

彩虹散射的半经典模型研究

赵莹杉*

张腾洲†

金磊‡

2022 年 3 月

Abstract

弹性散射是核反应最基本的类型之一。 α 粒子和一些紧束缚轻核在中能弹性散射的过程中会产生核虹现象，这主要表现为散射截面在中等到大角度区域的 Airy 图样，和光学的虹现象具有相似之处。本文首先将几何光学的虹现象同经典散射的散射径迹进行了对比。接着回顾了核散射的光学势模型和计算球对称势散射的分波法，并用其计算了两个具有核虹现象的典型体系，对 132 MeV 下 $^{16}\text{O} + ^{12}\text{C}$ 体系进行了具体的分析研究。我们对散射振幅进行了远近端分解，验证了 Airy 图样与远端散射截面的关联，并对散射波函数进行可视化，展现了彩虹散射的特征图像。进一步分析了纯核势情况下的散射振幅，发现其中起到主导作用的为远端部分。依据经典和半经典的方法计算了偏转函数并寻找极值位置，将远端振幅划分成角动量较小和较大的两组，并验证了是这两组振幅干涉产生 Airy 图样。同时将散射波函数从近场到渐进行为的连续过程可视化，发现散射截面的主要特征直到强吸收半径之外才开始出现，且相对无穷远处还存在一些角度偏移，这对理解弹性散射过程的近场特性也有所帮助。

*学号：1952275 第一主持人

†学号：1853590 成员

‡指导教师

1 引言

1.1 彩虹散射现象

大气彩虹是一种光学现象，当太阳光进入水滴，经过多次折射、反射过程，在天空对面形成光谱。除了美丽的色散现象，还有一种非常有趣的物理现象就是虹角 $\Theta_R \approx 42^\circ$ 附近光强的增大及相应伴随的 Θ_R 后的暗区。故而虽然离开水滴的光呈扇形展开，分布在很广的角度，但人们观察到的彩虹总是在 42° 附近的。

图1为彩虹散射的示意图。经过“折射-反射-折射”过程，光线的偏转函数 $\Theta(b)$ 不再是从 1 号光线最大负散射角 180° 单调减小的，而在 7 号光线为最小负散射角 138° 后发生了转折，因而此处附近光线叠加（如图上 6-12 号），增大了虹角处的光强。而除了常见的主彩虹外，光线经过两次反射、多次反射后出射也会相应地形成次级彩虹、高阶彩虹，并处于相应的各级虹角处 [1]。值得说明的是，虹角的位置仅与折射率有关，而与水滴大小无关。

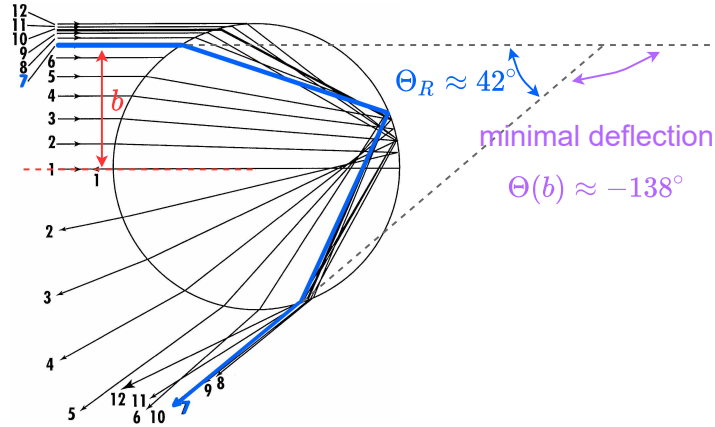


Figure 1: 不同碰撞参数 b 入射的光线进入球形水滴，经过“折射-反射-折射”过程出射并散开的示意图。其中第 7 条光线为彩虹光线，对应的折射角度为最小负散射角，即得到初级虹角 $\Theta_R \approx 42^\circ$ 。引用自参考文献 [1]。

一些经典的理论定义散射截面 $d\sigma/d\Omega$ 表示光强：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_b \frac{b}{\sin \Theta(b) |d\Theta(b)/db|} \quad (1)$$

但这样简单的描述会造成虹角 Θ_R 处散射截面的发散（极值点处 $d\Theta(b)/db = 0$ ），且在 Descartes, Newton 和 Young 的理论中都未得到解决，此外还有多级虹角的来源等问题，都直至 19 世纪 Airy 基于光波的衍射与干涉建立的数学模型才得以清晰描述。虽然后来人们发展了很多更精确巧妙的方法来研究大气彩虹，但 Airy 的模型仍然是非常简

单有效的近似描述，并被广泛应用于研究分子、原子及核物理领域中具有彩虹散射特征的问题 [2]。

1.2 半经典视角下的核虹

大气彩虹可以理解为电磁波在不同介质间的传播，但介质内部是均匀的。而两体弹性散射则是质心系下弹核波函数在靶核势场下的运动，且在一些轻重离子（HI）系统中，核势具有强烈的吸引作用和微弱的吸收作用，使得弹核波函数的衍射和干涉行为与大气彩虹非常相似。

从弹核运动的角度分析，在靶核的强吸引作用下其运动方向发生大角度偏转，呈现出类似大气彩虹中光线折射、反射的行为。图2便绘制了具有彩虹散射特征的两体弹性散射中弹核的经典轨迹示意图。

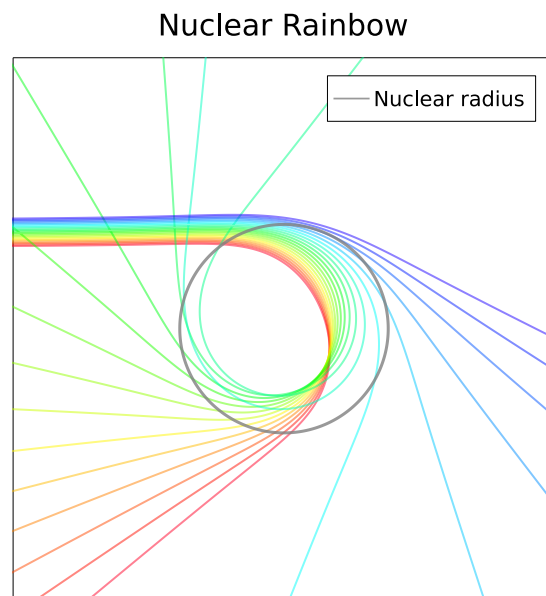


Figure 2: 原子核弹性散射经典轨迹示意图。在吸引核势的作用下，弹核的轨迹出现与图1示大气彩虹光线相似的特征。

而类比系统的波动性质，弹核的德布罗意波长为：

$$\lambda_B(r) = h / \sqrt{2\mu[E - V(r)]} \quad (2)$$

相应地，我们可以认为在核势作用范围内，有“折射率”：[2]

