פ2 פירוק ערכים עצמיים ולכסון

עבור מטריצה ריבועית וממשית A מגודל nxn, הסקלר λ והווקטור $V\neq 0$ נקראים ערך עצמי וקטור עצמי אם: $AV=\lambda V$

• מציאת ע"ע: $|A-\lambda I|=0 \longrightarrow \lambda_k$

• מציאת ו"ע: $(A-\lambda_k I)\cdot V_k=0$

תכונות: $trace(A)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k$

$|A|=\prod_{k=1}^{n}\lambda_k \rightarrow$ אם יוצא 0 אז יש לפחות $\lambda=0$ אחד

• אם נמצא וקטור עצמי, V שאינו טריויאלי אז הכפלתו בסקלר מחזירה אותו פתרון ראוי למשוואה $AV=\lambda V$ לכן מקובל לדרוש שהו"ע יהיו מנורמלים $\|V\|_2=1$

__לכסון:__ עבור מטריצה ריבועית וממשית A מגודל nxn, אם קיימים n הוקטורים העצמיים יוצרים בסיס למרחב R^n כך שהם בת"ל, נאמר שהמטריצה לכסינה.

$$\left\{\begin{aligned} AV_1&=\lambda_1V_1\\ &\vdots\\ AV_k&=\lambda_kV_k\\ &\vdots\\ AV_n&=\lambda_nV_n\end{aligned}\right\} \longrightarrow AV=V\Lambda \longrightarrow A=V\Lambda V^{-1} \qquad \Lambda=V^{-1}AV$$

• למטריצה בגודל nxn יש תמיד n ע"ע שהם שורשים לפו"א חלק יכולים להיות מורכבים. (וגם הדמיוניים יופיעו והו"ע בזוגות גם)

$A \;=\; V \;\; \Lambda \;\; V$

• אם $\lambda_1\neq\lambda_2$ אז $V_1\neq V_2$ כך שהם בת"ל

כשמטריצה אלכסונית מוכפלת מטריצה מימין, (היא) פועלת על עמודותיה ומשמאל על שורותיה.

תמונת זו של הכפלה מימין ומשמאל במטריצה והפיכה נקראת העתקת דמיון

• ~~מתי מטריצה לכסינה:~~

• אם כל ע"ע שונים זה מזה (כלומר כל ריבוי אלגברי הוא 1)

• אם ריבויים (האלגבריים והגיאומטריים) מתלכדים

• אם המטריצה ממשית ולכסינה, אזי (היא) ניתנת גם לפירוק Schur: $A=QTQ^t$

אורתונורמלית (אבל מורכבים)

משולשת עליונה (אולי מורכבת)

• שתי מטריצות דומות A ו-B $(B=V^{-1}AV)$ חולקות אותם ע"ע: $|A|=|B|$

כלומר מתקיים עבור פירוק Schur הע"ע של A הם גם אלו של T והם נמצאים על האלכסון

(דטרמיננטה של מט' משולשת היא כפל של איברי האלכסון)

! מטריצה משולשת עליונה של ערכיה העצמיים גלוי

ריבוי אלגברי 1 מובילה לוקטורים עצמיים במבנה של מט' משולשת עליונה - הוקטור העצמי מתאים לערך λ_k "יראה" כך:

$$V=\begin{bmatrix}V_1\\ \vdots\\ V_k\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

• היפוך של מט' משולשת עליונה גם משולשת עליונה

ומכפלה של מט' משולשת עליונה היא גם משולשת עליונה

__משפט__ - מט' ריבועית A נקראת לכסינה אם קיימת מטריצה לא סינגולרית S ומטריצה אלכסונית D כך שמתקיים: $S^{-1}AS=D$

<u>שרוך Schur</u>: את העתקת הדימיון הזו מבצע באמצעות מטריצה אורתונורמלית שהפוכה קל.

<u>משפט</u>- בהינתן מטריצה ריבועית A לכסינה ניתן למצוא מטריצה אורתונורמלית Q ומטריצה משולשת עליונה T ממשית כך שמתקיים: Q^tAQ

הערה: ! מטריצה משולשת עליונה עלולה להיות לא לכסינה אם ערכיה העצמיים מעל ריבוי אלגברי גדול מ-1.

<u>מטריצות סימטריות:</u>

A מטריצה ריבועית, ממשית וסימטרית $\longleftarrow$ $A=A^t$

- אם A לכסינה קיים לה פירוק Schur ולכן: $A=QTQ^t \longrightarrow T=T^t$

כמקרה הזה ניתן ל-A לכסינה יוניטרית

אורתונורמלית

משולשת עליונה

אז T מכילה באלכסונה את ע"ע ועמודי Q מכילה ו"ע של A

<u>משפט</u>: אם A מט' ריבועית ממשית וסימטרית, אז:
- המטריצה מהכרח לכסינה
- כל ערכיה העצמיים ממשיים
- כל וקטוריה העצמיים יכולים להיות ממשיים
- וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים יהיו אורתוגונליים.

$\longleftarrow$ לכסון מטריצה סימטרית "נראה" כך:

$$Q^tAQ=D$$

שירוק הספקטרלי!

$\longleftarrow$ נוכל להסתכל במקרה של A סימטרית על הלכסון שלה כך: $A=V\cdot D\cdot V^{-1}$ כאשר עמודות V הן ו"ע נעשה נרמול עבור כל עמודה ואז $A=Q\cdot D\cdot Q^t$ כך שלא צריך לעשות היפוך.

