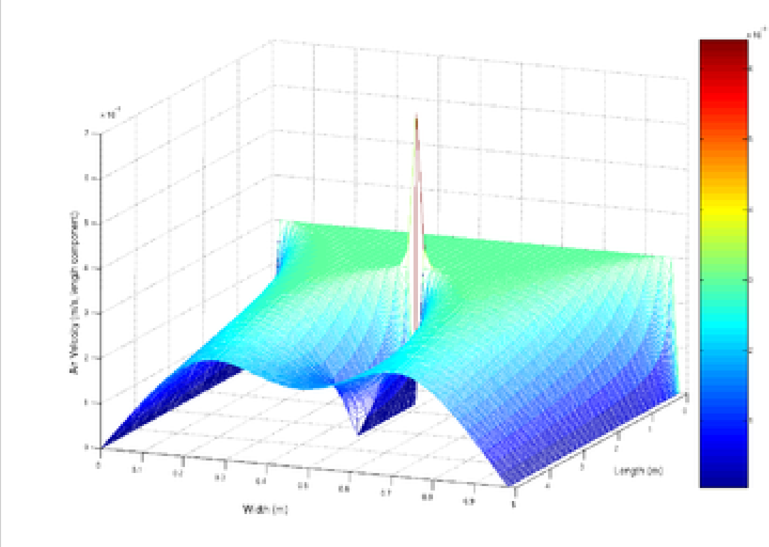
微分方程

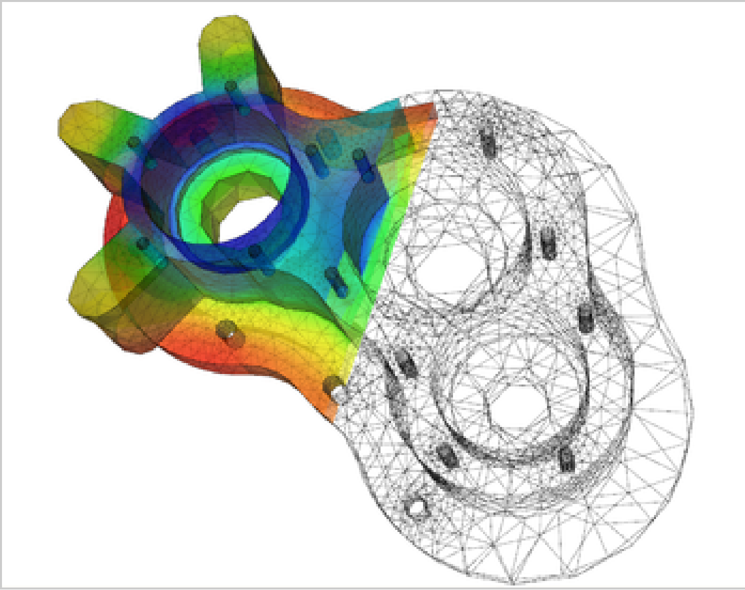
维基百科，自由的百科全书

微分方程指描述未知函数的导数与自变量之间的关系的方程。微分方程的解是一个符合方程的函数。而在初等数学的代数方程，其解是常数值。



一个导管中气流的模拟，使用纳维-斯托克斯方程式

微分方程的应用十分广泛，可以解决许多与导数有关的问题[1]:p.1。物理中许多涉及变力的运动学、动力学问题，如空气的阻力为速度函数的落体运动等问题，很多可以用微分方程求解。此外，微分方程在化学、工程学、经济学和人口统计等领域都有应用。



借由求解热方程式得到的泵浦外壳热分布图，假设外界是较低温度的温度分布，热由泵浦内部传出，由外界冷却。

数学领域对微分方程的研究着重在几个不同的面向，但大多数都是关心微分方程的解。只有少数简单的微分方程可以求得解析解。不过即使没有找到其解析解，仍然可以确认其解的部份性质。在无法求得解析解时，可以利用数值分析的方式，利用电脑来找到其数值解。 动力系统理论强调对于微分方程系统的量化分析，而许多数值方法可以计算微分方程的数值解，且有一定的准确度。

