&2.6 矩阵空间、秩1矩阵

一、概述

这节我们 **首先** 将“向量空间”的概念一般化，空间元素并不仅仅局限于向量，可以是矩阵（矩阵空间）、函数（函数空间）等等。 **然后** 我们介绍一种基础且特殊的一大类矩阵：秩1矩阵。

要点:

- **矩阵空间**（ **matrix space** ）
- **秩1矩阵**（ **rank 1 matrix** ）

二、矩阵空间

仿照向量空间的讲解思路，我们也先认识一下矩阵有什么运算，再详细介绍矩阵空间的定义，并举例说明，然后重点讲解它的两个性质：基、维数。

对于矩阵 A 和 B，有

- 相加：$A+B$
- 数乘：kA，其中k为标量(scaler)
- 相乘：$A\cdot B$

有了上面的认识后，下面我们来讨论向量空间的概念。

· 概念

设 $\boldsymbol{M}$ 是一组矩阵的非空集合，若有

- $\forall A,B\in\boldsymbol{M}$，$(A+B)\in\boldsymbol{M}$ $$(\text{对加法封闭})$$
- $\forall A\in\boldsymbol{M}$，$kA\in\boldsymbol{M}$，其中$k$为标量(scaler) $$(\text{对数乘封闭})$$

成立，则称集合 $\boldsymbol{M}$ 为**矩阵空间**(**matrix space**)。

矩阵空间对比向量空间，**相同之处**在于都满足“加法封闭性”和“数乘封闭性”，**不同之处**在于矩阵空间的元素为矩阵，而向量空间元素为向量。

· 举例

设 $\boldsymbol{M}$ 是所有 3×3 矩阵的集合，则 $\boldsymbol{M}$ 是一个矩阵空间，同时它的子空间有 例如：3×3 上三角矩阵(upper triangular matrix)、3×3 对称矩阵(symmetric matrix)、3×3 对角矩阵(diagonal matrix)。

· 基和维数

我们知道，当向量空间的基找到后，维数也就确定了，因此关键就是找出一组基。矩阵空间也是如此。

设 矩阵空间 $\boldsymbol{M}$：所有 3×3 矩阵的集合，子空间 $\boldsymbol{U}$：所有 3×3 上三角矩阵集合，子空间 $\boldsymbol{S}$：所有 3×3 对称矩阵集合。

$\boxed{\boldsymbol{M}}$

$$\overbrace{\begin{matrix}
\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&\boxed{1}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&\boxed{1}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}0&0&0\\\boxed{1}&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&\boxed{1}&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&\boxed{1}\\0&0&0\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\boxed{1}&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&\boxed{1}&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\boxed{1}\end{bmatrix}
\end{matrix}}^{basis\ for\ \boldsymbol{M}}$$

$$dim\,(\boldsymbol{M}) = 9$$

$\boxed{\boldsymbol{U}}$

$$\overbrace{\begin{matrix}
\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&\boxed{1}&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\boxed{1}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}0&\boxed{1}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&\boxed{1}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&\boxed{1}\\0&0&0\end{bmatrix}
\end{matrix}}^{basis\ for\ \boldsymbol{U}}$$

$$dim\,(\boldsymbol{U}) = 6$$

$\boxed{\boldsymbol{S}}$

$$\overbrace{\begin{matrix}
\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&\boxed{1}&0\\0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\boxed{1}\end{bmatrix}
\end{matrix}}^{basis\ for\ \boldsymbol{S}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$dim\left(\boldsymbol{S}\right) = 6$$

$\boxed{\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{S}}$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}}^{basis\ for\ \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{S}}$$

$$dim\left(\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{S}\right) = 3$$

