אלגוריתם פירוק LU עבור $Ax=b$:

$A\in Mat_{n\times n}$

כאשר יש מקדם מוביל בשורה הראשונה?

כן

נדרג את המט' A וכל שלב:

לא

נסמן PA ונעשה החלפת שורות. כך שיהיה מקדם מוביל. גם עבור x-ו b

- נדרג ונשים לב שהפעולות שורה של שורה A תלויות רק בשורות מעל.
- נתון מט' E_1 מגודל $n\times n$ משולשת תחתונה כך שעל האלכסון אחדים והשינוי שעשינו באיבר הזה מתחת לאלכסון
- נכפיל משוואה A-ל את מט' E_1 עם משוואה את b
- נסמן $L_1=E_1^{-1}$ כך ש E_1^{-1} היא המשולשת התחתונה וכך האיבר מתחת לאלכסון שינה סימן.
- נמשיך כך בכל הפירוק:

כך שעבור לדוגמה 3 פעולות פירוק מתקיים:

$$E_3\cdot E_2\cdot E_1\cdot A\cdot x=E_3\cdot E_2\cdot E_1\cdot b$$

- נעבור למערכת משוואות שקולה:

$$U\bar{x}=E_3E_2E_1A\cdot x=E_3E_2E_1\cdot b\Rightarrow U=E_3E_2E_1A$$

$$b=(E_3E_2E_1)^{-1}\cdot Ux=L_1\cdot L_2\cdot L_3\cdot Ux=L\cdot Ux\Rightarrow L=L_1\cdot L_2\cdot L_3$$

$\Leftarrow$ לסיכום, $A=LU$ $\Leftarrow$ $Ax=LUx=b$

U מט' משולשת עליונה

L מט' משולשת תחתונה.

מט' משולשת תחתונה בסיסית:

- כל איברי האלכסון שלהן 1-ים.
- ממש יש איבר אחד בלבד מתחת לאלכסון ששונה מ-0.

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x&0&1\end{bmatrix}$$

האיבר שמשנה שורה איבר אחד ששונה מ-0

היפוך של מט' משולשת תחתונה בסיסית:

- האיברים מתחת לאלכסון הראשי מחליפים סימן

$$E^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-x&0&1\end{bmatrix}$$

נסמן את המט' ההפוכה ב-L.

כמה תכונות של מט' בסיסיות E:

- מט' משולשת תחתונה בסיסית תמיד הפיכה
- היפוך גם הוא מט' משולשת תחתונה בסיסית ופשוטה.
- מכפלת מטריצות משולשות תחתונות בסיסיות פשוטות יוצרת מטריצה משולשת בסיסית פשוטה.

לסיכום: מטריצה A תקרא "רגולה" אם היא ריבועית וניתן לפרקה למכפלה מהצורה $A=LU$ כאשר:

- L מט' משולשת תחתונה בסיסית ⟵ נשים לב שברגע $L=L_1\cdot L_2\cdot\ldots\cdot L_n$ פשוט נוספים האיברים מתחת לאלכסון בחיבור
- U מט' משולשת עליונה כאשר: עם איברי אלכסון הראשי שונים מ-0.

A רגולה אם היא ריבועית, לא סינגולרית ותפקיד LU עובד תקף.

איך משתמשים בפירוק LU על מנת לפתור מערכת משוואות?

- $Ax=LUx=L(Ux)=Ly=b \Longleftarrow y=U\cdot x$

הצבה קדמית מחשבת את הפרמטרים מלמעלה למטה.

- נפתור את המערכת משוואות ($Ly=b$) בעזרת הצבה קדמית
- אחרי שמצאנו את y נפתור מערכת משוואות שנייה בעזרת הצבה אחורית.

נשים לב שכמות החישובים בשיטה של הצבה = כמות של השיטה של מט' הופכית $= n^2$
אלגוריתם מקורי מט' הופכית $= \frac{4n^3}{3}$
פירוק $LU = \frac{n^3}{3}$

שלב 1: הצבה קדמית

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \longrightarrow$$

שלב 2: הצבה אחורית

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

שימוש בפרמוטציה (החלפת שורות):

משפט: לכל מט' ריבועית A ניתנת לפירוק מהצורה $PA=LU$ כאשר:

- P היא מט' פרמוטציה המחליפה סדר שורות
- L מט' משולשת תחתונה בסיסית
- U מט' משולשת עליונה רגילה.

$$Ax=b \;\Downarrow\; PAx=Pb \;\Downarrow\; LUx=Pb$$

חישוב דטרמיננטה בעזרת פירוק LU:

נניח כי: $PA=LU$:

$|PA|=|LU|=|L|\cdot|U|$

מכפלת איברי האלכסון $|L|=1$

מכפלת איברי האלכסון $|U|=?$

כי החלפת שורות $|P|=\pm1$

מכפלה ב -1 > את הדטרמיננטה

סיבוכיות $\Downarrow$ $\frac{n^3}{3}$

משפט: עבור מטריצה ריבועית A עם הפירוק $PA=LU$ אם כל איברי האלכסון הראשי של U שונים מ-0 אזי A לא סינגולרית (כלומר A הפיכה) אם יש 0 אחד אפילו באלכסון A סינגולרית (A לא הפיכה)