$$n(r) = \sqrt{1 - V(r)/E} > 1 \quad (3)$$

该“折射率”是随着核子间相互作用变化而变化的，导致核虹现象要比大气彩虹更为复杂多变，表现出对系统核势的强依赖性。

1972 年, Goldberg 等人在 $E_{\text{lab}} \approx 140 \text{ MeV}$ 下 α 粒子与重离子散射的实验中第一次观察到彩虹散射现象 [3], 在大角度处发现宽广的相对散射截面 σ/σ_R 极大值, 即为核虹。后来 IreS, HMI 等机构测得了各种能量下的 $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ 散射数据, 被认为是目前能在弹性散射截面中呈现彩虹图案的最重的 HI 系统。后续又有 Ogloblin 等人研究了 $^{16}\text{O} + ^{12}\text{C}$ 的弹性散射过程。这些实验数据为研究核结构及核核间相互作用提供了非常有效的信息。本文将建立求解原子核弹性散射的分波散射模型, 根据可考的实验数据进行计算, 并基于半经典模型对现象和结果进行分析讨论。

2 理论模型

2.1 光学势与分波法

2.1.1 光学势简介

光学势 (OP) 是一种唯像的复数势, 常用于求解原子核散射问题。类比于光学散射中的折射和吸收, 其实部与虚部分别对应了“弹性散射反应道”与“非弹性散射反应道”中核核间的相互作用。因此, 在研究彩虹散射时, 光学势的确定无疑是最重要的物理量。由于本文侧重于分析展示散射过程及现象, 故而在光学势的理论基础推导方面不再赘述, 且之后将直接使用已测得的势参数进行计算。

我们将使用六参量的 Woods-Saxon 形式 (WS 势), 并忽略核子自旋等其他效应, 只考虑体积项, 即:

$$V(r) = -\frac{V}{1 + \exp(\frac{r-R_V}{a_V})} - i\frac{W}{1 + \exp(\frac{r-R_W}{a_W})} \quad (4)$$

其中 V (有能量量纲) 表示势阱深度, r 是与核中心的距离, R 为原子核的测量半径, a 为核表面的弥散度 [4]。

2.1.2 基于分波法的量子散射模型

三维坐标空间下定态薛定谔方程为:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V\right)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (5)$$

其中, 由于库伦势 V_C 具有 r^{-1} 的渐进行为, 与短程的核势 V_N 性质不同, 需单独记出, 故势能项 $V = V_C + V_N$ 。

因为我们求解的是球对称的势能, 故可以引入球坐标使计算获得简化, 引入约化势 $U(r)$ 和波矢 k :

$$U_C(r) = \frac{V_C(r)}{E}, \quad U_N(r) = \frac{V_N(r)}{E}, \quad k \equiv \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar} \quad (6)$$

于是定态薛定谔方程可化为:

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\mathbf{L}^2 - k^2 U_C(r) - k^2 U_N(r) + k^2\right]\psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (7)$$

考虑球坐标系下可分离变量的解:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} R_{l,m}(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (8)$$

波函数的角向部分的本征函数即为球谐函数，因此，我们关注的重点是在球对称势的作用下径向波函数的情况。下面给出径向波函数满足的方程：

$$\frac{r}{R_{l,m}} \frac{d^2}{dr^2} r R_{l,m}(r) + k^2 r^2 [1 - U_C(r) - U_N(r)] = l(l+1) \quad (9)$$

通过引入约化长度与径向约化波函数：

$$u_l(\rho) = \rho R_l(\rho), \quad \rho \equiv kr. \quad (10)$$

我们最终得到了径向方程的约化形式：

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 1 - U_C(\rho) - U_N(\rho) \right] u_l(\rho) = 0 \quad (11)$$

由于在原点附近，即 $\rho \rightarrow 0$ 区域，函数 $u_l(\rho)$ 为有限值，故其渐进级数解为：

$$u_l(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \rho^{l+1} \quad (12)$$

考察我们已经得到的径向方程，由于核力是短程相互作用，在一定远处（假设该点为 $r = r_0$ ）外我们可以认为核势为零，散射波函数 $R_l(r)$ 的渐进行为与理想点电荷库伦势散射方程的径向部分一致，即可以用库伦函数 [4] 的线性组合解析表示：

$$u_l(\rho) = \rho R_l(\rho) \xrightarrow{\rho > kr_0} A_l F_l(\rho) + B_l G_l(\rho) \quad (13)$$

其中，两个函数 $F_l(\eta, \rho), G_l(\eta, \rho)$ 分别是第一和第二类库伦函数 ($\eta = Z_1 Z_2 e^2 / (\hbar v)$)，它们满足以下的条件：

- 当库伦势不存在（即 $\eta = 0$ ）的情况下退化为球面波

$$F_l(0, \rho) = \rho j_l(\rho); \quad G_l(0, \rho) = -\rho \gamma_l(\rho) \quad (14)$$

- Wronskian relation

$$G_l(\eta, \rho) \frac{dF_l(\eta, \rho)}{d\rho} - F_l(\eta, \rho) \frac{dG_l(\eta, \rho)}{d\rho} = 1 \quad (15)$$

为了便于表示和计算，我们通过库伦汉克尔函数构造对称的入射和出射行波解。同时，这也使得在边界处求导形式更为简洁：

$$H_l^\pm(\eta, \rho) = G_l(\eta, \rho) \pm i F_l(\eta, \rho) \quad (16)$$

有渐进行为 [4]：

$$H_l^\pm(\eta, \rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} e^{i\Theta}, \quad \text{where } \Theta = \rho - l\pi/2 + \sigma_l(\eta) - \eta \ln(2\rho) \quad (17)$$

并规定库伦相移 $\sigma_l(\eta) = \arg \Gamma(1 + l + i\eta)$

考虑某点电荷库伦散射，其解的分波展开是并不收敛的。对于波矢为 \mathbf{k} 的入射态，它的解是 [5]：

$$\psi_C^\pm(\mathbf{r}) = \Gamma(1 \pm i\eta) e^{-\pi\eta/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} M(\mp i\eta; 1; \pm ikr - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (18)$$