$\boxed{\boldsymbol{U} + \boldsymbol{S}}$

$$\boldsymbol{U} + \boldsymbol{S} = all\ 3 \times 3\ matrices = \boldsymbol{M}$$

$$dim\left(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{S}\right) = 9$$

我们观察到：$\boxed{dim\left(\boldsymbol{U}\right) + dim\left(\boldsymbol{S}\right) = dim\left(\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{S}\right) + dim\left(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{S}\right)} = 6 + 6 = 3 + 9$，这种结果是处理子空间时自然会出现的，维度最终以这种很好的形式给出。

· 拓展

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \tag{1}$$

(1) 式的特解为 $y_p = cosx$，$sinx$，e^{ix} 等，解集为

$$y = c_1 cosx + c_2 sinx$$

(1) 式的解集又称为解空间，在本例中，解空间为零空间，同样满足“加法封闭性”和“数乘封闭性”，是一种元素为函数的“向量空间”。

$$\begin{aligned} &basis：cosx、sinx \\ &dim(solution\ space) = 2 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{结论}}$：向量空间与之所包含的基、维数这些概念并不局限于向量的集合，只要某个集合满足“加法封闭性”和“数乘封闭性”（严格来说有8个运算条件【见百度百科】），同样可以用“向量空间”的概念去类比并理解。

三、秩1矩阵

我们对秩为1的矩阵感兴趣的原因是它们很简单，我们可直接看出它的所有信息：四个基本子空间的**基**、**维数**，后面我们还会继续学习到秩1矩阵有趣的地方：**行列式**很简单，**特征值**很有意思。

(1) 举例

举例，秩为1的矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&4&5\\2&8&10\end{bmatrix}$，则

- 列空间一组基：$v=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$。
- 行空间一组基：$a=\begin{bmatrix}1\\4\\5\end{bmatrix}$。
- 零空间一组基：$x_1=\begin{bmatrix}-4\\1\\0\end{bmatrix}$，$x_2=\begin{bmatrix}-5\\0\\1\end{bmatrix}$。（$N=\begin{bmatrix}-4&-5\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$）
- 左零空间一组基：$v=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$。

(2) 分解

A 可分解为一种更漂亮的形式：

$$A=\begin{bmatrix}1&4&5\\2&8&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&4&5\end{bmatrix}$$

$$\boxed{rank\ 1\ matrix\ A=u\cdot v^T}$$

(3) 合成

秩1矩阵就像搭建其他矩阵的积木一样，我们可以搭建出任何矩阵。比如秩为4的矩阵，通过四个秩1矩阵就能搭建。

(4) 秩1矩阵与矩阵空间

我们思考一个问题，所有的秩4矩阵能构成一个子空间吗？即 假设 $M=all\ 5\times 7\ matrices$，则一个由秩4矩阵组成的子集是一个子空间吗？
问题的**关键**是两个秩4矩阵相加的结果，还是秩4矩阵吗？
通常不是。一般来说，**两个矩阵之和的秩不大于两个矩阵的秩之和。**

$$\boxed{rank(A+B)\leqslant rank(A)+rank(B)}$$

(5) 子空间练习

假设在 R^4 中，向量集合 $S=\{v \mid v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$，$v_1+v_2+v_3+v_4=0\}$，则集合 S 是一个子空间吗？

如果是，请写出 S 的一组基与维数。

$\boxed{\text{解：}}$

集合 S 是一个子空间。

任取向量 $v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \in S, u=\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \\ v_4' \end{bmatrix} \in S$，有 $v_1+v_2+v_3+v_4=0, v_1'+v_2'+v_3'+v_4'=0$

则 $u+v \in S, k \cdot v \in S$，因为 $v_1+v_2+v_3+v_4+v_1'+v_2'+v_3'+v_4'=0, k \cdot (v_1+v_2+v_3+v_4)=0$。满足“加法封闭性”和“数乘封闭性”，则集合 S 是一个子空间。

因为 子空间 S 是 矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的零空间，因此问题转化为求 $N(A)$ 的基和维数。

零空间矩阵 $N=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则

$$\overbrace{x_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_3=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{basis\ of\ S/N(A)}$$

$$dim(S/N(A))=3$$