&2.7 图与网络

一、概述

这节课是线性代数应用课，研究线性代数在图论中的应用。

要点：

- **图 Graph**
- **关联矩阵 Incidence Matrix**
- **基尔霍夫定律 Kirchhoff's Laws**
- **欧拉公式 Euler's Formula**

二、图

我们首先先来了解一下什么是“图”，它有什么意义。

· 概念

图(**Graph**) $\boldsymbol{G}$ 是一个二元组 (V, E)，其中，V 为顶点集合，E 为边的集合。
通常表示为：

$$\boldsymbol{G} = (V, E)$$

$$V = \{\, nodes \,\},\ E = \{\, edges \,\}$$

· 意义

图是应用数学中最重要的模型，它来源于实际问题，是实际问题的拓扑结构的抽象描述，人们用图论的知识对图加以分析，分析结果反过来用于指导现实问题。

图是**图论**(**graph theory**)的研究对象，它是由若干个给定的节点及连接两顶点的边所构成的图形。这种图形通常用来描述某些事物之间的某些特定关系，用顶点代表事物，用连接两顶点的边表示相应两个事物间具有这种关系。【参考：图论具体是数学中一个什么样的领域？】

举例：

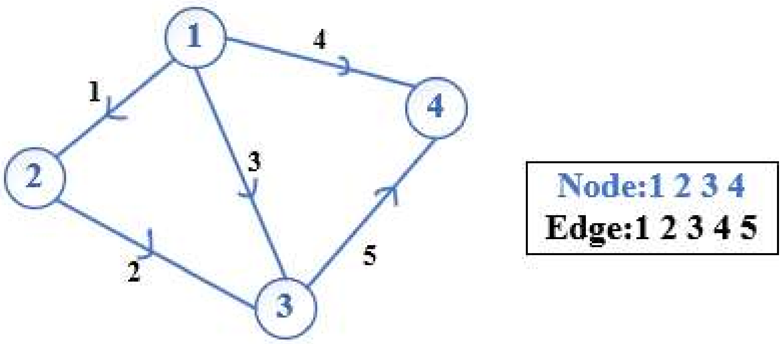
- 假设教室中每一个人都对应一个节点，连接两个节点的边表示这两个人是朋友，这就构成了一个教室里的“关系图”。
  - 类推到全国乃至全世界，可以构成一幅大图，每个人对应一个节点，朋友之间都存在一条边。这时有一个问题：从任意一个节点到任意其他节点，共需要走多少步？
    最远相距多少步？“**六度空间理论**”（ **six degree of seperation** ）回答了这个问题：你和任何一个陌生人之间所间隔的人不会超过五个，也就是说，最多通过五个中间人你就能够认识任何一个陌生人。结果往往发现，你们之间的联系不过三四步，不禁感叹“这个世界真小啊”，这就是“小世界”一词的由来。【参考：六度空间理论】

- 如果节点表示网站，边表示网址链接，这就是万维网的图，这是一个不可思议的图，许多人希望借此来解开互联网的奥秘。

三、线性代数与图

下面我们先举例画出一个图，然后写出与之对应的矩阵，用矩阵来解释图的各种细节与意义。

· 举例



图来源于实际问题，是对现实问题抽象化的描述，因此我们可以将本例的图表示一个电路网络，边考虑成电流，图上标的是电流的参考方向。当然，这只是其中一种可能，这个数学模型也可以表示一个液压系统，假设这里流动着水或者油；还可以表示一个建筑结构。

总之，可以赋予不同的实际意义，这里我们以电路网络为例，边表示电流(current)，图上标的是电流的参考方向，节点表示电势(potential)。

· 图的矩阵形式——关联矩阵

构造**关联矩阵**(**incidence matrix**) A，矩阵的一行相当于图的一条边，每列对应每个节点。如 A 的第一列，对应 edge 1，edge 1上有node 1和node 2，且由node 1指向node 2，而与node 3和node 4无关，则 $a_{11}=-1,a_{12}=1,a_{13}=a_{14}=0$。

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} node\,1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
A= & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} edge\,1 \\ edge\,2 \\ edge\,3 \\ edge\,4 \\ edge\,5 \end{array}
\end{array}
$$

- 节点1、2、3 构成的子图是一个“环路”(loop)，与之相关的行1、2、3 线性相关，这说明：**“回路”意味着“相关”**，与回路对应的行是线性相关的。
- 关联矩阵 A 包含了许多的0，因为不管矩阵多大，每行只有两个非零的数，非零个数是 $2m$，所以关联矩阵是**稀疏矩阵**(**sparse matrix**)。
- 关联矩阵源于问题，因此描述了问题的拓扑结构。

· 关联矩阵与图的分析

对于矩阵 A 可以提出什么问题呢?