其中 $M(a; b; z) \equiv {}_1F_1(a; b; z)$ 是 Kummer 函数（第一类合流超几何函数）。分波表示为：

$$\psi_C^\pm(\mathbf{r}) = \frac{1}{kr} \sum_l^\infty (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) F_l(kr) \quad (19)$$

考虑波函数解的线性性，取一个统一振幅 A ，可得到我们待求渐进解的形式：

$$u_l(\rho) = A [H_l^-(\rho) - \mathbf{S}_l H_l^+(\rho)] \quad (20)$$

其中复系数 \mathbf{S}_l 为散射矩阵元，它表征了势场对入射分波的散射作用。随着分波阶数变高，该参数趋于 1。它也可以通过相移 δ_l 来描述：

$$\mathbf{S}_l = e^{2i\delta_l}, \quad \text{where } \delta_l = \sigma_l(\eta) + \delta_l^N \quad (21)$$

也就是说，势场引起的总相移由库伦相移与额外附加的核势相移 δ_l^N 构成。

假设入射波为库伦平面波态，在球坐标系下使用库伦汉克尔函数表达为：

$$\begin{aligned} \psi_{\text{in}}(r, \theta) &= \sum_l^\infty (2l+1) i^l P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \frac{1}{kr} F_l(kr) \\ &= \frac{1}{kr} \sum_l^\infty (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) \frac{i}{2} [H_l^-(kr) - H_l^+(kr)] \end{aligned} \quad (22)$$

将前述的渐进行为与球面波分波对比，得到振幅 A 的大小即为 $i/2$ 。

在明确了波函数在 $\rho > \rho_0$ 处的渐进解的形式后，我们最终将波函数 $u_l(\rho)$ 分为匹配半径 $\rho_0 = kr_0$ 内外两部分来求解。在 $\rho < \rho_0$ 区域（internal 部分），以原点处的渐进级数解为初始条件，约化径向方程为运动微分方程，数值求解波函数；而在 $\rho > \rho_0$ 区域（external 部分），则取库伦函数的线性组合为波函数的解析解：

$$\begin{cases} \text{internal:} & u_l'' = \left[\frac{l(l+1)}{\rho^2} + U - 1 \right] u_l, \quad u_l \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \rho^{l+1} \\ \text{external:} & u_l = \frac{i}{2} (H_l^-(\rho) - \mathbf{S}_l H_l^+(\rho)) \end{cases} \quad (23)$$

由于在 internal 区域内，我们在原点处的边界条件是由微分方程在原点处的渐进解得出的，其与真正的波函数相差比例系数 B ；连同散射矩阵元 \mathbf{S}_l ，我们现在有两个未知

数。在匹配半径 ρ_0 处 (boundary), 波函数及其一阶导数需要连续, 这恰给我们提供了两个线性方程。故而通过边界条件来求得内外部波函数振幅的关系:

$$\begin{cases} B \cdot u_l^{\text{int}}(\rho_0) = \frac{i}{2} [H_l^-(\rho_0) - \mathbf{S}_l H_l^+(\rho_0)] \\ B \cdot \frac{d}{d\rho} u_l^{\text{int}}(\rho_0) = \frac{i}{2} [H_l^{-'}(\rho_0) - \mathbf{S}_l H_l^{+'}(\rho_0)] \end{cases} \quad (24)$$

最后使用系数 B 来对已经得到的数值解作归一化处理, 就可以得到完整的各阶分波径向函数表达式了。由于库伦势的特殊性, 这样的分波展开求和并不收敛。因此, 可以将散射波函数分解为两个部分, 即库伦平面波的散射波函数和额外由核势带来的扭曲。即做分解:

$$\psi_{\text{sc}} = \psi_C^+ + \psi_N \quad (25)$$

前者已由解析式 (18) 给出。后者则通过对各阶波函数减去库伦平面波分量再求和得到, 它随分波阶数 l 的增高于有限阶收敛, 可以精确地描述核散射部分。于是核势影响的散射波函数的表达式为:

$$\psi_N(r, \theta) = \frac{1}{kr} \sum_l (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) [u_l(kr) - F_l(kr)] \quad (26)$$

相应地, 散射振幅也需要分为两个部分, 其中库伦点散射振幅可解析给出 [5]:

$$f_C(\theta) = -\frac{\eta}{2k \sin^2(\theta/2)} \exp[-i\eta \ln(\sin^2(\theta/2)) + 2i\sigma_0(\eta)] \quad (27)$$

而仅有点库伦势作用的散射截面就是经典卢瑟福散射截面:

$$\sigma_{\text{Ruth}}(\theta) = |f_C(\theta)|^2 = \frac{\eta^2}{4k^2 \sin^4(\theta/2)} \quad (28)$$

令 $\mathbf{S}_l^N = e^{2i\delta_l^N}$, 则额外附加的核散射振幅 (注意并非仅由核势作用的散射振幅) 为:

$$f_N(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1) P_l(\cos \theta) (\mathbf{S}_l^N - 1) e^{2i\sigma_l(\eta)} \quad (29)$$

由于 \mathbf{S}_l^N 在较高阶分波下很快趋于 1, 该级数在数值上收敛于有限阶。

总的散射振幅是库伦点散射振幅与造成扭曲的核散射振幅的叠加, 总散射截面为:

$$\sigma_{\text{total}}(\theta) = |f_C(\theta) + f_N(\theta)|^2 \quad (30)$$

2.2 散射波的近远端分解

2.2.1 散射角分布的半经典描述

为了理解散射截面中艾里振荡图样的出现,我们可以从经典的运动轨迹出发。图3展示了弱吸收下弹性散射的典型轨迹及相应的偏转函数 Θ 。 Θ 与碰撞参数 R 有关,或者用轨道量子数 l 表示 ($\sqrt{l(l+1)} = kR$)。在分别由短程强吸引核势、库伦排斥势主导的情况下,弹核相应发生负、正角度偏转(即图中的 $\Theta_R^{(N)}, \Theta_R^{(C)}$)。可以发现 $\Theta(l)$ 存在两个极值,根据 Airy 关于光学上大气彩虹现象的理论 [6],在正角和负角处将分别有不同阶分波干涉产生的核虹与库伦虹。

