הקדמה שבוע ב:

• **מטריצת טופליץ:** מטריצה T בגודל n שורות עם m עמודות נקראת מג טופליץ אם איברי המקומות

$$t_{i-j} = t_{j-i}$$

$$T = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{m-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & t_1 & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \\ t_{1-n} & t_{2-m} & \dots & \dots & t_{m-n} \end{bmatrix}$$

• המטריצה מאפשרת המלצה מהיותן שורותיה עמודותיה הראשונות לאורך $1-m+n$.

• רבוד של מטריצות טופליץ ניתן מטריצת טופליץ

• אם כפל בוקטור.

שטלת הקונבולוציה:

בהגדרה: שטלת הקונבולוציה בין שני וקטורים $x \in R^m$, $h \in R^n$ המסומנת על ידי $z = x \otimes h$ מ"ש את הוקטור z לפי:

$$z_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_{k-j} h_j = \sum_{j=0}^{n-1} x_{k-j} h_j$$

$0 \le k \le m+n-2$ לכן סכום אורכי הוקטור לפחות 1 לקונבולוציה.

מסקנה: שטלת הקונבולוציה סימטרית:

$$z = x \oplus h = h \oplus x \implies z_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_{k-j} h_j = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_{k-j} x_j$$

שטלת הקונבולוציה בדרך אחרת:

(1) הנח את וקטור x בדירה הבאה:

הבא אחר את הוקטור h כשמיקום 0 תואם בין שניהם.

(2) שקף את h סביב נקודת ה-0

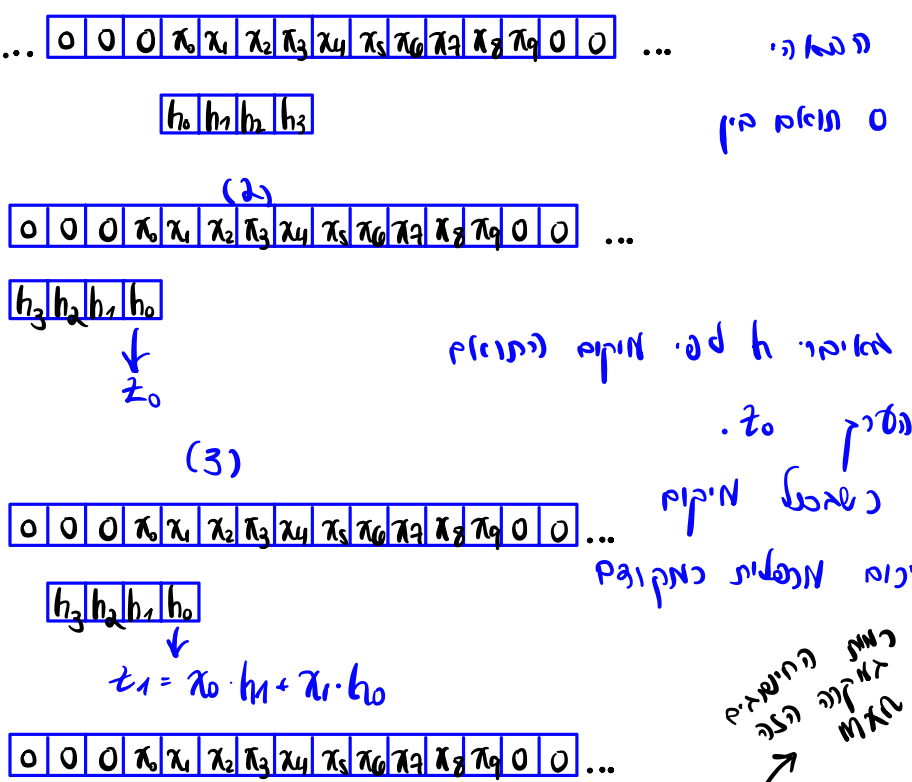
חשב מכפלה שמית בין איברי x האיברי h לפי מיקום בתוצאה

וסכום כל מכפלות אלה - זה יהיה הערך z_0.

(3) כעת, הסט את וקטור h ימינה כך שבכל מיקום k בו הוא מעבר, הוא מבצע סכום מכפלות במקומם

וחזור את z_k

בעזרת שושים מאוחר מזו!



בכיתה מטריצה: $\underline{z} = \underline{x} \cdot H = \underline{h} \cdot X$ כאשר המג (כלומר) מג טופליץ אם $x \times h$ אבל H מג בדר banded

כמות הרישומים בגלל הבלוקים

מטריצות סימטריות:

הגדרה – מטריצה C המקיימת תנאי סימטריה אם איבריה מקיימים $t_{ij} = t_{(j-i)\bmod n}$ כלומר:

$$(j-i)\bmod n = \begin{cases} n+j-i & j-i<0 \\ j-i & 0\le j-i<n \end{cases}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_{n-1} & \cdots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{n-1} & & c_2 \\ \vdots & c_1 & c_0 & \ddots & \vdots \\ c_{n-2} & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 & c_0 \end{bmatrix}$$

• כל מט' סימטרית היא טופליץ, אך לא להיפך.

