绪论

为了复习线性代数，顺便练习markdown写作，我准备用寒假无聊时间整理线性代数笔记，仅供参考。

- 写作平台：Markdownpad2
- 参考课程：麻省理工18.06课程：线性代数

方程组的几何解释

一、概述

本讲将讨论线性代数基础：**求解线性方程组。**
首先 从方程组开始讲起，它有n个未知数、n个方程，方程数与未知数个数相等，这是最好的情况。**然后**举例描述“行图像”（row picture），一个“行图像”表示一个方程。**接着** 引出“列图像”（column picture）加以描述，“列图像”是本节重点。行和列组成矩阵（matrix），**最后**，我们引入矩阵形式来审视问题。

要点：

- n个未知数，n个方程
- 行图像
- 列图像
- 矩阵形式

二、举例1

举例，两个方程、两个未知数。
以

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \tag{1}$$

为例。

· 矩阵形式

方程（1）的矩阵形式为：

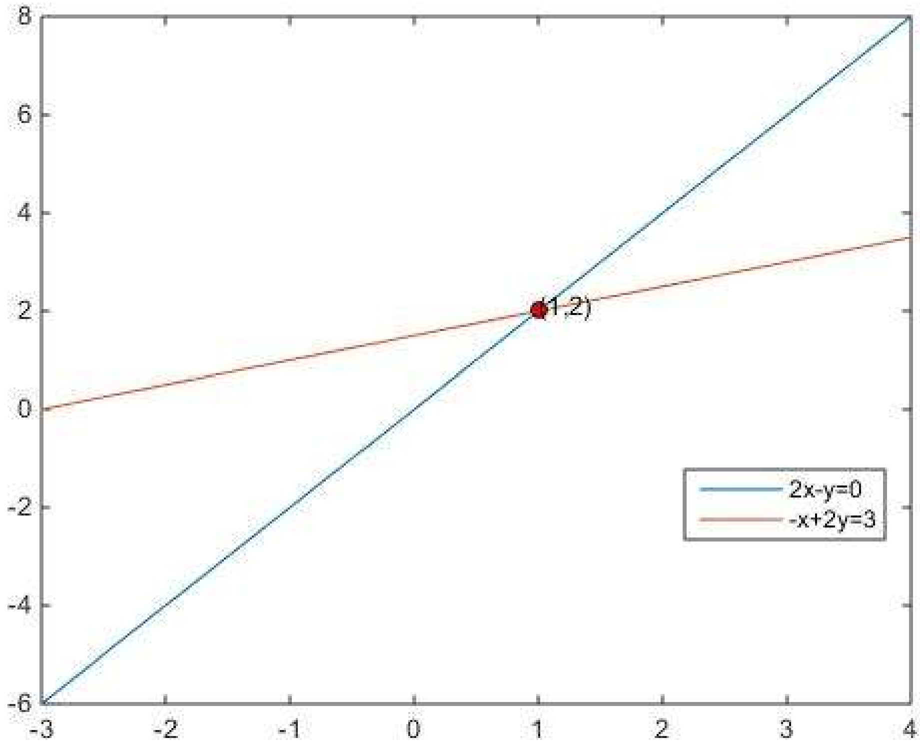
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

即

$$Ax = b$$

· 行图像

一次取一行，作图于xy平面。每一行的图像为一条直线，两条直线相交于一点(1,2)，这一点就是方程组的解。



row picture

· 列图像

方程（1）可改写为：

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

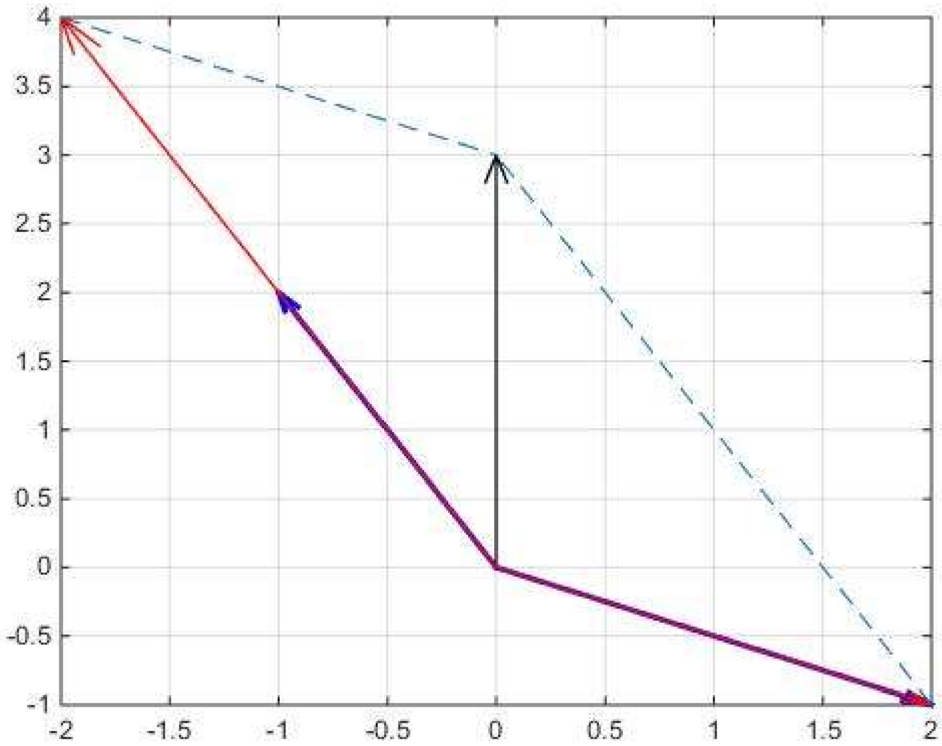
从列图像的角度看，现在该方程组的目标是如何将向量$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$与向量$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$正确组合，得到向量$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$，这就需要找到这两个列向量正确的“线性组合”，组合系数即为方程组的解。**线性组合**（**linear combination**）是贯穿整个课程的基本操作，这里是列向量的线性组合（linear combination of columns）。

