代数

维基百科，自由的百科全书

代数是一个较为基础的数学分支。它的研究对象有许多。诸如数、数量、代数式、关系、方程理论、代数结构等等都是代数学的研究对象。

初等代数一般在中学时讲授，介绍代数的基本思想：研究当我们对数字作加法或乘法时会发生什么，以及了解变量的概念和如何建立多项式并找出它们的根。

代数的研究对象不仅是数字，还有各种抽象化的结构。例如整数集作为一个带有加法、乘法和序关系的集合就是一个代数结构。在其中我们只关心各种关系及其性质，而对于“数本身是什么”这样的问题并不关心。常见的代数结构类型有群、环、域、模、线性空间等。

目录

历史

代数的起源可以追溯到古巴比伦的时代[1]，当时的人们发展出了较之前更进步的算术系统，使其能以代数的方法来做计算。经由此系统的被使用，他们能够列出含有未知数的方程并求解，这些问题在今日一般是使用线性方程、二次方程和不定线性方程等方法来解答的。相对地，这一时期大多数的埃及人及西元前1世纪大多数的印度、希腊和中国等数学家则一般是以几何方法来解答此类问题的，如在*莱因德数学纸草书*、*绳法经*、*几何原本*及*九章算术*等书中所描述的一般。希腊在几何上的工作，以*几何原本*为其经典，提供了一个将解特定问题解答的公式广义化成描述及解答方程之更一般的系统之架构。

代数（algebra）导源于阿拉伯语单字“*al-jabr*”，其出自 *al-Kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala*这本书的书名上，意指*移项和合并同类项之计算的摘要*，其为波斯回教数学家花拉子米于820年所著。*Al-Jabr*此词的意思为“*重聚*”。传统上，希腊数学家丢番图被认为是“代数之父”，但现在则有着花拉子米是否应该从丢番图中取得此称号的争议。[2]支持花拉子米的人指出其对于约化的成果到今日都还有用途，且他更给出了一个解答二次方程的一详尽说明。而支持丢番图的人则主张在*Al-Jabr*里出现的代数比在*Arithmetica*里出现的更为基本，

且*Arithmetica*是简字的而*Al-Jabr*却完全是文辞的。[3]另一位波斯数学家欧玛尔·海亚姆发展出代数几何出，且找出了三次方程的一般几何解法。印度数学家摩诃吠罗和婆什迦罗与中国数学家朱世杰解出了许多三次、四次、五次及更高次多项式方程的解了。

代数更进一步发展的另一个关键事件在于三次及四次方程的一般代数解，其发展于16世纪中叶。行列式的概念发展于17世纪的日本数学家关孝和手中，并于十年后由莱布尼茨继续发展着，其目的是为了以矩阵来解出线性方程组的答案来。加布里尔·克拉默也在18世纪时在矩阵和行列式上做了一样的工作。抽象代数的发展始于19世纪，一开始专注在今日称为伽罗瓦理论及规矩数的问题上。

发展历程

符号代数发展的阶段可大致区分如下：

- 文辞代数，其发展于巴比伦时期，且直至16世纪都还维持着其主流的地位；
- 几何建构代数，被吠陀时期和古典希腊数学家们所强调著；
- 简字代数，由丢番图所发展并写于巴赫沙里手稿中；及
- 符号代数，于莱布尼茨的工作中达到其尖峰。

希腊数学家欧几里得在其著作*几何原本*中详述几何性的代数。

代数数个关键的发展的时间轴，表述如下：

- 西元前1800年左右，旧巴比伦斯特拉斯堡泥板书中记述其寻找著二次椭圆方程的解法。
- 西元前1600年左右，*普林顿322号泥板书*中记述了以巴比伦楔形文字写成的勾股数列表。
- 西元前800年左右，印度数学家包德哈亚那在其著作*包德哈尔那绳法经*中以代数方法找到了勾股数，给出了线性方程和如 $ax^2 = c$与$ax^2 + bx = c$等形式之二次方程的几何解法，且找出了两组丢番图方程组的正整数解。
- 西元前600年左右，印度数学家阿帕斯檀跋在其著作'阿帕斯檀跋绳法经*中给出了一次方程的一般解法和使用多达五个未知数的丢番图方程组。*
- 西元前300年左右，在几何原本的第二卷里，欧几里德给出了有正实数根之二次方程的解法，使用尺规作图的几何方法。此一方法是基于几何学中的毕达哥拉斯学派。
- 西元前300年左右，加倍立方体问题的几何解法被提了出来。现已知道此问题无法使用尺规作图求解。
- 西元前100年左右，中国数学书《九章算术》中处理了代数方程的问题，其包括用试位法解线性方程、二次方程的几何解法及用相当于现今所用之消元法来解线性方程组。还应用一次内插法。
- 西元前100年左右，写于古印度的巴赫沙里手稿中使用了以字母和其他符号写成的代数标记法，且包含有三次与四次方程，多达五个未知道的线性方程之代数解，二次方程的一般代数公式，以及不定二次方程与方程组的解法。
- 西元150年左右，希腊化埃及数学家希罗在其三卷数学著作中论述了代数方程。
- 200年左右，希腊化巴比伦数学人丢番图，他居住于埃及且常被认为是“代数之父”，写有一本著名的*算术*，此书为论述代数方程的解法及数论之作。
- 不晚于473年，《孙子算经》提出中国余数定理。

