אורתונורמליות ופירוק QR:

בסיסים אורתונורמלים:

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | & & | \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_m \\ | & | & | & & | \end{bmatrix}$$

(בצע מכפלה פנימית בין כל שתי עמודות)

$$a_i^t \cdot a_k = \begin{cases} 1 & j=k \\ 0 & j\neq k \end{cases}$$

כאשר $j=k$ מתקיים $\|a_k\|_2 = 1$

$$A^tA = \begin{bmatrix} — a_1 — \\ — a_2 — \\ — a_3 — \\ \vdots \\ — a_m — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | & & | \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_m \\ | & | & | & & | \end{bmatrix} = I_m$$

כל זה קורה אם העמודות מאונכות זו לזו.

⟹ לכן עבור בעיית LS מתקיים כעת:

$$x^* = \underbrace{(A^tA)^{-1}}_{I_m} A^t b = A^t b = \begin{bmatrix} a_1^t b \\ a_2^t b \\ \vdots \\ a_m^t b \end{bmatrix}$$

m וקטורים של וקטור מאורך n

$$p(x^*) = b^t b - (x^*)^t (A^tA)(x^*)$$
$$= \|b\|_2^2 - \|A^t b\|_2^2$$

משפט: בהינתן סט m וקטורים a_k אורתונורמליים מממד n $(n \geq m)$, הם בהכרח בלתי תלויים לינארית. (קיימים מקדמים לא טריוויאלים שקיים: $\sum_{k=1}^{m} c_k a_k = 0$

המקדם

הגדרה: מטריצה Q נקראת אורתונורמלית אם (אם) ריבועית ועמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי למרחב R^n

$$Q = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ V_1 & V_2 & \cdots & V_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

כלומר, יש לה n עמודות אורתונורמליות. כלומר עבור כל שתי עמודות המכפלה הפנימית תהיה 0. וכל $\|a_i\|_2^2 = 1$ כלומר מנורמל.

$$V_j^t V_k = \begin{cases} 1 & j=k \\ 0 & j\neq k \end{cases} \implies Q^t \cdot Q = I_n$$

! לכן Q^t הוא ההופכי של Q!

$$Q^{-1} = Q^t$$

• נשים לב לתכונות הבאות:

• גם השורות של Q יהיו אורתונורמליות

• $Q^{-1}=Q^t$

• $1=\det\{I\}=\det\{QQ^t\}=\det\{Q\}^2 \Leftarrow \det\{Q\}=\pm 1$

• מכפלת של מטריצות כאלה גם היא אורתונורמלית:

$$(Q_1Q_2)^t(Q_1Q_2)=I$$

• הכפלת וקטור במטריצה אורתונורמלית לא משנה את אורכו:

שימור נורמת L_2, תכונת פרסבל.

$x\in\mathbb{R}^n,\ Qx\in\mathbb{R}^n;\ \|x\|_2^2=x^t\cdot x$

$$\|Qx\|_2^2=(Qx)^t(Qx)=x^tQ^tQx=x^t\cdot x=\|x\|_2^2$$

← Q היא מטריצת סיבוב (השתקפות) כי בגלל ש Q שהמכפלה של וקטור מהמטריצה לא משתנה אבל רק הכיוון ✓

מטריצה P בפירוק LU היא בעצם מטריצה אורתונורמלית.

תהליך Gram-Schmidt ווריאציות שלו:

המשימה ← בהינתן בסיס של וקטורים כלשהו, האם ניתן למצוא בסיס אחר הפורש אותו של וקטורים אורתונורמליים?

למשל יתקיים $\{w_k\}_{k=1}^{\ell}\in\mathbb{R}^n$ וקטורים מלוכלכים נעביר אותם תהליך GS

ונקבל $\{u_k\}_{k=1}^{L}\in\mathbb{R}^n$ כך ש- $\text{span}\{u_1,u_2,\dots,u_k\}=\text{span}\{w_1,w_2,\dots,w_k\}$

← התהליך הוא הפרקטי ובעזרת GS יוצא סדרת וקטורים אורתונורמליים של ℓ או פחות וקטורים (חלק יכולים להיות תלויים או וקטור האפס).

