פ2 פירוק ערכים עצמיים ו-SVD:

עבור מטריצה ריבועית וממשית A בגודל $n \times n$. הסקלר λ והווקטור $V \neq 0$ נקראים ערך עצמי וקטור עצמי אם: $AV = \lambda V$

• מציאת ע"ע $|A - \lambda I| = 0 \rightarrow \lambda_k$

• מציאת ו"ע $(A - \lambda_k I) \cdot V_k = 0$

תכונות: $trace(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$

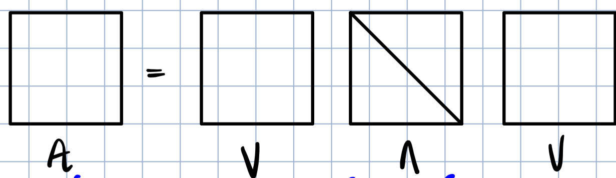
$|A| = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \rightarrow$ אם יוצא 0 אז יש לפחות $\lambda = 0$ אחד

• אם נמצא וקטור עצמי, V שאינו טריויאלי אז הכפלתו בסקלר מותירה אותו פתרון ראוי למשוואת $AV = \lambda V$ לכן מקובל לדרוש שהו"ע יהיו מנורמלים $\|V\|_2 = 1$

לכסון: עבור מטריצה ריבועית וממשית A בגודל $n \times n$, אם קיימים n הוקטורים העצמיים יוצרים בסיס למרחב R^n כך שהם בהכרח בת"ל, נאמר שהמטריצה לכסינה.

$$\begin{cases} AV_1 = \lambda_1 V_1 \\ \vdots \\ AV_k = \lambda_k V_k \\ \vdots \\ AV_n = \lambda_n V_n \end{cases} \longrightarrow AV = V\Lambda \longrightarrow A = V \Lambda V^{-1} \qquad \Lambda = V^{-1} A V$$

• למטריצה בגודל $n \times n$ יש תמיד n ע"ע שהם שורשים לפולי' חלק יכולים להיות מורכבים. (ואם הדימוי יופיע והו"ע במופעים גם)



• אם $\lambda_1 \neq \lambda_2$ אז $V_1 \neq V_2$ כך שהם בת"ל

תמונת זו של הכפלה מימין ומשמאל במטריצה והיסודה נקראת העתקת דימיון

כשמטריצה אלכסונית מוכפלה מטריצה מימין, (היא) פועלת על עמודותיה ומשמאל על שורותיה.

~~• מתי מטריצה לכסינה:~~

• אם כל ע"ע שונים זה מזה (כלומר כל ריבוי אלגברי הוא 1)

• אם ריבוים (האלגבריים והגיאומטריים) מתלכדים

• אם המטריצה ממשית ולכסינה, אזי (היא) ניתנת גם לפירוק Schur: $A = QTQ^t$

אורתוגונלית (אבל מרוכבים)

משולשת עליונה (אולי מרוכבת)

• שתי מטריצות דומות A ו-B ($B = V^{-1} A V$) חולקות אותם

ע"ע: $|A| = |B|$

כלומר מתקיים עבור פירוק Schur הע"ע של A הם גם אלו של T והם נמצאים על האלכסון

(דטרמיננטה של מט' משולשת היא כפל של איברי האלכסון)

! מטריצה משולשת עליונה של ערכיה העצמיים גלוי.

ריבוי אלגברי 1 מוביל לוקטורים עצמיים במבנה של מט' משולשת עליונה - הוקטור העצמי מתאים לערך λ_k "יראה" כך:

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

• היפוך של מט' משולשת עליונה גם משולשת עליונה ומכפלה של מט' משולשת עליונה היא גם משולשת עליונה

משפט - מט' ריבועית A נקראת לכסינה אם קיימת מטריצה לא סינגולרית S ומטריצה אלכסונית D כך שמתקיים: $S^{-1} A S = D$

<u>פירוק Schur:</u> את העתקת הדימיון הזו מבצע באמצעות מטריצה אורתונורמלית שהפוכה קל.