目录

分类

微分方程可分为以下几类，而随着微分方程种类的不同，其相关研究的方式也会随之不同。

常微分方程及偏微分方程

- 常微分方程（ODE）是指一微分方程的未知数是单一自变量的函数[2]。最简单的常微分方程，未知数是一个实数或是复数的函数，但未知数也可能是一个向量函数或是矩阵函数，后者可对应一个由常微分方程组成的系统。微分方程的表达通式是：

  $$f\left(x, \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{(n-1)} y}{dx^{(n-1)}}, \cdots, \frac{dy}{dx}, y\right) = 0$$

  常微分方程常依其阶数分类，阶数是指自变量导数的最高阶数[1]:p.3，最常见的二种为一阶微分方程及二阶微分方程。例如以下的贝塞尔方程：

  $$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

  （其中y为应变量）为二阶微分方程，其解为贝塞尔函数。

- 偏微分方程（PDE）是指一微分方程的未知数是多个自变量的函数[2]，且方程式中有未知数对自变量的偏微分。偏微分方程的阶数定义类似常微分方程，但更细分为椭圆型、双曲线型及抛物线型的偏微分方程，尤其在二阶偏微分方程中上述的分类更是重要。有些偏微分方程在整个自变量的值域中无法归类在上述任何一种型式中，这种偏微分方程则称为混合型。像以下的方程就是偏微分方程：

  $$\frac{\partial u}{\partial t} + t\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

线性及非线性

常微分方程及偏微分方程都可以分为线性及非线性二类。

若微分方程中没有出现未知数及微分项的平方或其他乘积项，也没有出现未知数及其微分项的乘积，此微分方程为线性微分方程，否则即为**非线性微分方程**。

齐次线性微分方程是线性微分方程中更细的分类，微分方程的解乘上一系数或是与另一个解相加后的结果仍为微分方程的解。

若线性微分方程的系数均为常数，则为**常系数线性微分方程**。常系数线性微分方程可以利用拉氏转换转换为代数方程[1]:p.315-316，因此简化求解的过程。

针对非线性的微分方程，只有相当少数的方法可以求得微分方程的解析解，而且这些方法需要微分方程有特别的对称性。长时间时非线性微分方程可能会出现非常复杂的特性，也可能会有混沌现象。有关非线性微分方程的一些基本问题，例如解的存在性、唯一性及初始值非线性微分方程的适定性问题，以及边界值非线性微分方程都是相当难的问题，甚至针对特定非线性微分方程的上述基本问题都被视为是数学理论的一大突破。例如2000年提出的7个千禧年大奖难题中，其中一个是纳维-斯托克斯存在性与光滑性，都是探讨纳维－斯托克斯方程式其解的数学性质[3]，至2012年8月为止此问题尚未被证明。

线性微分方程常常用来近似非线性微分方程，不过只在特定的条件下才能近似。例如单摆的运动方程为非线性的微分方程，但在小角度时可以近似为线性的微分方程。

举例

以下是常微分方程的一些例子，其中*u*为未知的函数，自变量为*x*，*c*及*ω*均为常数。

- 非齐次一阶常系数线性微分方程：

$$\frac{du}{dx} = cu + x^2.$$

- 齐次二阶线性微分方程：

$$\frac{d^2u}{dx^2} - x\frac{du}{dx} + u = 0.$$

- 描述谐振子的齐次二阶常系数线性微分方程：

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \omega^2 u = 0.$$

- 非齐次一阶非线性微分方程：

$$\frac{du}{dx} = u^2 + 1.$$

- 描述长度为*L*的单摆的二阶非线性微分方程：

$$L\frac{d^2u}{dx^2} + g\sin u = 0.$$

以下是偏微分方程的一些例子，其中*u*为未知的函数，自变量为*x*及 *t*或者是*x*及*y*。

- 齐次一阶线性偏微分方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + t\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

- 拉普拉斯方程，是椭圆型的齐次二阶常系数线性偏微分方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

- KdV方程，是三阶的非线性偏微分方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 6u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

性质

普遍性的数学描述

许多物理或是化学的基本定律都可以写成微分方程的形式。在生物学及经济学中，微分方程用来作为复杂系统的数学模型。微分方程的数学理论最早是和方程对应的科学领域一起出现，而微分方程的解就可以用在该领域中。不过有时二个截然不同的科学领域会形成相同的微分方程，此时微分方程对应的数学理论可以看到不同现象后面一致的原则。

