答题时不要超过此线

中国科学技术大学

2005 – 2006 学年第 1 学期考试试卷

考试科目：线 性 代 数　　　　　　　　　　得分：______________

学生所在系：______________　姓名：______________　学号：______________

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚。
2. 请考生在答卷纸左侧留出装订区域。
3. 本试卷为闭卷考试。满分 100 分，考试时间 120 分钟。
4. 所有答案写在答题纸上。

得分	评卷人

一、填空题

1. (4分)若实方阵A的伴随矩阵$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$，则$det(A) =$____ 。

2. (4分) 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & -5 & -6 \end{pmatrix}$, 则$rank(A) =$____________。

3. (4分) 若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关，则向量组$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$线性____关。

4. (4分) 若$A =$____________，$B =$____________，则A与B的秩和特征多项式都相同，但A与B不相似。

5. (4分) 若A ，B为同阶正定实对称方阵，则AB正定的充要条件是____________。

得分	评卷人

二、解答题

1. (15分) 对给定线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+a\ x_3 &= 4 \\ x_1-x_2+2x_3 &= -4 \\ -x_1+a\ x_2+x_3 &= a^2 \end{cases}$

(1) 当a取何值时，方程组有唯一解；

(2) 当a取何值时，方程组无解；

(3) 当a取何值时，方程组有无穷多解，并求其通解。

2. (15分) 已知直线$L:\begin{cases} 3x-y-z+1 &= 0 \\ 4x-2y-z+2 &= 0 \end{cases}$ 与平面$\pi: 2x-y+z-8=0$，

(1) 求直线L的点向式方程；

(2) 求直线L与平面π的夹角。

3. (8分) 设复方阵A满足$A'A=I$，λ_0是A的一个特征值，

证明：$\lambda_0\neq 0$，且λ_0^{-1}也是A的一个特征值。

4. (10分) 设实线性空间R^3上线性变换$\mathcal{A}$将向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$分别映到向量$\beta_1=\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$。求$\mathcal{A}$在基$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$下的矩阵。

5. (15分) 用正交变换$X=PY$将二次型$Q(x)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_3$化为标准形

6. (10分) 已知3阶方阵A与3维列向量x使得向量组x,Ax,A^2x线性无关，

且满足$A^3x=3x-Ax+2A^2x$，记$P=(x,Ax,A^2x)$，

(1) 求3阶方阵B使$A=PBP^{-1}$；

(2) 计算$det(A+I)$。

7. (7分) 在欧氏空间$\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$ 中，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性无关，

且$(\alpha_i,\beta_j)=0, 1\leqslant i\leqslant s, 1\leqslant j\leqslant t$，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性无关。

答案

1. 2(4分)

2. 2(4分)

3. 相关(4分)

4. 随意

5. $AB = BA$(4分)

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & | & 4 \\ 1 & -1 & 2 & | & 4 \\ -1 & 1 & 1 & | & a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & | & 4 \\ 0 & -2 & 2-a & | & -8 \\ 0 & 0 & \dfrac{(a+1)(4-a)}{2} & | & a^2-4a \end{pmatrix}$

   (1) $a \neq -1$且$a \neq 4$

   (2) $a = -1$

   (3) $a = 4$，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 4 \\ 0 & -2 & -2 & | & -8 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$，特解为$\begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$，齐次方程解为$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\lambda$

2. (1) L的方向向量为$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1,-1,-2)$，取点为$(0,1,0)$

   (2) L与π的法向量夹角$\cos\theta = \dfrac{(2,-1,-1)\cdot(-1,-1,-2)}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \dfrac{1}{2}$，所以，$L$与$\pi$的夹角为$30°$

3. $A'A = I \Rightarrow A^{-1} = A'$，$\lambda_0$为$A$的特征值，所以有$Ax_0 = \lambda_0 x_0$，即$A^{-1}x_0 = \lambda_0^{-1}x_0$，即$\lambda_0^{-1}$是$A^{-1}$也就是$A'$的特征值，因此是$A$的特征值。

4. $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$，$B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 5 \\ -2 & 9 & 10 \end{pmatrix}$，

   矩阵为$BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 11 & 8 & -11 \\ -10 & -8 & 11 \end{pmatrix}$，

5. $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&0\\2&0&1\end{pmatrix}$，可得$|\lambda I-A|=(\lambda-3)^2(\lambda+1)$，有$\lambda_0=3$，$\lambda_1=-1$。对$\lambda_0=3$，有$x_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$和$x_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，对$\lambda_1=-1$，有$x_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，所以有$P=\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}/2&-\sqrt{2}/2\\1&0&0\\0&\sqrt{2}/2&\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$

6. (1) 由$AP=PB$，即$A(x,Ax,A^2x)=(x,Ax,A^2x)B$，又

$$Ax=(x,Ax,A^2x)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ AAx=(x,Ax,A^2x)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ AA^2x=(x,Ax,A^2x)\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix},$$

所以$B=\begin{pmatrix}0&0&3\\1&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$

(2) $det(A+I)=det(P(A+I)P^{-1})=det(B+I)=det\begin{pmatrix}1&0&3\\1&1&-1\\0&1&3\end{pmatrix}$

7. $(\alpha_1,\beta_j)=0,j=1,\cdots,t$