האלגוריתם (1):

• צעד 1 ← מתקבל w_1 ונרצה להפוך ל-u_1

אם w_1 וקטור האפס נסיים אותו אם לא: $u_1=\frac{1}{\|w_1\|_2}w_1$

ברור שמתקבל $\text{span}\{w_1\}=\text{span}\{u_1\}$

• צעד 2 ← מתקבל w_2 ונרצה להפוך ל-u_2

אנחנו רוצים שהוקטור u_2 יקיים שלוש תכונות: ←

• $\|u_2\|_2^2=1$

• $u_1\perp u_2=u_1^t\cdot u_2=0$

• $\text{span}\{w_1,w_2\}=\text{span}\{u_1,u_2\}$

איך נעשה זאת?

נקח את u_1 ו-w_2

כדי להשיג אונכיות ואז נרמול:

• $u_2 = w_2 - c u_1$ (סקלר) נמצא c: $u_1^t \cdot u_2 = 0$

רוצים שיהיה אונכיות:

$$u_1^t(w_2 - c u_1) = u_1^t w_2 - c \underbrace{u_1^t \cdot u_1}_{=1}$$

$$\Longrightarrow \boxed{u_1^t w_2 = c}$$

• $u_2 = \frac{1}{\|u_2\|_2} \cdot u_2$

• אם יצאנו למצב ש- $\|u_2\|_2$ שווה ל-0 אזי הוצאנו ל u_2 שהבנו) תלוי אז נזרוק אותו החוצה.

• נשים לב שמתקיים גם ש:

$\text{span}\{u_1, u_2\} \subseteq \text{span}\{w_1, w_2\}$

ובגלל ש $\dim U = \dim W = 2$

מתקיים שוויון.

אנחנו נמשיך כך לכל הוקטורים:

עבור w_3 ו- u_3 מתקיים:

$$u_3 = w_3 - c_1 u_1 - c_2 u_2 \quad \begin{cases} 0 = u_1^t u_3 = u_1^t w_3 - c_1 \Longrightarrow c_1 = u_1^t w_3 \\ 0 = u_2^t u_3 = u_2^t w_3 - c_2 \Longrightarrow c_2 = u_2^t w_3 \end{cases}$$

$$u_3 = \frac{1}{\|u_3\|_2} \cdot u_3$$

צעד K: מתקבל w_k צריך להוביל u_k

$$u_k = w_k - \sum_{j=1}^{k-1} c_j u_j \longrightarrow \begin{matrix} \vdots \\ c_{k-1} = u_{k-1}^t w_k \end{matrix}$$

(עבור כל אחד מ- C)

$$u_k = \frac{1}{\|u_k\|_2} u_k$$

משפט: בהינתן סט וקטורים כלשהו בתלג, $\{w_k\}_{k=1}^{L} \in \mathbb{R}^n$ המגדיר תת-מרחב, קיים בסיס אורתונורמלי תחליפי $\{u_k\}_{k=1}^{L} \in \mathbb{R}^n$ אשר יפרוש את אותו תת-מרחב,

$\text{span}\{w_1, w_2, \ldots, w_L\} = \text{span}\{u_1, u_2, \ldots, u_L\}$

סדר הוקטורים, סימני הוקטורים משנים את וקטורי u אבל עדין ה span-ים שווים.

אלגוריתם (2): modified

עבור $w_1 = r_{11} u_1$ נמצא: $\|w_1\|_2^2 = r_{11}^2$ כך שמתקיים: $w_1 = \pm\|w_1\|_2 u_1$

(יש חופש בחירה לסימן)

עבור $w_2 = r_{21} u_1 + r_{22} u_2 \leftarrow u_2 = \frac{(w_2 - r_{21} u_1)}{r_{22}}$ בגלל האונכיות של u_1 ו- u_2

מתקיים: $u_1^t w_2 = r_{21}$

לכן $r_{22} = \pm\sqrt{\|w_2\|_2^2 - r_{21}^2}$

במשוואה ה-K: $w_K = r_{K1}u_1 + r_{K2}u_2 + \dots + r_{KK}u_{KK}$

בשל האונכיות של u_K ל u_j לכל $j \in \{1,2,\dots,K-1\}$ נקבל כי $K-1$ המקדמים הראשונים יקבעים:

$$u_j^T w_K = r_{Kj}$$

$$r_{KK} = \pm\sqrt{\|w_K\|_2^2 - \sum_{j=1}^{K-1} r_{Kj}^2}$$

אלגוריתם (3): stable

יציב נומרית

צעד ראשון: נרמל w_1 ורוצים שבא u_1 ← $u_1 = \frac{1}{\|w_1\|_2} w_1$

לפני שנעבור לוקטור הבא, "ננקה" את כל הוקטורים הנתונים ע"י קילוף u_1 מתוכם כך שאחרי הניקוי הוקטורים כולם יהיו מאונכים ל - u_1:

$$w_j \leftarrow w_j - (u_1^t w_j)u_1 \qquad \forall j = 2,3,\dots,L$$

נמשיך כך ... בצעד K:

מנרמלים w_K רוצים u_K: $u_K = \frac{1}{\|w_K\|_2} w_K$

ומנקה את כל הוקטורים הנתונים: $w_j \leftarrow w_j - (u_K^t w_j)u_1 \qquad \forall j \in \{K+1,\dots,L\}$

באלגוריתם SGS מתנהג טוב יותר מול שגיאות מצטברות, בשל העובדה שאנחנו לא צוברים שגיאות.

סיבוכיות (מתאים עבור כל סוג אלגוריתם): • עבור נרמול: $u_K = w_K / \|w_K\|_2 \rightarrow 2n$

• עבור קילוף: $w_j \leftarrow w_j - (u_K^t w_j)u_K \rightarrow 2n$

כמות הפעולות היינה $L^2/2$ $\|$: nL^2 אם המט' ריבועית $L=n$

מתקיים n^3

פירוק QR:

$$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_L \\ | & | & & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & \dots & r_{L1} \\ 0 & r_{22} & r_{32} & \dots & r_{L2} \\ \vdots & 0 & & & \\ 0 & & & & r_{LL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ w_1 & w_2 & \dots & w_L \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$Q_{n\times L}$ $\quad R_{L\times L}$ $\quad A_{n\times L}$

ושים לב שזה נובע מהגרסה השנייה של GS כמו ה-Modified

כלומר

$w_1 = r_{11}u_1$

$w_2 = r_{21}u_1 + r_{22}u_2$

$w_3 = r_{31}u_1 + r_{32}u_2 + r_{33}u_3$

$\vdots$

$w_L = r_{L1}u_1 + r_{L2}u_2 + \dots\dots + r_{LL}u_L$

אם המטריצה A ריבועית והפיכה $A,Q,R \in Mat_{n\times n}$

<u>משפט:</u> כל מטריצה ריבועית ולא סינגולרית A ניתנת לפירוק יחיד מהצורה $A=QR$

כאשר
- Q מטריצה אורתונורמלית
- R מטריצה משולשת עליונה שכל איברי האלכסון הראשי כולם חיוביים (במקרה הזה נורמל (יחיד +)

כאשר עושים פירוק QR למטריצות סינגולריות. אז יתקבלו ערכי 0 באלכסון הראשי של R

נתונה מטריצה A ועליה מבצעים GS

פירוק QR ←

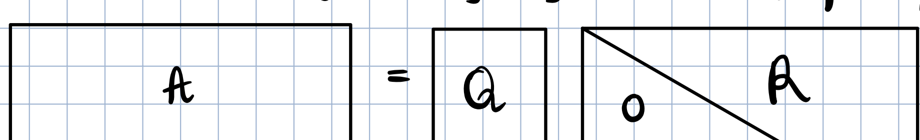
אם נתקלים בעמודה תלויה בקבוצה אז אפשר לעבור:
- נבצע אותה כצירוף לינארי של הוקטורים שכבר נוצרו
- נגרל/נבחר וקטור חדש שימלא את מקומה להמשך תהליך GS.

→ תהליך GS

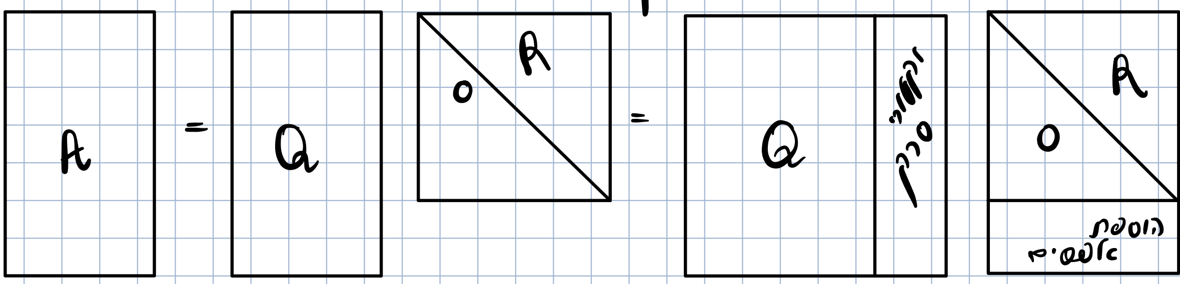
אם נתקלת בעמודה A התלויה בקבוצה, זורקים אותה וממשיכים בתהליך

