现代控制理论

船海 闫鹏 201430110059

第一题

已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

$G(s)=C(sI-A)^{-1}B$，且 $(sI-A)=\begin{pmatrix}s-1 & 0 & 1\\ 0 & s+2 & 0\\ 1 & 0 & s-2\end{pmatrix}$

通过初等函数法求逆矩阵

$$\begin{pmatrix}s-1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & s+2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & s-2 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{s-2}{s^2-3\,s+1} & 0 & -\frac{1}{s^2-3\,s+1}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{s+2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{s^2-3\,s+1} & 0 & \frac{s-1}{s^2-3\,s+1}\end{pmatrix}$$

故逆矩阵 $(sI-A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{s-2}{s^2-3\,s+1} & 0 & -\frac{1}{s^2-3\,s+1}\\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0\\ -\frac{1}{s^2-3\,s+1} & 0 & \frac{s-1}{s^2-3\,s+1}\end{pmatrix}$

$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{s-2}{s^2-3\,s+1} & 0 & -\frac{1}{s^2-3\,s+1}\\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0\\ -\frac{1}{s^2-3\,s+1} & 0 & \frac{s-1}{s^2-3\,s+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\dfrac{s+2}{-s^3+s^2+5\,s-2}$

上下通分可得

$$G(s)=\frac{-1}{s^2-3s+1}$$

```
[matlab]
[num ,den]=ss2tf(A,B,C,D)
num =
      0       0      -1      -2
den =
      1      -1      -5       2
```

第二题

先求状态转移矩阵

系统特征方程式为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} t-1 & 0 & 1 \\ 0 & t+2 & 0 \\ 1 & 0 & t-2 \end{vmatrix}=t^3-t^2-5t+2=0$

可解系统特征值为 $\lambda=-2,0.3820,2.6180$，为互异特征值。因此可以代入$(\lambda I-A)\zeta=0$，求出特征向量，将矩阵A化为对角阵。令 $\zeta=\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix}$

当 $\zeta=-2$时，$\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$得

$$-3x_1+x_3=0$$
$$x_1-4x_3=0$$

得$x_1=x_3=0,x_2=1$

当$\lambda=0.382$时，$\left(\begin{bmatrix} 0.382 & 0 & 0 \\ 0 & 0.382 & 0 \\ 0 & 0 & 0.382 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$得

$$0.618x_1+x_3=0$$
$$x_2=0$$
$$x_1-1.618x_3=0$$

令 $x_1=1$，得 $x_3=-0.618$

当 $\lambda=2.618$时，$\left(\begin{bmatrix} 2.618 & 0 & 0 \\ 0 & 2.618 & 0 \\ 0 & 0 & 2.618 \end{bmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$得

$$1.618x_1+x_3=0$$
$$x_2=0$$
$$x_1+0.618x_3=0$$

令 $x_1=1$，得$x_3=-1.618$

得到矩阵$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.618 & -1.618 \end{bmatrix}$, 经过施密特正交化可得最后特征矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 0 & -0.85065 & -0.52573 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.52573 & 0.85065 \end{pmatrix},P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1.0 & 0 \\ -0.85065 & 0 & -0.52573 \\ -0.52573 & 0 & 0.85065 \end{pmatrix}$$

对角阵 $\Lambda=PAP^{-1}=\begin{pmatrix} -2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.38197 & 0 \\ 0 & 0 & 2.618 \end{pmatrix}$

通过线性变换法可求

$$\Phi(t)=e^{At}=P^{-1}e^{\Lambda t}P=\begin{pmatrix} 0.27639\,\mathrm{e}^{2.618\,t}+0.72361\,\mathrm{e}^{0.38197\,t} & 0 & 0.44721\,\mathrm{e}^{0.38197\,t}-0.44721\,\mathrm{e}^{2.618\,t} \\ 0 & \mathrm{e}^{-2.0\,t} & 0 \\ 0.44721\,\mathrm{e}^{0.38197\,t}-0.44721\,\mathrm{e}^{2.618\,t} & 0 & 0.72361\,\mathrm{e}^{2.618\,t}+0.27639\,\mathrm{e}^{0.38197\,t} \end{pmatrix}$$

故

$$\Phi(t)x(0)=\begin{pmatrix} 1.1708\,\mathrm{e}^{0.38197\,t}-0.17082\,\mathrm{e}^{2.618\,t} \\ 2\,\mathrm{e}^{-2.0\,t} \\ 0.27639\,\mathrm{e}^{2.618\,t}+0.72361\,\mathrm{e}^{0.38197\,t} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t-\tau)Bu(\tau)=\begin{pmatrix} 0.44721\,\mathrm{e}^{0.38197\,t-0.38197\,\tau}-0.44721\,\mathrm{e}^{2.618\,t-2.618\,\tau} \\ 0 \\ 0.27639\,\mathrm{e}^{0.38197\,t-0.38197\,\tau}+0.72361\,\mathrm{e}^{2.618\,t-2.618\,\tau} \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau=\begin{pmatrix} 1.1708\,\mathrm{e}^{0.38197\,t}-0.17082\,\mathrm{e}^{2.618\,t}-1.0 \\ 0 \\ 0.27639\,\mathrm{e}^{2.618\,t}+0.72361\,\mathrm{e}^{0.38197\,t}-1.0 \end{pmatrix}$$