שיטה לבחירת pivot מקבלת:

- partial pivoting: בוחרים את איבר הציר בעל הערך הגדול ביותר (בערך מוחלט) מתחת בעמודתו
- full pivoting: מבצעים פרמוטציה של השורות ושל העמודות כך שבוחרים את האיבר הגדול ביותר בכל <u>יתר</u> המט'

מטריצה שלטת אלכסונית בלי P:

$A = L \cdot U$

A – שלטת אלכסונית; L – גם אלכסונית; U – גם אלכסונית

פירוק LDV:

בלי הגבלות

משפט: כל מט' A ריבועית שאינה סינגולרית ניתנת לפירוק מהצורה: $PA = LDV$ כאשר:

- P היא מט' פרמוטציה המחליפה סדר שורות.
- L מט' משולשת תחתונה בסיסית.
- V מט' משולשת עליונה בסיסית. (האלכסון הראשי שלו 1-ים)
- D מט' אלכסונית וכל איברי האלכסון שונים מ-0.

$U = D\cdot V$

איך מקבלים מט' כאלה:

נשים לב: כי כש-D אלכסונית
מכפלה מטריצה כלשהי משמאל
איברי האלכסון מכפילים את שורותיה

- מקבלים LU.
- איברי אלכסון D יהיו איברי אלכסון U.
- מנרמלים את השורות של V כך שמחלקים כל שורה באיבר המשויך לאלכסון שלה. (והאלכסון שלה יהיה 1-ים)

דטרמיננטה של A במקרה של פירוק LDV: $|PA| = \pm|D|$
מכפלת איברי אלכסון D עד כדי סימן.

! נשים לב למקרים הבאים שבהם אנחנו לא רוצים להתעסק עם פירוק LDV:

- מט' לא ריבועית, כלומר מלבנית.
- סינגולרית, כלומר הפיכה כי אז יש באיברי האלכסון יש איבר אחד לפחות שהוא אפס.

פירוק LDL^t:

מט' סימטריות לפירוק LDV עדין: → $A = A^t$

בלתי סינגולריות

כדי לשמור על הסימטריה נבצע את הדבר הבא:

$PA\cdot P^t = L\cdot D\cdot L^t$ נשים לב כי הפירוק הזה לא בהכרח קיים.

הפירוק הזה מתקיים עבור תת קבוצה של מט' הבאה:

משפט: כל מט' רגולרה וסימטרית A ניתנת לפירוק יחיד מהצורה $A=LDL^t$ כאשר:

- L מט' משולשת תחתונה בסיסית
- D מט' אלכסונית שאיברי האלכסון שלה שונים מ-0.

הוכחה: A מט׳ רגולה לכן קיים פירוק יחיד מהצורה $A=L\cdot U$

ללא פרמוטציות/והאלכסון של U שונה מ-0.

לכן ניתן לפרק את U ל- $U=DV$ כך ש: $A=L\cdot D\cdot V$

נבצע שחלוף על שני האגפים:

$$A^t=(L\cdot D\cdot V)^t=V^t\cdot D^t\cdot L^t$$

D אלכסונית כך ש: $D^t=D$:

$$A^t=V^t\cdot D\cdot L^t$$

נשים לב כי A סימטרית כלומר $A^t=A$:

$$A^t=V^t\cdot D\cdot L^t=L\cdot D\cdot V=A$$

כלומר: $V^t=L$ וגם $L^t=V$ לכן:

$$A=L\cdot D\cdot L^t$$

אפשר לכתוב כך כי הפירוק יחיד.

<u>מה נעשה כאשר המט׳ ריבועית, סימטרית, לכן סינגולרית אך איננה רגולה?</u>

לפעמים זה עובד עבור $P\cdot A\cdot P^t=L\cdot D\cdot L^t$ אבל יכול להיות שזה לא יעבוד!

לכן נצמצם את הטווח שלנו למטריצות הבאות:

<u>מטריצות חיוביות מוגדרות:</u> positive definite-PD

<u>וחצי מוגדרות:</u>

הגדרה: מט׳ ריבועית/סימטרית K הינה חיובית מוגדרת אם הוא מקיימת:

$$\forall x\neq 0,\quad x^tKx>0$$

סימון: $K\succ 0$

$$\boxed{x^t}\ \boxed{K}\ \boxed{x}=\underset{\text{סקלר}}{a}>0$$

נשים לב שאם מט׳ כיון PD לא בהכרח כל איבריה חיובים.

