中国科学技术大学

1999年硕士研究生学位课程考试试题

1. (1)证明$10-\sqrt{99}=\dfrac{1}{10+\sqrt{99}}$

   (2)

2. (4分) 写出以$(a,f(a),f'(a)),(b,f(b),f'(b)),(c,f(c))$ 为插值点构造的插值多项式的截断误差：

   ____。

3. (6分) 求解线性方程组$\begin{pmatrix}12 & -3 & 3\\ -1 & 9 & 4\\ 2 & 3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$的Gauss-Seidel迭代格式为$\begin{cases}__________\\ __________\\ __________\end{cases}$

得分	评卷人

二、解答题

4. (12分)给出下列函数表

x_i	-1	1	2	4
$f(x_i)$	0	5	12	9

   (1) 作出差商表；

   (2) 构造牛顿插值多项式,并计算$f(0)$；

   (3) 写出$f(0)$的插值误差表达式。

5. (12分)用Romberg算法计算积分：$\displaystyle\int_{2.0}^{2.8} x^2dx$

$R(1,1)=4.736$		
$R(2,1)=4.672$	$R(2,2)$	
$R(3,1)=4.656$	$R(3,2)$	$R(3,3)$

6. (15分) 给出下列数据:

x_i	0.01	0.04	0.09	0.16
y_i	2.0	4.0	3.0	5.0

试对数据作出$y(x)=a+b\sqrt{x}$ 形式的拟合函数。

答 题 时 不 要 超 过 此 线

7. (14分)用LDL^T分解求解下列方程组

$$\begin{cases} -6x_1+3x_2+2x_3 &= -5 \\ 3x_1+5x_2+x_3 &= 20 \\ 2x_1+x_2+6x_3 &= 1 \end{cases}$$

8. (15分) 写出用Gauss-Seidel方法求解下列方程组

$$\begin{cases} 10x_1+x_2-x_3=5 \\ x_1+5x_2+x_3=-4 \\ x_1+x_2+2x_3=2 \end{cases}$$

1) 迭代格式；2) 迭代矩阵；3) 讨论迭代矩阵是否收敛？

9. (10分)用幂法和反幂法分别计算下列矩阵按模最大的特征值和按模最小的特征值，只迭代两步。（单号同学用初值$(1.0, 1.0)$，双号同学用初值$(-1.0, 1.0)$）

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

10. (12分) 构造线性多步法$p=3, q=2$的隐式差分格式。

答案

1. 13.8 (3分), 10.6 (3分)

2. $\dfrac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-a)^2(x-b)^2(x-c), \xi \in [a,c]$ (4分)

3. $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (3x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)} + b_1)/12 & (2分) \\ x_2^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)} - 4x_3^{(k)} + b_2)/9 & (2分) \\ x_3^{(k+1)} = (-2x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)} + b_3)/(-6) & (2分) \end{cases}$

4. (1)(4分)

(-1 0)			
(1 5)	5/2		
(2 12)	7	3/2	
(4 9)	-3/2	-17/6 (或2.8333)	-13/15(或-0.8667)

(2)(4分)$N(x) = 0 + 5/2(x+1) + 3/2(x+1)(x-1) - 13/15(x+1)(x-1)(x-2)$

$N(0) = -11/15 = -0.7333$

(3)(4分)$\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x+1)(x-1)(x-2)(x-4), \xi \in [-1,4]$

$f(0)$的误差为$\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(-8), \xi \in [-1,4]$

5.

$R(1,1) = 4.736$		
$R(2,1) = 4.672$	$R(2,2) = 4.6507$(4分)	
$R(3,1) = 4.656$	$R(3,2) = 4.6507$(4分)	$R(3,3) = 4.6507$ (4分)

6. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 3.9 \end{pmatrix}$ (12分) $=> \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 8 \end{pmatrix}$ (3分)

7. $L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -1/2 & 1 & \\ -1/3 & 4/13 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} -6 & & \\ & 13/2 & \\ & & 236/39 \end{pmatrix}$

或

$L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -0.5 & 1 & \\ -0.3333 & 0.3077 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} -6 & & \\ & 6.5 & \\ & & 6.0513 \end{pmatrix}$ (8分)

$\begin{cases} Ly = b \\ Dz = y \\ L^T x = z \end{cases} => y = \begin{pmatrix} -5 \\ 35/2 \\ -236/39 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 35/13 \\ -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

或

$$y=\begin{pmatrix}-5\\17.5\\-6.0513\end{pmatrix} z=\begin{pmatrix}0.8333\\2.6923\\-1.0\end{pmatrix} x=\begin{pmatrix}2.0\\3.0\\-1.0\end{pmatrix}(6分)$$

8. 1)(5分) $\begin{cases} x_1^{k+1}=(-x_2^k+x_3^k+5)/10 \\ x_2^{k+1}=(-x_1^{k+1}-x_3^k-4)/5 \\ x_3^{k+1}=(-x_1^{k+1}-x_2^{k+1}+2)/2 \end{cases}$

2)(5分) $\begin{pmatrix} 0 & -1/10 & 1/10 \\ 0 & 1/50 & -11/50 \\ 0 & 1/25 & 3/50 \end{pmatrix}$

3) (5分)谱半径为$(2\pm i\sqrt{21})/50, 0$或$\|S\|_1=19/50<1$ 或$\|S\|_\infty=12/50<1$

9. (单号):

$x_1=(0.7,0.7), x_2=(0.49,0.49) => \lambda_1=0.7$ (4分)

$y_1=(1.4286,1.4286), y_2=(2.0408,2.0408) => \mu_1=1.4286 => \lambda_2=0.7$

$y_1=(10/7,10/7), y_2=(100/49,100/49) => \mu_1=10/7 => \lambda_2=0.7$ (6分)

(双号):

$x_1=(-0.3,0.3), x_2=(-0.09,0.09) => \lambda_1=0.3$ (4分)

$y_1=(-3.3333,3.3333), y_2=(-11.1111,11.1111) => \mu_1=3.3333 => \lambda_2=0.3$

$y_1=(-10/3,10/3), y_2=(-100/9,100/9) => \mu_1=10/3 => \lambda_2=0.3$ (6分)

10. $p=3 =>$积分区间为$[x_{n-3},x_{n+1}]$，$q=2$隐格式=>积分点为$\{x_{n+1},x_n,x_{-1}\}$

(3分)

$$\int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}}\frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})}{(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}-x_{n-1})}dx=\frac{8}{3}h$$

(3分)

$$\int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}}\frac{(x-x_{n+1})(x-x_{n-1})}{(x_n-x_{n+1})(x_n-x_{n-1})}dx=\frac{-16}{3}h$$

(3分)

$$\int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}}\frac{(x-x_{n+1})(x-x_n)}{(x_{n-1}-x_{n+1})(x_{n-1}-x_n)}dx=\frac{20}{3}h$$

格式为(3分)

$$y_{n+1}=y_{n-3}+\frac{8h}{3}f(x_{n+1},y_{n+1})-\frac{16h}{3}f(x_n,y_n)+\frac{20h}{3}f(x_{n-1},y_{n-1})$$