&2.5 四个基本子空间

一、概述

本讲我们介绍矩阵 A 的四个基本子空间，四个基本子空间是线性代数的核心内容，我们主要任务是研究这四个子空间及其关系。

要点：

- **列空间 $C(A)$ column space**
- **零空间 $N(A)$ null space**
- **行空间 $C(A^T)$ row space**
- **左零空间 $N(A^T)$ left null space**

二、矩阵的四个基本子空间

对于一个向量空间而言，我们关心它的两点：**基和维数。**
向量空间空间的这两个性质能完全反映它的所有信息，但其实我们只要找出向量空间的一组基，就能知道它的维数，因此对于研究某个空间而言，我们最关键的就是找出它的一组基。

下面我们先介绍四个基本子空间的概念，再研究已知秩下，他们的维数，最后介绍四个子空间基的求解。

· 概念

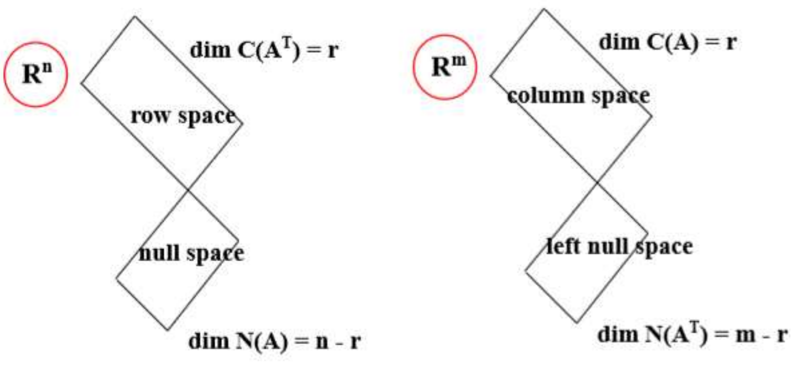
假设有矩阵 $A_{m\times n}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \cdots & \boldsymbol{v_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a_1^T}\\ \boldsymbol{a_2^T}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a_m^T}\end{bmatrix}$，则 A 的四个子空间概念如下：

- **列空间**：向量组 $\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\cdots,\boldsymbol{v_n}$ 生成的空间，记为 $C(A)$。（$\subseteq\ R^m$ ）
- **零空间**：$Ax=0$ 的解空间，记为 $N(A)$。（$\subseteq\ R^n$ ）
- **行空间**：向量组 $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\cdots,\boldsymbol{a_m}$ 生成的空间，记为 $C(A^T)$。（$\subseteq\ R^n$ ）
- **左零空间**：$A^Ty=0$ 的解空间，记为 $N(A^T)$。（$\subseteq\ R^m$ ）

· Dimension

假设有矩阵 $A_{m\times n}$，秩为 r。

$$\begin{aligned}&dim\ C(A)=r\\&dim\ N(A)=n-r\\&dim\ C(A^T)=r\\&dim\ N(A^T)=m-r\end{aligned}$$



· Basis

假设有矩阵 $A_{m\times n}$，秩为 r，且 $r<m,r<n$。

$\boxed{C(A)、N(A)、C(A^T)}$

$$A=\begin{bmatrix}\quad\quad\quad\end{bmatrix}\rightarrow R=\begin{bmatrix}I & F\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

则

- $C(A)$ **的基**：由 R 可得 A 的主列，$C(A)$ 的基为A 的主列 $\boldsymbol{v_{p1}}, \boldsymbol{v_{p2}}, \cdots, \boldsymbol{v_{pr}}$。
  - 注意：$C(A) \neq C(R)$，$C(A)$ 的基是 A 的主列，不是 R 的主列。
- $N(A)$ **的基**：由 R 可得零空间矩阵 $N = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix} = [\,\boldsymbol{v_1} \quad \boldsymbol{v_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{v_{n-r}}\,]$，则 $N(A)$ 的基为 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_{n-r}}$。
- $C(A^T)$ **的基**：R 的非零行 $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_r}$。
  - 原因：$A \rightarrow R$ 过程中，一直做的是行变换，只涉及到各行的线性组合，行空间不变。

$\boxed{N(A^T)}$

$$A^T \cdot y = 0 \qquad (1)$$

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{m-r} \end{bmatrix} = 0$$

$N(A^T)$ 是 式 (1) 的解空间，我们对 式 (1) 等号两侧取转置可得

$$y^T \cdot A = 0 \quad (2)$$

$$[\,y_1 \quad \cdots \quad y_{m-r}\,] \cdot \begin{bmatrix} \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \end{bmatrix} = 0$$

式 (2) 也是我们称之为左零空间的原因。

求解 $N(A^T)$ 的基有两种方法：

- 【不推荐】

$$A \xrightarrow{transpose} A^T \xrightarrow{elimination} R' = \begin{bmatrix} I & F' \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow N' = \begin{bmatrix} -F' \\ I \end{bmatrix} = [\,\boldsymbol{v'_1} \quad \boldsymbol{v'_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{v'_{m-r}}\,]$$

  则 $N(A^T)$ 的基为 $\boldsymbol{v'_1}, \boldsymbol{v'_2}, \cdots, \boldsymbol{v'_{n-r}}$。
- 【推荐】

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right] \xrightarrow{elimination} \left[\begin{array}{c|c} R & E \end{array}\right]$$

  则 $N(A^T)$ 的基为 E 中与R 的零行所对应的行向量。

三、练习

举例，$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$。

$\boxed{\text{解：}}$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[row3-row1]{row2-row1} \left[\begin{array}{cccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[row2\div(-1)]{row1-(-2row2)} \left[\begin{array}{cccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

则

- $C(A)$ 的基为：$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$。
  - 原因：由 R 可知，A 的主列为列1与列2，则列1和列2为 $C(A)$ 的基。
- $N(A)$ 的基为：$x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。
  - 原因：由 R 可得，零空间矩阵 $N = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$N$ 的各列为 $N(A)$ 的基。

- $C(A^T)$ 的基：$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$。
    - 原因：由 R 可知：R 的非零行为前两行 a_1^T, a_2^T，则 a_1, a_2 为 $C(A^T)$ 的基。
- $N(A^T)$ 的基：$a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。
    - 原因：由 R 可知：R 的零行为第三行，对应 E 的第三行为 a_3^T，则 a_3 为 $N(A^T)$ 的基。