Rapport de Réflexion : Optimisation du Multi-Product Vehicule Routing Problem with Changeover Cost (MPVRP-CC)

Présentation du Problème

Le Multi-Product Vehicule Routing Problem with Changeover Cost (MPVRP-CC) est une extension complexe du problème de tournées de véhicules classique (VRP). Il traite de la distribution de plusieurs types de produits (ex : essence, diesel, kérosène) depuis des dépôts vers des stations-service.

L'originalité et la difficulté de ce problème résident dans la gestion des coûts de transition.

Un camion ne peut transporter qu'un seul type de produit à la fois dans son réservoir. Pour changer de produit lors d'un passage au dépôt, le réservoir doit subir un nettoyage, ce qui engendre un coût monétaire et logistique non négligeable. L'objectif est donc de trouver un équilibre optimal entre les distances parcourues et la fréquence des changements de produits pour minimiser le coût global d'exploitation.

1. Modélisation Mathématique

1.1. Données du Problème (Inputs)

Le problème repose sur les ensembles et paramètres suivants :

Ensembles :

- K : Ensemble des camions disponibles, $K = \{1,\ldots, |K|\}$.
- P : Ensemble des types de produits, $P = \{1,\ldots, |P|\}$.
- G : Ensemble des garages (points de départ et d'arrivée).
- D : Ensemble des dépôts (points de chargement).
- S : Ensemble des stations-service (clients).

Paramètres :

- $Dist_{i,j}$: Distance euclidienne entre le site i et le site j.

- Cap_k : Capacité maximale de transport du véhicule k.
- $Dem_{s,p}$: Quantité de produit p requise par la station s.
- $Cost_{p1,p2}$: Coût de nettoyage pour passer du produit p_1 au produit p_2 .

  $InitProd_k$: Configuration initiale du produit pour le camion k.

1.2. Variables de Décision

Pour modéliser les flux et les décisions logistiques :

- $x_{i,j,k}$: Variable binaire égale à 1 si le véhicule k traverse l'arc (i,j) , 0 sinon.
- $q_{k,m}$: Quantité chargée par le véhicule k lors de son $m_{ième}$ passage au dépôt.
- $z_{k,m}$: Type de produit $p \in P$ transporté par le véhicule $_k$ durant sa $m_{ième}$ mini-tournée.
- $y_{k,m}$: Variable binaire indiquant si un nettoyage est effectué avant la mini-tournée m.

1.3. Contraintes du Système

Une solution valide doit respecter les contraintes opérationnelles suivantes :

- **Satisfaction de la demande**

Chaque station $s \in S$ doit recevoir la quantité exacte de chaque produit $p \in P$ demandée.

$$\sum_{k \in K} \sum_{m=1}^{M} 1_{\{z_{k,m}=p\}}.\ (quantité\ livrée\ à\ s\ par\ k\ en\ tournée\ m) = Dem_{s,p}\ \forall\ s\ \in S, \forall p \in P$$

- **Respect de la capacité**

La quantité totale $q_{k,m}$chargée au dépôt pour une mini-tournée ne doit jamais excéder sa capacité du camion.

$$q_{k,m} \leq Cap_k \quad \forall k \in K, \forall m \in \{1, \dots, M\}$$

Aussi, la somme des livraisons effectuées aux stations durant la mini-tournée m doit être égale à $q_{k,m}$

- **Structure des routes**

Le camion doit partir de son garage, passer par des dépôts et stations et au garage.

- Départ et retour

$$\sum_{j \in D \cup S} x_{g,j,k} = 1 \; et \sum_{i \in D \cup S} x_{i,g,k} = 1 \quad \forall k \in K, \forall g \in G \; (si\ g\ est\ le\ garage\ de\ k)$$

- Continuité

$$\sum_{i \in N} x_{i,j,k} = 1 \; et \sum_{l \in N} x_{j,l,k} = 0 \;\; \forall j \in S \cup D, \forall k \in K$$

- **Gestion des mini-tournées**

Un camion ne transporte qu'un seul produit p entre deux passages au dépôt. Un cout de nettoyage $y_{m,n}$ est activé si le produit de la mini-tournée $m-1$

- Activation du nettoyage : si $z_{k,m} \neq \; z_{k,m-1}$, alors $y_{k,m} = 1$. Mathématiquement (linéarisation) :

$$y_{k,m} \geq 1_{\{z_{k,m} \neq z_{k,m-1}\}}$$

- Cout dans la fonction objective : le cout total à minimiser inclura : $\sum_{k,m} Cost_{z_{k,m-1},z_{k,m}}$

- **Unicité de service**

Une station s ne peut être visitée qu'une seule fois par la même camion k lors d'une mini-tournée m spécifique.

$$\sum_{i \in N} x_{i,s,k,m} \leq 1 \quad \forall s \in J, \forall k \in K, \forall m \in \{1, \dots, M\}$$

1.4. Fonction Objectif

L'objectif est de déterminer les tournées de l'ensemble de la flotte afin de minimiser le coût total Z :

$$Min\ Z = \sum_{k\in K}\sum_{i\in N}\sum_{j\in N} Dist_{i,j}\ .\ x_{i,j,k} + \sum_{p1\in P}\ \sum_{p2\in P, p1\neq p1} Cost_{P1,p2} \propto_{k,m,p1,p2}$$

Ou $\propto_{k,m,p1,p2}$ est une variable binaire qui vaut 1 si le camion k passe du produit p_1 au produit p_2 à la mini-tournée m.

Le premier terme représente le **coût de distance** et le second terme représente le **coût total de nettoyage**.

2. Perspectives de Résolution

Étant donné que le MPVRP-CC est un problème **NP-difficile**, plusieurs approches peuvent être envisagées selon la taille des instances :

- **Heuristiques :** Algorithmes de construction rapide (type *Savings Algorithm* de Clarke and Wright) adaptés au multi-produit.
- **Méta-heuristiques :** Utilisation du *Large Neighborhood Search* (LNS) pour optimiser les séquences de livraison ou de la *Recherche Tabou* pour gérer les transitions de produits.