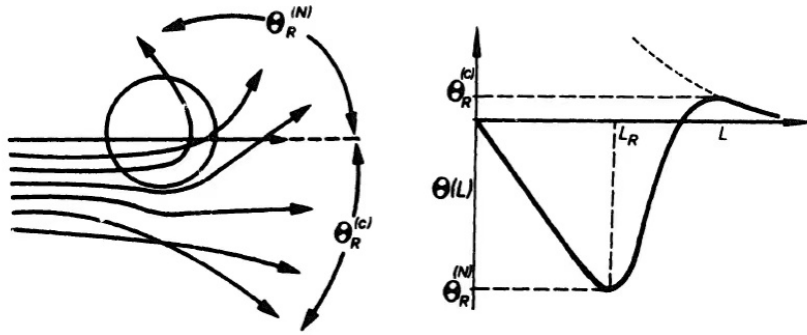


Figure 3: 左图为弹核在短程强吸引核势与长程库伦势的共同作用下的经典力学散射轨迹。右图为相应的折射函数。图片引用自参考文献 [7]

在某散射角 θ 下得到的散射强度由三种分波共同干涉产生(见图4)。其中偏转函数 $\Theta > 0$ 的部分(图示 Nearside Trajectory)为近端散射,而 $\Theta < 0$ 的部分(图示 Farside Trajectory)为远端散射。再将 $\Theta(l) < 0$ 时的极值点两侧分为 $l_<$ 和 $l_>$,它们共同构成远端散射;在弹性散射中远端散射越强,核虹结构越明显,所展示的核核间光学势的信息越多。我们考虑将量子模型解得的各阶分波也相应地划分为近端与远端两个部分,进而分析研究散射截面的图像和特征。

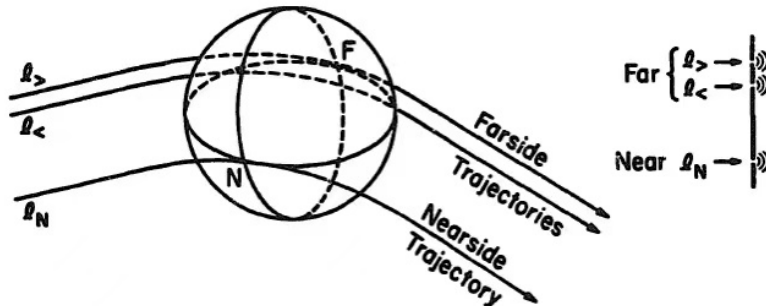


Figure 4: 散射示意图: 有三条半经典轨迹指向了相同的散射角方向,类似于三狭缝干涉的现象。图片引用自参考文献 [8]

2.2.2 近远端分解方法

我们使用 R.C.Fuller[9] 的方法将散射振幅分解为“Far”和“Near”两部分，下面对这一方法进行一些阐述。对于仅有短程势能的情形，可以将分波展开中的勒让德多项式 $P_l(\cos \theta)$ 整体换为行波分量 $\tilde{Q}_l^\pm(\cos \theta)$ ，它们分别对应了角向函数的正向和负向行波：

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_l^\pm(\cos \theta) &= \frac{1}{2}P_l(\cos \theta) \mp \frac{i}{\pi}Q_l(\cos \theta) \\ P_l(\cos \theta) &= \tilde{Q}_l^+(\cos \theta) + \tilde{Q}_l^-(\cos \theta)\end{aligned}\quad (31)$$

其中 $Q_l(x)$ 为第二类勒让德函数。

相应的散射截面为：

$$f_{\text{F/N}}(\theta) = \sum_l (2l+1) \tilde{Q}_l^\pm(\cos \theta) \cdot \frac{1}{2ik} (\mathbf{S}_l - 1) \quad (32)$$

但是对于含库伦势的散射过程，库伦散射波函数在分解以后也不收敛。对此，需要将库伦散射振幅与核散射振幅单独进行分解。后者的分解方法和上述相同：

$$f_{\text{N,F/N}}(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1) \tilde{Q}_l(\cos \theta) (\mathbf{S}_l^N - 1) e^{2i\sigma_l(\eta)} \quad (33)$$

而对于库伦散射振幅，则先定义一个辅助函数（其中 ${}_2F_1$ 为合流超几何函数）：

$$S(\theta) = (1 + i\eta)^{-1} {}_2F_1[1, 1 + i\eta, 2 + i\eta; \sin^2(\theta/2)] \quad (34)$$

则相应的远端、近端振幅可以分解为 [9]：

$$\begin{aligned}f_{\text{C,F}}(\theta)/f_{\text{C}}(\theta) &= \frac{-e^{-2\pi\eta}}{1 - e^{-2\pi\eta}} + \frac{i}{2\pi} [\sin^2(\theta/2)]^{1+i\eta} S(\theta) \\ f_{\text{C,N}}(\theta)/f_{\text{C}}(\theta) &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi\eta}} - \frac{i}{2\pi} [\sin^2(\theta/2)]^{1+i\eta} S(\theta)\end{aligned}\quad (35)$$

而整体的远近端散射幅可以由库伦与核散射振幅的两个部分加和得到：

$$\begin{aligned}f_{\text{F}}(\theta) &= f_{\text{C,F}}(\theta) + f_{\text{N,F}}(\theta) \\ f_{\text{N}}(\theta) &= f_{\text{C,N}}(\theta) + f_{\text{N,N}}(\theta)\end{aligned}\quad (36)$$

类似地，我们可以将核散射波函数部分为两部分：

$$\begin{aligned}\psi_{\text{N,F}}(r, \theta) &= \frac{1}{kr} \sum_l (2l+1) i^l \tilde{Q}_l^+(\cos \theta) [u_l(kr) - F_l(kr)] \\ \psi_{\text{N,N}}(r, \theta) &= \frac{1}{kr} \sum_l (2l+1) i^l \tilde{Q}_l^-(\cos \theta) [u_l(kr) - F_l(kr)]\end{aligned}\quad (37)$$

近端和远端散射的干涉在库伦虹的形成中起了主导作用。核势的远端散射又可以使用半经典的方式分为两部分，两部分的干涉产生了核虹。

3 结果分析

3.1 散射截面及散射波函数可视化

为了验证程序的正确性，我们首先计算了两组实验数据可考证的散射系统，并将散射截面与程序 FRESKO[4] 所得结果进行对比。分别使用 Ogloblin 测量的 132 MeV 下 $^{16}\text{O} + ^{12}\text{C}$ 系统 [10] 及 Put 和 Paans 测量的 79.5 MeV 下 $\alpha + ^{90}\text{Zr}$ 系统 [11] 的 WS 势参数：

System	$E_{\text{lab}}(\text{MeV})$	$V(\text{MeV})$	$r_V(\text{fm})$	$a_V(\text{fm})$	$W(\text{MeV})$	$r_W(\text{fm})$	$a_W(\text{fm})$
$^{16}\text{O} + ^{12}\text{C}$	132.0	282.2	0.586	0.978	13.86	1.183	0.656
$\alpha + ^{90}\text{Zr}$	79.5	141.2	1.225	0.821	18.49	1.575	0.565