<u>משפט</u>- בהינתן מטריצה ריבועית A לכסינה ניתן למצוא מטריצה אורתונורמלית Q ומטריצה משולשת עליונה T ממשית כך שמתקיים: Q^tAQ

הערה: ! מטריצה משולשת עליונה עלולה להיות לא לכסינה אם ערכיה העצמיים בעלי ריבוי אלגברי גדול מ-1.

<u>מטריצות סימטריות:</u>

מטריצה A ריבועית, ממשית וסימטרית ← $A=A^t$

- אם A לכסינה קיים לה פירוק Schur ולכן: $T=T^t$ ← $A=QTQ^t$ (משולשת עליונה, אורתונורמלית)

במקרה הזה ניתן לומר ש-A לכסינה יוניטרית

אז T מכילה באלכסונה את ע"ע ועמודות Q מכילה ו"ע של A

<u>משפט</u>: אם A מט' ריבועית ממשית וסימטרית, אזי:
- המטריצה מהכרח לכסינה
- כל ערכיה העצמיים ממשיים
- כל וקטוריה העצמיים יכולים להיות ממשיים
- וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים יהיו אורתוגונליים.

← לכסון מטריצה סימטרית יראה כך:
$$Q^tAQ=D$$
פירוק הספקטרלי!

← נוכל להסתכל מחדש על A סימטרית ועל הלכסון שלה כך: $A=V\cdot D\cdot V^{-1}$ כאשר עמודות V הן ו"ע נעשה נרמול עבור כל עמודה אז $A=Q\cdot D\cdot Q^t$ כך שלא צריך לעשות היפוך.

- לפירוק הספקטרלי $A=QDQ^t$ יש פרשנות מעניינת המסייעת להבין את פעולתה של מט' A סימטרית בהכפלה בוקטור:
$$A\underline{x}=QDQ^t\underline{x}$$
- סובב את הוקטור סביב הראשית על ידי הכפלה $Q^t\underline{x}$
- מתח כל איבר בנפרד על ידי הכפלה במטריצה האלכסונית D. ערכים שליליים מייצגים שיקוף
לבסוף סובב את התוצאה על ידי הכפלה ב-Q

מטריצה סימטרית ניתנת לתיאור כסכום משוקלל של מט' סימטריות מדרגה 1.
$$A=QDQ^t=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k v_k v_k^t \ !$$

ערכים עצמיים של מטריצות PD:

משפט: אם A היא מטריצה ריבועית ממשית סימטרית וחיובית מוגדרת PD, אזי כל ערכיה העצמיים חיוביים.

משפט: אם A היא מטריצה ריבועית ממשית סימטרית וחיובית חצי מוגדרת PSD, אזי כל ערכיה העצמיים אי שליליים.

! A היא PD ולכן: $\forall x\neq 0 \quad x^tAx>0$

בנוסף K סימטרית ולכן קיים לה פירוק ספקטרלי:

$$\forall x\neq 0 \quad x^tAx = x^tQDQ^tx = (Q^tx)^tD(Q^tx)>0$$

נגדיר $z=Q^tx$ ונקבל כי:

$$\forall z\neq 0 \quad x^tAx = z^tDz = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k z_k^2>0$$

~~[illegible]~~

נניח כי מימינו מטריצה אלכסונית

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים יכולים להתקבל כפתרון של בעיות אופטימיזציה:

אם A מטריצה סימטרית אזי:

$$\max_{\{x \mid x^t x = 1\}} x^t A x = \max_{x} \frac{x^t A x}{x^t x} = \lambda_1$$

כאשר λ_1 הוא ע"ע הגדול ביותר של A

באופן דומה אפשר להגיע לערך עצמי הקטן ביותר ולווקטור העצמי

$$\min_{\{x \mid x^t x = 1\}} x^t A x = \max_{x} \frac{x^t A x}{x^t x} = \lambda_n$$