(1) A 的零空间

这个问题是为了了解矩阵的各列是否线性无关。零空间可以告诉我们：如何对列向量进行线性组合结果可以得到零向量。如果零空间只有零向量，则各列线性无关，否则线性相关。

设4个节点的电势为 x_1、x_2、x_3、x_4

$$Ax=\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2-x_1\\x_3-x_2\\x_3-x_1\\x_4-x_1\\x_4-x_3\end{bmatrix}=0$$

零空间为

$$x=c\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$dim\ N(A)=1$$

$$r=n-dim\ N(A)=4-1=3$$

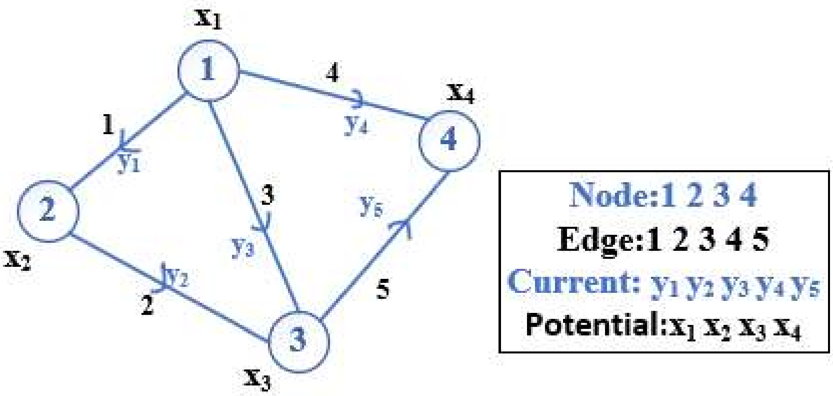
- Ax 可得到各边的电势差分别为 (x_2-x_1)、(x_3-x_2)、(x_3-x_1)、(x_4-x_1)、(x_4-x_3)
- 零空间的物理意义：表明电势差是产生电流的原因。由于网络中存在电势差，于是节点之间存在电流，如果节点电势都相等，则不会有电流产生。
- 若要确定c，必先确定初始值。对于本例，我们先确定其中一点的电势，如最后一个节点电势 x_4，典型方法是将它接地，即 $x_4=0$，这意味着最后一列不起任何作用。只要确定了一点的电势，其他节点电势也可求出。

(2) A^T 的零空间

设5条边的电流为 y_1、y_2、y_3、y_4、y_5

$$dim\ N(A^T)=m-r=5-3=2$$

$$Ax=\begin{bmatrix}-1&0&-1&-1&0\\1&-1&0&0&0\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y_1-y_3-y_4\\y_1-y_2\\y_2+y_3-y_5\\y_4+y_5\end{bmatrix}=0$$



- $A^T y = 0$ 可得到**基尔霍夫电流定律**(**Kichoff's current law**)，它是平衡方程，它说明了流入等于流出，节点不会积累电荷。
  - y_1、y_3、y_4 是从节点1流出的电流，第一个方程是关于节点1的，它说明合电流为0
  - 第二个方程是关于节点2的，$y_1 = y_2$，它说明流入等于流出。
  - 第三个方程是关于节点3的，$y_2 + y_3 - y_5 = 0$。
  - 第四个方程是关于节点4的，$y_4 + y_5 = 0$。

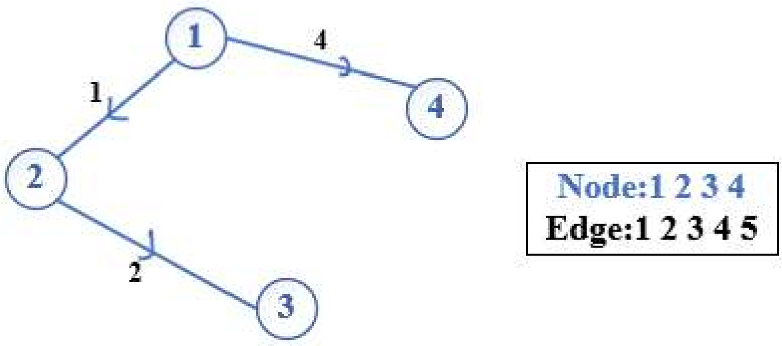
那么 $N(A^T)$ 是什么?
我们已经知道通过消元得到行最简形 R 可以告诉我们所有信息，但在这里我们不用消元，我们直接通过图写出 $N(A^T)$ 的一组基。