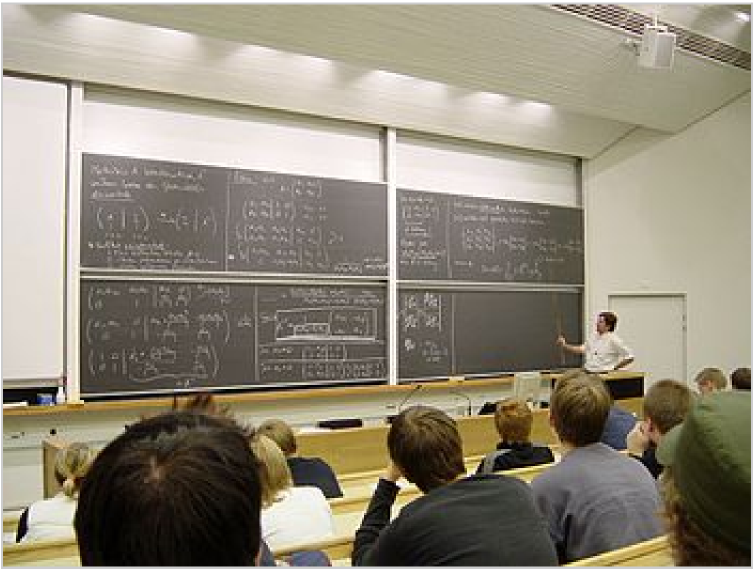
- 499年，印度数学家阿耶波多在其所著之*阿耶波多书*里以和现代相同的方法求得了线性方程的自然数解，描述不定线性方程的一般整数解，给出不定线性方程组的整数解，而描述了微分方程。
- 600年刘焯编制《皇极历》曾用等间距内插法。[4]
- 625年左右，中国数学家王孝通在《缉古算经》找出了三次方程的数值解。
- 628年，印度数学家婆罗摩笈多在其所著之*梵天斯普塔释哈塔*中，介绍了用来解不定二次方程的宇宙方法，且给出了解线性方程和二次方程的规则。他发现二次方程有两个根，包括负数和无理数根。
- 724年，僧一行用不等间距内插法计算《大衍历》[5]
- 820年，*代数（algebra）*导源于一个运算，其描述于波斯数学家花拉子米所著之*Al-Kitab al-Jabr wa-l-Muqabala*（意指移项和合并同类项之计算的摘要）中对于线性方程与二次方程系统性的求解方法。花拉子米常被认为是“代数之父”，其大多数的成果简化后会被收录在书籍之中，且成为现在代数所用的许多方法之一。
- 850年左右，波斯数学家al-Mahani相信可以将如加倍立方体问题等几何问题变成代数上的问题。
- 850年左右，印度数学家摩诃吠罗解出了许多二次、三次、四次、五次及更高次方程，以及不定二次、三次和更高次方程的解。
- 990年左右，波斯阿尔卡拉吉在其所著之*al-Fakhri*中更进一步地以扩展花拉子米的方法论来发展代数，加入了未知数的整数次方及整数开方。他将代数的几何运算以现代的算术运算代替，且定义了单项式x、x^2、x^3、…和$1/x$、$1/x^2$、$1/x^3$、…等并给出上述任两个相乘的规则。
- 1050年左右，中国数学家贾宪用贾宪三角形找到了多项式方程的数值解。
- 1072年，波斯数学家欧玛尔·海亚姆发展出来代数几何，且在*Treatise on Demonstration of Problems of Algebra*中给出了可以以圆锥曲线相交来得到一般几何解之三次方程的完整分类。
- 1090年左右，北宋科学家沈括在《梦溪笔谈》中给出高阶等差级数的和。|
- 1114年，印度数学家婆什迦罗在其所著之*代数学*'中，认知到一正数会有正负两个平方根，且解出一个以上未知数的二次方程、许多三次、四次及更高次多项式方程、佩尔方程、一般的不定二次方程，以及不定三次、四次及更高次方程。
- 1150年，婆什迦拉在其所著之*Siddhanta Shiromani*中解出了微分方程。
- 1202年，代数传到了欧洲，斐波那契所著的计算之书对此有很大的贡献。
- 1247年南宋数学家秦九韶在《数书九章》中用秦九韶算法（即“霍纳法算法”）解一元高次方程。
- 1248年，金朝数学家李治的《测圆海镜》利用天元术将大量几何问题化为一元多项式方程，是一部几何代数化的代表作。
- 1300年左右，中国数学家朱世杰处理了多项式代数，发明四元术解答了多达四个未知数的多项式方程组，发明非线性多元方程的消元法，将相关多项式进行乘法、加法和减法运算，逐步消元，将多元非线性方程组化为单个未知数的高次多项式方程；并以数值解出了288个四次、五次、六次、七次、八次、九次、十次、十一次、十二次、和十四次次多项式

