# &1.4 $A$的$LU$分解

## 一、概述

这节我们重新来审视1.2节矩阵消元的结果：$EA=U$。
**首先** 我们通过$EA=U$得到最基础的矩阵分解：$A=LU$ (无行交换)，并分析了$A=LU$对比$EA=U$的优势所在，我们又讨论了消元次数与矩阵规模的关系。**然后** 我们研究了置换矩阵优良性质，得出有行交换时的分解形式： $PA=LU$ 。**最后** 我们讲解了什么是转置，引入一种特殊且非常重要的矩阵：对称矩阵。

**要点:**

- $A=LU$
- **置换矩阵**
- **对称矩阵**

## 二、$A$的$LU$分解（不考虑行交换）

假设矩阵$A$是奇异矩阵，且消元过程中不需要进行行交换（0未占据主元位置）。

$A$通过消元得到$U$，中间是怎么联系起来的呢？我们在1.2节【矩阵消元】知道：

$$EA=U \tag{1}$$

消元矩阵$E$包含着消元信息，联系着$A$和$U$。

我们对$(1)$式做下变形，就得到了最基础的矩阵分解形式：

$$A=LU \tag{2}$$

其中，$L=E^{-1}$，$L$表示下三角矩阵( lower triangular )，$U$表示下三角矩阵( upper triangular )。

### （1）举例1

举例 $A=\begin{bmatrix}2&1\\8&7\end{bmatrix}$，消元过程为：

$$E_{21}\cdot A=U$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&1\\8&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}$$

则

$$\begin{bmatrix}2&1\\8&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}$$

$$A=L\cdot U$$

有时我们将主元单独处理，写成如下形式：

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\8 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\4 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0.5\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A=L\cdot D\cdot U$$

以上可知： $E=\begin{bmatrix}1 & 0\\-4 & 1\end{bmatrix}\quad L=\begin{bmatrix}1 & 0\\4 & 1\end{bmatrix}$，形式$(1)$和形式$(2)$好像并没有什么差别，这是因为$A$的阶数是2，我们看下面的例子会发现$E$和$L$差别会很大。

### （2）举例2

举例$A$为$3\times3$的方阵，则

$$E_{21}\cdot E_{31}\cdot E_{32}\cdot A=U\qquad A=L\cdot U$$

$$L=(E_{21}\cdot E_{31}\cdot E_{32})^{-1}=E_{32}^{-1}\cdot E_{31}^{-1}\cdot E_{21}^{-1}$$

假设 $E_{21}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$E_{31}=I$，$E_{32}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -5 & 1\end{bmatrix}$,则

$$E=E_{21}\cdot E_{32}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\\boxed{-2} & 1 & 0\\\boxed{10} & \boxed{-5} & 1\end{bmatrix}$$

$$L=E_{32}^{-1}\cdot E_{21}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\\boxed{2} & 1 & 0\\0 & \boxed{5} & 1\end{bmatrix}$$

由$E$和$L$的结果可知，$L$中矩阵相乘的顺序很好，2和5不会起冲突，不会得到10，消元乘数显示在$L$中，没有其他冗余的信息，并且可以直接写出$L$，不需要任何运算。而$E$没有这么好的性质。

$\boxed{\text{结论1}}$：对于$A=LU$如果没有行交换，消元乘数可直接写入$L$。

## · 消元次数

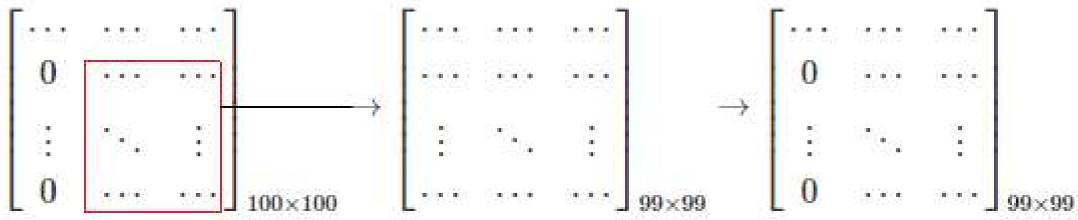
思考一下，对于$A_{n\times n}$到$U_{n\times n}$，总共进行了多少次的消元？（这里讨论的是方程组运算中最基本的算法问题，比如解某方程组$n=100$，需要1秒还是1分还是多久？）

