# &1.3 矩阵乘法与逆矩阵

## 一、概述

在上一节最后我们简单提到了矩阵乘法，这一节我们继续讲解矩阵乘法的运算规则与意义。
**第一部分**，我们先介绍计算矩阵乘法的四种方法，不同解法从不同角度来审视矩阵乘法的含义，每种解法都很重要。**第二部分**，我们介绍矩阵的逆，我们主要关心两点：一个矩阵的逆是否存在、如果存在，矩阵的逆的计算方法【Gauss-Jordan消元法】。

**要点:**

- **矩阵乘法（4种方法）Matrix multiplication (4 ways)**
- **矩阵的逆 Inverse of** $A$ $AB$ $A^T$
- **高斯-若尔当消元法 Gauss-Jordan / find** $A^{-1}$

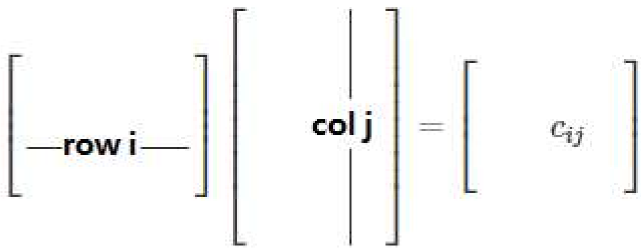
## 二、矩阵乘法

我们假设矩阵$A$乘矩阵$B$等于矩阵$C$。
矩阵相乘要求矩阵$A$的列数等于矩阵$B$的行数。假设矩阵$A$有$m$行$n$列，矩阵$B$有$n$行$p$列，则矩阵$C$有$m$行$p$列。

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

### · 方法1 - 常规方法

第一种方法是计算矩阵$C$的每一个元素$c_{ij}$。




即

$$(row\ i\ of A)\cdot(col\ j\ of\ B)=c_{ij}$$

例如，$c_{34}$的计算。

$$\begin{bmatrix} & & \\ a_{31} & a_{32} & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & b_{14} & \\ & b_{24} & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & c_{34} & \\ & & \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} c_{34} &= (row\ 3\ of A)\cdot(col\ 4\ of\ B) = a_{31}\cdot b_{14} + a_{32}\cdot b_{24} + \cdots \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{3k}\cdot b_{k4} \end{aligned}$$

## · 方法2 - 列方法

该方法是每次考虑矩阵$B$的一列进行计算。
该方法基于我们的已知知识（1.2节）：***矩阵乘列向量等于列向量***，结果为矩阵各列的线性组合，组合系数为列向量的对应分量。
即

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ col\ 1 & col\ 2 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ col\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \times x_1 + \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ col\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \times x_2 + \cdots = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

设矩阵 $B = [\, b_1 \quad b_2 \quad \cdots \,]$，其中$b_1, b_2, \cdots$.为列向量。
则

$$A\cdot B = A\cdot\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\cdot b_1 & A\cdot b_2 & \cdots \end{bmatrix} = C$$

由此我们可以发现：***矩阵$C$的每一列都是矩阵$A$各列的线性组合***，只不过组合的系数不同而已。

## · 方法3 - 行方法

该方法是每次考虑矩阵$A$的一行进行计算。
该方法基于我们的已知知识（1.2节）：***行向量乘矩阵等于行向量***，结果为矩阵各行的线性组合，组合系数为行向量的对应分量。
即

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cdots & row\,1 & \cdots \\ \cdots & row\,2 & \cdots \\ & \cdots & \\ & \cdots & \\ & \cdots & \end{bmatrix} = [\cdots \quad row\,1 \quad \cdots] \times x_1 + [\cdots \quad row\,2 \quad \cdots] \times x_2 + \cdots = [\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot]$$

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \cdots \end{bmatrix}$，其中$a_1^T, a_2^T, \cdots$为行向量。

则

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} a_1^T \cdot B \\ a_2^T \cdot B \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} = C$$

