答题时不要超过此线

中国科学技术大学

2006– 2007学年第 1 学期考试试卷

考试科目：数值计算方法　　　　得分：______

学生所在系：______　　姓名：______　　学号：______

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚。
2. 请考生在答卷纸左侧留出装订区域。
3. 本试卷为闭卷考试。共 10 道试题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。
4. 计算中保留4位小数。

得分	评卷人

一、填空题

1. (6分)设$f(x)=3x^3+6x^2+1$，则$f[-1,0,1,]=$____ ，$f[0,1,2,3]=$______。

2. (6分) 设$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$， 则$\rho(A)=$______，$Cond_1(A)=$______。

3. (3分) 设$l_0(x)$，$l_1(x)$，$l_2(x)$，$l_3(x)$是以x_0,x_1,x_2,x_3为互异节点的3次插值基函数，则$\sum_{i=0}^{3}l_j(x)(x_j-2)^3=$______。

4. (6分) 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & 0\\ a & 0 & 1\end{pmatrix}$，则$a$在______范围内时，对线性方程组$Ax=b$的Gauss消元法能够进行。

5. (6分) 设$X=(x_1,x_2,x_3)^T$，则如下的三种公式能否成为向量范数，

   $|x_1|+3|x_2|+4|x_3|$______，$|x_1|+3|x_2+x_1|+4|x_3|$______，$|x_1|+3|x_2|$______。

得分	评卷人

二、解答题

6. (10分) 取初值1.3，用Newton迭代法求$\sqrt[4]{3}$的近似值，结果精确到小数点后5位。

7. (10分) 给出数据:

x_i	19	25	31	33	34
y_i	19	32.3	49	73.3	97.8

，试对它作出$y(x) = a + bx^2$ 形式的拟合函数。

8. (10分) 考虑常微分方程初值问题$\begin{cases} y' = x\sin y\ ,\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 用4阶经典的Runge-Kutta公式求$y(0.1)$的近似，取步长$h = 0.1$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \dfrac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_1) \\ K_3 = f(x_n + \dfrac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_2) \\ K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3) \end{cases}$$

9. (13分) 用Gauss-Seidel方法求解下列方程组

$$
\begin{cases}
4x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\
x_1 + 5x_2 + x_3 = -4 \\
2x_1 + x_2 + 6x_3 = 2
\end{cases}
$$

1) 写出迭代格式，并用初值$(1, 1, 1)$迭代2步；2) 求迭代矩阵；3) 讨论迭代矩阵是否收敛？

10. (30分)

1) (8分) 求插值多项式$H(x)$满足条件

$$H(\alpha) = f(\alpha), H(0) = f(0), H(-\alpha) = f(-\alpha)$$
$$H'(\alpha) = f'(\alpha), H'(0) = f'(0), H'(-\alpha) = f'(-\alpha)$$

2) (7分) 若$f(x)$足够光滑，求插值多项式$H(x)$的误差；

3) (10分) 确定参数A，B，C和α，使得数值积分公式

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx Af(\alpha) + Bf(0) + Cf(-\alpha)$$

具有尽可能高的代数精度，并求这个代数精度。

4) (5分) 若$f(x)$足够光滑，求这个数值积分公式的误差

答案

1. 6(3分),3(3分)

2. $\sqrt{7}$(3分),25/7(3分)

3. $(x-2)^3$ (3分)

4. $a \neq \pm 1, a \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ (6分) $det\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = 1-a^2 \neq 0$ $det\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1-2a^2 \neq 0$

5. 是(2分)，是(2分)，否(2分)

6.

$$f(x) = x^4 - 3$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^4 - 3}{4x_k^3} = \frac{3}{4}(x_k + \frac{1}{x_k^3})(5分)$$

0	1	2	3
1.3	1.316375	1.316074	1.316074

(5分)

7.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4192 \\ 4192 & 3966724 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 271.4 \\ 267016 \end{pmatrix} (6分)$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18.915 \\ 0.0873032 \end{pmatrix} (4分)$$

8.

$$K_1 = 0(2分)$$
$$K_2 = 0.04207(2分)$$
$$K_3 = 0.04213(2分)$$
$$K_4 = 0.08437(2分)$$
$$y(0.1) = 1.00421(2分)$$

9. 1)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5/4 \\ -5/4 \\ 1/8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 51/32 \\ -183/160 \\ -7/960 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1.25\\-1.25\\0.125\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1.5938\\-1.1438\\-0.0073\end{pmatrix} \text{(5分)}$$

2)

$$\begin{pmatrix}0 & -1/4 & 1/4\\0 & 1/20 & -1/4\\0 & 3/40 & -1/24\end{pmatrix} \text{(5分)}$$

3) 收敛，对角占优(3分)

10. 1) $g_0(x)f(-\alpha)+g_1(x)f(0)+g_2(x)f(\alpha)+h_0(x)f'(-\alpha)+h_1(x)f'(0)+h_2(x)f'(\alpha)$其中

$$\begin{aligned}
g_0(x) &= [1-2(x+\alpha)(\frac{1}{-\alpha}+\frac{1}{-2\alpha})]x^2(x-\alpha)^2\\
g_1(x) &= [1-2(x)(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{-\alpha})](x+\alpha)^2(x-\alpha)^2\\
g_2(x) &= [1-2(x-\alpha)(\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{\alpha})](x+\alpha)^2x^2\\
h_0(x) &= (x+\alpha)x^2(x-\alpha)^2\\
h_1(x) &= x(x+\alpha)^2(x-\alpha)^2\\
h_2(x) &= (x-\alpha)(x+\alpha)^2x^2
\end{aligned}$$

2) $\dfrac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x+\alpha)^2x^2(x-\alpha)^2$

3)

$$\begin{cases}
A+B+C=\int_{-2}^{2}x^0dx=4\\
A(-\alpha)+C(\alpha)=\int_{-2}^{2}x^1dx=0\\
A(-\alpha)^2+C(\alpha)^2=\int_{-2}^{2}x^2dx=\dfrac{16}{3}\\
A(-\alpha)^3+C(\alpha)^3=\int_{-2}^{2}x^3dx=0\\
A(-\alpha)^4+C(\alpha)^4=\int_{-2}^{2}x^4dx=\dfrac{64}{5}
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
A=\dfrac{10}{9}\\
B=\dfrac{16}{9}\\
C=\dfrac{10}{9}\\
\alpha=\sqrt{\dfrac{12}{5}}
\end{cases}$$

4)

$$\int_{-2}^{2} \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x+\alpha)^2 x^2 (x-\alpha)^2$$

$$= \frac{1024}{175}\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} = \frac{64}{7875} f^{(6)}(\xi)$$