散射截面的对比图及相应的实验数据见图5。可以发现全部结果都吻合良好，初级艾里斑位置清晰准确（分别位于大约 80° 及 90° ），印证了本文建立模型的可靠性。

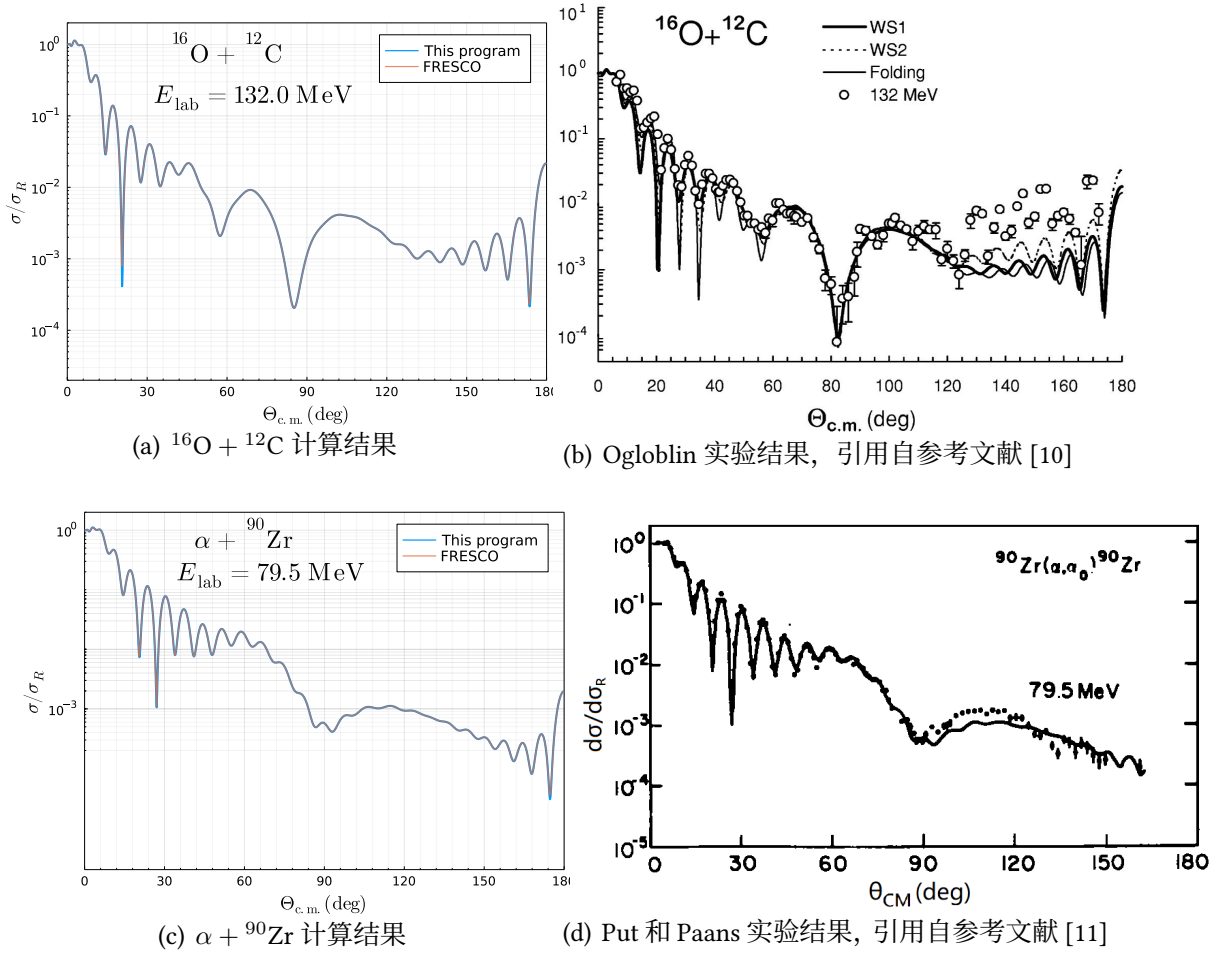


Figure 5: 两种系统的分波法数值计算结果与标准 FRESKO 程序及实验数据的对比。

在此基础上，我们对 $^{16}\text{O} + ^{12}\text{C}$ 的散射截面进行近远端分解，得到三个微分截面见图6。在前角区可以观察到近远端散射振幅干涉产生的夫琅禾费衍射图案，即在 $\Theta_{\text{c.m.}} = 10^\circ - 40^\circ$ 的区域，远端近端振幅都较为平滑且幅值在一个量级，而总散射振幅却发生了剧烈的振荡。而在后角区的振荡则主要由远端散射主导了，在图中体现为， $\Theta_{\text{c.m.}} \approx 85^\circ$ 及 $\Theta_{\text{c.m.}} \approx 57^\circ$ 处分别出现了初级 (A_1) 与次级 (A_2) 艾里斑，我们注意到，此处总散射振幅几乎和远端散射振幅曲线重合，说明这个位置的主要特征几乎都来自远端散射的两个部分 $l_>, l_<$ 。此外，我们又注意到，远端截面在更大的角度就偏离了总截面，这是由于库伦势和吸收作用的影响较大。

因此，若要观察到发生在中间角度的明显核虹现象，光学势的实部需足够深，吸引足够强，才能产生大角度的远端散射。同时，注意到距离靶核较近时非弹性散射道引起的吸收作用较强，使得 $l_<$ 的弹性散射振幅削弱幅度远大于 $l_>$ ，故而为了让 $l_<$ 部分仍能有所贡献，远端弹性散射的干涉条纹不至于消失，光学势的虚部必须足够弱。

另外，诸多实验结果表明了势对能量的依赖性，即使是同一散射系统，不同能量下的等效光学势也是不同的。这些实验为研究原子核的密度分布提供了非常有效的信息，也是最早的研究方法之一。[12] 本文意于研究彩虹散射的物理图像，故仅选取 Ogloblin 测量的 132 MeV 下 $^{16}\text{O} + ^{12}\text{C}$ 散射做分析和展示。