丢番图著的*Arithmetica*1621年版的封面，由梅齐里亚克翻成拉丁文。

方程[6]。朱世杰发展了垛积术，给出多种高阶等差级数求和公式。
- 1400年左右，印度数学家玛达瓦找到了以重复来求超越方程的解法，求非线性方程解的叠代法及微分方程的解法。
- 1515年，费罗求得了没有两次项之三次方程的解。
- 1535年，塔尔塔利亚求得了没有一次项之三次方程的解。
- 1545年，卡尔达诺出版了*大术*一书，书中给出了各种三次方程的解法和其学生费拉里对一特定四次方程的解法。
- 1572年，拉斐尔·邦贝利认知到三次方程中的复根并改进了当时流行的符号。
- 1591年，弗朗索瓦·韦达出版了*分析方法入门*一书，书中发展出了更为良好的符号标记，在未知数不同的次方上。并且使用元音来表示未知数而子音则用来表示常数。
- 1631年，托马斯·哈里奥特在其死后的出版品中使用了指数符号且首先以符号来表示“大于”和“小于”。
- 1682年，莱布尼茨发展出他称做*一般性特征*（*characteristica generalis*）之形式规则的符号操作概念。
- 1683年，日本数学家关孝和在其所著之*Method of solving the dissimulated problems*中发明了行列式、判别式及伯努利数。
- 1685年，关孝和解出了三次方程的通解，及一些四次与五次方程的解。
- 1693年，莱布尼茨使用矩阵和行列式解出了线性方程组的解。
- 1750年，加布里尔·克拉默在其所著之*Introduction to the analysis of algebraic curves*中描述了克莱姆法则且研究了代数曲线、矩阵和行列式。
- 1830年，伽罗瓦理论在埃瓦里斯特·伽罗瓦对抽象代数的工作中得到发展。

分类

- 初等代数：学习以位置标志符（place holders）标记常数和变量的符号，与掌控包含这些符号的表示式及方程式的法则，来记录实数的运算性质。（通常也会涉及到*中等代数*和*大学代数*的部分范围。）
- 抽象代数：讨论代数结构的性质，例如群、环、域等。这些代数结构是在集合上定义运算而来，而集合上的运算则适合某些公理。
- 线性代数：专门讨论矢量空间，包括矩阵的理论。
- 泛代数，讨论所有代数结构的共有性质。
- 计算代数：讨论在电脑上进行数学的符号运算的算法。



教导行列式和逆矩阵的线性代数课程

初等代数

初等代数是代数中最基本的一种类型。其教导对象为假定不具有对算术基本原则之类的数学知识之学生。虽然在算术里，只有数和其算术运算（如加减乘除）会出现，在代数，数则通常会以符号（如a、x、y等）来标记。这是很有用的，因为：

- 它允许对算术定律之一般性公式的描述（如$a+b=b+a$，$\forall a,b$），且此为对实数性质做系统性描述的第一步。
- 它允许指涉未知数、将方程公式化及学习如何去解答（如"找一数x，使其$3x+1=10$的方程成立）。
- 它允许将函数关系公式化（如"若你卖了x张票，则你将获利$3x-10$元，亦即$f(x)=3x-10$，其中f为其函数，且x为此函数输入的值。"）。