我们让电流只流过边1 2 3组成的回路，假设 $y_1 = 1$，那么 $y_2 = 1, y_3 = -1, y_4 = y_5 = 0$，则
$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}。$$

我们让电流只流过边3 4 5组成的回路，假设 $y_3 = 1$，那么 $y_5 = 1, y_4 = -1, y_1 = y_2 = 0$，则
$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

(3) A 的行空间

对于 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，主行为行1、行2、行4，对应edge 1、edge 2、edge4。



- 行1、行2、行4线性无关，对应的边构成的子图没有回路，此时的子图称为**树**(**tree**)。
  - 树的节点数=边数+1

下面我们来看看维度公式的意义。

$$dim\ N(A^T) = m - r$$

$$\begin{aligned} dim\ N(A^T) &\text{：} \#\ loops \\ m\quad &\text{：} \#\ edges \\ r &\text{：} \#\ nodes - 1\ (rank = n - 1) \end{aligned}$$

则

$$\#\ loops = \#\ edges - (\#\ nodes - 1)$$

得到

$$\boxed{\#\ nodes - \#\ edges + \#\ loops = 1}$$

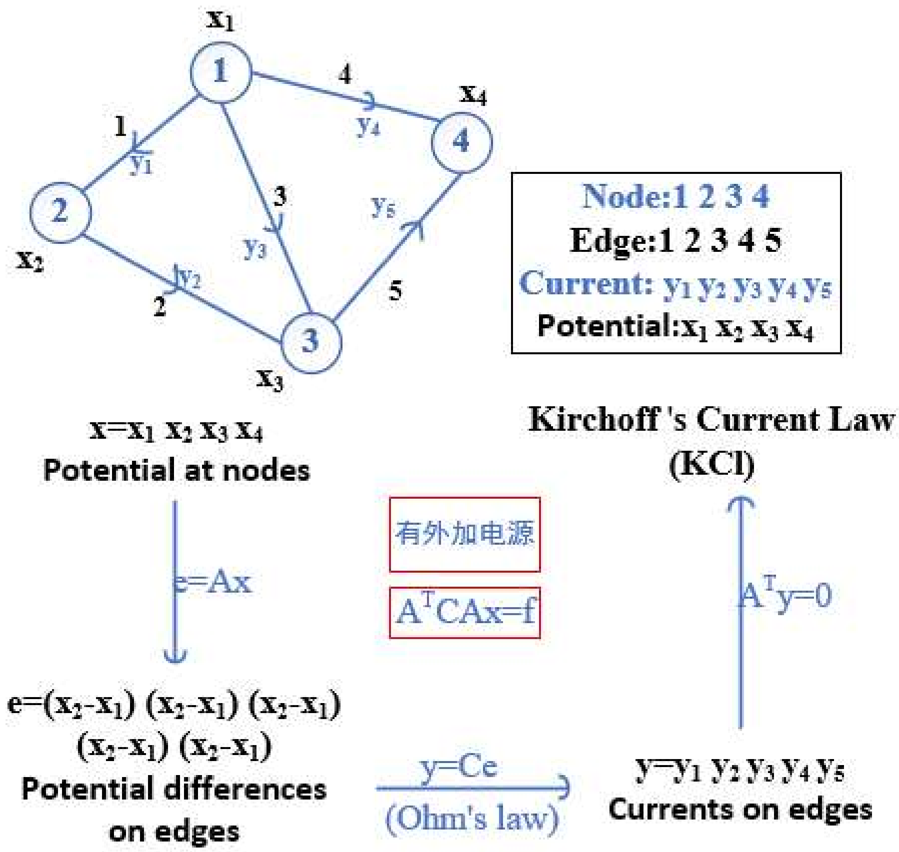
- 最终的到的式子称为**欧拉公式**(**Euler's formula**)，欧拉公式对任意的图都成立，是任何图都具有的拓扑性质。
- 节点可以想象成零维，考虑成图上的点；边可以想象成一维，它们连接着节点；回路可以想象成二维，我们得到一个区域。

(4) 有外加电源下的修改

当有外加电源时，我们对上述分析做出相应修改，有两种方法：

- 可以在边上加电压源，这时我们需要修改电势差
- 可以加电流源，这时 KCL 公式修改为 $A^Ty = f$，f 就像外部流入的电流

· 总结



$$\underline{A^TCA} \cdot x = f$$

- 这是应用数学中的基本方程，很多问题最终总会得出这样一个平衡方程
- $A^TCA = C \cdot \underline{A^TA}$ (C 为常数)。
  - A^TA **非常重要，它总是对称的**，我们后面会重点学习 $A^TAx = b$