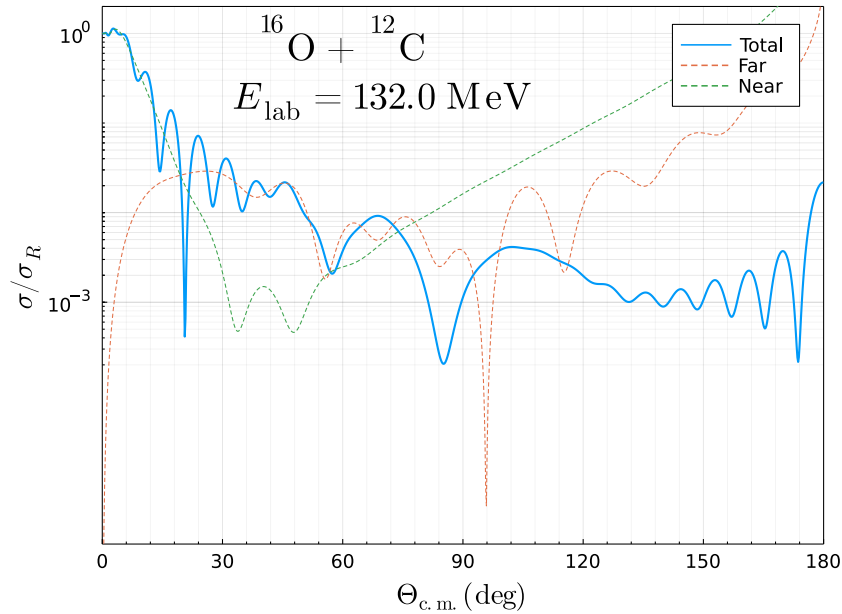


Figure 6: 将 132 MeV 下 $^{16}\text{O} + ^{12}\text{C}$ 系统的散射截面分解为近端部分与远端部分，两者叠加干涉产生艾里振荡图样。

与经典力学散射轨迹对应，我们希望将量子散射的图像也可可视化，类比地展示不同阶分波间的干涉图样，从而更直观地理解彩虹散射特征。由式 (26) 得到的散射波函数 ψ_N 展示了核势对库伦平面波额外造成的扭曲，图7便绘制了其振幅强度在空间分布的温

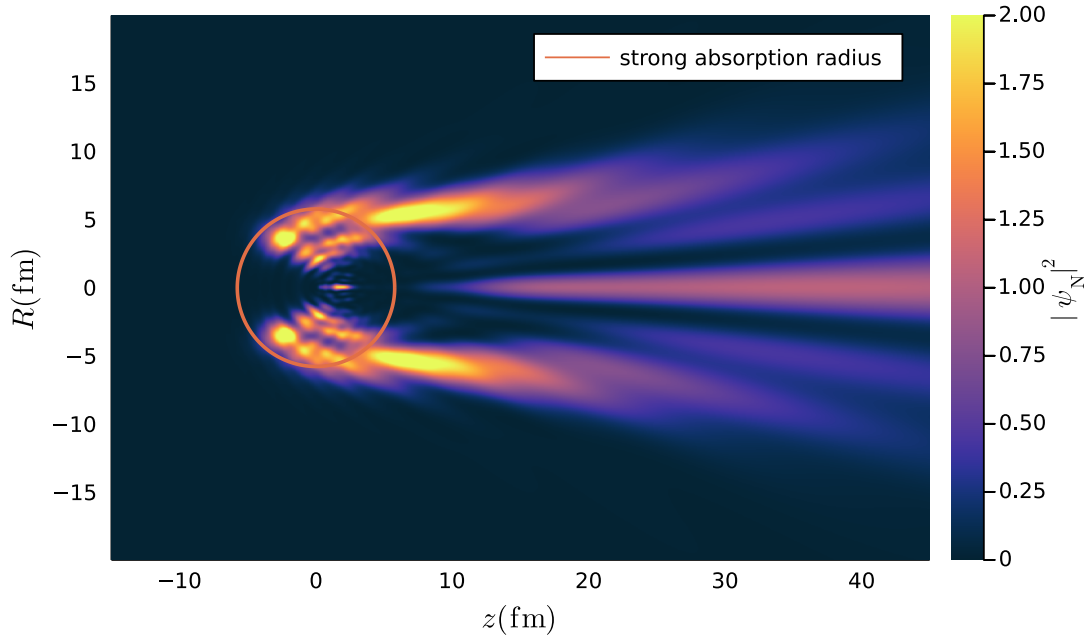


Figure 7: 核势影响的散射波函数 ψ_N 在沿入射 z 轴的二维截面上的可视化，颜色代表散射波的振幅强度 $|\psi_N|^2$ 。原点处为系统质心，圆圈为强吸收半径 $R_{1/2}$ 。

度图。并由库伦修正的强吸收半径 $R_{1/2}$ 公式 [12] 特别了标明核吸收范围，其中， L 的取值表明，散射矩阵元 \mathbf{S}_L 在这个位置出现了较为陡峭的变化。

$$R_{1/2} = \left\{ \eta + [\eta^2 + L(L+1)] \right\} / k, \quad \text{where } \text{Re}(\mathbf{S}_L) = 1/2 \quad (38)$$

由于光学势是唯像的，不能准确反映原子核内部核子间相互作用，故在强吸收半径内的散射波函数并不准确，其实际意义也不大，我们不再对这个部分分析讨论。但在强吸收半径附近仍有可能看出一些与共振态相关的特点，有待进一步讨论。

在 $R_{1/2}$ 外，出现了清晰的振幅强弱分布条纹，这与由散射截面得出的衍射图像一致。观察细节发现在靶核侧翼波函数振幅较大，但仅限于核附近的短程范围。在原子正后方存在一个安区，在实验可观测的远处则演化为散射截面最大的 0° 中心亮斑，这是因为核势作为吸引势，对入射波起到了汇聚作用，汇聚的平面波干涉形成了这一尾迹，但实验上这一尾迹被掩盖在小角度的非常大的库伦散射截面中了。在一些中性体系，例如 np 散射或冷原子散射中，这样的现象可能会更加明显。

3.2 核势散射及核虹现象分析

上一节我们可以发现库伦平面波本身的特性为分析核势特征及散射过程带了很大的不便，于是本节另外建立了不考虑库伦势（即 $\eta = 0$ ）的纯核势模型，来进一步研究核虹现象。

对于之前通用的散射模型，代入 $\eta = 0$ 的情况，可以得到库伦汉克尔函数：

$$H_l^\pm(0, \rho) = \rho \cdot [-y_l(\rho) \pm i j_l(\rho)] \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} e^{\pm i(\rho - l\pi/2)} \quad (39)$$

任意距离 r ，散射角 θ 处的“散射截面”为：

$$\sigma(r, \theta) = |r\psi_{sc}(r, \theta)|^2 = \left| r \sum_l (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) [u_l(kr)/kr - j_l(kr)] \right|^2 \quad (40)$$