抽象代数

抽象代数将基本代数和数的算术中的一些相似概念延广成更一般的概念。

集合：不单只考量数的不同类型，抽象代数处理更为一般的概念－*集合*：一群称为元素之物件的聚集。所有相似类型的数都是一种集合。另一些集合的例子有所有两阶方阵组成之集合、所有两次多项式组成的集合、所有平面的二维向量所组之集合、及如如整数同余n的群之循环群等各种有限群。集合论是逻辑的一个分支且技术上不属于代数的一种分支。

二元运算：加法（+）的概念被抽象化成了一种*二元运算*，称之为*。对于在集合S内的两个元素a和b，$a*b$会给出集合内的另一个元素（技术上，此条件称之为封闭性）。加法（+）、减法（-）、乘法（×）和除法（÷）都是二元运算，且矩阵、向量及多项式等之加法和乘法也是二元运算。

单位元素：零和一两个数被抽象化成**单位元素**的概念。零是加法的单位元素而一则是乘法的单位元素。对于一任意的二元运算*，单位元素e必须得满足$a*e=a$和$e*a=a$两个条件。其在加法中为$a+0=a$和$0+a=a$，而在乘法中则为$a\times1=a$和$1\times a=a$。但若取正自然数和加法，则其不存在有单位元素。

逆元素：负数导致出了*逆元素*的概念。对加法而言，a的逆元素为$-a$，而对乘法而言，其逆元素则为$1/a$。一通常之逆元素a^{-1}必须满足$a*a^{-1}=e$和$a^{-1}*a=e$之性质。

结合律：整数的加法有一称为结合律的性质。亦即，数相加的顺序不影响其总和。例如：$(2+3)+4=2+(3+4)$。一般化地，其可以被写成$(a * b) * c = a * (b * c)$。此一性质在大多数的二元运算中存在着，但不包括减法和除法。

交换律：整数的加法有一称为交换律的性质。亦即，数被加的顺序不影响其总和。例如：$2+3=3+2$。一般化地，其可以被写成$a * b = b * a$。只有一些二元运算拥有此一性质。其在整数的加法和乘法上成立，但在矩阵乘法上则不成立。

群

结合上面的概念可给出在数学中最重要的结构之一：群。群为一个集合S和一二元运算*之结合，使其可有如下性质：

- 此运算是封闭的：若a和b为S之元素，则$a*b$也会是。

  实际上，提及此性质是很多余的，因为每一个二元运算都已经说过其运算为封闭了。但封闭性经常被强调为群的一种性质。

- 存在单位元素e，使得对每个于S内的元素a，$e*a$和$a*e$都会等同于a。
- 每一元素都存在一逆元素：对每一于S内的元素a，存在一元素a^{-1}，使得$a * a^{-1}$和$a^{-1} * a$都会等同于单位元素。
- 此运算是可结合的：若a、b和c为S的元素，则$(a * b) * c$会等同于$a * (b * c)$。

若一群亦为可交换的 – 即对任两个于S内的元素a和b，$a*b$会等同于$b*a$ – 则此群称为阿贝尔群。

例如，加法的运算下之整数集合为一个群。在此一群中，其单位元素是0且其任一元素a的逆元素为其负数$-a$。其有关结合律的要求亦是吻合的，因为对任何整数a、b和c，$(a + b) + c = a + (b + c)$。

非零有理数会形成一个于乘法下的群。在此，其单位元为1，当对于任一有理数a，$1 \times a = a \times 1 = a$。$a$的逆元素为$1/a$，当$a \times 1/a = 1$。

但无论如何，于乘法运算下的整数不会形成一个群。这是因此一整数的乘法逆元通常不会是一个整数。例如，4是一个整数，但其乘法逆元为1/4，不为一个整数。

群的理论被学习于群论中。此一理论的一主要成果为有限简单群分类，主要发表于1955年至1983年之间，其目的在于将所有的有限简单群分类至约30种的基本类型中。

例子										
Set:	自然数$\mathbb{N}$		整数$\mathbb{Z}$		有理数$\mathbb{Q}$（实数$\mathbb{R}$、复数$\mathbb{C}$）				整数同余3: {0,1,2}	
运算	+	×（不含零）	+	×（不含零）	+	−	×（不含零）	÷（不含零）	+	×（不含零）
封闭性	是	是	是	是	是	是	是	是	是	是
单位元素	0	1	0	1	0	NA	1	NA	0	1
逆元素	NA	NA	-a	NA	-a	a	$\frac{1}{a}$	a	分别为0,2,1	分别为NA, 1, 2
结合律	是	是	是	是	是	否	是	否	是	是
交换律	是	是	是	是	是	否	是	否	是	是
结构	幺半群	幺半群	阿贝尔群	幺半群	阿贝尔群	拟群	阿贝尔群	拟群	阿贝尔群	阿贝尔群（$\mathbb{Z}_2$）