例如考虑光和声音在空气中的传播，以及池塘水面上的波动，这些都可以用同一个二阶的偏微分方程来描述，此方程即为波动方程，因此可以将光和声音视为一种波，和水面上的水波有些类似之处。约瑟夫·傅立叶所发展的热传导理论，其统御方程是另一个二阶偏微分方程－热传导方程式，扩散作用看似和热传导不同，但也适用同一个统御方程，而经济学中的布莱克-休斯方程也和热传导方程有关。

微分方程的解

微分方程的解通常是一个函数表达式$y = f(x)$（含一个或多个待定常数，由初始条件确定）。例如：

$$\frac{dy}{dx} = \sin x,$$

的解是

$$y = -\cos x + C,$$

其中C是待定常数；

例如，如果知道

$$y = f(\pi) = 2,$$

则可推出

$$C = 1,$$

而可知 $y = -\cos x + 1,$

简易微分方程的求解方法

一阶线性常微分方程

对于一阶线性常微分方程，常用的方法是常数变易法：

对于方程：$y' + p(x)y + q(x) = 0$

可知其通解：$y = C(x)e^{-\int p(x)\,dx}$

然后将这个通解代回到原式中，即可求出$C(x)$的值

二阶常系数齐次常微分方程

对于二阶常系数齐次常微分方程，常用方法是求出其特征方程的解

对于方程：$y'' + py' + qy = 0$

可知其通解：$y = c_1y_1 + c_2y_2$

其特征方程：$r^2 + pr + q = 0$

根据其特征方程，判断根的分布情况，然后得到方程的通解

一般的通解形式为 （在$r1=r2$的情况下）:$y = (C_1 + C_2x)e^{rx}$

（在$r1\neq r2$的情况下）:$y = C_1e^{r1x} + C_2e^{r2x}$

（在共轭复数根的情况下）：$y = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))$

约束条件

微分方程的约束条件是指其解需符合的条件，依常微分方程及偏微分方程的不同，有不同的约束条件。

常微分方程常见的约束条件是函数在特定点的值，若是高阶的微分方程，会加上其各阶导数的值，有这类约束条件的常微分方程称为初值问题。

若是二阶的常微分方程，也可能会指定函数在二个特定点的值，此时的问题即为边界值问题。若边界条件指定二点数值，称为狄利克雷边界条件（第一类边值条件），此外也有指定二个特定点上导数的边界条件，称为诺伊曼边界条件（第二类边值条件）等。

偏微分方程常见的问题以边界值问题为主，不过边界条件则是指定一特定超曲面的值或导数需符定特定条件。

解的存在性及唯一性

存在性是指给定一微分方程及约束条件，判断其解是否存在。唯一性是指在上述条件下，是否只存在一个解。

针对常微分方程的初值问题，皮亚诺存在性定理可判别解的存在性，柯西-利普希茨定理则可以判别解的存在性及唯一性。

针对偏微分方程，柯西-克瓦列夫斯基定理可以判别解的存在性及唯一性。 皮亚诺存在性定理可以判断常微分方程初值问题的解是否存在。

历史

微分方程的起源约在十七世纪末，为了解决物理及天文学问题而产生，大约和微积分的发展同时。惠更斯在1693年的《教师学报》中提到常微分方程，雅各布·白努利在1691年建立悬链线的微分方程，并求得其函数。微分方程在十八世纪中期成为一个独立的学科[4]，而微分方程也带动许多当时的科学发展，例如海王星的发现就和微分方程的分析有关[5]。

偏微分方程是由傅立叶开始的，他在1822年发表《热的解析理论》，提出热传导方程的偏微分方程，并且利用分离变量法求得级数解，并且开始有关傅立叶级数的研究。另外在十九世纪有关拉普拉斯方程的研究也是偏微分方程的重要发展。拉普拉斯和泊松都有许多的贡献，后来乔治·格林提出了相关格林函数及格林公式等概念，并带动斯托克斯、麦克斯韦及后来电磁学相关的研究。而流体力学的纳维-斯托克斯方程及弹性介质的柯西方程也是在十九世纪提出的偏微分方程。[5]。后来许多的理论都是以偏微分方程的形式出现，量子力学的基础方程式薛定谔方程也是偏微分方程，广义相对论中的爱因斯坦重力场方程式也有类似偏微分的协变导数。