<u>פירוק QR עבור מט' מלבניות:</u>

- כאשר המט' רחבה ונמוכה, עמודותיה חייבות להיות תלויות. אם נניח כי n העמודות הראשונות בת"ל נקבל כי יתר העמודות תלויות בהן ולכן עמודות R המתאימות מלאות.



• כאשר המט' גבוהה וצרה, ניתן לבצע שני מבני פירוק:



שימוש ב- QR לפתרון מערכת משוואות:

• A ריבועית $Ax = QRx = b \longrightarrow Rx = Q^t b$ ואז החלפה אחורית בשביל למצוא x

סיבוכיות n^3

וקטור

עדיף להשתמש ב- LU! סיבוכיות $\frac{n^3}{3}$

• A מלבנית גבוהה עם דרגה מלאה $Ax = QRx = b \longrightarrow Rx = Q^t b$

לא economy כלומר Q ריבועית

נשים לב כי תחתית של R מאופסת

לכן החלק התחתון בוקטור $Q^t b$ חייב להיות אפס

• אחרת החלק התחתון אינו מאופס לא קיים פתרון

• A מלבנית רחבה עם דרגה מלאה $Ax = QRx = b \to Rx = Q^t b$ המערכת הניתנת מספרת על דרגות החופש הקיימות במערכת המקורית

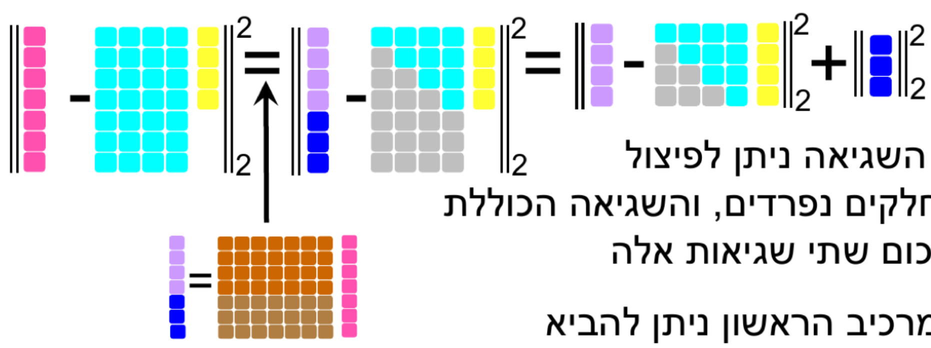
שימוש ב- QR עבור LS:

$$\min_x \|Ax-b\|_2^2 = \min_x \|QRx-b\|_2^2 = \min_x \|Q(Rx - Q^t b)\|_2^2 = \min_x \|Rx - Q^t b\|_2^2 = \min_x \|Q^t b - Rx\|_2^2$$

$QQ^t = I$

$\|Qv\|_2 = \|v\|_2$

נשים לב כי האפסים חסך מטריצה R לכן משפיעים על התוצאה של הנורמה אלא מוסיפים את הנורמה של הוקטור $Q^t b$ שלא התייחסנו אליו.



❑ וקטור השגיאה ניתן לפיצול לשני חלקים נפרדים, והשגיאה הכוללת היא סכום שתי שגיאות אלה

❑ את המרכיב הראשון ניתן להביא לערך אפס ע"י פתרון של החלפה אחורית

✓ יכולנו להשתמש ב- economy QR כדי לחסוך

סיבוכיות של LS עבור A $m\times n$

<u>QR:</u>

economy QR: mn^2

$Q^t b$: nm

הצבה אחורית : $n^2/2$

<u>Cholesky:</u>

$A^t A$: mn^2

Cholesky: $n^3/6$

הצבה קדמית ואחורית : n^2