半群、拟群和幺半群是类似于群的结构，但更具一般性。它们由一个集合和一个封闭二元运算所组成，但不必然满足其他条件。半群有一*结合*二元运算，但没有单位元素。幺半群是一有单位元素但可能没有每个元素之逆元素的半群。拟群满足任一元素皆以一唯一的前或后运算转换成另一元素，但此一二元运算可能不具结合律。

所有的群都是幺半群，且所有的幺半群都是半群。

环和体 – 具两个二元运算的结构

群只有一个二元运算。但为了完整说明不同类型的数之行为，具两个运算子的结构是需要的。其中最重要的为环和体。

分配律广义化了数中的*分配律*，且要求其运算子运算时应采之顺序（称为优先权）。对于整数而言，（$a+b$）× c = a×c+ b×c且c ×（a + b）= c×a + c×b，而且×称之此于+上是*可分配*的。

环有两个二元运算（+）和（×），其中×于+上是可分配的。在第一个运算（+）下，它会形成一个*阿贝尔群*。而在第二个运算（×）下，其为结合的，但不需要有一单位元素或逆元素，所以除法是不被允许的。其加法（+）单位元写成0，而其a的加法逆元则写成-a。

整数是环的一个例子。其有使其为一**整环**的额外性质。

体是一具有在运算×下，除了0的所有元素会形成一*阿贝尔群*之额外性质的*环*。其乘法（×）单位元素写成1，而其a的乘法逆元则写成a^{-1}。

有理数、实数和复数都是体的例子。

代数

代数一词亦可用来称呼不同的代数结构，包含有：

- 交换环上的代数
- 集合上的代数
- 布尔代数
- 范畴论内的F-代数和F-对偶代数
- Σ代数

参见

- 代数基本定理
- 电脑代数系统

参考文献

1. ^ Struik, Dirk J. (1987). *A Concise History of Mathematics*. New York: Dover Publications.
2. ^ Carl B. Boyer, *A History of Mathematics, Second Edition* (Wiley, 1991), pages 178, 181
3. ^ Carl B. Boyer, *A History of Mathematics, Second Edition* (Wiley, 1991), page 228
4. ^ 李俨 《刘焯的内插法计算》《李俨.钱宝琮科学史全集》卷3 111-112页
5. ^ 李俨《中算家的内插法研究》《李俨.钱宝琮科学史全集》卷2 290页
6. ^ 吴文俊主编《中国数学史大系》第六卷第四编《朱世杰的数学成就》246-247页

- Donald R. Hill, *Islamic Science and Engineering* (Edinburgh University Press, 1994).
- Ziauddin Sardar, Jerry Ravetz, and Borin Van Loon, *Introducing Mathematics* (Totem Books, 1999).
- George Gheverghese Joseph, *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics* (Penguin Books, 2000).

- John J O'Connor and Edmund F Robertson, *MacTutor History of Mathematics archive* (University of St Andrews, 2005).
- *Algebra Help* (http://www.helpalgebra.com) Online algebra tutorials.
- Highlights in the history of algebra (http://www.ucs.louisiana.edu/~sxw8045/history.htm)
- Explanation of Basic Topics (http://www.mathleague.com/help/algebra/algebra.htm)
- I.N. Herstein: *Topics in Algebra*. ISBN 0-471-02371-X
- R.B.J.T. Allenby: *Rings, Fields and Groups*. ISBN 0-340-54440-6

外部链接

- Sparknotes' Review of Algebra I and II (http://www.sparknotes.com/math/#algebra1)
- ExampleProblems.com (http://www.exampleproblems.com) Example problems and solutions from basic (http://www.exampleproblems.com/wiki/index.php/Algebra) and abstract (http://www.exampleproblems.com/wiki/index.php/Abstract_Algebra) algebra.
- Purplemath.com "Your Algebra Resource" (http://www.purplemath.com/)
- What Is Algebra? (http://www.cut-the-knot.org/WhatIs/WhatIsAlgebra.shtml)
- Online Algebra Graphing Calculator - WebGraphing.com (http://www.webgraphing.com/)
- Step by step algebra problem solver - algebrasolver.com (http://www.algebrasolver.com/)
- Algebra Basics from kwizNET Learning System (http://www.kwiznet.com/p/showCurriculum.php?curriculumID=48#1)

取自“http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=代数&oldid=33038722”