（1）

当$x = 1, y = 2$时，即

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} 1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} 2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

此时列图像如下图所示。



column picture

(2)

由以上的分析可知，**1**倍的$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$与**2**倍的$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$的线性组合得到$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$，则$x=1, y=2$为方程的解。
现在我们抛开问题本身，思考一个问题， **这两个列向量所有的线性组合是什么?** ，也就是说， 选取所有的x、所有的y，所有的线性组合，结果是什么?
结果是会得到任意的右侧向量b，两个列向量的组合会布满整个二维平面。

三、举例2

举例，三个方程、三个未知数。
以

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-y+0z=0 \\ -x+2y-z=-1 \\ 0x-3y+4z=4 \end{array}\right. \tag{2}$$

为例。

· 矩阵形式

方程（2）的矩阵形式为：

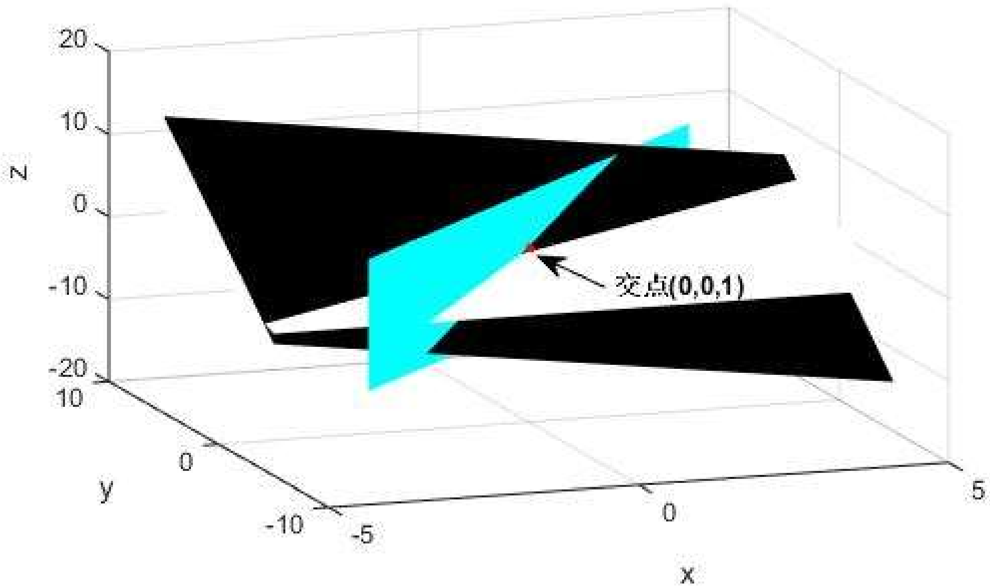
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

