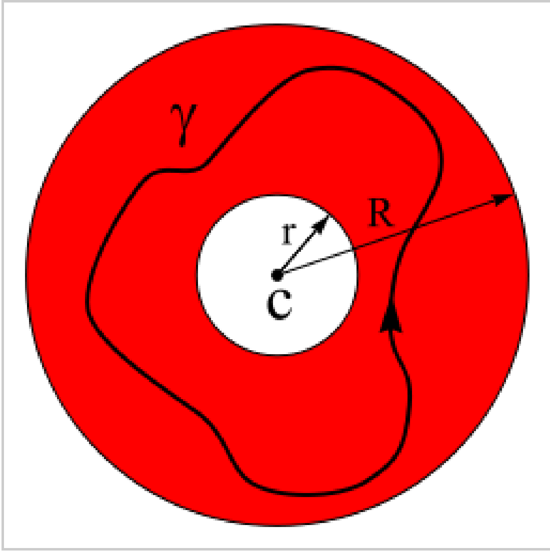
洛朗级数

维基百科，自由的百科全书



在数学中，复变函数$f(z)$的**洛朗级数**，是幂级数的一种，它不仅包含了正数次数的项，也包含了负数次数的项。有时无法把函数表示为泰勒级数，但可以表示为洛朗级数。洛朗级数是由Pierre Alphonse Laurent在1843年首次发表并以他命名的。卡尔·魏尔斯特拉斯可能是更早发现这个级数的人，但他1841年的论文在他死后才发表于世。[1]

函数$f(z)$关于点c的洛朗级数由下式给出：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n$$

其中a_n是常数，由以下的路径积分定义，它是柯西积分公式的推广：

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(z)\,dz}{(z-c)^{n+1}}.$$

积分路径γ是位于圆环A内的一条逆时针方向的可求长曲线，把c包围起来，在这个圆环内$f(z)$是全纯的（解析的）。$f(z)$的洛朗级数展开式在这个圆环内的任何地方都是正确的。在右边的图中，该环用红色显示，其内有一合适的积分路径γ 。如果我们让γ是一个圆$|z-c|=\varrho$ ，其中$r<\varrho<R$ ，这就相当于要计算的限制到γ上f的复傅里叶系数。这些积分不随轮廓γ的变形而改变是斯托克斯定理的直接结果。

在实践中，上述的积分公式可能不是计算给定的函数$f(z)$系数a_n最实用的方法；相反，人们常常通过拼凑已知的泰勒展开式来求出洛朗级数。因为函数的洛朗展开式只要存在就是唯一的 ，实际上在圆环中任何与$f(z)$相等的，以上述形式表示的给定函数的表达式一定就是$f(z)$的洛朗展开式。

目录

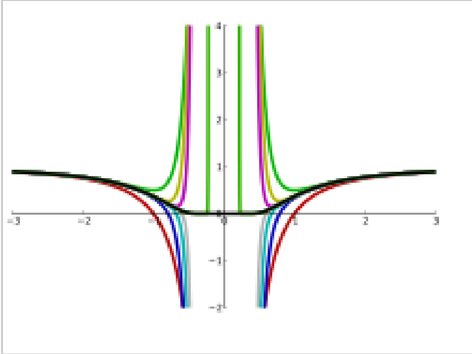
收敛洛朗系列

复系数洛朗级数是复分析中的一个重要工具，尤其在研究函数奇点附近的行为时。

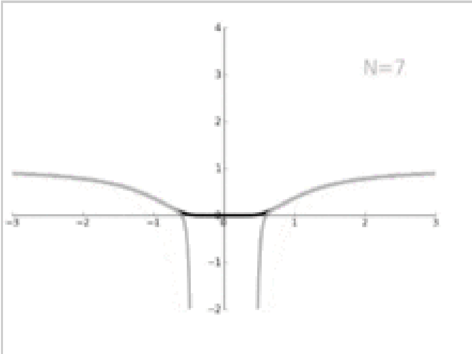
考虑例如函数$f(x)=e^{-1/x^2}$，它的$f(0)=0$ 。作为实变函数，它是处处无穷可微的；但作为一个复变函数，在$x=0$处不可微。用$-1/x^2$替换指数函数的幂级数展开式中的x，我们得到其洛朗级数，对于除了奇点$X=0$以外的所有复数，它都收敛并等于$f(x)$。旁边的图显示了e^{-1/x^2}（黑色）和它的洛朗近似

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\,\frac{x^{-2n}}{n!}$$

对于$N=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$到50。当$N\to\infty$，近似对除了奇点$x=0$处的所有复数x都很精确。



e^{-1/x^2}和洛朗近似：见文中解释。随着洛朗级数负次数的增长，图像接近正确的函数。



e^{-1/x^2}和洛朗近似的负次数的增长。奇点零的邻域不能被近似。

更一般地，洛朗级数可以用来表达定义在圆环上的全纯函数，就像幂级数被用于表达一个圆盘上定义全纯函数一样。

参看

- Z转换
- 傅立叶级数

参考文献

1. ^ Rodriguez, Rubi; Kra, Irwin; Gilman, Jane P., Complex Analysis: In the Spirit of Lipman Bers (http://books.google.com/books?id=fZbf629lTy0C&pg=PA12), Graduate Texts in Mathematics, Springer, 12, 2012, ISBN 9781441973238 。

外部链接

- Laurent series (http://eom.springer.de/p/l057690.htm)//Hazewinkel, Michiel (编)，数学百科全书，克鲁维尔学术出版社，2001，ISBN 978-1556080104
- O'Connor, John J.; Robertson, Edmund F., Laurent_Pierre (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Laurent_Pierre.html)//MacTutor History of Mathematics archive
- MathWorld上 *Laurent Series* 的资料，作者：埃里克·韦斯坦因。
- 洛朗级数的教程 (http://math.fullerton.edu/mathews/c2003/LaurentSeriesMod.html)

取自“http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=洛朗级数&oldid=33213391”