אפשר לחיות אותה בצורת המטריצה הבאשעה.

הקונבולוציה הדיסקרטית:

הגדרה: קונבולוציה סימטרית (דיסקרטית) בין שני וקטורי שורה אורך $x, h \in R^n$ מסומנת על ידי $z = x \circledast_c h$, מגדירה את z לפי $z_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_{(k-j)\bmod n} \cdot h_j$

• $0 \le k-j \le n-1$ המחרוזת כאן הקונבולוציה הליניארית הרגילה.

• כאשר $k-j$ פולט מהתחום:

בקונבולוציה הליניארית נשים אפסים.

בקונבולוציה הדיסקרטית נניח המשכה מחזורית של x, כלומר $x_k = x_{k+n}$. האינדקס $(k-j)\bmod n$ חוצה לתחום $[0, n-1]$

טענה: וקטור התוצאה בהקונבולוציה דיסקרטית מחזורי ב-n, דהיינו $z_k = z_{k+n}$ לכל k שלם.

לכסון מטריצות סימטריות:

משפט: כל המטריצות הסימטריות הגדולות מאחד לכסינות יוניטרית ובמשמעות, כלומר חולקות אותם וקטורים עצמיים, אשר מהווים בסיס אורתונורמלי.

משפט: אם A ו-B מטריצות לכסינות במשמעות, אזי מכפלתן קומוטטיבית! $A\cdot B = B\cdot A$

מכפלת מטריצות סימטריות היא קומוטטיבית.

טרי אלגברה! הכפלת מט' אלכסוניות קומוטטיבית

$$f \circledast_c [h \circledast_c x] \longrightarrow \text{קונבולוציה פלקית} \xrightarrow[f]{h \circledast x} \text{קונבולוציה פלקית} \longrightarrow \underline{x} \longrightarrow \underline{h}$$

$$\ldots = (\underline{f}X)H = (\underline{h}F)X = (\underline{h}X)F$$

משפט: נניח כי λ הוא ערך עצמי של המטריצה A עם וקטור עצמי תואם $\underline{v}$, $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$

נתון פולינום כלשהו מדרגה n. $p_n(\lambda)$ הם λ אזי $p_n(A)$ הם הינו ערך עצמי של המטריצה A עם אותו וקטור עצמי v. כלומר: $p_n(A)v = p_n(\lambda)v \Rightarrow A\underline{v} = \lambda\underline{v}$

דוגמא: טור מטריצה $A \in R^{5\times 5}$ ומטריצה $B \in R^{5\times 5}$ המקיימת $B = 3I + 7A + 3A^5$

מה יהיו הערכים ל- A והמה יחושבו לפי: $\lambda_B = 3 + 7\lambda_A + 3\lambda_A^5$

נבנה איך מחשבים ע"ק ומה של מטריצות סימטריות:

- נגדיר מה סימטרית C_1:

$$C_1 \underline{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} v_1 &= \alpha v_0 \\ v_2 &= \alpha v_1 \\ v_3 &= \alpha v_2 \\ v_4 &= \alpha v_3 \\ &\vdots \\ v_{n-1} &= \alpha v_{n-2} \\ v_0 &= \alpha v_{n-1} \end{aligned}$$

- נקבע $v_0 = 1$ כך שמתקבל $\alpha^n = 1$

- הפתרונות האלו שאנו יש לו n שורשים נקרא מורכבים: $\alpha = \exp\{\frac{2\pi j}{n}\ell\}$ $(j = \sqrt{-1})$

for $\ell = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

- בשביל נוחות נסמן: $W_n = \exp\{\frac{j2\pi}{n}\}$ כך ש: $\alpha = W_n^{-\ell}$ נמצאר n שורשים אשר... מה.