这样的定义就会由近及远趋向于通常的散射截面定义。即最终无穷远处测得的散射截面为：

$$\sigma(\theta) = \left| \frac{1}{2ik} \sum_l [(2l+1) P_l(\cos \theta) (\mathbf{S}_l - 1)] \right|^2 \quad (41)$$

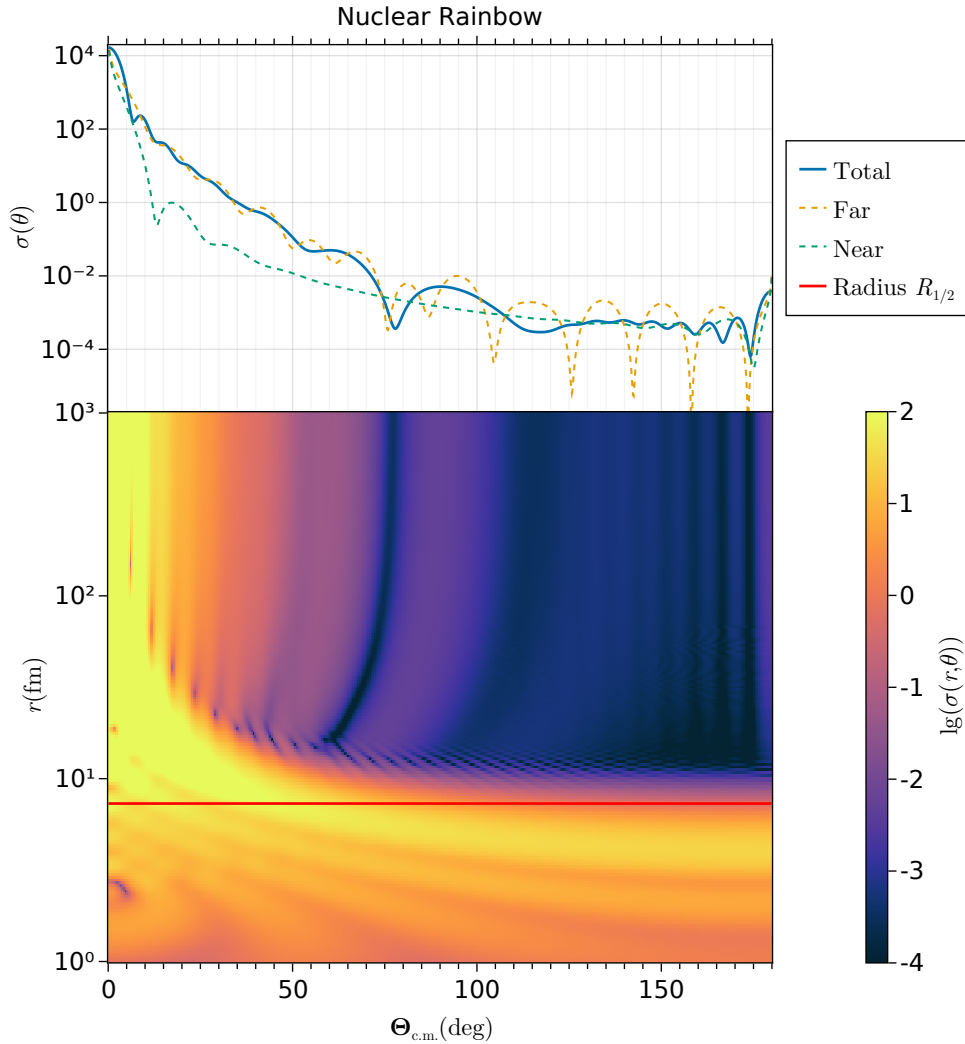


Figure 8: 132 MeV 下 $^{16}\text{O} + ^{12}\text{C}$ 系统的纯核势散射。上图为实验应测得的散射截面，下图为任意位置的“散射截面”随距离变化的温度图。

由式 (41) 计算得到 132 MeV 下 $^{16}\text{O} + ^{12}\text{C}$ 系统的纯核势散射的散射截面 $\sigma(\theta)$, 并仍使用 Fuller 的方法进行近远端分解。由图8上子图可以发现在吸引核势的作用下, $\Theta_{\text{c.m.}} \approx 78^\circ$ 处出现核虹。随着库伦位垒的缺失, 近端散射截面更为平滑, 总散射截面的干涉图样主要由远端贡献了。

再绘制由式 (40) 得到的“散射截面” $\sigma(r, \theta)$ 随距离 r 变化的温度图, 参见图8下子图。在强吸收半径 $R_{1/2}$ 处散射截面分布发生突变, 出现干涉条纹; 但之后图案仍在演化, 直至各阶分波趋向于渐进行为, 从而能用稳定的相移 δ_l 描述, 叠加呈现出与最终测得散射截面一致的艾里振荡图像。

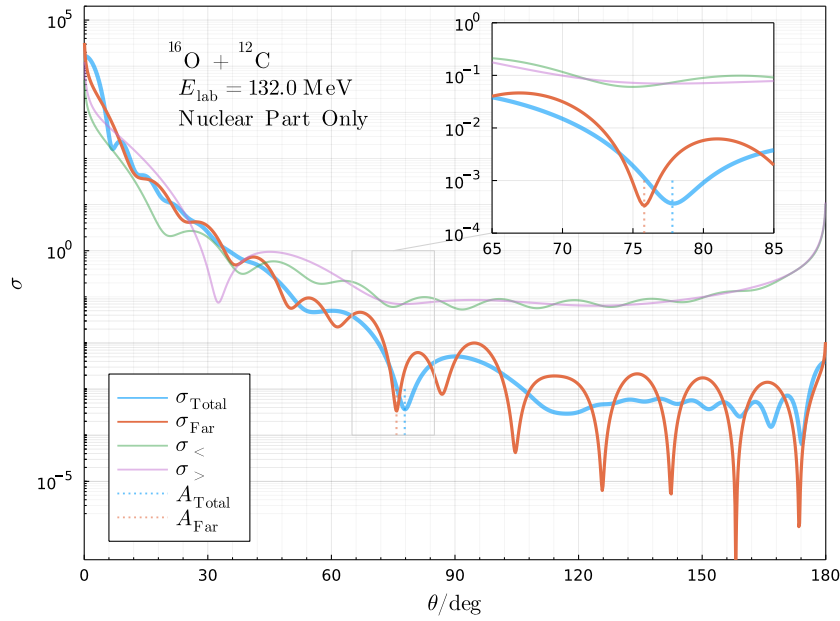


Figure 9: 将 132 MeV 下 $^{16}\text{O} + ^{12}\text{C}$ 纯核势散射的远端散射截面进一步分解为 $l_<$ 与 $l_>$ 两部分, 远端散射艾里斑位置 $\Theta_{\text{c.m.}} \approx 76^\circ$ 。

