向量组** span a space
- **向量组** is basis
- **向量空间**'s dimension, 's basis

练习

对于矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix}$，列向量组 $\boldsymbol{V}$：$v_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$v_2=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$，$v_3=\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}$，$v_4=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$。

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix}\rightarrow R=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

- 由 R 可知，有2个主列：列1、列2，有2个自由列：列3、列4

$$\boxed{Column\ Space\ of\ A}$$

$$\boldsymbol{V}\text{：}dependent$$

$$C(A) = Span\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = Span\{v_1, v_2\}$$

$$basis\text{：}\ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\text{，}\ v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$dimension\ of\ C(A) = 2$$

$$\boxed{dim\ C(A) = rank(A) = \#\ pivot\ columns = r}$$

$\boxed{Null\ Space\ of\ A}$

$$N = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$basis\text{：}\ x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\text{，}\ x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$N(A) = Span\{x_1, x_2\}$$

$$dimension\ of\ N(A) = 2$$

$$\boxed{dim\ C(A) = \#\ free\ columns = n - r}$$