相关概念

- 时滞微分方程（DDE）是一个单一自变量的方程，此变量一般称为时间，未知数在某一时间的导数和特定函数在之前时间的值有关。
- 随机微分方程（SDE）是一个未知数为随机过程，且方程中有包括已知随机过程（例如维纳过程)的方程，不过虽名为微分方程，其中没有微分项。
- 微分代数方程（DAE）是包括自变量微分项的方程，但是为自变量微分项的隐函数。

和差分方程的关系

微分方程的理论和差分方程的理论有密切的关系，后者的座标只允许离散值，许多计算微分方程数值解的方法或是对于微分方程性质的研究都需要将微分方程的解近似为对应差分方程的解。

著名的微分方程

物理及工程

- 动力学中的牛顿第二运动定律
- 经典力学中的欧拉－拉格朗日方程
- 经典力学中的哈密顿力学
- 热力学中的牛顿冷却定律

- 波动方程
- 电磁学中的麦克斯韦方程组
- 热力学中的热传导方程式
- 定义调和函数的拉普拉斯方程
- 泊松方程
- 广义相对论中的爱因斯坦场方程
- 量子力学中的薛定谔方程式
- 测地线
- 流体力学中的纳维－斯托克斯方程式
- 随机过程中的扩散方程
- 流体力学中的对流－扩散方程
- 复变分析中的柯西－黎曼方程
- 分子动力学中的泊松－玻尔兹曼方程
- 浅水方程
- 通用微分方程
- 劳仑次吸子，其解包括了浑沌现象

生物学

- 威尔霍斯特方程-生物族群增长模型
- 个体成长模型-生物个体增长模型
- 洛特卡－沃尔泰拉方程-掠食者和猎物的动态模型
- 复制方程-应用在生物数学中
- Hodgkin-Huxley模型-神经的动作电位

经济学

- 布莱克-休斯方程
- 索洛模型
- 马尔萨斯模型
- 塞西广告模型

参见

- 线性微分方程
- 拉普拉斯变换
- 常微分方程
- 偏微分方程
- 初值问题
- 边值问题

参考资料

1. ^ **1.0 1.1 1.2** 刘睦雄；张任业．微分方程．华泰书局．1988．
2. ^ **2.0 2.1** 翁秉仁．微分方程（http://episte.math.ntu.edu.tw/entries/en_dif_equation/）.

EpisteMath. 中央研究院数学所、台大数学系. [2014-01-15] （中文）.
3. ^ Official statement of the problem (http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/navierstokes.pdf), Clay Mathematics Institute.
4. ^ 常微分方程的发展史况 (http://219.239.227.53/pages/courses/gdsx/station/pages/KCZY/GSGG_11.html). 高等数学. 北京航空航天大学现代远程教育学院. [2014-01-18] （中文）.
5. ^ 5.0 5.1 偏微分方程理论学习 (http://staff.ustc.edu.cn/~bjxuan/IntrodPDE.doc). 中国科学技术大学. [2014-01-18] （中文）.

参考文献

- D. Zwillinger, *Handbook of Differential Equations (3rd edition)*, Academic Press, Boston, 1997.
- A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations (2nd edition)*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2003. ISBN 1-58488-297-2.
- W. Johnson, *A Treatise on Ordinary and Partial Differential Equations* (http://www.hti.umich.edu/cgi/b/bib/bibperm?q1=abv5010.0001.001), John Wiley and Sons, 1913, in University of Michigan Historical Math Collection (http://hti.umich.edu/u/umhistmath/)
- E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, 1956
- E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, 1955
- P. Blanchard, R. L. Devaney, G. R. Hall, *Differential Equations*, Thompson, 2006
- P. Abbott and H. Neill, *Teach Yourself Calculus*, 2003 pages 266-277
- R. I. Porter, *Further Elementary Analysis*, 1978, chapter XIX Differential Equations