Part 2导论

这是线性代数的第二部分：向量空间，本章以向量空间的角度审视 $Ax = b$ 的含义，这是理解 $Ax = b$ 的第二层次。

- **2.1 向量空间和子空间** ——介绍向量空间和子空间的概念，引入矩阵的两种子空间：列空间、零空间
- **2.2 求解 $Ax = 0$：主变量、特解** ——介绍求解矩阵零空间的求解算法
- **2.3 求解 $Ax = b$：可解性、解的结构** ——介绍 $Ax = b$ 的可解性与解的结构，不同秩下解的个数
- **2.4 线性相关性、基、维数** ——解析向量组线性相关或线性无关、向量组生成一个空间、向量组作为子空间的一组基、子空间的维数等概念
- **2.5 四个基本子空间** ——介绍矩阵的四个基本子空间的基、维数的求解方法——消元
- **2.6 矩阵空间、秩1矩阵** ——深入“向量空间”的核心概念，引出矩阵空间，介绍一种特殊的矩阵：秩1矩阵。
- **2.7 图与网络** ——举例介绍线性代数在图论中的应用。

&2.1 向量空间和子空间

一、概述

本节将介绍向量空间和子空间的概念。
首先 介绍向量空间的定义，举例说明了向量空间的特征。**然后** 介绍了子空间的定义，讨论了 R^n 的全部子空间。**最后** 简单介绍了矩阵的两种子空间：列空间与零空间。

要点：

- **向量空间**
- **子空间**
- **列空间**
- **零空间**

二、向量空间

在引入向量空间之前，我们先来看看向量有什么运算？
对于向量 u 和 v，有

- 相加：$u + v$
- 数乘：kv，其中k为标量(scaler)

有了上面的认识后，下面我们来讨论向量空间的概念。

· 定义

设 V 是一组向量的非空集合，若有

- $\forall u, v \in V$，$(u+v) \in V$

$$(\text{对加法封闭})$$

- $\forall v \in V$，$kv \in V$，其中k为标量(scaler)

$$(\text{对数乘封闭})$$

成立，则称集合 V 为**向量空间**(**Vector Space**)。【严格定义见百度百科】

因此，向量空间必须对加法和数乘封闭，也就是说，对线性组合封闭。

· 举例

设 R^2 为所有二维实向量的集合，我们可以把 R^2 称为一个平面(plane)，则 R^2 为一个向量空间。
我们设想一下，如果一个向量集合 V 包含 R^2 除原点 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 外的所有向量，那 V 是一个向量空间吗？ 显然不是。因为 $0 \cdot v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = v + (-v) \notin V$，不满足数乘封闭性与加法封闭性。

$\boxed{\text{结论1}}$：向量空间一定包含零向量。

这里我们再补充约定俗成的两点：

- 我们所说的向量 v 默认为列向量，行向量用 v^T 表示。
- R^n 默认表示所有 n 维实向量的集合。

三、子空间

前面我们介绍了向量空间的概念，举了向量空间 R^n 的例子。R^n 是很重要的向量空间，但我们一般更关心 R^n 的非空子集。如果 R^n 非空子集 V 为向量空间的话，则 V 为向量空间 R^n 的子空间。

· 定义

对于非空集合 $V \subseteq R^n$，若有

- $\forall u, v \in V$，$(u+v) \in V$

$$(\text{对加法封闭})$$

- $\forall v \in V$，$kv \in V$，其中k为标量(scaler)

$$(\text{对数乘封闭})$$

成立，则称 V 为向量空间 R^n 的**子空间**(**subspace**)。

· R^n 的全部子空间

要想知道 R^n 的全部子空间，我们先来看看 R^2 和 R^3 的全部子空间。

$\boxed{R^2}$

R^2 的全部子空间：

- R^2
- any line through the origin $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- zero vector ($Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$)

$\boxed{R^3}$

R^3 的全部子空间：

- R^3
- plane through the origin $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，即 R^3 中的 R^2
- line through the origin $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，即 R^3 中的 R^1
- $Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，即 R^3 中的 R^0

$\boxed{R^n}$

- R^n
- 超平面(hyperplane)，即 R^n 中的 R^{n-1}
- $\vdots$
- plane through the origin $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$，即 R^n 中的 R^2
- line through the origin $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$，即 R^n 中的 R^1
- $Z = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$，即 R^n 中的 R^0

四、矩阵的子空间

举例，$A = [v_1, v_2, v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$。

· 列空间

A 的三列 v_1, v_2, v_3 都在 R^4 中，子空间中已经有了这三个列向量，则 v_1, v_2, v_3 所有的**线性组合**构成一个子空间，这个子空间被称为矩阵 A的**列空间**(**column space**)，记作 $C(A)$。($C(A) \subseteq R^m$)

$$\begin{aligned} C(A) &= \{\, all\ linear\ combinations\ of\ columns \,\} \\ &= \{\, v \in R^4 | v = a \cdot v_1 + b \cdot v_2 + c \cdot v_3 \ \,\} \end{aligned}$$

(1)

现在我们把列空间与线性方程组联系起来，思考一个问题，**对于任意右侧向量** b，$Ax=b$ **是否都有解**?

$$Ax=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix}$$

答案是否定的。因为

- $Ax=b$ 有四个方程、三个未知数。
- 3个列向量的线性组合无法充满整个四维空间。

那么什么样的 b，可以使 $Ax=b$ 有解?

$\boxed{\text{结论}2}$：当且仅当右侧向量 $b\in C(A)$，即 b 是各列的线性组合时，$Ax=b$ 有解。

(2)

再思考一个问题，将 A 各列进行线性组合，最终得到的是三维子空间吗？也就是说，这三个列向量相互独立、线性无关吗？不是，当将 v_3 去掉的话，$C(A)$ 不变，v_3 对线性组合毫无贡献，因为 $v_3=v_1+v_2$。

- $C(A)$ 为 R^4 中的二维子空间，过原点的平面。
- 我们将前两列 v_1,v_2 称为**主列**(pivot column)。
- 关于主列的选取，优选选取前面线性无关的列。

· 零空间

零空间(nullspace)是线性方程组 $Ax=0$ 所有的解 x 构成的集合，记作 $N(A)$。($N(A)\subseteq R^n$)

$$Ax=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\qquad(x\in R^3)$$

(1) 零空间是向量空间

证明：对于 $\forall u,v\in N(A)$，有

$$Au=0\quad Av=0$$

则

$$\begin{gathered}A\cdot(u+v)=0\\A\cdot(kv\text{)}=0\end{gathered}$$

即

$$\begin{gathered}(u+v)\in N(A)\\kv\in N(A)\end{gathered}$$

满足加法封闭性与数乘封闭性，$N(A)$ 是向量空间。

（2）例题 $N(A)$ 求解

零空间的一般求解算法是我们下节的主要内容，现在我们只把这个简单例子的零空间求出来。

由观察可知，$N(A)$ 包含 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$。

$$N(A) = c \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad c \in R$$

$N(A)$是三维空间的一条直线。