משפט: מט׳ ריבועית, סימטרית וחיובית מוגדרת PD. K הינה בהכרח לא סינגולרית

הכללה להגדרה: מטריצה חיובית מוגדרת למחצה — מטריצה ריבועית סימטרית K מוגדרת למט׳ חצי חיובית מוגדרת אם הוא מקיימת:

$$\forall x\neq 0,\quad x^tK\cdot x\geq 0$$

positive semi definite-PSD

מקורס רק על זה נדבר

<u>משפט:</u> מט' ריבועית $\boxed{\text{וסימטרית}}$ K היא חיובית מוגדרת $\boxed{\text{אם ורק אם}}$ היא ניתנת לפירוק
LDL^t <u>ללא</u> פרמוטציה, ועם מטריצה D בה כל האיברים חיוביים.

נשים לב כי מה משפט אפשר להבין ש- K תהיה רגולה. • ריבועית • איברי אלכסון
$0 < D$ • יש לה שירוק ללא פרמוטציות.

~~איך נגלה אם מט' חיובית מוגדרת?~~

- נתונה מטריצה K ריבועית סימטרית
  - ↓ $\boxed{\text{לבצע שרוק } LDL^t}$
    - הצליח והושלם → $\boxed{\text{אלכסון D חיובי?}}$
      - כן → $\boxed{K \text{ היא PD}}$
      - לא → $\boxed{K \text{ אינה PD}}$
    - לא הצליח / נתקע → $\boxed{K \text{ אינה PD}}$

<u>שירוק Cholesky:</u>

$\frac{n^3}{6}$ פעולות בגלל סימטריה (חצי מ LU)

מטריצה סימטרית/חיובית מוגדרת K היא בהכרח מטריצה "רגולה" כלומר קיים השרוק
הנ"ל ללא צורך בפרמוטציה

$$K = L\cdot D\cdot L^t$$

ובשירוק זה אלכסון המט' D חיובי ממש

הוכחה עבור החלק הזה של המשפט:

$K>0, \quad K = L\cdot D\cdot L^t$

$$\underbrace{x^t\cdot L}_{z^t}\cdot D\cdot \underbrace{L^t\cdot x}_{z} > 0 \qquad \forall x\neq 0 \qquad z = L^t\cdot x \qquad z^t = x^t\cdot L^t$$

$$\Downarrow$$

$$\forall z \neq 0$$

$$z^t\cdot D\cdot z > 0$$

• D אלכסונית.

• L מט' הפיכה שמשולשית תחת'

לכן יש קשר חח"ע בין x-ים ל- z-ים.

$\Longleftarrow$ נובע מכאן שלכל מט' PD (מטריצה חיובית מוגדרת) ניתנת לשרוק יחיד

מהצורה:

$$M = L\cdot D^{1/2} \qquad K = M\cdot M^t$$

זכו פירוק Cholesky והוא מעין "הוצאת שורש" משולש למט' K גדולת של

$n^3/6$ פעולות!

אפשר לרשום: $K = L\cdot D\cdot L^t = L\cdot D^{1/2}\cdot D^{1/2}\cdot L^t$

(מזכיר שיש שורש כי המט' חיובית)

נשים לב כי () אלכסונית אז בעצם זה הוצאת שורש מאיברי האלכסון. נסמן: $L\cdot D^{1/2}=M$ כך ש $D^{1/2}\cdot L^t=M^t$ כך ש:

$$K = M\cdot M^t$$

M הינו משולשת תחתונה!

• הערה: אם מכפילים מימין במט' אלכסונית בעצם מכפילים את העמודות
אם מכפילים משמאל במט' אלכסונית בעצם מכפילים את השורות.

מט' Gram: $K=A^t\cdot A$ כאשר A מט' כלשהי.

• מט' גרעם הינו בהכרח PSD

$$K=A^t\cdot A = \underbrace{x^t\cdot A^t}_{(A\cdot x)^t}\cdot A\cdot x = \|Ax\|_2^2 \geq 0$$

$$(A\cdot x)^t\cdot(A\cdot x)$$

• אם עמודותיה של A בת"ל, אזי מטריצה K הינה PD ($Ax=0$ מתאפס רק עם וקטור טריוויאלי)

משפט: אם C מט' חיובית מוגדרת וכן A מט' גדולת עמודות בת"ל, אזי: $K=A^t\cdot C\cdot A$ הינה מטריצה חיובית מוגדרת.

הוכחה

$$K=A^t\cdot C\cdot A \Rightarrow \underbrace{x^t\cdot A^t}_{(A\cdot x)^t}\cdot C\cdot A\cdot x = (A\cdot x)^t\cdot C\cdot(A\cdot x) = z^t\cdot C\cdot z>0$$

וקטור z^t

וקטור z

$z=A\cdot x$

לכן Ax לא יכול להתאפס לכל x שאינו טריוויאלי.
$\forall x\neq 0$

כל המטריצות האפשריות
↓
מט' ריבועיות
↓
מט' הפיכות
↓
מט' הפיכות וסימטריות
↓
מט' חיוביות מוגדרות PD