则 $x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau=\begin{pmatrix} 2.3416\,\mathrm{e}^{0.38197\,t}-0.34164\,\mathrm{e}^{2.618\,t}-1.0 \\ 2.0\,\mathrm{e}^{-2.0\,t} \\ 0.55279\,\mathrm{e}^{2.618\,t}+1.4472\,\mathrm{e}^{0.38197\,t}-1.0 \end{pmatrix}$

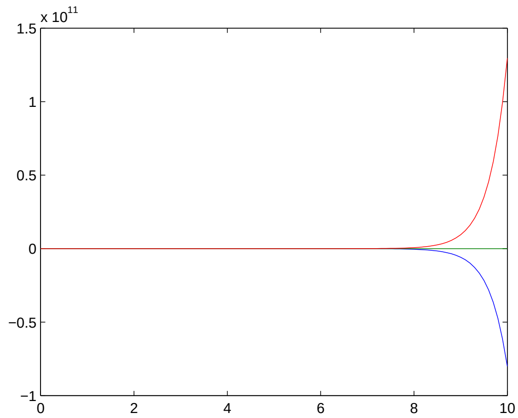
[matlab验证]

```
syms t,tao %定义时间变量t, tao为符号
A=[1 0 -1; 0 -2 0; -1 0 2]; B=[0; 0; 1];
x0=[1; 2; 1] %输入系统状态方程和初始值
xt=expm(A*t)*x0+int(expm(A*(t-tao))*B*1,tao,0,t) %求非齐次解
```

绘出单位阶跃响应的系统状态轨迹图

```
t=0:0.1:10
plot(t,xt(1),t,xt(2),t,xt(3))
```

Figure 1: 单位阶跃响应的系统状态轨迹图



第三题

状态方程的能空检验矩阵$Qc=\begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A^2B=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

所以 $Qc=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

可知该矩阵的佚为2，小于3，所以状态不完全能控

状态方程的能观矩阵$Qo = \begin{pmatrix} C & CA & CA^2 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$CA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$CA^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

所以 $Qo = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

可知该矩阵的佚为2，小于3，所以状态不完全能观

```
[matlab]
A=[1 0 -1; 0 -2 0; -1 0 2]; B=[0; 0; 1]; %输入系统状态方程
Qc=ctrb(A,B) %求系统能控性矩阵
rank(Qc) %求系统能控性矩阵的佚
ans = 2 %能控性矩阵的佚为2，所以系统不能控

A=[1 0 -1; 0 -2 0; -1 0 2]; C=[1 0 0] %输入系统状态方程;
Qo=obsv(A,C)  %求系统能观性矩阵
rank(Qo) %求系统能控性矩阵的佚
ans = 2 %能观性矩阵的佚为2，所以系统不能观
```

第四题

欲使连续系统稳定，必须使特征方程 $|sI - A| = 0$ 的根，亦即矩阵A的特征值，全部位于s平面的左半开平面上。

系统矩阵A为非奇异线性定常系统，$x_e = 0$即原点，是系统的唯一平衡状态，其稳定性可由劳斯判据得到。

已知$|sI - A| = s^3 - s^2 - 5\,s + 2 = 0$

列出如下劳斯表，由劳斯稳定判据可知,系统有两个正实根，即在该平衡点不稳定。

s^3	1	-5
s^2	-1	2
s^1	-3	
s^0	2	

```
[matlab]
det(s*eye(3)-A) = s^3 - s^2 - 5*s + 2 %求特征方程
solve(s^3 - s^2 - 5*s + 2) %求特征方程解
ans =
              -2
 5^(1/2)/2 + 3/2=2.618
 3/2 - 5^(1/2)/2=0.382
```

可知系统有两个解在s平面的右半开平面上，该平衡点不稳定

第五题

能控性分解

如上已知系统能控矩阵秩为2，小于3，故系统不完全能控。

$$Qc = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

取Qc中线性独立的两列向量，这里取第一、二列，再补充一个与其他列向量无关的列向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

可得到 $Pc^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，$Pc = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

则 $\bar{A} = P_c A P_c^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，$\bar{B} = P_c B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\bar{C} = C P_c^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

能控子系统方程为

$$\dot{\bar{x}}_c = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x_c + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$
$$y_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}_c$$

不能控子系统动态方程为

$$\dot{\bar{x}}_{\bar{c}} = -2\bar{x}_{\bar{c}}$$
$$y_2 = 0$$

能观性分解

如上已知系统能观矩阵秩为2，小于3，故系统不完全能观。

$$Q_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

取Q_o中线性独立的两行向量，这里取第一、二行，再补充一个与其他行向量无关的行向量 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