令$\underline{n=100}$，实际消元需要多少次操作？【记1次乘法1次加法为1次操作】

- 1、将第一列$(2,1)$、$(2,1)$、$\cdots(n,1)$消元为0需要大概$100^2$次操作。（实际需要$99\times100$次操作）

$$\begin{bmatrix}\cdots & \cdots & \cdots\\\cdots & \cdots & \cdots\\\vdots & \ddots & \vdots\\\cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix}_{100\times100}\rightarrow\begin{bmatrix}\cdots & \cdots & \cdots\\0 & \cdots & \cdots\\\vdots & \ddots & \vdots\\0 & \cdots & \cdots\end{bmatrix}_{100\times100}$$

- 2、将第二列$(3,2)$、$(4,2)$、$\cdots(n,2)$消元为0需要大概$99^2$次操作。（实际需要$98\times99$次操作）



- $\vdots$
- 100、需要$1^2$次操作。

总共需要$100^2+99^2+\cdots+1^2$次操作。

$\boxed{结论2}$：对于$A_{n\times n}$需要$[n^2+(n-1)^2+\cdots+1^2]\approx\frac{1}{3}n^3$次操作。

$\boxed{结论3}$：右侧向量$b$需要$n^2$次操作

## 二、$A$的$LU$分解（考虑行交换）

对于奇异矩阵$A$，消元过程中当主元位置存在0时，需要进行行交换，这时需要置换矩阵的参与。我们在1.2节【矩阵消元】中简单讲解了置换矩阵的形式与作用，接下来我们先继续讲解置换矩阵的优良性质，再说明考虑行交换时$A$的分解形式。

### · 置换矩阵

我们写出所有的$3\times3$置换矩阵。

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \qquad \text{(exchange 0 times)}$$

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} \qquad \text{(exchange 1 times)}$$

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} \qquad \text{(exchange 2 times)}$$

我们发现：

- 如果将它们两两相乘，会发现结果仍在这6个当中。因为重复进行行交换，结果始终是行交换。
- 如果取逆，矩阵的逆仍在这6个当中。

因此我们可以称这是一个矩阵群(group)。

$\boxed{结论4}$：对于任意置换矩阵$P$，都可逆，且$P^{-1}=P^T$。

$$P^T\cdot P=I$$

$\boxed{\text{结论5}}$：对于$n \times n$置换矩阵，有 $n!$ 种。

### · $A$的$LU$分解（考虑行交换）

考虑行交换时，对于任何可逆矩阵$A$，都有：

$$PA = LU$$

# 四、转置

**转置**( **Transpose** )，顾名思义，就是将矩阵的第一列变为第一行、第二列变为第二行、⋯，记作$T$。
对于矩阵$A$，有

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

下面通过举例来说明转置的操作。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

### · 对称矩阵

**对称矩阵**( **Symmetric Matrix** )矩阵是一种特殊的矩阵，它的转置等于它本身。
对于矩阵$A$，有

$$A^T = A$$

这种矩阵很常见，也很重要。我们前一部分讲过转置等于逆的矩阵（如置换矩阵） 非常重要，但数量稀少，远没有对称矩阵常见。

$\boxed{\text{结论6}}$：对于矩阵$R$，$R \cdot R^T$是对称矩阵。

证明：

$$(\underline{R \cdot R^T})^T = (R^T)^T \cdot R^T = \underline{R \cdot R^T}$$

举例：

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 7 \\ 11 & 13 & 11 \\ 7 & 11 & 17 \end{bmatrix}$$