C_{in} הצורה

- נשים לב שה כפלת $\{C_1\}^n$ בעצמו יתן לנו C_n לדוגמא:

$$C_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C_2$$

כך שהוא צריך לבנות C והוא מקיים λ^n

מתוך $\{C_1\}^n = I = \{C_1\}^0$

- לכן טור מה כללית מתקיים:

$$C = \sum_{k=0}^{n-1} c_k C_1^k$$

ואם פה אותם הוא כמו C_1 אז יקיים:

$$\lambda_\ell = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \alpha_\ell^k = \sum_{k=0}^{n-1} c_k W_n^{-k\ell} \quad \text{for } \ell = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\underline{v}_k = \begin{bmatrix} W_n^{-0k} \\ W_n^{-1k} \\ W_n^{-2k} \\ W_n^{-3k} \\ \vdots \\ W_n^{-(n-1)k} \end{bmatrix}$$

$V_k^H \cdot V_i$

כשהה! המכפלה הפנימית בעצמה הכך הוא מה הדמוי:

מה סיגנית שמרכה

לכן לכפיל המה הסיגנית מקיים: $\Lambda = W^H \cdot C \cdot W$ אותה

שחלוף + צמוד מורכב

מה W סימטרית ויונטרית

$$W = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_n^{-1} & W_n^{-2} & W_n^{-3} & W_n^{-4} & \cdots & W_n^{-(n-1)} \\ 1 & W_n^{-2} & W_n^{-4} & W_n^{-6} & W_n^{-8} & \cdots & W_n^{-2(n-1)} \\ 1 & W_n^{-3} & W_n^{-6} & W_n^{-9} & W_n^{-12} & \cdots & W_n^{-3(n-1)} \\ 1 & W_n^{-4} & W_n^{-8} & W_n^{-12} & W_n^{-16} & \cdots & W_n^{-4(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_n^{-(n-1)} & W_n^{-2(n-1)} & W^{-3(n-1)} & W_n^{-4(n-1)} & \cdots & W_n^{-(n-1)^2} \end{bmatrix}$$

$$w_n^{-\ell} = \exp\left\{-j2\pi\frac{\ell}{n}\right\} \Rightarrow \overline{w_n^{-\ell}} = \exp\left\{+j2\pi\frac{\ell}{n}\right\}$$

$$\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_n^{1} & w_n^{2} & w_n^{3} & w_n^{4} & \cdots & w_n^{(n-1)} \\ 1 & w_n^{2} & w_n^{4} & w_n^{6} & w_n^{8} & \cdots & w_n^{2(n-1)} \\ 1 & w_n^{3} & w_n^{6} & w_n^{9} & w_n^{12} & \cdots & w_n^{3(n-1)} \\ 1 & w_n^{4} & w_n^{8} & w_n^{12} & w_n^{16} & \cdots & w_n^{4(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_n^{(n-1)} & w_n^{2(n-1)} & w^{3(n-1)} & w_n^{4(n-1)} & \cdots & w_n^{(n-1)^2} \end{bmatrix}$$

מקרה פרטי של W כאשר:

$W^{-1} = W^{H} = \overline{W}$

אגף סימטרית רק נשאר לעשות פיפוך לכל הערכים

לכן מתקיים עבור Λ מס' אלכסוניות של ע"ע:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_n^{-1} & w_n^{-2} & w_n^{-3} & w_n^{-4} & \cdots & w_n^{-(n-1)} \\ 1 & w_n^{-2} & w_n^{-4} & w_n^{-6} & w_n^{-8} & \cdots & w_n^{-2(n-1)} \\ 1 & w_n^{-3} & w_n^{-6} & w_n^{-9} & w_n^{-12} & \cdots & w_n^{-3(n-1)} \\ 1 & w_n^{-4} & w_n^{-8} & w_n^{-12} & w_n^{-16} & \cdots & w_n^{-4(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_n^{-(n-1)} & w_n^{-2(n-1)} & w^{-3(n-1)} & w_n^{-4(n-1)} & \cdots & w_n^{-(n-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \sqrt{n}\,\mathbf{W}\underline{c}$$

התמרת הפורייה הדיסקרטית:

הגדרה: נגדיר W כמטריצת הפורייה, והכפלה בוקטור c נקראת התמרת הפורייה הדיסקרטית (DFT), המניבה וקטור תוצאה d בגודל אותו אורך n.

$$\left\{ d_\ell = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} c_k W_n^{-\ell k} \right\}_{\ell=0}^{n-1} \longrightarrow \underline{d} = W \cdot \underline{c}$$

לעומת, חישוב ע"ע של מס' טיאוגית C (לפי כפי קודם) הינו חישוב התמרת הפורייה הדיסקרטית לא איבדו שכבתה הראשונה!

משפט: בהינתן שני וקטורים $\underline{a}$ ו- $\underline{b}$ באורך n, מתקיים:

$$\{DFT\{a\} \cdot DFT\{b\}\} = DFT\{\underline{b} \circledast \underline{a}\} \longrightarrow \underline{a} \circledast_c \underline{b} = DFT^{-1}\{DFT\{a\} \cdot DFT\{b\}\}$$

לעומת, בתחילת לחישוב קונבולוציה טיאוגית בין שני וקטורים אלה, ניתן לגזור d התמרת DFT, אחרי לא לא וקטור, להכפיל את התוצאות איבר איבר ועכשיו לגזור התמרת DFT הפורייה.