可得到$P_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $, P_o^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

则$\bar{A} = P_o A P_o^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $, \bar{B} = P_o B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $, \bar{C} = C P_o^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

能观子系统方程为

$$\dot{\bar{x}}_o = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \bar{x}_o + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u$$
$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}_o$$

不能观子系统方程为

$$\dot{\bar{x}}_{\bar{o}} = -2\bar{x}_o$$
$$y_2 = 0$$

[matlab验证]

能控性分解

```
A=[1 0 -1; 0 -2 0; -1 0 2]; B=[0; 0; 1]; C=[1 0 0];  %输入系统状态方程
Qc=ctrb(A,B) %求系统能控性矩阵
rank(Qc) = 2 %求系统能控性矩阵的佚
```

能控性矩阵的佚为2，所以系统不完全能控，可以按能控性分解

```
[Ac, Bc, Cc, T, K]=ctrbf(A, B,C)
Ac =
    -2     0     0
     0     1     1
     0     1     2
Bc =
     0
     0
     1
Cc =
     0    -1     0
T =
     0     1     0
    -1     0     0
     0     0     1
K =
     1     1     0
```

能观性分解

```
Qo=obsv(A,C)  %求系统能观性矩阵
rank(Qo) = 2 %求系统能控性矩阵的佚
```

能观性矩阵的佚为2，所以系统不完全能观，可以按能观性分解

```
[Ao, Bo, Co, T, K]=obsvf(A, B,C)
Ao =
    -2     0     0
     0     2     1
     0     1     1
Bo =
     0
```

```
    -1
     0
Co =
     0     0     1
T =
     0     1     0
     0     0    -1
     1     0     0
K =
     1     1     0
```

第六题

已知$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$，第二题已经求出矩阵A的特征值为$-2$，0.382，2.618

系统有两个特征值为正，故系统不稳定，由第五题可知，系统不能控。不能控子系统特征值为-2，符合可镇定条件。故原系统可用状态反馈实现镇定，镇定后的极点设为 $-1,-2,-3$。

设状态反馈矩阵为$K=\begin{pmatrix}k_0&k_1&k_2\end{pmatrix}$

$$A-BK=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1.0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_0&k_1&k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-2&0\\-k_0-1&-k_1&2-k_2\end{pmatrix}$$

则状态反馈系统特征方程为

$$|sI-(A-BK)|=s^3+(k_2-1)s^2+(k_2-k_0-5)s+2-2k_2-2k_0$$

期望闭环极点为-1，-2，-3, 则对应的系统特征方程为

$$(s+2)(s+1)(s+3)=s^3+6\,s^2+11\,s+6$$

比较对应项系数，可得

$$\begin{aligned}k_2-1&=6\\k_2-5-k_0&=11\\2-2k_2-2k_0&=6\end{aligned}$$

结果为$k_0=-9,k_1=0,k_2=7$，则$k=\begin{pmatrix}-9&0&7\end{pmatrix}$

所以 $\dot{x}=(A-BK)x+BV=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-2&0\\8&0&-5\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}V$

计算转移矩阵的方法同第二题，同理可得

状态转移矩阵 $\Phi(t)=e^{(A-BK)t}=\begin{pmatrix}2\,\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3\,t}&0&\frac{\mathrm{e}^{-3\,t}}{2}-\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2}\\0&\mathrm{e}^{-2\,t}&0\\4\,\mathrm{e}^{-t}-4\,\mathrm{e}^{-3\,t}&0&2\,\mathrm{e}^{-3\,t}-\mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}$

已知 $x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$

其中 $\Phi(t)x(0)=\begin{pmatrix}\frac{3\,e^{-t}}{2}-\frac{e^{-3\,t}}{2}\\ 2\,e^{-2\,t}\\ 3\,e^{-t}-2\,e^{-3\,t}\end{pmatrix}$, $\int_0^t\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau=\begin{pmatrix}\frac{e^{-t}}{2}-\frac{e^{-3\,t}}{6}-\frac{1}{3}\\ 0\\ e^{-t}-\frac{2\,e^{-3\,t}}{3}-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

所以 $x(t)=\begin{pmatrix}2\,e^{-t}-\frac{2\,e^{-3\,t}}{3}-\frac{1}{3}\\ 2\,e^{-2\,t}\\ 4\,e^{-t}-\frac{8\,e^{-3\,t}}{3}-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

[matlab验证]

syms t,tao %定义时间变量t， tao为符号

A=[1 0 -1; 0 -2 0; -1 0 2]; k=[-9 0 7];

B=[0; 0; 1]; x0=[1; 2; 1] %输入系统状态方程和初始值

xt=expm((A- B*K)*t)*x0+int(expm(A-B*K)*(t-tao)*B,tao,0,t) %求非齐次解

绘出单位阶跃响应的系统状态轨迹图

t=0:0.1:10

plot(t,xt(1), t,xt(2), t,xt(3))

Figure 2: 单位阶跃响应的系统状态轨迹图