答 题 时 不 要 超 过 此 线

中国科学技术大学

2004– 2005学年第 1 学期考试试卷

考试科目：数 值 计 算 方 法　　　　得分：______________

学生所在系：______________　　姓名：______________　　学号：______________

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚。
2. 请考生在答卷纸左侧留出装订区域。
3. 本试卷为开卷考试，只可以参看教科书。共 9 道试题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。
4. 计算中保留4位小数。

得分	评卷人

一、填空题

1. （本大题共 6 分）已知$A = \begin{pmatrix} -1.1 & 2.2 & 3.3 \\ 3.1 & -2.6 & 4.9 \\ 1.2 & 2.3 & 5.6 \end{pmatrix}$，则$\|A\|_1 =$ ____________，$\|A\|_\infty =$ ____________。

2. (4分) 写出以$(a, f(a), f'(a)), (b, f(b), f'(b)), (c, f(c))$ 为插值点构造的插值多项式的截断误差：

____。

得分	评卷人

二、解答题

3. (12分)给出下列函数表

x_i	-1	1	2	4
$f(x_i)$	0	5	12	9

(1) 作出差商表；

(2) 构造牛顿插值多项式,并计算$f(0)$；

(3) 写出$f(0)$的插值误差表达式。

4. (12分)用Romberg算法计算积分：$\int_{2.0}^{2.8} x^2 dx$

$R(1,1) = 4.736$		
$R(2,1) = 4.672$	$R(2,2)$	
$R(3,1) = 4.656$	$R(3,2)$	$R(3,3)$

5. (15分) 给出下列数据:

x_i	0.01	0.04	0.09	0.16
y_i	2.0	4.0	3.0	5.0

试对数据作出$y(x) = a + b\sqrt{x}$ 形式的拟合函数。

6. (14分)用LDL^T分解求解下列方程组

$$\begin{cases} -6x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = -5 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 & = 20 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 & = 1 \end{cases}$$

7. (15分) 写出用Gauss-Seidel方法求解下列方程组

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

1) 迭代格式；2) 迭代矩阵；3) 讨论迭代矩阵是否收敛？

8. (10分)用幂法和反幂法分别计算下列矩阵按模最大的特征值和按模最小的特征值，只迭代两步。（单号同学用初值$(1.0, 1.0)$，双号同学用初值$(-1.0, 1.0)$）

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

9. (12分) 构造线性多步法$p = 3, q = 2$的隐式差分格式。

答案

1. 13.8 (3分), 10.6 (3分)

2. $\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-a)^2(x-b)^2(x-c), \xi \in [a,c]$ (4分)

3. (1)(4分)

(-1 0)			
(1 5)	5/2		
(2 12)	7	3/2	
(4 9)	-3/2	-17/6 (或2.8333)	-13/15(或-0.8667)

(2)(4分)$N(x) = 0 + 5/2(x+1) + 3/2(x+1)(x-1) - 13/15(x+1)(x-1)(x-2)$

$N(0) = -11/15 = -0.7333$

(3)(4分)$\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x+1)(x-1)(x-2)(x-4), \xi \in [-1,4]$

$f(0)$的误差为$\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(-8), \xi \in [-1,4]$

4.

$R(1,1) = 4.736$		
$R(2,1) = 4.672$	$R(2,2) = 4.6507$(4分)	
$R(3,1) = 4.656$	$R(3,2) = 4.6507$(4分)	$R(3,3) = 4.6507$ (4分)

5. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0.3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 3.9 \end{pmatrix}$ (12分) => $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 8 \end{pmatrix}$ (3分)

6. $L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -1/2 & 1 & \\ -1/3 & 4/13 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} -6 & & \\ & 13/2 & \\ & & 236/39 \end{pmatrix}$

或

$L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -0.5 & 1 & \\ -0.3333 & 0.3077 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} -6 & & \\ & 6.5 & \\ & & 6.0513 \end{pmatrix}$ (8分)

$\begin{cases} Ly = b \\ Dz = y \\ L^T x = z \end{cases} => y = \begin{pmatrix} -5 \\ 35/2 \\ -236/39 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 35/13 \\ -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

或

$y = \begin{pmatrix} -5 \\ 17.5 \\ -6.0513 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 0.8333 \\ 2.6923 \\ -1.0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 3.0 \\ -1.0 \end{pmatrix}$ (6分)

7. 1)(5分) $\begin{cases} x_1^{k+1} = (-x_2^k + x_3^k + 5)/10 \\ x_2^{k+1} = (-x_1^{k+1} - x_3^k - 4)/5 \\ x_3^{k+1} = (-x_1^{k+1} - x_2^{k+1} + 2)/2 \end{cases}$

2)(5分) $\begin{pmatrix} 0 & -1/10 & 1/10 \\ 0 & 1/50 & -11/50 \\ 0 & 1/25 & 3/50 \end{pmatrix}$

3) (5分)谱半径为$(2 \pm i\sqrt{21})/50, 0$或$\|S\|_1 = 19/50 < 1$ 或$\|S\|_\infty = 12/50 < 1$

8. (单号):

$x_1 = (0.7, 0.7), x_2 = (0.49, 0.49) => \lambda_1 = 0.7$ (4分)

$y_1 = (1.4286, 1.4286), y_2 = (2.0408, 2.0408) => \mu_1 = 1.4286 => \lambda_2 = 0.7$

$y_1 = (10/7, 10/7), y_2 = (100/49, 100/49) => \mu_1 = 10/7 => \lambda_2 = 0.7$ (6分)

(双号):

$x_1 = (-0.3, 0.3), x_2 = (-0.09, 0.09) => \lambda_1 = 0.3$ (4分)

$y_1 = (-3.3333, 3.3333), y_2 = (-11.1111, 11.1111) => \mu_1 = 3.3333 => \lambda_2 = 0.3$

$y_1 = (-10/3, 10/3), y_2 = (-100/9, 100/9) => \mu_1 = 10/3 => \lambda_2 = 0.3$ (6分)

9. $p = 3$ =>积分区间为$[x_{n-3}, x_{n+1}]$，$q = 2$隐格式=>积分点为$\{x_{n+1}, x_n, x_{-1}\}$

(3分)

$$\int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}} \frac{(x - x_n)(x - x_{n-1})}{(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n-1})} dx = \frac{8}{3} h$$

(3分)

$$\int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}} \frac{(x - x_{n+1})(x - x_{n-1})}{(x_n - x_{n+1})(x_n - x_{n-1})} dx = \frac{-16}{3} h$$

(3分)

$$\int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}} \frac{(x - x_{n+1})(x - x_n)}{(x_{n-1} - x_{n+1})(x_{n-1} - x_n)} dx = \frac{20}{3} h$$

格式为(3分)

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{8h}{3} f(x_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{16h}{3} f(x_n, y_n) + \frac{20h}{3} f(x_{n-1}, y_{n-1})$$