即

$$Ax = b$$

· 行图像

一次取一行，作图于xyz三维空间。每一行的图像为一个平面，三个平面相交于一点（0,0,1），这一点就是方程的解。



row picture

· 列图像

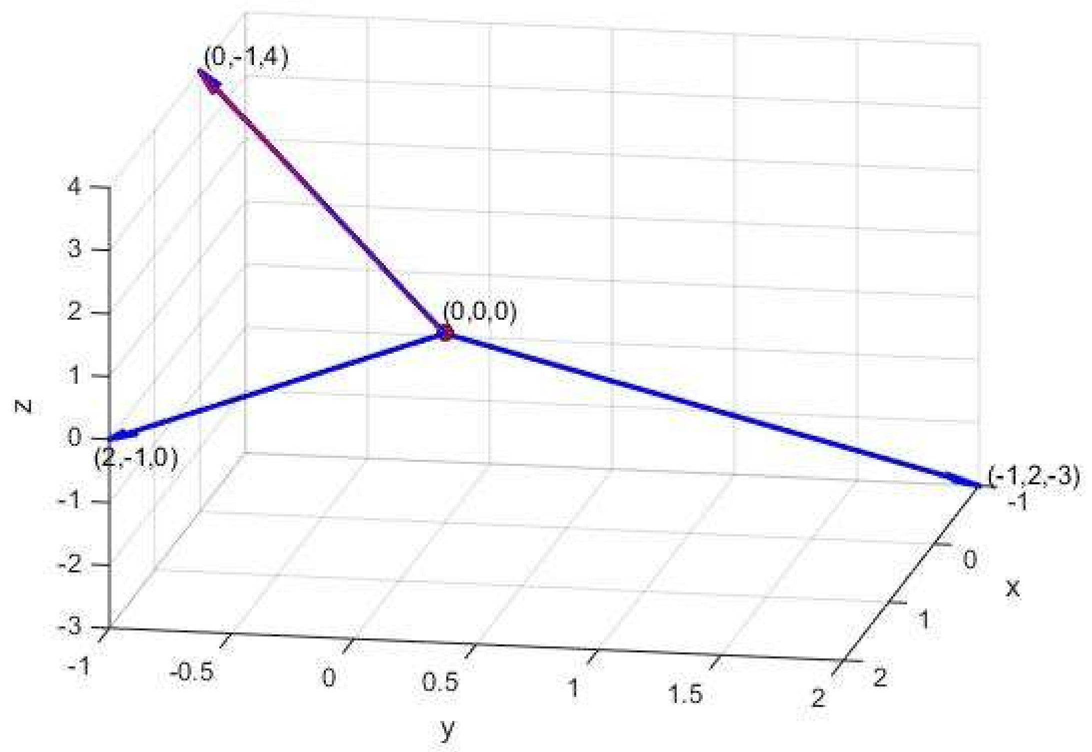
方程（2）可改写为：

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

从列图像的角度看，现在该方程组的目标是如何将向量$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$与向量$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$线性组合，得到向量$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$，组合系数为方程组的解。

（1）

列图像如图所示。



column picture

(2)

同理，**0** 倍的$\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$、**0** 倍的$\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}$与**1** 倍的$\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}$线性组合，得到$\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}$，则该方程组的解为$x=0,y=0,z=1$。

现在我们抛开问题本身，思考一个问题，不管右侧向量b是多少，该方程组是否都有解？即***对于任意b，是否都能求解Ax=b?***

用线性组合的术语来说，***列向量的线性组合是否能覆盖整个三维空间?***

对于例题中的A来说，答案是肯定的。但对于另一些矩阵，答案可能是否定的，那什么时候会这样呢（列向量的线性组合无法得到b）？

我们可以想象这种情况，当三个列向量位于同一平面时（如第三个列向量可以由其他两个列向量组合得到），其线性组合必定在这个平面上。这时，

1. 如果b位于这个平面时，方程组有解；
2. 但更多情况下，b不在这个平面上，方程组无解，这种情况称为**奇异**（**sigular**），矩阵A不可逆。【注：在后面会详细研究奇异矩阵】

下面我们可以尝试考虑九维的情况。假设有9个方程、9个未知数，此时有9个列向量，每个列向量有9个分量。考虑9个列向量的线性组合，是否总能得到右侧向量b？ 这取决于这9个列向量，有时答案是肯定的，比如随机矩阵，因为随机矩阵总是可逆的；但是当选取一些相互不独立的列向量时，答案是否定的。

现在我们只关心系数矩阵为非奇异矩阵的情形，即只要通过正确的线性组合，就可以得到任意的b。

四、矩阵

线性方程组的一般矩阵形式为：

$$Ax = b$$

这是一种乘法运算，我们这里研究如何用矩阵乘以向量。
举例：

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} 1 + \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} 2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

总结：Ax等于A的**列向量的线性组合**

五、小结

这是线性代数课程的第一部分第一节，我们通过举两个简单例子对方程组进行**几何解释**，引入方程组的**矩阵形式**，为第一部分后续的通过矩阵消元求解线性方程组打下基础。
方程组的几何解释分为两部分：行图像和列图像。
行图像是方程组的每一个方程对应的几何图像，两个变量对应二维平面的直线，三个变量对应三维空间的平面，四个及以上个数的变量对应四维及以上维度的超平面（hyperplane），无法可视化。行图像局限性很大，当等号右侧的b发生变化时，行图像也会发生变化，不具有普遍研究的意义。
列图像是相同变量所对应系数组成的列向量。它不随右侧b的变化而变化。