由于纯核势散射截面的振荡图像主要由远端贡献, 而远端散射的特征又来自 $l_>$ 与 $l_<$ 的叠加干涉, 于是我们根据偏转函数在半经典 WKB 近似中的表示 [2]:

$$\Theta(l) = 2 \frac{d\delta_l}{dl} \quad (42)$$

求得 $\Theta(l)$ 的极值 l_R , 进而将两侧的分波分别叠加得到 $l_>$ 与 $l_<$ 的散射截面, 参见图9。远端散射的情况可以类比大气彩虹, 因而出现了非常典型的艾里图样。其中 $l_<$ 由于离靶核更近受到核势影响更大而呈现更为复杂的散射截面, $l_>$ 则相对更平滑, 两者强度相当, 共同构成远端干涉的分布。当然, 此处值得补充说明的是这种半经典方法分解的适用条件: 尽管我们在分波法的计算中采取了定态散射的图样, 但是实际的中能入射粒子德布罗意波长要小于靶核尺度, 因此也可以视作定域性较强的波包, 这种图像和经典

径迹是非常相似的，由此，我们也得以用不同阶分波的角动量量子数来定义其“瞄准半径”。如果完全从定态散射的角度是很难讨论这个问题的。

由此我们也可以发现，在原子核散射中，艾里结构与核虹的形成是非常复杂的，很难直接预测其出现与位置，彩虹散射的半经典物理图像也只能辅助理解，最终结果仍然需要通过求解薛定谔方程得到。甚至连光学模型本身也是一种唯象的方法，原子核间多体相互作用的高度复杂性使得从第一性原理出发精确计算散射过程变得极其困难。但是，对彩虹散射唯象研究仍然是十分重要的，它有着非常直观的现象与结果，同时可以从其中提取丰富的光学势信息，为研究核结构提供了有效的帮助。

4 总结

本工作主要对核物理中的弹性散射问题进行了研究，并重点讨论一些情况下散射截面随着角度出现振荡的特殊现象-虹现象。我们分别从半经典模型和分波散射模型两个角度对问题进行了讨论，并主要基于后者进行一些定量计算。

我们学习了对核散射的唯象描述-光学势模型和量子力学的分波法，编写了通过分波法求解给定参数势散射问题散射振幅和波函数的程序，通过和现有程序 FRESCO 对比验证了程序的可用性，并对结果进行了可视化处理。

我们计算了两个实验数据可考证的具有虹现象的弹性散射模型，并重点分析了其中 132 MeV 下 $^{16}\text{O} + ^{12}\text{C}$ 的散射现象。发现在计算得到的散射截面中有明显的库伦虹和核虹现象。这些虹可以被理解为是散射振幅近远端分解得到的近端、远端振幅作为不同波源干涉而产生的。其中的库伦虹来自于近，远端振幅的干涉。而在后角区，库伦势的影响甚微，核势造成的远端振幅起主导作用。对应的核虹部分有两级明显的艾里斑，这些极小值又可以认为是由远端振幅中角动量较小的分波和角动量较大的分波干涉形成的。而角动量大小的区分界限可以由经典方法，即求解粒子径迹偏转角极值对应角动量，或者由半经典的 WKB 方法计算分波相移得到，从而建立了散射的波动过程与其对应经典径迹之间的联系。

我们注意到，势散射和光学的散射具有很强的类比性，势的深度可以类比介质折射率。而光学中对散射的多种近似理论，也对应了量子散射的不同尺度。从冷原子极低能散射到低能弹性散射直至中高能弹性散射，波长相比特征尺度越来越短，也正好对应了瑞利散射，米氏散射直至几何光学的过渡。尽管核散射的“虹”和光学中定义不尽相同，但是可以想见，由于核势与入射粒子能量相关，因此核散射也会存在随粒子能量的色散现象，而在干涉极值位置，色散也更为明显。

我们也尝试可视化了散射波函数从近场区到远场区的变化，发现在核势强吸收半径以外，散射波函数开始出现明显的干涉特征，并且随着半径变大，其幅值趋向于散射幅。在通常的核散射过程中，这部分近场的波函数的特征是不可测且不被关注的；但是近场光学却是十分活跃的前沿领域，这也使得我们联想，在核反应中的近场特征能引出怎样的问题。例如，晕核的部分核子分布弥散在在发生核反应的时候的一些不寻常特征，是否和散射的近场特性有所关联？通常的靶材原子间距远远大于散射发生的特征尺度，而在一些致密物质（例如白矮星）中存在大量较为稳定的原子核，而原子间距可以与核大小相比拟，此时散射过程的近场特征是否对物质的性质存在影响呢？这也是值得进一步讨论的方向。

References

- [1] J. Adam, *Physics Reports* **356**, 229 (2002).
- [2] D. T. Khoa, W. von Oertzen, H. G. Bohlen, and S. Ohkubo, **34**, R111 (2007).
- [3] D. A. Goldberg and S. M. Smith, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 500 (1972).
- [4] I. J. Thompson and F. M. Nunes, *Nuclear reactions for astrophysics: principles, calculation and applications of low-energy reactions* (Cambridge University Press, 2009).
- [5] B. H. Bransden and C. J. Joachain, *Physics of atoms and molecules*, 2nd ed (Prentice Hall, Harlow, England ; New York, 2003).
- [6] D. Brink, *Semi-classical methods for nucleus-nucleus scattering*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, 2009).
- [7] G. Satchler, *Nuclear Physics A* **409**, 3 (1983).
- [8] K. McVoy and M. Brandan, *Nuclear Physics A* **542**, 295 (1992).
- [9] R. C. Fuller, *Phys. Rev. C* **12**, 1561 (1975).
- [10] A. A. Ogloblin, *Physical Review, C (Nuclear Physics)* **62**, 10.1103/PhysRevC.62.044601 (2000).
- [11] L. Put and A. Paans, *Nuclear Physics A* **291**, 93 (1977).
- [12] C. J. Batty, E. Friedman, H. J. Gils, and H. Rebel, “Experimental methods for studying nuclear density distributions”, in *Advances in nuclear physics*, edited by J. W. Negele and E. Vogt (Springer US, Boston, MA, 1989), pp. 1–188.