- לשירוק הספקטרלי $A=QDQ^t$ יש פרשנות מעניינת המסייעת להבין את פעולתה של מט' A סימטרית בהכפלה בוקטור:

$$A\underline{x}=QDQ^t\underline{x}$$

- סובב את הוקטור סביב הראשית ע"י הכפלה $Q^t\underline{x}$
- מתח כל איבר בנפרד ע"י הכפלה במטריצה האלכסונית D. ערכיים שליליים מרושם שיקוף

ולבסוף סבב את התוצאה ע"י הכפלה ב-Q

מטריצה סימטרית ניתנת לתיאור כסכום משוקלל של מט' סימטריות מדרגה 1

$$A=QDQ^t=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k v_k v_k^t \;!$$

פירוק עצמי של מטריצות PD:

משפט: אם A היא מטריצה ריבועית ממשית סימטרית וחיובית מוגדרת PD, אזי כל ערכיה העצמיים חיוביים.

משפט: אם A היא מטריצה ריבועית ממשית סימטרית וחיובית חצי מוגדרת PSD, אזי כל ערכיה העצמיים אי שליליים.

! A היא PD ולכן: $\forall x\neq 0 \quad x^tAx>0$

בנוסף A סימטרית ולכן קיים לה פירוק ספקטרלי:

$$\forall x\neq 0 \quad x^tAx = x^tQDQ^tx = (Q^tx)^t D (Q^tx) > 0$$

נגדיר $z=Q^tx$ ונקבל כי:

$$\forall z\neq 0 \quad x^tAx = z^tDz = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k^2 > 0$$

ע"ע כפתרון לבעיות אופטימיזציה:

נניח כי בידינו מטריצה אלכסונית D של ערכים עצמיים אי שליליים ממוינים מראש

$d_1\geq d_2\geq \ldots \geq d_n\geq 0$

נניח כי ברצוננו להביא למקסימום את התבנית הבאה:

$$\max_z q(z) = \max_z z^tDz = \max \sum_{k=1}^{n} d_k z_k^2 \leq d_1 \quad \text{עבור} \quad \sum_{k=1}^{n} d_k=1$$

לכן, ניתן למצוא וקטור z שישיג את הערך המקסימלי: $z^t=[1\,0\,0\ldots0]$

זה הו"ע של d_1 במטריצה D

! בהינתן מטריצה אלכסונית חיובית חצי מוגדרת D אזי

$$\max_{\|z\|_2=1} z^tDz=d_1 \qquad \arg\max z^tDz = e_1 \quad [1\,0\,0\ldots0]$$

$$\min_{\|z\|_2=1} z^tDz=d_n \qquad \arg\min z^tDz = e_n \quad [0\,0\ldots0\,1]$$

במקרה של מטריצות חיוביות מוגדרות מתקיים:

$$A=QDQ^t \Longrightarrow \arg\max_{\|x\|_2=1} x^tAx = \arg\max_{\|x\|_2=1} x^tQDQ^tx$$

נגדיר $z=Q^tx$ ולכן:

$$=\arg\max_{\|z\|_2} z^tDz$$

ולכן המקסימום יתקבל ע"י λ_1 ע"ע

כי בפועל φ ש $e_1=[1\,0\,0\ldots0]$ ולכן $x=Qe_1$ כלומר הוקטור הראשון של Q כלומר ו"ע של A התואם לוח

אותו דבר עבור min:

$$\arg\min_{\|x\|_2=1} x^tAx = \lambda_n = \arg\min z^tDz$$

המינימום יתקבל על ידי $e_n=[00\dots01]$ ולכן

$x=Qe_n$ שזה העמודה האחרונה של Q

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים יכולים להתקבל כפתרון של בעיות אופטימיזציה:

אם A מטריצה סימטרית אזי:

$$\max_{\{x|x^tx=1\}} x^tAx = \max_x \frac{x^tAx}{x^tx} = \lambda_1$$

כאשר λ_1 הוא ע"ע הגדול ביותר של A

באופן דומה אפשר להגיע לערך עצמי הקטן ביותר ולווקטור העצמי

$$\min_{\{x|x^tx=1\}} x^tAx = \max_x \frac{x^tAx}{x^tx} = \lambda_n$$

נשים לב כי:

$$f(x)=\frac{x^tAx}{x^tx} \longrightarrow f'(x)=\frac{(2Ax)(x^tx)-(2x)(x^tAx)}{(x^tx)^2}=0$$

$x^tx\neq0$ נשווה לאפס מונה

$$\longrightarrow Ax=\frac{x^tAx}{x^tx}x=f(x)x$$

קיבלנו שמשוואה זו מתקיימת רק עבור ו"ע של A

נכליל את בעיית האופטימיזציה שהגדרנו על ידי שינוי הביטוי במכנה:

כך שהמכנה לכן יתאפס נניח כי B חיובית מוגדרת.

$$x^*=\arg\max_{x\neq0}\left(\frac{x^tAx}{x^tBx}\right)$$

$$\downarrow$$

$x^*=\arg\max(x^tAx)$ עבור: $x^tBx=1 \rightarrow$ אליפסה רב מימדית אליפסואיד

נגזור ונשווה ל-0:

$$f'(x)=2\frac{(Ax)(x^tBx)-(Bx)(x^tAx)}{(x^tBx)^2}=0$$

כך שזה בעיית ערכים עצמיים מוכללת

$$(Ax)(x^tBx)=(Bx)(x^tAx)$$

$$Ax=\underbrace{\frac{x^tAx}{x^tBx}}_{\text{סקלר}}\cdot Bx=\lambda Bx$$

$Ax=\lambda Bx \longrightarrow B^{-1}Ax=\lambda x$ בעיית ערכים עצמיים רגילה.