由此我们可以发现：***矩阵$C$的每一行都是矩阵$B$各行的线性组合***，只不过组合的系数不同而已。

### · 方法4 - 了解

该方法是用矩阵$A$的第$i$列乘矩阵$B$的第$i$行得到矩阵$C_i$。当$i$取$1, 2, \cdots, n$时，依次得到矩阵$C_1, C_2, \cdots, C_n$。最后将这些矩阵相加得到矩阵$C$。

$$(C_i)_{m \times p} = (col\ i\ of\ A)_{m \times 1} \times (row\ i\ of\ B)_{1 \times p}$$

例如：

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}$$

我们观察结果的特点：结果是一个很特殊的矩阵，它的每一列都是原来列向量的倍数，它的每一行都是原来行向量的倍数。

完整的例子：

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}$$

### · 方法5 - 分块乘法

略

# 三、矩阵的逆（方阵）

对于一个**方阵**( **Square Matrix** )而言，我们关心两点：$A$的**逆**（**Inverse**）是否存在？如果存在，如何求逆？我们先来了解一下矩阵的逆的概念，再讨论这两个问题。

### · 逆的概念

对于方阵$A$，如果$A$的逆矩阵存在，我们记为$A^{-1}$，则

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

我们称$A^{-1} \cdot A = I$的$A^{-1}$为**左逆**，$A \cdot A^{-1} = I$的$A^{-1}$为**右逆** 。对于方阵而言，左逆等于右逆，统称为矩阵的**逆**( **Inverse** ); 如果是非方阵，左逆是不等于右逆的，统称为**伪逆**（**pseudo-inverse**）。我们现在只讨论方阵的逆，非方阵的伪逆我们会在第34讲[左右逆和伪逆]一节讲解。

### · 逆是否存在

对于**方阵**( **Square Matrix** )$A$，如果$A^{-1}$存在，我们称$A$是**可逆的**( **invertible** )或**非奇异的**( **non-sigular** )；如果$A^{-1}$不存在，我们称$A$是**不可逆的**( **irreversible** )或**奇异的**( **sigular** )。

下面讨论奇异矩阵（没有逆）的情况。

举例。
对于方阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$，这个矩阵没有逆，但是为什么呢？
下面我们做出几种不同解释：

- $A$的行列式为0，则$A$不可逆。这是我们在行列式部分将要学得到的。
- 如果$A$乘一个矩阵，我们考虑$A$的列，结果的每一列都来自$A$的各列，都是$A$的各列的线性组合。这样有可能得到单位阵吗？不可能！单位阵第一列$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$不可能是$A$的两列的线性组合。因为$A$的两列共线，所有的线性组合都在一条直线上，$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$不在其上。
- **存在非0向量$x$，使得**$Ax = 0$，则$A$不可逆。

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

因为假设$A$可逆，则$A^{-1} \cdot A \cdot x = I \cdot x = 0$，则$x$为0。但$x$不为0，则假设不成立，$A$不可逆。

**结论：** 对于方阵而言，不可逆矩阵（奇异矩阵）的列能通过线性组合得到0，即列线性相关（其实行也线性相关，我们只用考虑列就可以了）。

### · 逆的求解

举例。
对于方阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$，这个矩阵可逆，它的逆矩阵$A^{-1}$如何求解呢？

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

我们从矩阵乘法的列方法考虑$A \cdot A^{-1}$，这就又回到了解方程组的问题了。

$$\begin{bmatrix}1&3\\2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1&3\\2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

理解这些基础后，下面我们介绍**高斯-若尔当( Gauss-Jordan )**消元法同时求解两个方程组来求逆。

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\2&7&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{row2-2\cdot row1}\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&1&-2&1\end{array}\right]\xrightarrow{row1-3\cdot row2}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&7&-3\\0&1&-2&1\end{array}\right]$$

$$A|I\rightarrow I|A^{-1}$$

则$A^{-1}=\begin{bmatrix}7&-3\\-2&-1\end{bmatrix}$，同时消元矩阵$E=A^{-1}$。

### · $AB$与$A^T$的逆

$$\boxed{(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}}$$

证明:

$$(AB)\cdot(B^{-1}A^{-1})=A\cdot(BB^{-1})\cdot A^{-1}=A\cdot A^{-1}=I$$

$$\boxed{(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T}$$

证明:

$$\because A\cdot A^{-1}=I\qquad\therefore (A^{-1})^T\cdot A^T=I$$